

BENIAMINO SEGRE (*)

Un approccio al problema dei quattro colori

INDICE

§ I.	- INTRODUZIONE	Pag. 182
§ II.	- GRAFI SFERICI E LORO RIDUZIONE A GRAFI TRIANGOLARI. IL TEOREMA DEI CINQUE COLORI (nn. 1-5)	» 185
§ III.	- SPICOLI SEPARANTI RELATIVI AD UNA COLOREAZIONE DI UN GRAFO TRIANGOLARE, ED INSIEMI COLORIFICI (nn. 6-8)	» 192
§ IV.	- CARATTERI INERENTI AD UNA TRIANGOLAZIONE PARI, GRAFI PARI E LORO 3-COLOREAZIONE (nn. 9-14)	» 195
§ V.	- CARATTERI INERENTI AD UNA TRIANGOLAZIONE TERNARIA, GRAFI TERNARI E LORO COLOREAZIONE CANONICA (nn. 15-29)	» 205
§ VI.	- RIDUZIONE DI UN GRAFO SFERICO TRIANGOLARE A FORMA TERNARIA MEDIANTE TRIEZIONI, E SUFFICIENZA DELLE CONDIZIONI LOCALI PER UN INSIEME COLORIFICO DI SPICOLI (nn. 30-34)	» 220
§ VII.	- INTERPRETAZIONE DEL PROBLEMA DEI QUATTRO COLORI ENTRO UNA GEOMETRIA DI GALOIS, E NUMERO DELLE 4-COLOREAZIONI POSSIBILI (nn. 35-38)	» 226
§ VIII.	- ESEMPLI, ED ALTRE VIE DI ATTACCO PER IL PROBLEMA DEI QUATTRO COLORI (nn. 39-43)	» 233
	BIBLIOGRAFIA	» 239

SUMMARY. — A historical outline of the four colours problem is given here in the Introduction (§ I), where at the end the main features of the present paper are rapidly summed up.

(*) Accademico dei XL. — Lavoro presentato il 15 settembre 1975.

I. INTRODUZIONE

Un problema celeberrimo, che da oltre un secolo fronteggia i matematici, è quello detto dei quattro colori: esso risulta fra i più eludenti in quanto, dietro l'estrema semplicità della propria formulazione, cela difficoltà la cui natura intima rimane piuttosto oscura, difficoltà che a tutt'oggi sono state infatti soltanto in parte superate, nonostante gli attacchi di numerosi valenti studiosi. Un'idea sommaria al riguardo può aversi da uno sguardo alla Bibliografia posta alla fine della presente Memoria, a cui sono da aggiungere innumerevoli ricerche ulteriori, varie delle quali risultano dalle citazioni che appaiono nei lavori su quel tema ivi elencati: ma assai maggiore è indubbiamente il numero dei matematici che pur non avendo pubblicato nulla sull'argomento si sono interessati al problema (che il Lebesgue riteneva *trop difficile*), fra i quali è presumibile che ad esempio - oltre al Lebesgue - vi siano stati Moebius, Klein, Landau, Hamilton, Cayley, Smith Savilian, De la Vallée Poussin, Wiener. Appare quindi un po' strano che non vi sia quasi nessun contributo italiano in tale campo. E va aggiunto che quel problema è stato annunciato come risolto negativamente in un recente articolo scherzoso di M. Gardner [16], di cui ho però poi subito mostrato [36] l'erroneità del controesempio indicato.

È inoltre da rilevare che il valore dell'immense e multiforme sforzo compiuto per ottenere una risposta anche soltanto parziale va molto al di là dell'interesse intrinseco che questa viene ad offrire, sforzo che ha condotto a concetti e metodi basilari per la *teoria dei grafi*, che tante applicazioni ha già avuto e sempre più avrà in campi disparati, e sulla quale cfr. per esempio Ore [28] e Berge [1]. Notizie storiche particolareggiate sul problema dei quattro colori trovano anche in Brahana [5], Errera [13, 14], Winn [48], Tietze [41], Coxeter [8], May [27], Ore [29], Ringel [33, 34].

• • •

Il cosiddetto problema dei quattro colori, più che un problema, è oggi ancora una congettura e consiste nel decidere se quattro colori siano o no sempre bastevoli per colorare una carta geografica, ossia una suddivisione del piano o della sfera in regioni, con la condizione che a regioni adiacenti (aventi cioè un pezzo di frontiera in comune) vengano sempre attribuiti colori diversi.

Alcuni hanno sostenuto che il problema fosse noto ai cartografi medioevali, ma [27] non si conoscono documenti che comprovino tale asserzione. Sembra inoltre che esso sia stato menzionato per la prima volta dal Moebius in una conferenza tenuta nel 1840. Il documento più antico che lo riguarda è una lettera del 23 ottobre 1852, inviata da A. de Morgan a Sir William Rowan Hamilton, ov'è detto che quel problema era stato proposto allo scrivente da un suo studente, Frederick Guthrie, a cui era stato suggerito dal fratello Francis dopo che questi aveva collocato una carta dell'Inghilterra.

Il primo ad aver posto pubblicamente la questione, segnalandone in pari tempo la difficoltà, è stato Cayley [6, 7] nel 1878-79, il quale sulla dimostrazione relativa dichiarò che « I have failed to obtain a proof ». Poco appresso veniva una risposta affermativa dall'avvocato e matematico inglese Sir Alfred Kempe in un lavoro [24] (cfr. altresì [25]) su cui Story [38] fece subito qualche riserva, e che doveva tosto venire riscontrato errato da Heawood [17], anche se in esso appaiono nozioni dimostratesi utili a ricercatori successivi riguardanti insiem di regioni detti poi catene di Kempe, ed al quale si riatocca una ricerca di Tait [39] di notevole interesse sebbene essa pure conseguentemente manchevole.

L'analisi critica di Heawood, pur lasciando aperto il problema generale, dava ad esso contributi importanti col mostrare che la colorazione delle carte (piane o sferiche) può sempre venire effettuata con cinque colori e che, per quattro colori, ogni carta può venire « ridotta » in guisa che non più di tre regioni abbiano mai ad incontrarsi in un punto. Questo è stato il punto di avvio allo studio delle cosiddette configurazioni riducibili, a cui hanno specialmente contribuito Birkhoff [3] ed Errera [12], basandosi sul quale il teorema dei quattro colori è stato parzialmente stabilito da Franklin [15] nel 1922, Reynolds [31] nel 1927, Winn [47-49] nel 1940, Ore e Stempel [30] nel 1968, e precisamente per carte comprendenti rispettivamente meno di 25, 27, 35, 40 regioni⁽¹⁾. Si tratta di procedimenti faticosi e scarsamente estendibili a carte con un maggior numero di facce, talchè la speranza ottimistica iniziale di poter con essi giungere ad una completa risoluzione del problema (condivisa per esempio dall'Errera e dall'Ore) può oggi dirsi quasi del tutto tramontata.

* * *

In vista di tale scoraggiante situazione, si è da tempo tentato di risolvere analoghe questioni ponendosi in condizioni assai più generali, forse contando di poter poi fare rientrare in quelle il problema del quattro colori come caso speciale. Ma è curioso che, mentre alle prime — che potevano ritenersi più difficili — si siano potuto dare risposte circostanziate e talora esaurienti, ciò non abbia avuto fino ad oggi influenza alcuna su quest'ultimo problema, se non nel vieppiù accentuarne la singolare difficoltà.

Una prima estensione risiede nel riferirsi a carte geografiche tracciate su di una superficie chiusa S qualsiasi: si tratta allora di determinare il carattere cromatico χ della S , ossia il numero minimo dei colori con cui possa venir colorata una carta geografica qualsiasi tracciata su S . Se S è una sfera, una semplice osservazione risalente a Moebius mostra che è $\chi \geq 4$,

(¹) Tale limite è poi stato elevato a 52 durante la stampa del presente lavoro per merito di W. STRONGER, *The Four-Color Theorem for Small Maps*, « Journ. of Combinatorial Theory » (B), 19 (December 1975), 256-268.

ed il citato risultato di Heawood fornisce $\chi \leq 5$; si hanno dunque soltanto due possibili alternative: $\chi = 4$ o $\chi = 5$, talchè il problema dei quattro colori equivale ormai a stabilire quale fra esse di fatto sussista.

La superficie S , se non è omeomorfa ad una sfera, ha un genere $p > 0$ e può essere orientabile o non orientabile. Detto rispettivamente χ_p o χ'_p il relativo carattere cromatico, è stato dimostrato che è

$$\chi_p = \left[\frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \right] \quad \text{se } p \geq 1,$$

$$\chi'_p = \left[\frac{7 + \sqrt{1 + 24p}}{2} \right] \quad \text{se } p \neq 2, \quad \chi'_2 = 6,$$

onde il teorema dei quattro colori equivale a stabilire che la prima di queste formule vale anche per $p = 0$. I primi due casi del risultato enunciato, $\chi_1 = 7$, $\chi'_1 = 6$, assegnano il carattere cromatico del toro e del piano proiettivo, e risalgono a Heffter [22] ed a Tietze [40] che le ottennero rispettivamente nel 1891 e nel 1910; ma è soltanto nel 1967-68 che le formule suddette vennero dimostrate compiutamente da Ringel e Youngs, dopo che numerosi altri Autori (cfr. per esempio [11]) ne avevano trattati vari casi in cui l'intero p viene assoggettato ad opportune condizioni: e l'epico andamento di tali complesse ricerche può desumersi da una bella esposizione d'insieme fatta poi dallo stesso Ringel in un recente volume [34].

Un'altra via d'attacco attraverso ad una generalizzazione del problema è stata perseguita dal Birkhoff [2], e consiste nella determinazione del numero $P(\lambda)$ delle diverse colorazioni possibili di un grafo assegnato, quando si disponga di un certo numero λ di colori. Tale $P(\lambda)$ risulta un polinomio in λ a coefficienti interi, detto il *polinomio cromatico* del grafo; esso è naturalmente legato alla struttura topologica del grafo e può venire calcolato con procedimenti interessanti, ma piuttosto complicati e di non facile effettuazione pratica. Sull'argomento, che ha poi preso un ampio respiro, veggansi Birkhoff e Lewis [4], Whitney [45], Wagner [44], Read [32], Hoggar [23] e varie altre ricerche citate in tali lavori.

Il problema dei quattro colori equivale con ciò a decidere se, per ogni grafo ricoprente una sfera, l'intero $P(4)$ risulta positivo. La risposta a questa questione non è però ottenibile, neppure quando la si riferisca ad un singolo grafo, tranne che in casi assai semplici; essa rimane inabborabile quando la si richiegga per ognuno dei grafi tracciati su di una sfera, la totalità dei quali risulta poco maneggevole, non essendo neppure immediatamente distinguibile da quella dei grafi non immergibili in una superficie regolare, o che giacciono su di una superficie di genere positivo.

Altri suggestivi punti di vista formali, che per analoghe ragioni potranno però difficilmente venire utilizzati per risolvere il problema dei quattro colori, sono stati indicati da Wagner [44] e da Whitney [46].

Il risultato di Tait a cui già abbiamo alluso, porta all'equivalenza fra il problema dei quattro colori e quello di stabilire che ogni grafo cubico tracciato su di una sfera può venir decomposto nella somma di tre grafi lineari. Un'altra equivalenza è stata ottenuta da Heawood [18], col tradurre il problema della colorazione di una carta sferica in un sistema di equazioni lineari omogenee mod 3; e sistemi consimili in campi di Galois d'ordine 4, 5, 2 sono poi stati ottenuti rispettivamente da Veblen [43], De Backer [9] e Trevisan [42].

Il primo dei suddetti sistemi è particolarmente notevole e verrà ritrovato per tutt'altra via nell'attuale lavoro, assieme all'osservazione che due delle equazioni del sistema possono venire omesse ed alla precisazione di condizioni necessarie e sufficienti per i coefficienti, così da renderne attuabile uno studio con l'uso di un calcolatore elettronico.

Heawood ([19], [20]) aveva anche iniziato un'interessante analisi dei corrispondenti sistemi non omogenei, traendone una veduta probabilistica raggiunta poi anche in guise differenti da altri Autori, secondo la quale la speranza di poter costruire un controesempio al problema dei quattro colori è da ritenersi tenuissima.

* * *

La presente Memoria sviluppa una conferenza tenuta dall'Autore a Perugia il 16 settembre 1970, durante un *Convegno di geometria combinatoria e sue applicazioni*; un conciso sommario relativo ad essa è dato dall'Indice posto in principio.

Il problema dei quattro colori viene qui impostato nella sua forma duale (§ II), il che fornisce subito la possibilità di limitarsi a grafi sferici a facce triangolari assieme ad una dimostrazione del teorema dei cinque colori.

Fra i grafi suddetti hanno particolare importanza quelli qui denominati *pàri* o *ternari*, per i quali cioè il numero degli spigoli uscenti da un qualunque vertice risulta sempre rispettivamente multiplo di 2 o di 3. Essi sono sempre colorabili rispettivamente con tre o con quattro colori: proprietà, queste, che già trovansi enunciate ma non correttamente stabilite in Kempe [24], e che qui vengono dimostrate nei §§ IV, V mediante analisi che portano anche ad altre proprietà relative alle triangolazioni *pàri* o *ternarie* di un poligono.

Una 4-colorazione K di un grafo sferico triangolare G qualsiasi determina una partizione degli spigoli di G in due classi, ottenute dicendo che uno spigolo σ di G è *non separante* o *separante*, secondochè K attribuisce colori uguali o diversi ai due vertici opposti a σ nelle due facce triangolari di G che hanno σ al contorno. Tale partizione individua K univocamente, ed è soggetta a certe condizioni locali (relative cioè ai singoli vertici di G) specificate nel § III. La sufficienza di tali condizioni per l'esistenza di una 4-colorazione di G che induca negli spigoli di G una partizione assegnata, viene dimostrata nel § VI attraverso lo studio della possibilità di far diventare il grafo ternario col sottoporre a trisezione taluna della sue facce.

Ciò conduce ad una formulazione puramente algebrica del problema dei quattro colori (§ VII), che fornisce un'interpretazione di tale problema in una

geometria di Galois, assieme ad un nuovo modo formale per calcolare il numero delle diverse 4-colorazioni di un grafo assegnato. Alcuni semplici esempi sono poi ottenuti nel § VIII, fra cui va segnalata la costruzione di tutte le 4-colorazioni di un icosaedro regolare; e si conclude (nn. 42, 43) con l'indicare altre vie di attacco per il problema generale dei quattro colori, che parrebbero abbordabili almeno in svariati casi speciali.

II. GRAFI SFERICI E LORO RIDUZIONE A GRAFI TRIANGOLARI.
IL TEOREMA DEI CINQUE COLORI

1. Sia G un grafo sferico, ossia un grafo connesso privo di cappi, di ponti e di spigoli terminali - avente $v \geq 2$ vertici ed $s \geq 2$ spigoli - che possa venir tracciato su di una sfera S con la condizione che i suoi spigoli a due a due non si incontrino fuori dei vertici. G spezzerà allora la S in un certo numero $f \geq 2$ di porzioni poligonali - o facce - a due a due prive di punti interni comuni, e varrà la classica formula di Eulero:

$$(1) \quad v + f = s + 2.$$

In virtù di quanto ammesso per G , ogni spigolo di G ha per estremi due vertici di G che sono distinti e vengono detti fra loro *adiacenti* (secondo quello spigolo). Del pari, ogni spigolo è al contorno di due distinte facce di G fra loro *adiacenti* (lungo quello spigolo).

Inoltre, ogni vertice P di G è estremo di un certo numero

$$(2) \quad m = m(P) \geq 2$$

di spigoli di G , denominato il *grado* di P (in G); ed è chiaro che risulta

$$(3) \quad \sum_{m=2} m v_m = 2s,$$

ove si indichi con v_m il numero (≥ 0) dei vertici di grado m talchè

$$(4) \quad \sum_{m=2} v_m = v.$$

Parimente, ogni faccia x di G ha al contorno un certo numero

$$(5) \quad n = n(x) \geq 2$$

di spigoli di G , denominato il *grado* di x ; e, detto f_n il numero (≥ 0) delle facce di grado n , valgono le:

$$(6) \quad \sum_{n=2} f_n = f,$$

$$(7) \quad \sum_{n=2} n f_n = 2s.$$

È poi facile vedere che il *duale* di G è ancora un grafo sferico, i cui caratteri sono legati a quelli di G mediante lo scambio delle v ed f , P ed x , (2) e (5).

2. Il famoso *problema dei quattro colori* consiste (§ I) nello stabilire se, per qualunque grafo sferico, quattro colori siano sufficienti per colorarne le facce in guisa che facce adiacenti non abbiano mai un medesimo colore. Tale problema è equivalente al suo duale, che da esso si ottiene considerando i vertici invece delle facce, e rientra quindi nel seguente:

Assegnato un qualsiasi grafo sferico G , determinarne il *numero cromatico* $\nu = \nu(G)$, ossia il minimo intero tale che si possa scegliere per ciascun vertice di G uno fra ν colori, in guisa che a vertici adiacenti non venga mai attribuito un medesimo colore.

Dopo di aver rilevato che vi sono manifestamente grafi G per cui $\nu(G)$ vale 2, 3 o 4, la risoluzione del problema dei quattro colori consiste nello stabilire se è vero o meno che per ogni G risulta $\nu(G) \leq 4$. Nel n. 5 dimostreremo il noto (§ I):

TEOREMA DEI CINQUE COLORI. *Ogni grafo sferico G ha il numero cromatico $\nu(G) \leq 5$ ⁽¹⁾.*

Incominciamo coll'osservare che, se G è un sottografo di un grafo sferico G' , ogni colorazione dei vertici di G' tale che vertici adiacenti non vengano mai ad avere un medesimo colore - ristretta a G - fornisce una colorazione dei vertici di G che soddisfa ancora in G alla condizione indicata. Pertanto:

da $G \subseteq G'$ segue che è $\nu(G) \leq \nu(G')$.

D'altro canto, chiamando per brevità *triangolare* un grafo sferico ogni faccia del quale sia triangolare e cioè abbia grado 3, è chiaro che ogni grafo sferico è sottografo di un grafo triangolare - ossia a facce triangolari - ottenibile dal primo (in modi diversi) decomponendone ogni faccia in triangoli. Ne discende che

Il teorema dei cinque colori rimarrà compiutamente provato quando lo si stabilisca per i grafi triangolari.

Un'osservazione analoga vale pure naturalmente per il problema dei quattro colori. Da qui l'importanza dello studio dei grafi triangolari, al quale in seguito sempre ci limiteremo. Poiché una faccia triangolare ha al contorno tre lati, e quindi tre vertici (distinti) a due a due adiacenti, ne discende intanto subito che

Ogni grafo G triangolare ha il numero cromatico $\nu(G) \geq 3$.

3. Su di una sfera S si consideri un n -latero $A_1 A_2 \dots A_n$ semplice e non intrecciato, con $n \geq 2$; in base al teorema di Jordan, si ha che questo divide S in due celle n -gonali α, α' - fra loro complementari - tali che un punto interno ad α ed un punto interno ad α' non possono venir congiunti da un arco tracciato su S privo di punti a comune col suddetto n -latero. Nel caso in cui α' sia

(1) Nella forma duale, questo teorema - come già detto nell'Introduzione - è stato ottenuto da Heawood [17]; cfr. altresì Ore [28]. Una diversa dimostrazione trovasi in Dirac [10], n. 2, ove vien pure fatto ricorso al grafo duale. L'utilizzazione di quest'ultimo in problemi di colorazione appare già in vari altri Autori: ved. in specie Wagner [44].

una delle facce di un grafo sferico G tracciato su S , la proiezione stereografica di G da un punto O interno ad α' su di un piano muta G su questo in un grafo planare, G' , avente l'immagine di α' quale faccia infinita; ed è ovvio come da G' si risalga reciprocamente a G coll'operazione inversa.

Quando ciascuna delle facce di G risulti triangolare ad eccezione al più di α' , si dirà che G costituisce una *triangolazione* dell' n -gono α . In tal caso, quest'ultima definisce univocamente un *grafo triangolare* (nel senso del n. 2), ottenibile da G con l'aggiunta del vertice O e di n spigoli OA_1, OA_2, \dots, OA_n tracciati su α' (il che implica che nel grafo planare G' la faccia infinita venga sostituita da n -facce triangolari).

Se ora designamo con G un qualunque grafo triangolare, consideriamo un qualsiasi vertice P di G di cui m (≥ 2) denoti il grado, il che val quanto dire (n. 1) che G contiene esattamente m spigoli uscenti da P . A meno di una sostituzione circolare (diretta od inversa), questi spigoli possono venire in un solo modo indicati con

$$(8) \quad PQ_1, PQ_2, \dots, PQ_m,$$

ove — come è lecito — si esiga che

$$(9) \quad Q_1PQ_2, Q_2PQ_3, \dots, Q_mPQ_1,$$

siano le m facce (triangolari) di G uscenti da P con la condizione ch'esse vengano a succedersi circolarmente per incidenza lungo gli spigoli comuni. L'ordine circolare risulta in tal guisa trasmesso agli m punti

$$(10) \quad Q_1, Q_2, \dots, Q_m,$$

che sono tutti e soli i vertici di G adiacenti a P . Va però rilevato che, mentre due circolarmente consecutivi fra i vertici (10) risultano necessariamente distinti, in quanto ciascuno dei triangoli (9) è per ipotesi privo di cappi al contorno, non è detto che — se $m > 3$ — gli m punti (10) abbiano sempre ad essere distinti.

Avuto riguardo al richiamato teorema di Jordan si ha inoltre che, se due coppie di punti (10) consistono ciascuna di punti coincidenti, tali coppie non possono fra loro separarsi nell'ordine circolare (10). Ne discende che:

Se $m = 4$ od $m = 5$, fra i punti (10) si può avere al più una coincidenza.

4. Denotiamo ancora con G un grafo sferico, per il quale conserviamo le notazioni del n. 1. Se supponiamo che G sia triangolare, ciò equivale a dire che G ha i caratteri

$$f_n = 0 \quad \text{per } n \neq 3,$$

ossia che nella (6) risulta

$$f_2 = f.$$

Allora la (7) — avuto riguardo alla (6) — si riduce alla

$$(11) \quad 3f = 2x,$$

sicchè attualmente occorre che f sia pari ed s multiplo di 3. Infine, eliminando v_1, f, s fra le (1), (3), (4), (11), otteniamo l'importante relazione (ben nota sotto la forma duale, cfr. per esempio [28], 9.1):

$$(12) \quad 4v_2 + 3v_3 + 2v_4 + v_5 = 12 + \sum_{m=6}^{\infty} (m-6)v_m.$$

Da qui si traggono subito alcune conseguenze semplici ma notevoli. Anzitutto, poichè il secondo membro della (12) è ovviamente positivo, lo stesso dev'essere del primo membro, eppertanto:

1) Ogni grafo triangolare possiede qualche vertice avente uno dei gradi 2, 3, 4, 5.

Basta poi ridurre rispettivamente mod 2 o mod 3 ambo i membri della (12), per ottenere le seguenti proposizioni.

2) In un qualunque grafo triangolare, il numero dei vertici di grado dispari risulta pari.

3) In un qualunque grafo triangolare, il numero dei vertici il cui grado è $\equiv 1 \pmod{3}$ risulta congruo mod 3 al numero dei vertici il cui grado è $\equiv -1 \pmod{3}$.

Un grafo triangolare verrà detto *pari*, se ogni suo vertice ha grado pari:

$$(13) \quad m = 2i;$$

in altri termini se, relativamente ad esso, risulta $v_m = 0$ per ogni m che non sia del tipo (13). In tal caso, dividendo per 2 ambo i membri della (12), si ottiene che:

4) Per ogni grafo triangolare che sia pari, risulta

$$2v_2 + v_4 = 6 + \sum_{i=4}^{\infty} (i-3)v_{2i}.$$

Un grafo sferico triangolare verrà invece detto *ternario*, se il grado m di un qualsiasi suo vertice è un multiplo di 3:

$$(14) \quad m = 3j;$$

in altri termini se, relativamente ad esso, risulta $v_m = 0$ per ogni m che non sia del tipo (14). In tal caso, dividendo per 3 i due membri della (12), si ottiene che:

5) Per ogni grafo sferico triangolare che sia ternario, risulta

$$v_3 = 4 + \sum_{j=4}^{\infty} (j-2)v_{3j},$$

eppertanto $v_3 \geq 4$.

Consideriamo da ultimo, sul piano o sulla sfera, un n -gono semplice non intrecciato $A_1 A_2 \dots A_n$ ed una sua qualsiasi triangolazione (nel senso del n. 3). Diremo che questa è *pari* o *ternaria* per esprimere che risulta rispettivamente

multiplo di 2 o di 3 il grado di ogni vertice interno. Denoteremo inoltre con a_k il numero degli spigoli della triangolazione uscenti da A_k ed interni all' n -gono, e porremo

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Basta ora applicare la (12) al grafo triangolare associato — giusta il n. 3 — alla suddetta triangolazione, e ridurre poi ambo i membri rispettivamente mod 2 o mod 3, per ottenere i seguenti risultati.

6) *Il carattere a dianzi definito per una qualsiasi triangolazione di un n -gono ha sempre la stessa parità del numero dei vertici della triangolazione interni all' n -gono ed aventi grado dispari. Dunque in particolare, a risulta pari se la triangolazione è pari.*

7) *Per una qualsiasi triangolazione di un n -gono, il carattere $a + n$ risulta congruo mod 3 alla differenza fra il numero dei vertici della triangolazione interni all' n -gono aventi grado $\equiv -1 \pmod{3}$ e quello dei vertici interni aventi grado $\equiv 1 \pmod{3}$. Dunque, in particolare, se la triangolazione è ternaria risulta necessariamente $a \equiv -n \pmod{3}$.*

5. Possiamo ora agevolmente provare il teorema dei cinque colori, enunciato nel n. 2. In base ad un'osservazione dello stesso n. 2, all'uopo basterà dimostrare quel teorema per un grafo G tracciato su di una sfera S e che sia triangolare. Poiché il teorema risulta manifestamente banale se il numero e dei vertici di G non supera quello dei colori disponibili, così sarà lecito supporre

$$(15) \quad e \geq 6$$

e si potrà dimostrare il teorema induttivamente rispetto a e , supponendolo già stabilito per ogni grafo sferico triangolare G' per il quale il numero e' dei vertici soddisfi alla

$$(16) \quad e' < e.$$

A tal fine, scegliamo un vertice P di G il cui grado m abbia uno dei valori

$$(17) \quad m = 2, 3, 4, 5;$$

l'esistenza di un P siffatto viene assicurata dal n. 4, 1) e, relativamente ad esso, adottiamo le notazioni del n. 3. Consideriamo poi il grafo G^* che si ottiene da G sopprimendo il vertice P , gli m spigoli (8), e le m facce (9). Il grafo G^* non è sferico, in quanto esso non invade la porzione S^* connessa della sfera S ricoperta dalle facce (9). Tuttavia, da G^* potremo dedurre come vedremo un grafo G' mediante un'eventuale identificazione di vertici o spigoli di G situati sul contorno di S^* , effettuabile con una variazione continua entro S^* (in guisa quindi da non incontrare gli spigoli di G situati in $S-S^*$ e di permettere la variazione continua di quelli fra questi uscenti da un punto Q che si sposta) in modo da ridurre S^* ad uno o più vertici e spigoli ed eventualmente ad un triangolo che poi va aggregato come faccia al grafo limite di G^* onde ottenere G' .

Con ciò G' risulta un grafo sferico triangolare, che per costruzione soddisfa alla (16) ed i cui vertici possono quindi venir colorati con non più di cinque colori, soddisfacendo alla condizione che vertici adiacenti risultino di colori diversi. La stessa conclusione si trasporta a G attribuendo a ciascun vertice di G distinto da P lo stesso colore del vertice di G' a cui esso si riduce colla suddetta variazione continua, e dando poi a P un colore diverso da quello così assegnato ai punti Q . Basta invero rilevare che:

- a) due punti Q fra loro identificati in G' non risultano adiacenti in G ;
- b) il numero dei colori distinti che in tal guisa rimangono attribuiti ai punti Q non risulta superiore a quattro.

Stabiliremo queste due proprietà esaminando separatamente i quattro casi (17).

1) Se $m = 2$, i due punti Q_1, Q_2 sono distinti e lo stesso può dirsi dei lati Q_1Q_2 e Q_2Q_1 dei due triangoli (9): invero, altrimenti, questi due triangoli ricoprirebbero già da soli la sfera S , onde sarebbe $r = 3$ in contrasto colla (15). Dunque attualmente S^* è un biangolo contornato dai due lati suddetti, i quali possono venire fra loro identificati mediante una variazione continua entro S^* lasciando fissi i punti Q . In questo caso, a) e b) risultano banali.

2) Se $m = 3$, i punti Q_1, Q_2, Q_3 sono distinti; lo stesso può dirsi degli spigoli dei triangoli (9) che a due a due li congiungono poichè, altrimenti, G verrebbe ad avere un coppia uscente da un punto Q . Dunque, attualmente, S^* è un triangolo contornato da quei tre spigoli, il quale va aggregato come faccia a G^* onde ottenere G' . Anche ora, a) e b) risultano banali.

3) Se $m = 4$, S^* risulta un quadrangolo contornato dagli spigoli $Q_1Q_2, Q_2Q_3, Q_3Q_4, Q_4Q_1$ dei triangoli (9). In base al n. 3, almeno una coppia di vertici opposti di detto quadrangolo consta di vertici distinti e non adiacenti, e tali siano per fissare le idee Q_1 e Q_3 . Si otterrà allora G' da G^* tenendo fissi gli altri due vertici Q_2, Q_4 (eventualmente coincidenti), ed identificando fra loro i vertici Q_1 e Q_3 e gli spigoli Q_1Q_2 e Q_3Q_2, Q_3Q_4 e Q_1Q_4 ; e ciò può farsi con una variazione continua entro S^* , che riduce S^* ai soli vertici e spigoli che così si ottengono al limite dai suddetti. Attualmente, la a) è soddisfatta per costruzione e la b) risulta evidente.

4) Se $m = 5$, in base al n. 3 esiste in G almeno una coppia di vertici Q fra loro distinti e non adiacenti; e non è restrittivo supporre che tale sia la coppia (Q_1, Q_4) e che fra i punti Q si abbia al più un'eventuale coincidenza, data da quella di Q_2 con Q_3 o di Q_2 con Q_5 . Se ora teniamo fissi i punti Q_2, Q_4, Q_5 , possiamo ottenere G' da G^* identificando Q_1 e Q_4, Q_1Q_2 e Q_4Q_2 con una variazione continua entro S^* che porti i vertici Q_1 e Q_4 a coincidere in un punto Q^* , gli spigoli Q_1Q_2 e Q_4Q_2 a coincidere in un arco Q^*Q_2 , e che riduca S^* a tali elementi limiti e ad un triangolo $Q^*Q_1Q_5$. Basta quindi aggregare questo triangolo come faccia al limite di G^* , per ottenere G' ; ed anche ora, la a) vale per costruzione e la b) è manifesta.

Il teorema dei cinque colori è con ciò compiutamente dimostrato. Va rilevato che analoghe argomentazioni continuano ad essere parzialmente valide per il problema dei quattro colori, con la sostituzione di tre colori a quattro nella proprietà b); quest'ultima, tuttavia, potrebbe così venir a cadere in difetto nel caso 4), il che lascia aperto questo problema costituendone la difficoltà essenziale.

III. SPIGOLI SEPARANTI RELATIVI AD UNA COLORAZIONE DI UN GRAFO TRIANGOLARE, ED INSIEMI COLORIFICI

6. Se G denota un qualsiasi grafo sferico triangolare, in conformità col n. 2 chiameremo v -colorazione di G ogni attribuzione a ciascun vertice di G di uno tra v colori, soddisfacente alla condizione che a vertici adiacenti non venga mai associato un medesimo colore. Una tale colorazione determina la distribuzione degli spigoli di G in due insiemi disgiunti fra loro complementari, uno dei quali può risultare vuoto, quando si proceda nel modo seguente.

Si dirà che uno spigolo σ di G è *non separante* o *separante* rispetto a quella colorazione, secondochè in essa viene attribuito uno stesso colore o colori diversi ai vertici opposti a σ nelle due facce di G che hanno σ al contorno. Chiameremo *insieme separante* di una v -colorazione di G l'insieme degli spigoli di G che sono separanti rispetto ad essa. Diremo infine che un insieme di spigoli di G è *colorifico* per G , onde esprimere la proprietà ch'esso risulta l'insieme separante di una v -colorazione di G per la quale si abbia $v = 3$ o $v = 4$.

Usufruyendo di questa terminologia, si dimostrano subito le seguenti proprietà.

1. *Un insieme colorifico di spigoli di un grafo triangolare G definisce in modo univoco la corrispondente v -colorazione di G , con $v = 3$ o 4 , a meno di una permutazione dei nomi con cui i v colori vengono designati.*
2. *Il problema dei quattro colori equivale a dimostrare l'esistenza di qualche insieme colorifico di spigoli per ogni grafo sferico triangolare.*
3. *Un grafo sferico triangolare ammette una (ed allora essenzialmente una sola) 3-colorazione, se e soltanto se l'insieme vuoto dei suoi spigoli risulta colorifico.*

Nel seguente n. 7 dimostreremo che, affinché un insieme di spigoli di G risulti colorifico, è necessario che l'insieme soddisfi a certe condizioni locali nei singoli vertici di G . Stabiliremo poi (nel n. 33) che, nel loro complesso, tali condizioni risultano pure sufficienti.

7. Per quanto osservato nel n. 6 si ha che una v -colorazione di un grafo sferico triangolare G induce una bicolorazione dei suoi spigoli, ottenuta attribuendo ad uno spigolo di G il « colore » s od il « colore » r secondochè lo spigolo è o non è separante rispetto alla prima. Scelto allora un qualsiasi

vertice P di G, per il quale conserviamo le notazioni del n. 3, ad esso rimane attaccata una parola

$$(18) \quad \gamma = c_1 c_2 \cdots c_m$$

di m lettere c (dove m denota il grado di P), date ordinatamente dal colore r o s in detta bicolorazione degli m spigoli (8) di G che escono da P; tali lettere — come gli spigoli (8) — sono però determinate da P soltanto a meno di una sostituzione circolare, diretta od inversa.

Supposto ora $v=4$ (ciò che include il caso $v=3$, potendo uno dei quattro colori non venire utilizzato), denotiamo per concretezza con 0, 1, 2, 3 i quattro colori della v -colorazione inizialmente assegnata; ed osserviamo che la parola (18) viene ad essere soggetta di necessità ad alcune condizioni, anche a prescindere dalla possibilità che vi siano coincidenze fra i vertici Q_1, Q_2, \dots, Q_m di G adiacenti a P, soddisfatte le quali le colorazioni di questi vertici rimangono definite in modo essenzialmente univoco compatibilmente con la (18).

Ed inverso, supposto dapprima $m \geq 4$ ed attribuite ai vertici P, Q_1, Q_2 del primo dei triangoli (9) ordinatamente i colori 0, 1, 2, la conoscenza di c_2 definisce il colore di Q_3 (che dev'essere 1 o 3 secondochè $c_2 = r$ o $c_2 = s$); similmente, la conoscenza di c_3 definisce il colore di Q_4 ; e così via, fino ad arrivare ai colori di Q_{m-1} e di Q_m successivamente definiti da c_{m-2} e c_{m-1} ; ma allora la considerazione delle coppie di facce adiacenti $Q_{m-1}PQ_m, Q_mPQ_1$ e Q_mPQ_1, Q_1PQ_2 implica una perfetta determinazione delle lettere c_m e c_1 finora non prese in considerazione. Una parola (18) che soddisfi alle condizioni così specificate, le quali permettono dunque di determinare i colori c_1 e c_m non appena si conoscano c_2, c_3, \dots, c_{m-1} , verrà brevemente detta una parola lecita.

Questa terminologia si estende in modo ovvio ai due casi esclusi $m=2, m=3$, per ciascuno dei quali si vede subito che esiste una sola parola lecita, costituita rispettivamente dalle

$$\gamma = rr = r^2, \quad \gamma = ss = s^2.$$

Per uniformità (e senza più riferirsi a G) possiamo nella (18) attribuire ad m anche il valore 1 o 0. Nel primo caso si hanno in tutto soltanto due distinte parole, e precisamente le $\gamma = r$ e $\gamma = s$, nessuna delle quali va ritenuta lecita. Per $m=0$ γ riducesi all'insieme vuoto, che sarà da ritenersi una parola lecita e che verrà senza ambiguità designato col simbolo 1.

Poggiando sulle precedenti convenzioni, si vede facilmente che:

Se tre parole $\gamma, \gamma', \gamma''$ formate colle lettere r, s sono legate (con chiaro significato dei simboli) dalla

$$\gamma = \gamma' \gamma'',$$

le tre condizioni ch'esse siano lecite risultano tali che due qualunque di esse implicano la terza. Le parole lecite costituiscono dunque un gruppoide associativo e moltiplicativo, dotato di unità.

Consideriamo ora un qualunque sottinsieme σ dell'insieme totale τ degli spigoli di un grafo G triangolare. Esso induce in τ una bicolorazione, che si ottiene attaccando ad ogni elemento di τ la lettera s o la lettera r secondo che tale elemento appartiene o non appartiene a σ ; ciò verrà anche espresso talora col dire che quell'elemento di τ (e cioè quello spigolo di G) è rispettivamente di tipo s o di tipo r . Come dianzi indicato, rimane conseguentemente associato ad ogni vertice P di G una parola (18) — e con la terminologia del n. 6 — si ha che:

Affinchè l'insieme σ sia colorifico per G , è necessario che ciascuna delle parole definite da σ nei singoli vertici P di G risulti lecita.

8. Aggiungeremo alle precedenti considerazioni alcune proprietà complementari, relative alle parole lecite ed a certi insiemi colorifici. Anzitutto, dal n. 7 si ha subito che:

1) *Se una parola (18) di $m \geq 0$ lettere è lecita, lo stesso può dirsi delle parole che da essa si deducono sottoponendone le lettere ad una qualsiasi permutazione circolare diretta od inversa.*

Consideriamo poi il gruppo moltiplicativo infinito, Γ , determinato dai generatori liberi r, s , ossia quello costituito dalle espressioni

$$(19) \quad \delta = d_1 d_2 \cdots d_n$$

in cui per $n = 0$ va posto $\delta = 1$, mentre per $n > 0$ le d vanno liberamente scelte fra le lettere r, s oppure fra le r^{-1}, s^{-1} , ad esse legate dalle relazioni banali

$$(20) \quad rr^{-1} = r^{-1}r = 1, \quad ss^{-1} = s^{-1}s = 1,$$

con la convenzione di assumere per ogni δ :

$$1\delta = \delta 1 = \delta, \quad \delta^{-1} = d_n^{-1} d_{n-1}^{-1} \cdots d_2^{-1} d_1^{-1}$$

[e quindi $(r^{-1})^{-1} = r, (s^{-1})^{-1} = s$]. Fra gli elementi (19) del gruppo suddetto stabiliamo una relazione \sim di equivalenza, assumendo che due di quelli siano da ritenersi equivalenti quando si possa passare dall'uno all'altro utilizzando un numero finito di volte le relazioni banali (20) e le

$$(21) \quad r^2 \sim 1, \quad s^2 \sim 1, \quad (rs)^2 \sim 1, \quad (rs^{-1})^2 \sim 1$$

(dove $r^2 = rr, s^2 = ss, ecc.$).

Le prime due relazioni (21) mostrano che così risulta:

$$r^{-1} \sim r, \quad s^{-1} \sim s^2.$$

Ne discende che ciascuna delle espressioni (19) è equivalente ad una parola (18) (in cui compaiono soltanto le r, s , e non le r^{-1}, s^{-1}). È inoltre subito visto che

ognuna delle parole che si ottengono dal primo membro di una delle (21) sottoponendone le (2, 3, 4 o 6) lettere ad una permutazione circolare diretta od inversa risulta ad essa equivalente. Utilizzando le (21) e ciò che precede, è infine facile assodare che ogni elemento (19) risulta equivalente ad uno dei seguenti sei:

$$(22) \quad 1, r, s, r^2, rs, sr,$$

i quali sono invece fra loro a due a due non equivalenti. Se ne trae che:

Entro il gruppo Γ , la suddetta equivalenza ammette sei classi, che sono gli elementi del gruppo definito dai generatori r, s e dalle relazioni (21). Tale gruppo è isomorfo a quello della doppia piramide triangolare.

Se ora si osserva che nessuna delle parole (22) tranne la prima - od in pari tempo ovviamente ciascuna di quelle date dai primi membri delle (21) - risulta lecita (nel senso precisato al n. 6), si ottiene che:

2) *Una parola (18) è lecita se, e soltanto se, quale elemento di Γ essa soddisfa alla*

$$\gamma \sim 1.$$

Poichè in ognuna delle (21) la lettera r compare 0 o 2 volte, ne discende che:

3) *In ogni parola lecita, la lettera r deve comparire un numero pari di volte.*

Da qui, in particolare, si ha che $r^m \sim 1$ implica che debba essere $m = 0$ (mod 2), il che segue anche subito dalla prima delle (21) e da ciò che si è dianzi osservato sulle (22). In virtù dei nn. 5, 6, 7, si ha pertanto che:

4) *Affinchè per un grafo G triangolare l'insieme vuoto dei suoi spigoli risulti colorifico, e cioè G ammetta una 3-colorazione, è necessario che il grafo G sia pari.*

Stabiliremo poi (nel n. 12) la sufficienza di questa condizione.

In base alla seconda delle (21) ed a ciò che si è dianzi osservato sulle (22), si ha che $r^m \sim 1$ implica che debba essere $m = 0$ (mod 3). Pertanto, in virtù dei nn. 5, 7, si ha che:

5) *Affinchè per un grafo G triangolare l'insieme di tutti i suoi spigoli risulti colorifico, è necessario che il grafo G sia ternario.*

Stabiliremo poi (nei nn. 19 e seg.) la sufficienza di questa condizione.

6) Con la nozione di equivalenza dianzi introdotta in Γ , si ha che - se c_1 e c_2 denotano due comunque scelte delle lettere r, s - risulta:

$$c_1 c_2 \sim c_1,$$

dove $c = r$ se $c_1 = c_2$ e $c = s$ se $c_1 \neq c_2$. In particolare, se c è una qualunque delle lettere r, s e si pone

$$c r s \sim c^*$$

risulta sempre $c^* \neq c$, ossia $c^* = r$ se $c = s$ e $c^* = s$ se $c = r$. Con questo significato per l'asterisco [talchè $(c^*)^2 = c$], si verifica poi subito che - per ogni scelta

delle c_1, c_2 - valgono le

$$(23) \quad c_1 c_2 \sim c_1^2 c_2^2, \quad c_1 c_2 \sim c_1^2 c_2^2.$$

IV. - CARATTERI INERENTI AD UNA TRIANGOLAZIONE PARI.
GRAFI PARI E LORO 3-COLORAZIONE

9. Richiamandoci al n. 4, 6), consideriamo un triangolo $A_1 A_2 A_3$ ed una qualunque sua triangolazione T , che supponiamo *pari* e di cui denotiamo con v il numero complessivo dei vertici e con a_1, a_2, a_3 i *caratteri* (ivi introdotti) relativi ai vertici A_1, A_2, A_3 del triangolo: per esempio, a_1 indicherà il numero degli spigoli di T che escono da A_1 e sono interni al triangolo. Ci proponiamo di dimostrare il seguente teorema.

Nelle suddette ipotesi, ciascuno dei numeri a_1, a_2, a_3 dev'essere pari.

Ciò è banale se v assume il suo valore minimo $v = 3$, poichè allora T si riduce al solo triangolo $A_1 A_2 A_3$ e si ha quindi $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Potremo dunque supporre $v > 3$, e procedere induttivamente rispetto a v ammettendo per assurdo che almeno una delle a risulti dispari [nel qual caso, in base al n. 4, 6), esattamente due di esse lo sono].

Aggregando a T una nuova faccia triangolare i cui vertici e spigoli si identifichino con quelli del triangolo $A_1 A_2 A_3$, otteniamo un grafo sferico triangolare, G , avente gli stessi vertici e gli stessi spigoli di T . In un vertice interno al triangolo iniziale $A_1 A_2 A_3$ il grado di G risulta lo stesso di quello di T , ed è quindi *pari* per ipotesi. I gradi m_1, m_2, m_3 di G in A_1, A_2, A_3 valgono rispettivamente:

$$m_1 = a_1 + 2, \quad m_2 = a_2 + 2, \quad m_3 = a_3 + 2,$$

sicchè di essi - per l'ipotesi ammessa - almeno uno (ed anzi due) risulta(n) *dispari*. Avuto riguardo alla (12) del n. 4, si ha pertanto che almeno una di queste m assume il valore 3 o 5; non è quindi restrittivo supporre che ad esempio sia $a_2 = 1$ oppure $a_1 = 3$, per poi esaminare successivamente queste due eventualità.

Se $a_1 = 1$, la triangolazione T ha un solo spigolo, diciamolo $A_1 A_1'$, interno al triangolo $A_1 A_2 A_3$ ed uscente da A_1 . Se ora da T sopprimiamo le due facce $A_1 A_1' A_2$ ed $A_1 A_1' A_3$ fra loro adiacenti lungo quello spigolo, otteniamo una triangolazione T' del triangolo $A_1 A_2 A_3$ che possiede $v' = v - 1$ vertici, è ancora pari ed ammette nel vertice A_1 di quel triangolo un carattere a_1' dispari. Ma ciò contraddice l'ammessa induzione, il che dimostra il teorema nell'attuale eventualità.

Nel caso restante, $a_1 = 3$, siano $A_1 P, A_1 Q, A_1 R$ i tre spigoli di T uscenti da A_1 ed interni al triangolo $A_1 A_2 A_3$, così designati in guisa che nella triangolazione T i quattro triangoli

$$(24) \quad A_1 A_2 P, \quad A_1 P Q, \quad A_1 Q R, \quad A_1 R A_3$$

risultino ordinatamente adiacenti lungo quelli, ciascuno al successivo. È da

rilevare che, a norma del n. 3, fra i punti A_1, A_2, P, Q, R si potrebbe avere una (ed al più una sola) coincidenza.

Incominciamo coll'osservare che, nelle ipotesi ammesse, P risulta distinto da A_3 . Ed inverso, qualora P coincidesse con A_3 , la porzione del triangolo $A_1A_2A_3$ non ricoperta dai triangoli (24) si decomporrebbe in un biangolo, avente gli spigoli A_2A_3 ed A_2P , ed in un triangolo cogli spigoli PQ, QR, RA_1 , avente quindi i vertici Q, R e $P = A_3$. In questo triangolo, la triangolazione T subordina una triangolazione, T' , che ha come vertici taluno fra i vertici di T con l'esclusione certamente di A_1 ed A_2 , e che risulta manifestamente pari essa pure. Per l'ammissa induzione, è dunque lecito applicare il teorema a T' , derivandone che il numero degli spigoli di T' che escono da Q e sono interni al suddetto triangolo PQR risulta pari. Ciò conduce però ad un assurdo, in quanto gli spigoli di T uscenti da Q sono precisamente quelli testè considerati ed inoltre gli spigoli QP, QR, QA_1 , epperò complessivamente risultano in numero dispari. Questo contraddice l'ipotesi che T sia pari, onde rimane intanto stabilito l'asserto.

In modo del tutto analogo si vede che ciascuna delle coppie $(A_2, Q), (A_2, Q), (A_2, R)$ consta necessariamente di punti distinti. Avuto riguardo al n. 3 si ha dunque che, nelle ipotesi ammesse, o i cinque punti A_2, P, Q, R, A_3 sono distinti, oppure risulta $P = R$ e fra quei punti non vi sono altre coincidenze. Esamineremo successivamente queste due alternative, mostrando che ciascuna di esse porta a qualche contraddizione, con che il teorema rimarrà compiutamente stabilito.

Supponiamo dunque dapprima che quei cinque punti siano distinti. Allora i quattro triangoli (24) ricoprono un esagono

$$H = A_1A_2PQRA_3,$$

il cui residuo nel triangolo $A_2A_3A_1$ è un pentagono

$$K = A_2PQRA_3;$$

e denominiamo con T' la triangolazione (avente esattamente $\epsilon - 1$ vertici) determinata da T in K . Poichè T è pari, così per ciascuno dei vertici P, Q, R esce un numero dispari di spigoli di T' interni a K , i cui insieme denotiamo rispettivamente con π, χ, ρ .

Alteriamo ora K , identificandone i vertici P ed R e gli spigoli PQ, QR . Ciò può venire effettuato con una variazione continua di questi entro l'esagono H , che porti P ed R a coincidere in un punto P^* interno ad H e gli spigoli PQ, QR a coincidere in un nuovo spigolo QP^* , in modo da ridurre il pentagono K ad un triangolo $A_2P^*A_3$ avente il vertice Q di T' come punto interno; e modifichiamo corrispondentemente T' in una triangolazione T'' di questo triangolo. È chiaro che T'' possiede in tutto $\epsilon - 2$ vertici, che sono il punto P^* in cui sono venuti a confluire P ed R , ed i $\epsilon - 3$ vertici provenienti dai vertici di T' distinti da P ed R .

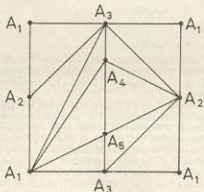
La triangolazione T'' è manifestamente pari, ossia risulta pari il numero dei suoi spigoli che escono da un vertice interno al triangolo $A_2P^*A_3$ (incluso

il vertice Q, dal quale escono lo spigolo QP^* e quelli — in numero dispari — che costituiscono l'insieme γ . Ma allora, in base all'induzione ammessa, il numero degli spigoli di T^* interni al triangolo $A_1P^*A_2$ e che escono dal vertice P^* dovrebbe essere pari; mentre invece esso è dispari, in quanto tali spigoli sono P^*Q e quelli che provengono per continuità dagli spigoli costituenti gli insiemi π e ρ , ciascuno dei quali comprende un numero dispari di elementi.

Ci resta infine da esaminare l'eventualità in cui si abbia $P=R$. In tale ipotesi, gli spigoli PQ ed RQ racchiudono un biangolo, interno a quello compreso fra PA_1 ed RA_1 , la porzione residua essendo precisamente quella ricoperta dai due triangoli (24) intermedi. Possiamo quindi modificare la triangolazione T di $A_1A_2A_3$ e ridurla a quella, T' , che si ottiene da T sopprimendo quei due triangoli (24) e lo spigolo A_1Q ad essi comune, e facendo tendere il primo di quei due biangoli al secondo, e quindi il vertice Q ad A_1 e gli spigoli PQ, RQ rispettivamente a PA_1, RA_1 . Ciò non altera la parità del numero complessivo degli spigoli uscenti da $P=R$, sicché la nuova triangolazione T' risulta essa pure pari. Poiché T' possiede in tutto esattamente $e-1$ vertici, possiamo applicare l'ammessa induzione, derivandone che il numero degli spigoli di T' interni al triangolo $A_1A_2A_3$ ed uscenti da A_3 dovrebbe essere pari. Esso invece risulta dispari, in quanto tali spigoli sono quelli che provengono (quando Q tende ad A_1) dagli spigoli di T distinti da QA_1 ed uscenti dal vertice Q; e questa contraddizione completa la dimostrazione del teorema.

OSSERVAZIONE. Dal teorema testè stabilito si trae la seguente proposizione.

Se in un grafo sferico triangolare i gradi dei vertici risultano tutti pari a prescindere da quelli dei tre vertici di una faccia, anche ciascuno di questi tre vertici deve avere grado pari. Il risultato può cessare di essere vero per grafi triangolari che non siano sferici.



Il grafo ha i cinque vertici A_1, A_2, \dots, A_5 coi rispettivi gradi $m_1 = m_2 = 7$, $m_3 = 8$, $m_4 = m_5 = 4$, dei quali precisamente due sono dispari.

La prima parte segue subito dal suddetto teorema, mediante un'argomentazione del tutto analoga a quella che minutamente svilupperemo nel n. 29.

La seconda parte è giustificata dal grafo G triangolare dato dalla figura qui accanto, tracciata sul toro che da essa si ottiene identificando i lati opposti del rettangolo.

Si noti che i cinque vertici di G risultano a due a due adiacenti, sicchè il numero cromatico $\nu(G)$ (n. 2) vale cinque, in conformità col fatto noto (ved. per esempio Ringel [33], p. 64) che il massimo numero cromatico dei grafi su di un toro vale sette.

10. Dimostreremo che:

I caratteri a_1, a_2 delle varie triangolazioni T pari di un biangolo, relativi ai vertici A_1, A_2 di questo, possono assumere i valori $a_1 = a_2 = 1$ o quelli dati da una qualsiasi coppia di interi dispari ≥ 3 , ed essi soltanto.

Invero, preso un punto A_3 esterno al biangolo e congiunto A_3 ad A_1, A_2 mediante due nuovi spigoli A_1A_3, A_2A_3 , otteniamo un triangolo $A_1A_2A_3$; ed è chiaro che una qualunque triangolazione T pari del biangolo fornisce una triangolazione T' del triangolo che è ancora pari, e che nei vertici A_1, A_2, A_3 ha i caratteri

$$a_1' = a_1 + 1, \quad a_2' = a_2 + 1, \quad a_3' = 0.$$

In virtù del n. 9, questi caratteri sono pari, sicchè a_1 ed a_2 debbono intanto essere dispari. Per stabilire la seconda parte del precedente enunciato, basta osservare che ciascuna delle $a_1 = 1, a_2 = 1$ implica l'altra, in quanto essa esige che nella triangolazione T vi sia un solo triangolo adiacente ad uno degli spigoli del biangolo ed un solo triangolo adiacente all'altro spigolo.

La prima parte dell'enunciato è così immediata per la eventualità che si abbia $a_1 = a_2 = 1$, nel qual caso la triangolazione T comprende due soli triangoli, fra loro adiacenti lungo due lati interni al biangolo ed usciti uno da A_1 e l'altro da A_2 . I casi restanti si ottengono sottoponendo uno di quei triangoli ad una triangolazione pari avente i caratteri a nei tre vertici tutti positivi (e pari), per la quale si applichi la proposizione che ora possiamo stabilire.

11. Quale precisazione del teorema del n. 9, proviamo la seguente proposizione.

Denotiamo con T una triangolazione pari (nel senso del n. 9) di un triangolo $A_1A_2A_3$, e con a_1, a_2, a_3 i numeri di spigoli di T interni al triangolo che escono ordinatamente da A_1, A_2, A_3 . In corrispondenza alle diverse possibili T , per tali numeri si presentano i seguenti casi, ed essi soltanto. O a_1, a_2, a_3 sono tre interi pari positivi qualsiasi, oppure uno di essi è nullo, ed allora gli altri due valgono entrambi 0, od entrambi 2, o sono due interi pari ≥ 4 qualsiasi.

Supponiamo, come non è restrittivo, che $A_1A_2A_3$ sia un triangolo a lati rettilinei di un piano affine, di cui O denoti il baricentro. Detti ordinatamente B_1, B_2, B_3 i baricentri dei triangoli $OA_2A_3, OA_3A_1, OA_1A_2$, i nove segmenti

$$B_1B_2, \quad B_2B_3, \quad B_3B_1; \quad A_iB_j \quad (\text{con } i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j)$$

suddividono $A_1A_2A_3$ in sette triangoli costituenti una triangolazione pari, in quanto da ciascuno dei vertici B_i interni esce un numero pari (= 4) di spigoli, la quale ha i caratteri $a_1 = a_2 = a_3 = 2$. Se ora decomponiamo il triangolo

$A_1B_1B_2$ in modo affine a quello con cui abbiamo testé suddiviso $A_1A_2A_3$, otteniamo una triangolazione pari di $A_1A_2A_3$ avente $a_1 = 4, a_2 = 2, a_3 = 2$. Basta quindi iterare convenientemente questo procedimento, per ottenere tutti i casi contemplati dalla prima alternativa del precedente enunciato.

La dimostrazione di questo si completa osservando che se, per una triangolazione T di $A_1A_2A_3$, risulta per esempio $a_2 = 0$, ciò implica che in T vi sia uno ed un solo triangolo adiacente ad uno e quindi a ciascuno degli spigoli A_2A_1, A_2A_3 . Se questo triangolo è lo stesso $A_1A_2A_3$, allora T ha manifestamente $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. In caso contrario, il suddetto triangolo ha un ulteriore spigolo A_1A_2 determinante col lato A_1A_2 del triangolo un biangolo (di vertici A_1, A_2), nel quale la T deve subordinare una triangolazione pari. Basta allora applicare a quest'ultima la proposizione stabilita nel n. 10, per ottenere il completamento voluto.

12. Ci proponiamo di far vedere che:

Affinchè per un grafo sferico triangolare G l'insieme vuoto dei suoi spigoli risulti colorifico, e cioè G ammetta una 3-colorazione, è necessario e sufficiente che il grafo G sia pari.

Poichè la necessità è già stata rilevata nel n. 8, 4), basterà stabilire la sufficienza, ossia dimostrare il:

TEOREMA. *Dall'ipotesi che un grafo sferico triangolare G sia pari, segue sempre che G è 3-colorabile e cioè ammette una 3-colorazione.*

Questo teorema è meno immediato di quanto potrebbe a prima giunta apparire, come già risulta dalla seguente

OSSERVAZIONE. Se un grafo G triangolare è 3-colorabile, preso un qualunque vertice P di G (il cui grado m risulta necessariamente pari) e adottando per esso le notazioni del n. 3, i vertici (10) di G adiacenti a P (non necessariamente distinti fra loro) assumono alternativamente — nella 3-colorazione di G — i due colori distinti da quello di P . Dunque Q_i e Q_j hanno uno stesso colore se, e soltanto se, $i = j \pmod{2}$, talchè in particolare affinchè Q_i e Q_j possano coincidere occorre che sia $i = j \pmod{2}$. L'ultima proprietà non discende in modo banale quando si supponga soltanto che G sia pari, onde a fortiori quest'ipotesi non implica senz'altro la 3-colorabilità di G .

Ciò premesso, passiamo a stabilire il teorema dianzi enunciato. Il risultato essendo ovvio se $\tau = 3$, potremo supporre $\tau > 3$ e giungere alla richiesta proprietà procedendo per induzione rispetto a τ .

In virtù della proposizione 4) del n. 4, uno almeno dei caratteri v_2, v_1 di G deve essere positivo, talchè G possiede di certo un vertice P — per il quale adottiamo ancora le notazioni del n. 3 — che ha il grado $m = 2$ oppure $m = 4$.

Nel primo caso, le $m = 2$ facce triangolari (9) non hanno lo stesso contorno, essendo per ipotesi $\tau > 3$; pertanto, prese assieme, esse costituiscono un biangolo di vertici Q_1, Q_2 , contornato da due spigoli Q_1Q_2 . Da G possiamo allora dedurre un nuovo grafo, G' , col sopprimere le due facce suddette, il vertice P e gli spigoli PQ_1, PQ_2 , ed identificare poi fra loro quei due spigoli Q_1Q_2 . È evidente che il

grafo G' risulta sferico e triangolare, tale essendo G per ipotesi; inoltre, G' possiede i $v' = v - 1$ vertici di G distinti da P , nei quali G' ha lo stesso grado di G , tranne che nei punti Q_1 e Q_2 in ciascuno dei quali il grado diminuisce di due unità. Dunque anche G' risulta pari; sicchè, per l'ammissa induzione, G' è 3-colorabile. Dalla 3-colorazione di G' si passa subito ad una 3-colorazione di G , conservando in G i colori dei vertici di G' e attribuendo a P il colore diverso da quello che hanno in G' i vertici Q_1 e Q_2 (i quali hanno in G' colorazioni diverse, essendo ivi fra loro adiacenti).

Supposto ora invece $m = 4$, denotiamo con m_1, m_2, m_3, m_4 i gradi (pari e ≥ 4) dei vertici (10); fra questi ultimi - in base al n. 3 - non è restrittivo ammettere che Q_1 e Q_2 siano distinti (mentre Q_3 e Q_4 potrebbero allora eventualmente coincidere). Dal grafo G deduciamo un nuovo grafo G' , col sopprimere le $m = 4$ facce triangolari (9), il vertice P e gli $m = 4$ spigoli (8) uscenti da P , ed identificando poi fra loro i vertici Q_1, Q_2 e gli spigoli delle coppie $(Q_1Q_3, Q_2Q_3), (Q_1Q_4, Q_2Q_4)$. È subito visto che G' è sferico, triangolare e possiede $v' = v - 2$ vertici, che sono tutti quelli di G tranne P, Q_1, Q_2 , ed il vertice, Q' , in cui sono venuti a coincidere Q_1 e Q_2 . Anche G' risulta pari, avendo in Q', Q_3, Q_4 rispettivamente i gradi $m_1 + m_2 - 4, m_3 - 2, m_4 - 2$, mentre in ciascuno degli altri vertici G' conserva il grado di G . Per l'ammissa induzione, G' ammette una 3-colorazione; e si noti che in ogni caso - in base alla precedente Osservazione - i vertici Q_3 e Q_4 di G' , entrambi adiacenti a Q' , hanno in quella colorazione uno stesso colore, diverso da quello che ha ivi Q' . Si ottiene infine la richiesta 3-colorazione di G , attribuendo a Q_1 e Q_2 il colore di Q' in G' , a P il colore diverso dai due che la 3-colorazione di G' associa ai vertici Q', Q_3, Q_4 , e lasciando inalterati i colori negli ulteriori vertici (ciascuno dei quali è comune a G e G').

13. Riferiamoci ancora ad una triangolazione T di un n -gono $A_1A_2 \cdots A_n$, per la quale introduciamo i caratteri a_i di cui al n. 4; in virtù della proposizione 6) del n. 4, se T è *p a r i* tali caratteri soddisfano alla

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0 \pmod{2}.$$

Questa relazione non è però sufficiente per *determinare i caratteri a_i inerenti alle diverse possibili triangolazioni T pari di un n -gono*, come già risulta dai nn. 10, 11, dove questo problema è stato completamente risolto rispettivamente per $n = 2$ e per $n = 3$. Qui ci proponiamo di dare ad esso risposta nel caso $n = 4$, per il quale la suddetta relazione verrebbe soltanto a dire che - fra le a_1, a_2, a_3, a_4 - tutte, due o nessuna hanno da essere dispari. Mostriamo intanto che l'ultima eventualità non può presentarsi, ed anzi che:

Per una triangolazione T pari di un quadrangolo $A_1A_2A_3A_4$, non è possibile che due consecutive delle a_i risultino pari; talchè necessariamente o le a_i sono tutte dispari, oppure delle coppie (a_1, a_2) ed (a_3, a_4) una consta di numeri pari e l'altra consta di numeri dispari.

Supposto - come non è restrittivo - il quadrangolo $A_1A_2A_3A_4$ immerso in un piano affine, applichiamo a questo piano un'affinità che trasformi $A_1A_2A_3A_4$

in un altro quadrangolo $A'_1A'_2A'_3A'_4$, in guisa che i due quadrangoli risultino privi di punti a comune; l'affinità muterà T in una triangolazione T' del secondo quadrangolo, che ovviamente sarà ancora *pari* e nei vertici A'_i di quest'ultimo avrà i caratteri $a'_i = a_i$. Se ora identifichiamo fra loro i vertici delle coppie (A_i, A'_i) e gli spigoli delle coppie $(A_1A_2, A'_1A'_2)$, $(A_2A_3, A'_2A'_3)$, $(A_3A_4, A'_3A'_4)$, $(A_4A_1, A'_4A'_1)$, l'insieme delle T, T' verrà a costituire un grafo G triangolare che è manifestamente sferico, e che risulta *pari* in quanto il grado di G nel vertice $A_i = A'_i$ vale $a_i + a'_i + 2 = 2(a_i + 1)$, mentre in ogni altro vertice il grado di G è quello che ivi ha T o T' .

In virtù del teorema del n. 12, il grafo G ammette una 3-colorazione. Designati con 1, 2, 3 i tre colori di questa, siano ad esempio 1 e 2 i colori che la 3-colorazione associa ai vertici A_1 ed A_2 di G , fra loro adiacenti, per i quali facciamo per assurdo l'ipotesi che i caratteri a_1 ed a_2 risultino *pari*. Se ora osserviamo che i vertici A_1 ed A_3 sono entrambi adiacenti ad A_2 ed applichiamo l'Osservazione del n. 12 (nella quale in luogo di P, Q_i, Q_j si pongano ordinatamente A_2, A_1, A_3), otteniamo che — in forza della parità di a_2 — al vertice A_3 la 3-colorazione deve attribuire il colore 3. Un'analoga argomentazione vale per i vertici A_2 ed A_4 , entrambi adiacenti ad A_1 , avendo riguardo alla parità di a_1 ; in base ad essa, si ottiene che anche ad A_4 la 3-colorazione di G attribuisce il colore 3. Ma ciò è impossibile in quanto i vertici A_3 ed A_4 , essendo fra loro adiacenti in G , non possono risultare di uno stesso colore. Questa contraddizione mostra l'assurdità dell'ipotesi ammessa, e prova quindi la proposizione enunciata.

14. I risultati stabiliti nel n. 13 vengono completati dal seguente teorema.

Al variare di una triangolazione T pari di un quadrangolo $A_1A_2A_3A_4$, i valori assunti dai caratteri a_i (che sono interi non negativi, definiti al n. 4) inerenti alla T nei vertici A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) presentano i seguenti casi ed essi soltanto:

- 1) *le a_i sono numeri dispari qualsiasi;*
- 2) *le a_i relative a due vertici opposti sono numeri pari qualsiasi e le altre due sono numeri dispari arbitrari, ad eccezione dell'eventualità in cui*
 - a) *due delle a_i essendo zero, le altre due assumano valori dispari diversi dei quali uno almeno sia 1 o 3; oppure*
 - b) *una ed una sola delle a_i pari essendo zero, ciascuna della a_i dispari valga 1; oppure*
 - γ) *una ed una sola delle a_i pari essendo zero ed una e una sola delle a_i dispari essendo 1, le altre due assumano i valori 2 ed un qualunque valore intero dispari ≥ 5 , oppure 3 ed un qualunque valore intero pari ≥ 4 .*

Per costruire una triangolazione pari T presentante il caso 1), fissiamo nel quadrangolo un punto interno O , e poi congiungiamo O ai quattro vertici A_i mediante cammini OA_i a due a due privi di punti interni comuni. È chiaro che tali cammini spezzano il quadrangolo in quattro triangoli, costituenti una T *pari* avente ciascuno dei caratteri $a_i = 1$. Se ora si modifica T in una triangolazione T' ottenuta col sostituire al cammino OA_i un biangolo interno al quadrangolo che abbia per vertici i punti O, A_i , ed indi sottoporre tale biangolo ad

una triangolazione pari (per la quale si rammenti il teorema del n. 10), è subito visto che T risulta ancora pari ed ha come carattere a_i in A_i un qualunque numero dispari ($= 1$, qualora al posto del biangolo di vertici O, A_i si torni a mettere il cammino OA_i); e questo esaurisce il caso 1).

Volgiamoci ora al caso 2), supponendo — per fissare le idee — che si abbia

$$a_i = i \pmod{2} \quad \text{per } i = 1, 2, 3, 4.$$

Vi sono allora *a priori* tre possibilità, (i), (ii), (iii), che tosto esamineremo partitamente, secondochè delle a pari (e cioè della a_2, a_4) rispettivamente due, una o nessuna valga zero.

(i) Se si suddivide il quadrangolo $A_1A_2A_3A_4$ in due triangoli mediante un cammino A_1A_3 , si ottiene una triangolazione T che è manifestamente pari e che ha i caratteri

$$a_2 = a_4 = 0, \quad a_1 = a_3 = 1.$$

Se ora si modifica T in una triangolazione T^* ottenuta col sostituire al cammino A_1A_3 un biangolo interno al quadrangolo, avente quali vertici i punti A_1, A_2 , e col sottoporre poi tale biangolo ad una triangolazione pari (per la quale si rammenti il teorema del n. 10), è subito visto che T^* è ancora pari ed ha i caratteri: $a_2^* = a_4^* = 0, a_1^* = a_3^* = 3$, oppure: $a_2^* = a_4^* = 0$ ed a_1^*, a_3^* dati da due qualunque interi dispari ≥ 5 .

Abbiamo così costruito delle triangolazioni T, T^* , aventi i caratteri a nei vertici A_2, A_4 entrambi uguali allo zero e gli altri due caratteri a assumenti valori dispari arbitrari, all'infuori precisamente di quelli specificati in 2), α).

(ii) Partiamo dalla triangolazione T definita in (i), e modifichiamola in una T' ottenuta col triangolarne la faccia $A_1A_2A_3$ (rammentando la prima parte del teorema del n. 11). Chiaramente T' risulta pari ed ha il carattere $a_2 = 0$, mentre a_4 assume un qualsiasi valore pari ≥ 2 ed a_1, a_3 assumono valori dispari arbitrari ≥ 3 .

Partiamo poi ancora dalla suddetta triangolazione T e modifichiamola invece in una T'' coll'aggregare al quadrangolo un biangolo avente uno degli spigoli coincidente con A_2A_3 , sottoponendo indi tale biangolo ad una triangolazione pari (per la quale si rammenti ancora il teorema del n. 10). È subito visto che T'' risulta pari e conserva i caratteri $a_1 = 1, a_2 = 0$, mentre a_3 ed a_4 assumono rispettivamente i valori 3 e 2, oppure un qualsivoglia valore dispari ≥ 5 ed un qualsiasi valore pari ≥ 4 .

Abbiamo così costruito delle triangolazioni pari T', T'' del quadrangolo $A_1A_2A_3A_4$, aventi i caratteri $a_2 = 0, a_4$ pari ≥ 2 e per le quali gli altri due caratteri a_1, a_3 assumono valori dispari arbitrari, con l'esclusione precisamente della coppia $a_1 = a_3 = 1$, di cui in 5), e di quelle specificate in 2), γ).

Esaminiamo infine l'eventualità (iii) in cui ciascuna delle due a pari risulti positiva e mostriamo che, per essa, le quattro a_i non sono soggette a nessuna restrizione ulteriore. All'uopo dividiamo il quadrangolo $A_1A_2A_3A_4$ in due triangoli mediante un cammino A_2A_3 , sul quale scegliamo due punti P, Q in guisa che i punti A_1PQA_4 si succedano ivi in quest'ordine. Tracciando ancora dei cammini

PA_2, QA_2, PA_1, QA_1 otteniamo una triangolazione del dato quadrangolo, che manifestamente è pari ed ha i caratteri

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_3 = a_4 = 2.$$

Da essa, sostituendo agli spigoli A_1P, A_2Q dei biangoli con i loro stessi vertici ed assogettando tali biangoli ed i triangoli A_2PQ, A_1PQ a triangolazioni pari (per le quali si rammentino i teoremi dei nn. 10, 11), deduciamo nuove triangolazioni pari del dato quadrangolo, per le quali a_1 ed a_2 vengono ad assumere valori dispari arbitrari ($= 1$, qualora al rispettivo biangolo si torni a sostituire l'originale spigolo), mentre a_3 ed a_4 vengono ad assumere valori pari positivi arbitrari; e ciò dimostra l'asserto.

Per provare compiutamente il teorema inizialmente enunciato, non ci resta che da stabilire che una triangolazione T pari, la quale non risulti del tipo I), deve necessariamente avere i caratteri a uguali a quelli di una delle triangolazioni dianzi costruite.

A tal fine incominciamo coll'osservare che una T che abbia i caratteri $a_2 = a_4 = 0$ non può possedere che un solo triangolo di vertice A_2 , avente di conseguenza A_2A_1, A_2A_3 come lati, ed un solo triangolo di vertice A_4 , avente di conseguenza A_4A_1, A_4A_3 come lati. Per ciascuno di questi due triangoli, il rimanente lato ammette i punti A_1, A_3 quali estremi; e si hanno due casi da distinguere, secondochè i due lati A_1A_2 in tal guisa definiti coincidano fra loro (ed allora la triangolazione si riduce ai soli due triangoli dianzi considerati) oppure sono distinti (sicchè, non potendo avere a comune punti interni, essi racchiudono un biangolo di vertici A_2, A_4 in cui T necessariamente subordina una triangolazione pari). Attualmente, pertanto, la data triangolazione è una della T, T' costruite in (i).

Riferiamoci ora ad una triangolazione pari che soddisfi alle condizioni $a_2 = 0, a_4 = 1$. La prima di queste implica ch'essa debba possedere un solo triangolo $A_1A_2A_3$ di vertice A_2 , del quale denotiamo con A_2A_1 il lato opposto ad A_2 . Del pari, in virtù della $a_4 = 1$, la triangolazione deve possedere esattamente due triangoli di vertice A_4 ; di questi, uno è il suddetto triangolo $A_1A_2A_3$, mentre l'altro ha A_1A_2, A_1A_4 come lati, e quindi possiede un certo cammino fra A_3 ed A_4 quale rimanente lato. Vi sono due casi da distinguere, secondochè questo cammino coincide col od è distinto dal lato A_2A_3 del quadrangolo. Mentre nel primo caso la triangolazione coincide colla T considerata in (i), avente i caratteri $a_2 = a_4 = 0, a_1 = a_3 = 1$, nel secondo caso quel cammino ed il lato A_2A_3 racchiudono un biangolo in cui la data triangolazione subordina una triangolazione che è necessariamente pari, sicchè la prima risulta una delle T'' dianzi costruite in (ii).

Riferiamoci poi ad una T pari che abbia $a_2 = 0, a_4$ pari ≥ 2 . Allora le a_1, a_3 sono entrambe dispari (n. 13) e — in virtù del precedente capoverso — se una di esse vale 1 la T si riduce ad una delle T'' . Basterà dunque supporre che a_1, a_3 siano dispari ed entrambe ≥ 3 ; ma in tal caso T ha i caratteri a uguali a quelli di una delle T'' dianzi costruite in (ii).

Un ultimo caso possibile è quello in cui le a_2, a_3 pari siano entrambe positive. Ma allora, per quanto s'è detto dianzi per l'eventualità (iii), non vi sono altre restrizioni per le a , onde la dimostrazione del teorema risulta completa.

V. CARATTERI INERENTI AD UNA TRIANGOLAZIONE TERNARIA.
GRAFI TERNARI E LORO COLORAZIONE CANONICA

15. Dato un n -gono $A_1 A_2 \dots A_n$ (con $n \geq 2$), consideriamo una qualunque sua triangolazione T che sia ternaria, tale cioè (n. 3) che il grado di ogni vertice di T interno all' n -gono risulti divisibile per tre. Ad ogni vertice A_i dell' n -gono la T associa un intero non negativo, dato dal numero a_i di spigoli di T che escono da A_i , e sono interni all' n -gono.

In relazione a questi caratteri a_i , nasce il problema di determinare quali siano i valori ch'essi effettivamente assumono in corrispondenza alle diverse triangolazioni T ternarie dell' n -gono. Tale problema verrà completamente risolto per $n = 2$ e $n = 3$ nella prima parte del presente § V, dove verrà anche data qualche indicazione per il successivo caso $n = 4$.

Ricordiamo anzitutto [n. 4, 7]) che le suddette a_i risultano sempre legate dalla condizione

$$(25) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n = -n \pmod{3}.$$

Questa, tuttavia, è ben lungi dall'essere sufficiente per l'esistenza di qualche T che abbia quei caratteri a_i . Così, ad esempio, per $n = 2$ la (25) mostra che *a priori* per una triangolazione ternaria di un biangolo si possono avere essenzialmente soltanto i due casi:

$$(i) \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 2 \pmod{3},$$

$$(ii) \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0 \pmod{3};$$

al n. 18 vedremo però che l'ultimo di questi casi rimane di fatto totalmente escluso. Parimente, per $n = 3$ la (25) fornisce per una triangolazione ternaria di un triangolo i quattro casi:

$$(i') \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0 \pmod{3},$$

$$(ii') \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 1 \pmod{3},$$

$$(iii') \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 2 \pmod{3},$$

$$(iv') \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 0 \pmod{3};$$

ma vedremo poi (n. 27) che le ultime due possibilità restano escluse, e che lo stesso può dirsi (n. 28) per $n = 4$ relativamente alle posizioni

$$(v) \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 0 \pmod{3},$$

sebbene esse risultino compatibili colla (25).

16. Se ci riferiamo ad un triangolo $A_1A_2A_3$, che possiamo supporre immerso in un piano affine, esso ammette intanto la triangolazione banale ridotta a quel solo triangolo, la quale risulta del tipo (\bar{r}) avendo i caratteri

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

Denotiamo poi con O il baricentro di $A_1A_2A_3$ e con B_i il baricentro di A_jA_kO , designando con i, j, k i numeri 1, 2, 3 scritti in un qualunque ordine. È allora manifesto che i $3 + 3 + 6 = 12$ segmenti OA_i, OB_j, A_kB_j spezzano il triangolo $A_1A_2A_3$ in 9 triangoli, che costituiscono una sua triangolazione ternaria avente i caratteri

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 3.$$

Questa può venire infittita procedendo col triangolo A_1B_2O in modo affine a come testè si è operato con $A_1A_2A_3$, il che fornisce una triangolazione ternaria di $A_1A_2A_3$ avente i caratteri

$$a_1 = 6, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 3.$$

Iterando il procedimento col suddividere nel modo indicato il triangolo di lato OA_1 dell'ultima suddivisione ottenuta, si giunge ad una triangolazione ternaria di $A_1A_2A_3$ avente a_1 uguale ad un qualsiasi multiplo positivo del 3 ed $a_2 = a_3 = 3$. Lo stesso potendo anche venire ripetuto in relazione ai lati OA_2, OA_3 , si perviene in conclusione a triangolazioni ternarie di $A_1A_2A_3$ i cui caratteri a sono soggetti soltanto alle condizioni di soddisfare alle (\bar{r}) del n. 15 (e di essere positivi).

Preso ora un biangolo A_1A_2 , scegliamo all'interno di esso due punti B_1, B_2 distinti, e congiungiamo questi punti fra loro e con ciascuno dei punti A_1, A_2 mediante cinque cammini, interni al biangolo, che a due a due non si incontrino fuori dei punti A e B . Con ciò il biangolo rimane suddiviso in quattro triangoli, costituenti una sua triangolazione ternaria avente i caratteri $a_1 = a_2 = 2$. Basta ora infittire questa triangolazione col triangolarne i triangoli $A_1B_1B_2, A_2B_1B_2$ in uno dei modi dianzi specificati, per vedere che:

Per un biangolo, il caso (i) del n. 15 può venire realizzato senza nessuna eccezione.

17. Ad un triangolo $A_1A_2A_3$ si aggregi ora un biangolo giacente in esso che abbia A_1, A_2 come vertici ed uno dei lati coincidente col lato A_1A_2 del triangolo. Applicando al biangolo una triangolazione ternaria del tipo (i) del n. 15, per la quale si rammenti il risultato finale del n. 16, si ottiene per $A_1A_2A_3$ una triangolazione ternaria avente a_1 ed a_2 uguali a multipli positivi arbitrari del 3, ed $a_3 = 0$. Poichè, com'è subito visto, una triangolazione di $A_1A_2A_3$ che abbia due delle a uguali allo zero coincide necessariamente con quella banale, così - avuto riguardo ai primi due capoversi del n. 16 - si ha che:

Per un triangolo, il caso (\bar{r}) del n. 15 può venire realizzato quasi integralmente, e precisamente con l'unica esclusione dell'eventualità in cui due e due sole delle a valgono zero.

Congiungendo il baricentro O del triangolo $A_1A_2A_3$ ai vertici mediante segmenti OA_i , veniamo a suddividere $A_1A_2A_3$ in tre triangoli che costituiscono una triangolazione ternaria di $A_1A_2A_3$ avente i caratteri

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1.$$

Il passaggio dal triangolo $A_1A_2A_3$ a quest'ultima sua triangolazione verrà brevemente denominato una *trisezione* del triangolo.

Se ora sostituiamo in quanto sopra uno o più di quei segmenti OA_i con un biangolo avente gli estremi del segmento quali vertici, e quindi sottoponiamo ciascuno dei biangoli così introdotti ad una triangolazione ternaria per la quale teniamo conto del risultato finale del n. 16, otteniamo che:

Per un triangolo, il caso (iv') del n. 15 può venire realizzato senza nessuna eccezione.

18. A contrasto col risultato finale del n. 16, ci proponiamo ora di dimostrare il seguente teorema:

Per un biangolo, il caso (ii) del n. 15 ha da venire escluso integralmente.

Sia T una triangolazione qualsiasi di un biangolo A_1A_2 , che abbia nei vertici A_1, A_2 del biangolo i caratteri a_1, a_2 ; è chiaro intanto che ciascuno di questi ultimi dev'essere positivo. Gli a_i spigoli di T che escono da A_1 possono venir indicati con

$$(26) \quad A_1B_1, A_1B_2, \dots, A_1B_{a_1},$$

così ordinandoli in guisa che gli $a_i + 1$ triangoli di T aventi un vertice in A_1 siano precisamente

$$(27) \quad A_1A_2B_1, A_1B_1B_2, A_1B_2B_3, \dots, A_1B_{a_1-1}B_{a_1}, A_1B_{a_1}A_2,$$

e soddisfino dunque alla condizione che ciascuno dei primi a_i triangoli (27) risulti adiacente al successivo lungo il corrispondente spigolo (26).

Abbiamo testè introdotto ed ordinato i punti

$$(28) \quad B_1, B_2, \dots, B_{a_1},$$

nessuno dei quali coincide con A_2 se — com'è lecito — supponiamo che T non risulti dalla triangolazione di due biangoli adiacenti. In tale ipotesi, ciascuno dei punti (28) risulta *interno* al biangolo: i punti (28) sono allora precisamente i vertici di T interni al biangolo e adiacenti ad A_1 , con l'avvertenza che non rimane escluso che vi siano coincidenze fra coppie di punti (28) non consecutivi.

Dimostreremo il teorema per assurdo, supponendo che il biangolo A_1A_2 ammetta una triangolazione T che sia *ternaria* e per la quale risulti

$$(29) \quad a_1 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Procederemo per *doppia induzione* rispetto al carattere a_1 , ed al numero w dei vertici di T interni al biangolo, mediante la quale risulta intanto lecita l'ipotesi precedente che nessuno dei punti (28) abbia a coincidere con A_2 .

Osserviamo che, se fosse $\alpha = 1$, ossia se T ammettesse un solo vertice P interno al biangolo, gli spigoli di T uscenti da questo sarebbero uno o più spigoli PA_1 ed uno o più spigoli PA_2 . Ma più di uno spigolo PA_1 non può esservi, altrimenti due distinti di essi delimiterebbero un biangolo in cui T subordinerebbe una triangolazione priva di vertici interni e che perciò avrebbe i caratteri α relativi ai vertici uguali allo zero, il che (come già osservato) non può essere. Dunque da P dovrebbe uscire uno ed un solo spigolo PA_1 e uno ed un solo spigolo PA_2 , sicchè la T verrebbe ad avere grado 2 in P e non sarebbe quindi ternaria. Si ha pertanto necessariamente $\alpha > 1$.

Supponiamo dapprima $\alpha_1 = 1$ [con che la (29) rimane soddisfatta]. In tale ipotesi, i punti (28) si riducono ad uno solo, che può venire denotato con

$$B = B_1 = B_2,$$

e gli $\alpha_1 + 1 = 2$ triangoli (27) si riducono al primo ed all'ultimo di essi. Per quanto testè rilevato, il lato A_1B_1 del primo triangolo ed il lato A_2B_2 del secondo (pur avendo gli stessi estremi A_2, B) non possono coincidere; essi dunque racchiudono il biangolo che si ottiene dal dato sopprimendo le facce (27). In tale biangolo A_2B , la T subordina una triangolazione, T' , che manifestamente è ancora ternaria ed ammette soltanto più $\alpha - 1$ vertici interni. Per l'ammissa induzione, il nostro teorema può venire applicato a T' , che - non presentando così il caso (ii) del n. 15 - dev'essere del tipo (i) in forza dello stesso n. 15. Ciò implica che il numero degli spigoli di T' che escono da B e sono interni al biangolo A_2B debba risultare $\equiv 2 \pmod{3}$. Poichè gli spigoli di T che escono da B sono precisamente i suddetti, ed inoltre BA_1 ed i due spigoli che contornano il biangolo A_2B , ciò viene a contraddire l'ipotesi che T sia ternario. Si ha dunque necessariamente $\alpha_1 > 1$, e pertanto, in virtù della (29), $\alpha_1 \geq 4$.

Sotto quest'ultima condizione, esaminiamo successivamente le diverse eventualità che vi sia qualche coincidenza fra i primi quattro punti (28), nel qual caso non ve ne può essere più di una, e quella in cui tali punti risultino distinti.

1) Se $B_1 = B_2$, il secondo ed il terzo triangolo (27) racchiudono un biangolo contornato dai rispettivi spigoli B_1B_2 e B_2B_3 (i quali sono certamente distinti, poichè altrimenti il grado di T in B_2 varrebbe 2). Questo biangolo e quei triangoli costituiscono alla loro volta un biangolo, contornato da A_1B_1 ed A_1B_2 , nel quale T subordina una triangolazione ternaria avente in A_1 il carattere $\alpha = 1$. Ma ciò è assurdo, in virtù di quanto sopra. Parimente, resta escluso che possa aversi $B_2 = B_3$.

2) Se $B_1 = B_2$ i lati A_1A_2, A_2B_1 del primo triangolo (27) ed il lato A_1B_1 del quarto racchiudono un triangolo, avente all'interno i punti B_2, B_3 ed eventualmente altri vertici di T , nessuno dei quali può però essere uno dei punti B_2, B_3, \dots, B_n . Se quindi sopprimiamo dalla T la triangolazione ch'essa subordina in quel triangolo, considerando poi quest'ultimo come nuova faccia, perveniamo ad una nuova triangolazione T' del dato biangolo A_1A_2 , che è ancora

ternaria ed i cui caratteri w', a' — in base alla (29) — soddisfano manifestamente alle

$$w' \leq w - 2, \quad a'_1 = a_1 - 3 = 1 \pmod{3}.$$

Ma ciò è impossibile, in virtù dell'ammessa induzione.

3) Supponiamo da ultimo che i quattro vertici B_1, B_2, B_3, B_4 risultino distinti, sicchè i primi quattro triangoli (27) vengono a ricoprire un esagono semplice e non intrecciato, giacente entro il dato biangolo A_1A_2 . Modifichiamo la triangolazione T di quest'ultimo, compiendo successivamente le seguenti operazioni:

(i) sopprimiamo i primi quattro spigoli (26) ed identifichiamo fra loro i vertici B_1 e B_4 ;

(ii) la seconda parte della (i) può venire effettuata facendo variare con continuità i punti B_1 e B_4 entro l'esagono suddetto, fino a farli venire a coincidere al limite con uno stesso punto, B^* , sottoponendo nello stesso tempo a variazione continua gli spigoli di T uscenti da B_1 e B_4 che non sono stati soppressi, in guisa che tutti gli spigoli che via via si ottengono continuano a non avere a due a due in comune punti distinti dai loro estremi;

(iii) la (ii) avendo ora creato il triangolo $B^*B_2B_3$, sottoponiamo quest'ultimo a trisezione (nel senso del n. 17), ciò che importa l'introduzione di un nuovo vertice interno a detto triangolo;

(iv) introduciamo uno spigolo A_1B^* che, com'è certamente possibile, non abbia a comune con quelli finora ottenuti nessun punto distinto da A_1 e B^* .

Con ciò siamo venuti a derivare da T una nuova triangolazione T^* , del dato biangolo A_1A_2 , la quale manifestamente risulta ancora ternaria, ed i cui caratteri w^*, a_1^* — in virtù della (29) — soddisfano alle

$$w^* = w, \quad a_1^* = a_1 - 3 < a_1, \quad a_1^* = 1 \pmod{3}.$$

Ma questo risulta impossibile, in forza dell'ammessa induzione; e ciò completa la dimostrazione del teorema.

Avuto riguardo al n. 15, il teorema testè stabilito implica senz'altro il seguente corollario:

Ogni triangolazione ternaria di un biangolo deve necessariamente presentare il caso (i) del n. 15.

19. In vista di poter agevolmente giungere ad analizzare i casi (iii) e (iv) del n. 15 (il che verrà poi fatto nel n. 27, ove mostreremo la totale impossibilità di quelli), ci proponiamo di dimostrare la proposizione inversa della 5) del n. 8, dalla quale trarremo poi anche una nuova rapidissima prova del teorema del n. 18 (ved. il n. 26). Si tratta dunque di stabilire intanto il

TEOREMA. *In ogni grafo sferico triangolare G che sia ternario, l'insieme di tutti gli spigoli risulta colorifico (nel senso del n. 6); in altri termini, G ammette*

allora una 4-colorazione (essenzialmente unica) avente quell'insieme come separante, la quale verrà denominata la colorazione canonica di G.

Da questo teorema verranno poi anche tratte varie altre conseguenze notevoli (veggansi fra l'altro i nn. 28, 33). Esso è assai meno immediato di quanto potrebbe a prima giunta apparire, come già risulta dalla seguente

OSSERVAZIONE. Riferiamoci ad un grafo triangolare G tracciato su di una sfera S, il quale ammetta una colorazione canonica nel senso del precedente teorema, talchè [ved. la proposizione 5) del n. 8] il grafo G dovrà essere ternario. Se P è un qualunque vertice di G [di grado $m = 0 \pmod{3}$], adottiamo per caso le notazioni del n. 3, secondo le quali l'ordine circolare dei vertici (10) viene a corrispondere ad uno dei due orientamenti della sfera S. È subito visto che, designati con 0, 1, 2, 3 i quattro colori della colorazione, se questa attribuisce ai vertici P, Q₁, Q₂ rispettivamente i colori 0, 1, 2, risulta

$$\text{col } Q_i = i \pmod{3},$$

e quindi

$$\text{col } Q_i - \text{col } Q_j = i - j \pmod{3}.$$

Dunque, fra l'altro, affinché la colorazione canonica venga ad attribuire ai vertici Q₁ e Q₂ uno stesso colore (il che deve fra l'altro aver luogo se tali vertici coincidono), è necessario e sufficiente che risulti $i = j \pmod{3}$.

Ciò premesso, sia G un qualsiasi grafo sferico triangolare ternario, e per esso adottiamo notazioni del n. 1. In virtù della proposizione 5) del n. 4, risulta

$$v \geq v_3 \geq 4.$$

Dunque G possiede almeno 4 vertici di grado 3; inoltre dev'essere $v > 4$, l'uguaglianza $v = 4$ implicando che il grafo G sia isomorfo a quello formato dai vertici, spigoli e facce di un tetraedro. In tal caso G ammette una ed una sola colorazione, che è quella ottenuta attribuendo ai quattro vertici quattro colori diversi; per essa ciascuno degli spigoli risulta separante, talchè nel caso in questione la suddetta colorazione è quella canonica, ed il teorema da stabilire viene a sussistere banalmente.

Per dimostrare quel teorema in ogni caso, basterà dunque supporre $v > 4$ e procedere poi — come faremo — per induzione rispetto a v, ammettendone la validità per ogni grafo ternario che possieda meno di v vertici.

20. Occupiamoci anzitutto del caso di un grafo sferico triangolare ternario, G, in cui vi siano due distinti vertici A₁, A₂ congiunti da due spigoli distinti. Questi spigoli spezzeranno la sfera S su cui G è tracciato in due biangoli complementari, S' ed S'', aventi ciascuno quali vertici i punti A₁, A₂. Detti w', w'' i numeri dei vertici di G rispettivamente interni ad S', S'', si avrà chiaramente

$$v = w' + w'' + 2.$$

Osserviamo ora che, G inducendo nel biangolo S' una triangolazione manifestamente ternaria, in virtù del n. 18 dev'essere $w' \geq 2$ (e del pari risulta $w'' \geq 2$). Se in tale triangolazione identifichiamo fra loro i due lati A_1A_2 del biangolo, perveniamo ad un grafo triangolare G'' , ovviamente sferico, dotato di

$$v' = w' + 2 < v$$

vertici. In virtù del corollario finale del n. 18, il grafo G'' risulta ternario (anche nei vertici A_1, A_2); ad esso pertanto - in forza dell'ammessa induzione - è lecito applicare il teorema del n. 19, ricavandone l'esistenza di una colorazione canonica di G'' (nel senso di tale teorema).

In modo del tutto analogo, il biangolo S'' fornisce un grafo ternario, G''' , dotato esso pure di una colorazione canonica.

Designati con gli stessi nomi (com'è lecito) i quattro colori utilizzati nelle due suddette colorazioni, la scelta dei nomi può venir effettuata in modo che tali due colorazioni attribuiscono uno stesso colore ad A_1 ed uno stesso colore (diverso dal precedente) ad A_2 . Ma allora si ottiene una 4-colorazione di G coll'attribuire ad ogni vertice di G il colore del vertice a questo omologo in G' o G'' ; ed è subito visto che anche la nuova colorazione risulta canonica.

Rimane così dimostrato il teorema del n. 19 per grafi G che presentino la particolarità segnalata al principio del presente n. 20, sicchè potremo in seguito limitarci a grafi in cui tale particolarità non si presenti. Pertanto, d'ora innanzi, due vertici A_1, A_2 adiacenti di G risulteranno congiunti da uno ed un solo spigolo di G , il quale potrà dunque venire indicato semplicemente e senza ambiguità con A_1A_2 .

21. In virtù del n. 19, il grafo ternario G ammette certamente qualche vertice di grado 3. Fissato uno O di questi punti, denotiamo con A, B, C i tre vertici di G adiacenti ad O , e con $3\alpha, 3\beta, 3\gamma$ i loro gradi rispettivi (sicchè α, β, γ risultano tre interi positivi). I punti A, B, C sono fra loro distinti e congiunti a due a due da spigoli AB, BC, CA che - ciascuno assieme a due degli spigoli OA, OB, OC - delimitano le tre facce OAB, OBC, OCA di G aventi un vertice in O (n. 3). Va rilevato che, il considerare i vertici A, B, C (e, corrispondentemente, gli spigoli OA, OB, OC) in quest'ordine circolare, equivale a scegliere una delle due orientazioni della sfera S su cui è tracciato il grafo G .

Vogliamo mostrare che:

Nelle ipotesi attuali, nessuno degli interi α, β, γ può risultare uguale all'unità.

Ed inverò, se fosse $\alpha=1$ ossia se anche A risultasse di grado 3, poichè A è vertice delle facce ABO, ACO , vi dovrebbe essere in G una ed una sola ulteriore faccia di vertice A , la quale avrebbe AB ed AC quali due dei suoi spigoli. In virtù della fine del n. 20, il terzo spigolo di tale faccia (avendo necessariamente B e C quali estremi) non potrebbe che coincidere collo spigolo BC della faccia OBC . Poichè le quattro facce triangolari dianzi considerate verrebbero pertanto

a ricoprire completamente la sfera S , così il grafo G non ne potrebbe avere delle altre. Ma allora G avrebbe i soli vertici O, A, B, C , il che è però in contraddizione coll'ipotesi (fatta alla fine del n. 19) che sia $v > 4$.

Attualmente, dunque, α, β, γ risultano tre interi ≥ 2 . Ciò implica che le facce di G ordinatamente adiacenti agli spigoli BC, CA, AB e distinte dalle OBC, OCA, OAB siano a due a due distinte fra loro; e denotiamo con P, Q, R i vertici in esse rispettivamente opposti a quegli spigoli. Consideriamo inoltre le facce di G ordinatamente adiacenti agli spigoli QC, RA, PB e distinte dalle QCA, RAB, PBC ; e denotiamo con P', Q', R' i vertici in esse rispettivamente opposti a detti spigoli.

Designando in modo ovvio (sulla base dell'ultimo capoverso del n. 20) i lati delle facce testè considerate, abbiamo che — nell'ordine circolare indotto dall'orientazione dianzi scelta su S — per il vertice A escono i sei seguenti spigoli di G :

$$(30) \quad AO, AC, AQ, AQ', AR, AB;$$

e non ve ne sono altri se $x = 2$, mentre invece — se $x > 2$ — ve ne sono esattamente $3(x - 2)$ ulteriori, situati fra AQ ed AQ' e che indicheremo genericamente con AQ^k . Con analoghe convenzioni, si ha che gli spigoli G che escono dal vertice B o C sono ordinatamente (nell'orientazione suddetta):

$$\begin{aligned} BO, BA, BR, \dots, BR^k, \dots, BR', BP, BC, \\ CO, CB, CP, \dots, CP^k, \dots, CP', CQ, CA. \end{aligned}$$

Va rilevato che i sette vertici O, A, B, C, P, Q, R sono certo distinti fra loro. Ed invero, O essendo adiacente ai punti A, B, C non può coincidere con nessuno di questi punti; esso non può nemmeno coincidere con uno dei punti P, Q, R , in quanto ciascuno di questi — per costruzione — appartiene al triangolo ABC che non contiene O . Si ha poi che i punti A, B, C , essendo fra loro a due a due adiacenti, risultano certamente distinti. Infine, ad esempio, R non può coincidere con uno dei punti A, B (a ciascuno dei quali risulta adiacente), e neppure con uno dei punti C o Q poichè — in virtù di quanto testè si è detto sugli spigoli (30), ed in base all'ipotesi fatta alla fine del n. 20 — lo spigolo AR risulta distinto dagli spigoli AC, AQ e non può avere a comune con questi un vertice distinto da A .

Non è tuttavia da escludere che vi possa essere qualche coincidenza fra taluno dei vertici

$$(31) \quad P, Q, R, P', Q', R', P^k, Q^k, R^k$$

(ognuno dei quali è adiacente ad uno dei punti A, B, C). Se però due di quei punti coincidono, essi non sono adiacenti ad un medesimo punto A, B, C in forza del n. 20; gli spigoli di G che congiungono quei due punti a due dei punti A, B, C — assieme a quelli congiungenti gli ultimi due fra loro e ad O — allora risultano i lati di un triangolo o di un quadrangolo, la considerazione del quale può venire utilizzata in relazione al teorema del n. 19, nei modi che ora

verranno specificati in due casi esemplificativi; questi, d'altronde, sono i soli che occorrono per la validità degli sviluppi successivi.

22. Supponiamo dapprima che P' e Q' coincidano in un punto che - per semplicità di scrittura - sarà indicato con la lettera D . Allora i quattro spigoli di G

$$AO, OC, CP' = CD, Q'A = DA$$

risultano i lati di un quadrangolo (semplice e non intrecciato), che spezza la sfera S in due regioni quadrangolari di vertici $A, O, C, D = P' = Q'$, su ciascuna delle quali G subordina una triangolazione ternaria. Denoteremo con S' la regione avente all'interno il vertice B , e con S'' l'altra; designeremo inoltre con a', a'' i rispettivi caratteri a (di cui al n. 15) riferiti a quei vertici, specificandone il vertice con un indice.

Si vede allora subito che valgono le:

$$\begin{aligned} a'_O = 1, \quad a'_A = 2, \quad a'_C = 2 \pmod{3}, \\ a''_O = 0, \quad a''_A = 2 \pmod{3}, \quad a''_C = 2. \end{aligned}$$

In base alla (25) del n. 15, queste due serie di relazioni forniscono rispettivamente le

$$a'_D = 0 \pmod{3}, \quad a''_D = 1 \pmod{3},$$

soddisfacenti tutte alle $a' + a'' = 1 \pmod{3}$, che anche subito discendono dal carattere ternario di G in ogni vertice.

Dalla triangolazione di S' deduciamo ora un grafo sferico triangolare, G' , coll'identificare i vertici D, O , e gli spigoli AD, AO e CD, CO . Poichè

$$a''_O + a''_C = 1 \pmod{3}, \quad a''_A = a''_C = 2 \pmod{3},$$

così G' risulta ternario (anche nei vertici $D = O, A, C$ il cui intorno è stato modificato nel passaggio da G a G'). Il grafo G' , avendo per costruzione un numero di vertici inferiore a v , risulta perciò dotato di una colorazione canonica in base all'ammessa induzione. Questa attribuisce ai vertici $D = O, A, C$ tre colori che debbono esser a due a due diversi fra loro. Invero il vertice $D = O$, essendo in G' adiacente ad A e C , non può avere lo stesso colore di A o di C ; questi due vertici non possono poi avere un medesimo colore, in base all'Osservazione del n. 19 ed avendo riguardo alla $a''_O = 0$.

Effettuiamo poscia le sopraindicate identificazioni anche su S'' , tenendo conto delle

$$a'_D + a'_O = 1 \pmod{3}, \quad a'_A = a'_C = 2 \pmod{3}.$$

Otteniamo in tal guisa un grafo G'' avente meno di v vertici, e che - risultando esso pure ternario - ammette una colorazione canonica. Questa attribuisce tre colori diversi ai vertici $D = O, A, C$; e la scelta dei nomi

dei colori può venir fatta in modo che le due colorazioni canoniche dianzi introdotte impieghino i medesimi quattro colori e che i vertici $D = O, A, C$ vengano ad avere in una di esse esattamente gli stessi tre colori che nell'altra.

Possiamo infine costruire una 4-colorazione di G , convenendo — senza ambiguità — che in questa ogni vertice di G debba avere il colore che a tale vertice compete nell'una o nell'altra delle due suddette colorazioni canoniche. È subito visto che anche la nuova 4-colorazione risulta canonica, *ciò che dimostra il teorema del n. 19 sotto la condizione indicata al principio del presente n. 22.*

Alla stessa conclusione si perviene similmente, nel caso in cui il vertice R coincida con uno dei punti P o Q .

23. Rilevato che, in virtù del n. 21, il vertice R non può coincidere con P o con R (in quanto ciascuno di questi tre vertici è adiacente a B), ci proponiamo di dimostrare che:

I due vertici R e Q risultano certamente distinti.

A tal fine, supponiamo per assurdo che sia invece $R = Q$. Allora i tre spigoli RB, BA, AQ sono i lati di un triangolo, il quale spezza la sfera S in due regioni triangolari in ciascuna delle quali G subordina una triangolazione ternaria. Denoteremo con T la triangolazione di quella delle due regioni triangolari a cui non appartiene il vertice O , e con T' l'altra; designati poi con v, v' il numero complessivo dei vertici rispettivamente interni a T, T' , risulta allora

$$v = v' + v'' + 3.$$

È subito visto che ciascuna delle triangolazioni T, T' risulta del tipo (iii), secondo la classificazione del n. 15. Pertanto, prendendo un modello di T ed identificando i vertici ed i lati del relativo contorno cogli elementi omologhi di T' , otteniamo un grafo sferico triangolare, G^* , che risulta ternario.

Se supponiamo $v' < v''$, il numero v^* dei vertici di G^* soddisfa alle

$$v^* = 2v' + 3 < v.$$

Ne discende, in virtù dell'induzione ammessa alla fine del n. 19, che G^* possiede una colorazione canonica: ma questo conduce ad una contraddizione, in base ad un'argomentazione che specificheremo nei dettagli più tardi (n. 27), e ciò dimostra l'asserto.

Alla stessa conclusione si giunge nell'ipotesi che sia $v'' < v'$, facendo uso di T'' in luogo di T' .

Consideriamo da ultimo il caso in cui sia $v' = v''$. In quest'ipotesi, dalla triangolazione T'' sopprimiamo le facce racchiuse nel quadrangolo $ABCQ$ che contiene all'interno il vertice O . Otteniamo così una triangolazione ternaria, T_1^* , di una delle regioni delimitate su S dal triangolo avente per lati gli spigoli RB, BC, CQ ; ed è subito visto che T_1^* risulta del tipo (iv), secondo la classificazione del n. 15, ed ha all'interno $v_1 = v'' - 2$ vertici.

Basta ora associare T_1^* con opportune identificazioni ad un suo modello (in modo consimile a quello indicato dal penultimo capoverso del n. 27), per ottenere

un grafo sferico ternario, G_1^* , avente in tutto

$$v_1^* = 2v_1 + 3 = 2v'' - 1 < v$$

vertici. Ne discende, in base all'induzione ammessa alla fine del n. 19, che G_1^* possiede una colorazione canonica: ma questo conduce ad una contraddizione, in base ad un'argomentazione che specificheremo nei dettagli più tardi (n. 27), e ciò dimostra l'asserto.

24. Volgiamoci ora al caso generale in cui, fra i vertici (31) non vi siano coincidenze. E supponiamo anzitutto che, con le notazioni del n. 21, si abbia

$$\alpha = \beta = \gamma = 2.$$

L'esagono $PP'QQ'RR'$ risulta semplice e non intrecciato (in forza dei nn. 21, 22, 23) e spezza quindi la sfera S in due regioni; sia S^* quella fra esse che non contiene i vertici O, A, B, C , sulla quale G subordina una triangolazione ternaria i cui caratteri a^* soddisfano, com'è subito visto, alle

$$(32) \quad a_P^* = a_Q^* = a_R^* = 2 \pmod{3}, \quad a_{P'}^* = a_{Q'}^* = a_{R'}^* = 0 \pmod{3}.$$

Da S^* deduciamo un grafo triangolare, G^* , coll'identificare i tre vertici P', Q', R' in un unico punto, O^* , identificando allo stesso tempo le seguenti tre coppie di spigoli:

$$PP' \text{ e } P'Q, \quad Q'Q \text{ e } Q'R, \quad RR' \text{ e } RP.$$

Il grafo G^* è manifestamente sferico ed ha $v^* = v - 6 < v$ vertici. Esso risulta inoltre ternario, e ciò anche nei vertici P, Q, R, O^* , avendosi (mod 3):

$$a_P^* + 1 = a_Q^* + 1 = a_R^* + 1 = 0, \quad a_{P'}^* + a_{Q'}^* + a_{R'}^* + 3 = 0.$$

Per l'ammessa induzione, G^* risulta pertanto dotato di una colorazione canonica. Rileviamo che questa attribuisce quattro colori diversi ai quattro vertici P, Q, R, O^* , come si vede notando che i primi tre fra essi risultano adiacenti al quarto, ed applicando poi l'Osservazione del n. 19 e le (32).

Dalla suddetta colorazione di G^* si deduce tosto una 4-colorazione di G , coll'attribuire a ciascuno dei vertici O, P', Q', R' di G il colore del vertice O^* di G^* , ai vertici A, B, C di G rispettivamente il colore di P, Q, R in G^* , lasciando allo stesso tempo inalterato il colore degli altri vertici comuni a G^* ed a G . Poichè si verifica agevolmente che tale 4-colorazione di G risulta essa pure canonica, il teorema del n. 19 rimane stabilito nelle attuali condizioni.

25. In base al n. 21, il teorema del n. 19 va dimostrato nella ipotesi che si abbia

$$(33) \quad \alpha \geq 2, \quad \beta \geq 2, \quad \gamma \geq 2.$$

Avuto riguardo al n. 24, si potrà a quel fine supporre che l'uguaglianza non sussista in ciascuna delle (33), e procedere poi per induzione rispetto al

minore $\delta (\geq 2)$ fra i caratteri α, β, γ (introdotti al n. 21). Supporremo anzitutto che l'uguaglianza non sussista in nessuna delle (33), e cioè che si abbia $\delta > 2$.

Con le notazioni del n. 21, possiamo considerare il poligono (semplice e non intrecciato)

$$(34) \quad P \dots P^* \dots P^*Q \dots Q^* \dots Q^*R \dots R^* \dots R^*,$$

avente per lati spigoli di G . Esso divide la sfera S in due regioni complementari, S^+ , S^- (in ciascuna delle quali G subordina una triangolazione ternaria), avendo denotato con S^+ la regione che contiene i vertici O, A, B, C . È subito visto che i relativi caratteri α verificano le seguenti uguaglianze o congruenze mod 3:

$$(35) \quad \begin{aligned} a_P^+ - a_Q^+ &= a_A^+ = 2, & a_{P^*}^+ - a_{Q^*}^+ &= a_{P^*}^+ - a_{Q^*}^+ - a_{Q^*}^+ = a_{Q^*}^+ - a_{R^*}^+ = 1, \\ a_P^- &= a_Q^- = a_A^- = 2, & a_{P^*}^- &= a_{Q^*}^- = a_{R^*}^- = a_{P^*}^- = a_{Q^*}^- = a_{R^*}^- = 0. \end{aligned}$$

Rileviamo che, in virtù dell'ipotesi $\delta > 2$, fra i punti (34) ciascuno dei sottoinsiemi ordinati formati dai punti P^* , o Q^* , o R^* contiene un numero positivo di punti (rispettivamente dato da $3\alpha - 6, 3\beta - 6, 3\gamma - 6$); e denotiamo rispettivamente con P'', Q'', R'' l'ultimo di tali punti P^*, Q^*, R^* .

Ciò premesso, procediamo nel modo seguente sul grafo G :

(i) sopprimiamo tutti i vertici e spigoli di G interni ad S^+ e fissiamo un punto interno, O^+ , che congiungiamo ai vertici P, P^*, Q, Q^*, R, R^* mediante cammini (O^+P, O^+P^* , ecc.) che a due a due non si incontrino fuori di O^+ ;

(ii) modifichiamo la triangolazione di S^+ , identificando i vertici P^*, Q^*, R^* col suddetto punto O^+ . Più precisamente, il vertice P^* si porterà a coincidere con O^+ mediante una variazione continua effettuata entro il quadrangolo O^+P^*PQ , alla quale si assoggetteranno anche gli spigoli uscenti da P^* , in modo che PP'' e P^*Q vengano rispettivamente a sovrapporsi con O^+P'' e O^+Q . Ed in modo consimile si procederà per l'identificazione di Q^* ed R^* con O^+ ;

(iii) mediante (i) e (ii), la sfera S rimane triangolata a prescindere dai tre settori $O^+P \dots P^* \dots P^*, O^+Q \dots Q^* \dots Q^*, O^+R \dots R^* \dots R^*$. Effettueremo la triangolazione del primo di questi settori, scegliendo all'interno di esso due punti B^+, C^+ che poi congiungeremo ad O^+ mediante cammini O^+B^+, O^+C^+ (non intrecciati) che si succedano nel senso positivo da O^+P ad O^+P^* ; congiungiamo poi B^+, C^+ fra loro e con P , e C^+ con ciascuno dei punti P^* (incluso P'' , che è l'ultimo di questi). Ed in modo consimile si procederà per gli altri due settori, scegliendo in essi una coppia di punti, rispettivamente (C^+, A^+) e (A^+, B^+), ecc.

Colle precedenti operazioni abbiamo dedotto da G un grafo sferico triangolare, G^+ , il quale risulta ancora ternario in forza delle (35).

Osserviamo che G^+ ha lo stesso numero di vertici di G , poichè - nel passaggio da G a G^+ - sono scomparsi i vertici O, A, B, C, P, Q, R , ma in loro vece vengono a figurare i nuovi vertici $O^+, A^+, B^+, C^+, A', B', C'$. Notiamo

ancora che, mentre in G il vertice O aveva grado 3 (ed i gradi dei vertici ad esso adiacenti erano $3\alpha, 3\beta, 3\gamma$), il grafo G^* è tale che ciascuno dei suoi vertici A^*, B^*, C^* risulta di grado 3. Se, per fissare le idee, supponiamo

$$\delta = \min(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha,$$

rileviamo che in G^* il vertice C^* adiacente a B^* ha precisamente il grado $3(\alpha - 1)$; sicchè il carattere δ^* di G^* relativo al vertice B^* , di grado 3, risulta inferiore a δ .

Ma allora, per l'ammissa induzione rispetto a δ , il grafo G^* possiede una colorazione canonica. Avuto riguardo all'Osservazione del n. 19 ed alle (35), tale colorazione attribuisce ai vertici A^*, B^*, C^* tre colori diversi, rispettivamente uguali a quelli di A', B', C' .

Otteniamo infine una 4-colorazione di G , coll'attribuire questi tre colori rispettivamente ai vertici A, B, C , dare a ciascuno dei vertici O, P', Q', R' in G il colore di O^* in G^* , lasciando allo stesso tempo inalterato il colore degli altri vertici comuni a G^* ed a G . E si verifica agevolmente che tale 4-colorazione di G risulta essa pure canonica.

Per completare la dimostrazione del teorema del n. 19, ci resta soltanto più da trattare il caso in cui si abbia $\delta = 2$, il che accade quando in una σ due delle (33), ma non in tutte, vale il segno di uguaglianza. In tal caso uno o due dei settori considerati in (iii), ma non tutti, si riducono ciascuno ad un unico spigolo, onde non occorre più procedere alla relativa triangolazione. A parte ciò, si può ancora *mutatis mutandis* operare nel modo dianzi indicato, pervenendo ad un grafo G^* avente questa volta un numero di vertici $v^* < v$. L'ammissa induzione rispetto a v porge allora l'esistenza di una colorazione canonica di G^* , dalla quale si trae poi una colorazione canonica di G in modo consimile a quello dianzi indicato.

Il teorema del n. 19 rimane così in definitiva pienamente stabilito.

26. Quale agevole conseguenza del teorema del n. 19, possiamo ottenere una nuova dimostrazione della prima proposizione del n. 18, la quale afferma l'impossibilità di una triangolazione ternaria di un biangolo A_1A_2 , sotto la condizione che i caratteri a di questa soddisfino alle

$$(36) \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0 \pmod{3}.$$

Ed inverso, se una triangolazione T siffatta esistesse, riportiamo T su di una semisfera in guisa che A_1 ed A_2 risultino due punti diametralmente opposti del contorno di questa. Triangolando anche la semisfera complementare per simmetria rispetto al centro, otteniamo sulla sfera un grafo triangolare, il quale — in virtù delle (36) — risulta ternario (anche nei vertici A_1, A_2) ed ammette quindi (n. 19) una colorazione canonica. Ma allora basta applicare l'Osservazione del n. 19 agli spigoli del grafo che escono da A_1 (fra i quali ve ne sono due aventi il comune estremo A_2), per ottenere le conseguenze

$$a_1 = a_2 = 2 \pmod{3},$$

le quali contraddicono le (36): e ciò prova la suddetta proposizione.

27. In modo consimile, dimostreremo che:

Per una triangolazione ternaria di un triangolo $A_1A_2A_3$, ciascuno dei casi (iii), (iv) del n. 15 è totalmente da escludersi [sicché non rimangono realizzabili che i casi (i'), (ii'), per i quali veggasi il n. 17].

Sia invero T una triangolazione ternaria di $A_1A_2A_3$, che presenti il caso (iii) o (iv). Riportiamo T su di una semisfera, in guisa che A_1, A_2, A_3 risultino i vertici di un triangolo equilatero iscritto nel contorno di quella. Triangoliamo poi anche la semisfera complementare, rispettivamente per simmetria rapporto al piano $A_1A_2A_3$ od al diametro passante per A_3 . Otteniamo così sulla sfera un grafo triangolare che, in virtù delle (iii) o (iv) del n. 15, risulta ternario (anche in ciascuno dei vertici A_1, A_2, A_3).

Tale grafo ammette quindi (n. 19) una colorazione canonica. Applicando l'Osservazione del n. 19 agli spigoli del grafo che escono da A_3 (fra i quali vi sono A_1A_2 ed A_1A_3), e ricordando che per ipotesi risulta $a_3 = 2 \pmod{3}$, ne discende che la suddetta colorazione viene ad attribuire uno stesso colore ai vertici A_4 ed A_5 . Ma ciò è assurdo, in quanto questi due vertici sono fra loro adiacenti; e la contraddizione a cui siamo così pervenuti dimostra l'asserto.

28. Proveremo ora che:

Per una triangolazione ternaria di un quadrangolo $A_1A_2A_3A_4$, è impossibile che risulti

$$(37) \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 0 \pmod{3}$$

[sebbene queste congruenze siano compatibili colla (25) del n. 15].

Ed invero, se una T siffatta potesse esistere, riportiamola su di una semisfera in guisa che A_1, A_2, A_3, A_4 risultino i vertici di un rettangolo iscritto nel relativo contorno. Triangoliamo poi anche la semisfera complementare, per simmetria rispetto al diametro perpendicolare ai segmenti A_1A_2 ed A_3A_4 . Otteniamo così sulla sfera un grafo triangolare che, in virtù delle (37), risulta ternario (anche in ciascuno dei vertici A_1, A_2, A_3, A_4).

Tale grafo ammette quindi (n. 19) una colorazione canonica. Rileviamo ora che i due vertici A_1 ed A_3 sono adiacenti al vertice A_2 , in cui per ipotesi risulta $a_2 = 2 \pmod{3}$; basta quindi applicare l'Osservazione del n. 19, per vedere che nella suddetta colorazione A_1 ed A_3 debbono avere uno stesso colore. Ma A_1 ed A_3 sono anche adiacenti al vertice A_4 , in cui per ipotesi risulta $a_4 = 0 \pmod{3}$, onde quell'Osservazione porge che i colori di A_1 ed A_3 debbono invece risultare diversi; e questa contraddizione dimostra l'asserto.

È facile costruire esempi di triangolazione ternarie di un quadrangolo $A_1A_2A_3A_4$, i cui caratteri a soddisfanno all'una od all'altra delle seguenti tre quaterne di congruenze mod 3:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_3 = a_4 = 0,$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = a_3 = 2, \quad a_4 = 0,$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 2,$$

tutte naturalmente compatibili con la (25) del n. 15. Lasciamo al lettore l'investigare (in analogia con ciò che è stato fatto nei nn. 16, 17 per i biangoli e per i triangoli) quali siano i valori effettivamente assunti dai caratteri relativi alle diverse triangolazioni dei tre tipi testè indicati, stabilendo anche se per un quadrangolo esistano o meno triangolazioni ternarie di tipi ulteriori.

29. Proviamo ora la seguente proposizione:

Sia G un qualunque grafo sferico triangolare, di cui A_1 ed A_2 denotino due qualsivogliano vertici adiacenti. Se G si suppone ternario in ogni vertice distinto da A_1, A_2 , il grafo G risulta di conseguenza ternario anche in A_1 ed A_2 .

Scegliamo una delle due facce di G adiacenti ad A_1A_2 , e sia $A_1A_2A_3$. Se da G si sopprime tale faccia, si ottiene una triangolazione T del triangolo $A_1A_2A_3$ ricoperto dalla rimanente porzione di G. In virtù delle ipotesi ammesse per G, la T risulta ternaria; e denotiamo con a_1, a_2, a_3 i suoi caratteri a nei tre vertici A_1, A_2, A_3 (secondo l'accezione del n. 15).

Siccome G è per ipotesi ternario in A_3 , così risulta

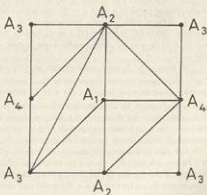
$$a_3 = 1 \pmod{3}.$$

Tenuto conto del n. 27, da qui si trae che debbono di conseguenza valere le

$$a_1 = 1 \pmod{3}, \quad a_2 = 1 \pmod{3};$$

e queste esprimono precisamente che il grafo G ha carattere ternario anche nei vertici A_1, A_2 .

La proposizione dianzi ottenuta, può venire confrontata con la prima parte dell'Osservazione del n. 9. Si noti che, anche in quella, è essenziale l'ipotesi che il grafo G sia sferico, come per esempio risulta dal grafo con quattro vertici a due a due adiacenti A_1, A_2, A_3, A_4 (effettuante una triangolazione del toro nel modo qui accanto indicato), i quali vertici hanno rispettivamente i gradi $m_1 = 4, m_2 = 8, m_3 = m_4 = 6$, di cui i primi due, ed essi soltanto, non sono multipli di tre.



Rileviamo da ultimo che, pure per la validità del teorema nel n. 19, è essenziale l'ipotesi (ivi ammessa) che il grafo G a cui esso si applica sia sferico, come risulta dal seguente esempio. Riferiamoci al grafo G definito sul toro verso la fine del n. 9, e sottoponiamo a trisezione (nel senso specificato al n. 17) ciascuna delle due facce $A_1A_2A_3$, $A_4A_5A_6$ ed una delle sue tre facce $A_7A_8A_9$. Con ciò otteniamo una nuova triangolazione G^* del toro, dotata di tre nuovi vertici ciascuno di grado tre, mentre i gradi m^* di G^* negli altri cinque vertici diventano precisamente:

$$m_1^* = m_2^* = m_3^* = 9, \quad m_4^* = m_5^* = 6.$$

Il grafo G^* possiede G quale sottografo ed è manifestamente ternario. Tuttavia esso non ammette nessuna 4-colorazione, come subito si vede in base ai nn. 2, 9.

VI. RIDUZIONE DI UN GRAFO SFERICO TRIANGOLARE A FORMA TERNARIA
 MEDIANTE TRISEZIONE, E SUFFICIENZA DELLE CONDIZIONI LOCALI
 PER UN INSIEME COLORIFICO DI SPIGOLI.

30. Al fine di stabilire la sufficienza di cui al precedente titolo, facciamo alcune premesse che ci verranno anche utili per altri scopi.

G essendo un qualunque grafo sferico triangolare, tracciato su di una sfera S , denotiamo con τ l'insieme di tutti i suoi spigoli. Una qualunque partizione (ρ, σ) di τ conduce banalmente ad attaccare — come già abbiamo fatto nel n. 7 — ad ogni elemento di τ (o spigolo di G) la lettera ρ o la lettera σ secondochè esso appartiene a ρ od a σ . Ne consegue che, nei singoli vertici P di G , restano definite delle parole (nel senso del n. 7). Orbene, diremo brevemente che l'insieme ρ (di spigoli di G) è un G -sistema, per significare che in ogni vertice P di G la relativa parola risulta lecita, e cioè ~ 1 secondo la terminologia del n. 7.

In base al n. 7, sussiste allora senz'altro la seguente proposizione:

Se G ammette una 4-colorazione K , il relativo insieme colorifico σ ha come complementare in τ un insieme ρ che è un G -sistema.

A sua volta — in virtù del n. 6, 1 — questo ρ definisce K in modo essenzialmente unico; ed il fine inizialmente proposto equivale manifestamente ad invertire la suddetta proposizione. Prima di procedere al riguardo in piena generalità, diamo alcuni semplici sviluppi relativi ai G -sistemi.

Nel caso in cui ρ sia l'insieme τ di tutti gli spigoli di G , ossia quando σ è l'insieme vuoto, dire che ρ è un G -sistema equivale — in virtù del n. 8, 4) — a supporre che il grafo G risulti pari; ma allora (n. 12) G ammette addirittura sempre una 3-colorazione (la quale può venire ritenuta come caso particolare di una 4-colorazione in cui uno dei quattro colori non venga utilizzato).

In base al n. 8, 5), dire che l'insieme vuoto è un G -sistema equivale a supporre che il grafo G risulti ternario; ma allora (n. 19) G ammette di certo almeno un a 4-colorazione, offerta da quella canonica.

Volgiamoci da ultimo al caso restante in cui ρ sia un sottoinsieme proprio e non vuoto di τ . Avuto riguardo al n. 8, 3), si stabilisce agevolmente che:

Un affatto insieme ρ , che sia un G-sistema, consta di taluno fra gli spigoli di G costituenti, nel loro assieme, un sottografo pari acente come vertici soltanto vertici di G. Questo è perciò formato da un numero finito di cicli non aventi a due a due nessuno spigolo in comune, ciascuno dei quali è semplice, non intrecciato e non attraversato da nessuno dei rimanenti cicli. Pertanto, in base al teorema di Jordan, la sfera S su cui è tracciato G viene spezzata da un qualunque G-sistema ρ non vuoto in due porzioni S' , S'' complementari (non necessariamente connesse), ciascuna delle quali risulta triangolata da G ed ammette precisamente ρ quale frontiera.

Due punti di S, nessuno dei quali stia su di uno spigolo di G, appartengono ad una stessa porzione S' , S'' se e soltanto se — uno (e conseguentemente ciascuno) dei cammini tracciati su S che congiungono quei punti, senza passare per nessun vertice di G né toccare nessuno spigolo di ρ , incontra ρ un numero pari di volte.

31. G essendo al solito un qualunque grafo sferico triangolare, prendiamo una sua faccia $A_1A_2A_3$ qualsiasi ed un punto O interno ad essa, che poi congiungiamo ai vertici mediante cammini OA_1 , OA_2 , OA_3 interni al triangolo e che a due a due non si incontrino fuori di O. In conformità col n. 17, chiameremo *trisezione* di G (relativa alla faccia $A_1A_2A_3$) l'operazione che fa passare da G al nuovo grafo sferico triangolare, G^* , che ha: come vertici, i vertici di G ed inoltre il punto O; come spigoli, gli spigoli di G ed inoltre OA_1 , OA_2 , OA_3 ; come facce, le facce di G tranne la $A_1A_2A_3$, a cui vengono sostituiti i tre triangoli OA_2A_3 , OA_3A_1 , OA_1A_2 .

È chiaro che, se G ammette una 4-colorazione K, in essa i vertici A_1 , A_2 , A_3 hanno tre colori diversi. Pertanto K individua una 4-colorazione K^* di G^* , definita assumendo per ogni vertice di G il colore stesso ch'esso ha in K, ed attribuendo ad O il quarto colore, diverso da quelli che A_1 , A_2 , A_3 hanno in K e quindi pure in K^* . Viceversa, K non è che la restrizione di K^* da G^* a G.

Nel passaggio da K a K^* , ciascuno spigolo diverso da A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_1 , A_1A_2 continua manifestamente ad essere separante o non separante (secondo l'accezione del n. 6), e cioè esso conserva il proprio colore r od s nel senso del n. 7; invece, com'è subito visto, detto c il colore (r od s) indotto da K per uno qualsiasi degli spigoli A_2A_3 , A_3A_1 , A_1A_2 , allo spigolo stesso K^* viene ad attribuire il colore opposto, c^* (rispettivamente s od r). Si ha poi che, a ciascuno dei nuovi spigoli OA_1 , OA_2 , OA_3 , la colorazione K^* attacca sempre il colore (o la lettera) s .

Il precedente capoverso permette senz'altro, noto che sia l'insieme ρ non separante di K su G, di costruire l'insieme ρ^* non separante di K^* su G^* . La relativa costruzione viene ad avere ancora significato per un insieme ρ qualsiasi di spigoli di G, e porta a formulare la seguente definizione.

Se G è un qualsiasi grafo sferico triangolare, sia G^* il grafo che da esso si deduce trisecandone una faccia $A_1A_2A_3$. Converremo di dire che la trisezione associa ad un qualunque insieme ρ di spigoli di G l'insieme ρ^* che si ottiene da ρ sopprimendo gli spigoli di ρ che eventualmente coincidessero con uno dei tre spigoli $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2$, ed aggregando invece quelli fra questi tre spigoli che eventualmente già non stessero in ρ . Diremo inoltre che uno spigolo di G o di G^* è di tipo r (quale spigolo di G o di G^*), per significare rispettivamente ch'esso è un elemento di ρ o di ρ^* ; in caso contrario, diremo che quello spigolo è di tipo s .

Ciò premesso, ci proponiamo di stabilire la seguente proposizione.

Un insieme ρ di spigoli di G è un G -sistema se, e soltanto se, l'insieme ρ^ di spigoli di G^* (associato a ρ dalla suddetta triangolazione) risulta un G^* -sistema.*

Si tratta di dimostrare che le condizioni locali che si impongono nei singoli vertici P di G affinché ρ sia un G -sistema, equivalgono a quelle similmente imposte nei singoli vertici P^* di G^* affinché ρ^* risulti un G^* -sistema.

Questo risulta intanto evidente se il punto $P = P^*$ è un vertice di G distinto da A_1, A_2, A_3 , in quanto allora ρ e ρ^* vengono a definire una stessa parola in quel punto.

Supponiamo poi che detto punto sia uno dei punti A , per esempio.

$$P = P^* = A_2.$$

Allora A_1A_2 ed A_2A_3 sono due consecutivi degli spigoli di G uscenti da A_2 , mentre invece in G^* quegli spigoli risultano intramezzati dallo spigolo OA_2 (che è sempre di tipo s), e da questo soltanto, se — come è lecito — si orienta la sfera S nel verso $A_1A_2A_3$. Allora le parole definite da ρ e da ρ^* nel punto suddetto differiscono unicamente in quanto (con ovvio significato dei simboli) le lettere consecutive $e_i e_j$ della prima debbono venir sostituite dalle $e_i^* e_j^*$ nella seconda; sicché l'equivalenza fra le due parole segue subito dall'ultima relazione (23) del n. 8.

Se infine ci riferiamo al punto O , in esso ρ non impone nessuna condizione, in quanto O non è vertice di G ; invece O è vertice di G^* e, qualunque sia ρ , la parola ivi definita da ρ^* è s^3 , la quale effettivamente risulta sempre ~ 1 , in forza della seconda relazione (21) del n. 8.

32. Con la terminologia del n. 30, sia ρ un qualsiasi G -sistema non vuoto; in virtù dell'ultima proposizione del n. 30, tale ρ individua sulla sfera S due porzioni complementari, triangolate da G , e sia S^* una qualunque di esse. Dimostreremo allora il seguente teorema.

Si effettuino su G le trisezioni definite dalle facce di G che ricoprono S^ , prese in un qualunque ordine, ottenendo così (n. 31) la successione di grafi:*

$$(38) \quad G, G^*, G^{**}, \dots, G'.$$

In virtù del n. 31, a questi vengono rispettivamente associati a partire da ρ gli insiemi

$$(39) \quad \rho, \rho^*, \rho^{**}, \dots, \rho'.$$

(costituiti da spigoli di G), i quali risultano ordinatamente dei

$$G^-, G^+, G^{**}, \dots, G^{\text{-sistemi}}.$$

Ebbene, l'insieme finale ρ' , ed esso soltanto, risulta necessariamente vuoto.

Si dovrà anzitutto mostrare che nessuno spigolo k di G può appartenere a ρ' . Ed invero, k può presentare tre casi soltanto, secondochè esso è uno spigolo di ρ , oppure è interno ad S' o ad S'' . Nel primo caso, k è di tipo r per il primo ρ degli insiemi (39); il suo tipo cambia una ed una sola volta durante il processo susindicato, e precisamente quando si effettua la trisezione relativa alla faccia di G che ha k alla frontiera e che appartiene ad S' : da quel punto in poi k risulta dunque di tipo s , ossia non appartiene più ai corrispondenti insiemi (39), fino a ρ' . Se lo spigolo k è interno ad S' , esso è inizialmente di tipo r ; poichè il tipo di k muta due volte, e due volte soltanto (precisamente quando si effettuano le trisezioni relative alle due facce di G che hanno k al contorno, ciascuna delle quali sta in S'), così da un certo punto in poi il tipo di k rimane stabilmente s ; e cioè k continua da allora a non appartenere ai corrispondenti insiemi (39), fino a ρ' . Se infine k è interno ad S'' , nessuna delle trisezioni effettuate ne muta il tipo sicchè k non appartiene a nessuno degli insiemi (39), incluso naturalmente ρ' . Si è così provato che l'insieme ρ' non può essere che vuoto.

Se poi fra gli insiemi (39) ve ne fosse un altro di vuoto, le facce di G impiegate nelle trisezioni conducenti ad esso ricoprirebbero soltanto una parte propria di S' ; questa, d'altronde, dovrebbe avere per quanto sopra la stessa frontiera ρ di S' , il che però non può essere. Ciò completa la dimostrazione del teorema.

33. Dal teorema del n. 32 possono senz'altro trarsi varie conseguenze notevoli.

Anzitutto, in virtù del n. 30, dire che il grafo G' ammette l'insieme vuoto ρ quale G' -sistema, equivale ad asserire che G' risulta ternario; sicchè, in forza del teorema del n. 19, G' viene ad ammettere la 4-colorazione canonica, K' , avente precisamente ρ' quale insieme non separante. Ma allora, considerando la successione (38) nell'ordine inverso ed applicando il n. 31 alle diverse coppie di grafi consecutivi, si vede che la restrizione di K' ai singoli grafi (38) fornisce in tale ordine certe loro 4-colorazioni

$$K, K^*, K^{**}, \dots, K',$$

aventi rispettivamente gli insiemi (39) quali insiemi non separanti.

Poichè l'ipotesi, fatta al principio del n. 32, che l'insieme ρ sia un G -sistema esprime semplicemente (in virtù del n. 30) il fatto che ρ ed il suo complemento $\sigma = \tau - \rho$ hanno da soddisfare alle condizioni locali necessarie affinché l'insieme σ risulti colorifico per G , così:

Tali condizioni locali sono anche sufficienti, e cioè esse implicano che σ abbia ad essere un insieme colorifico di G ; in altri termini, ogni G -sistema ρ risulta l'insieme degli spigoli non separanti di una 4-colorazione K di G (che si riduce ad una 3-colorazione se, e soltanto se, $\rho = \tau$).

Questo teorema non è che l'inverso di quello finale del n. 7. Avuto anche riguardo al n. 6, 1, da tali teoremi discende che:

Il numero delle 4-colorazioni distinte di un grafo sferico triangolare, G, è dato precisamente dal numero dei diversi G-sistemi. Pertanto, il problema dei quattro colori equivale ad investigare se è vero che ogni grafo sferico triangolare, G, ammette qualche G-sistema.

34. Se Σ è un insieme arbitrario di facce di un grafo sferico triangolare, G, denoteremo anche con Σ - senza alcun rischio d'equivoco - la porzione della sfera S (su cui è tracciato G) ricoperta da quelle facce. Allora è chiaro che - in qualunque caso - la frontiera di Σ risulta un insieme ρ (eventualmente vuoto) di spigoli del grafo G, costituente un sottografo pari. Inoltre, in ogni vertice P di G l'insieme Σ definisce un intero

$$\mu = \mu(P) \geq 0,$$

dato dal numero delle facce di G che stanno in Σ ed hanno un vertice in P.

Da G si deduca ora un nuovo grafo, G', coll'assoggettare a trisezione (n. 31) le facce di G che stanno in Σ . Con ciò G' viene ad acquisire dei nuovi vertici, uno all'interno di ognuna di quelle facce, in ciascuno dei quali G' ha grado 3. Gli altri vertici di G' sono tutti e soli i vertici P di G; e precisamente, detti m ed m' i gradi di G, G' in P, risulta manifestamente

$$(40) \quad m' = m + \mu,$$

dove μ denota il carattere testè introdotto di Σ in P.

Detto

$$(41) \quad \Sigma^* = S - \Sigma$$

l'insieme di facce di G complementare a Σ , le relative trisezioni portano similmente al grafo G*, il quale - per analogia con la (40) - avrà in P il grado

$$(42) \quad m^* = m + \mu^*,$$

avendo denotato con μ^* il carattere μ di Σ^* in P. In virtù della (41), è chiaro che in ogni vertice P di G risulta

$$\mu + \mu^* = m;$$

basta quindi sommare le (40), (42) fra loro a membro a membro, per vedere che è

$$m' + m^* = 3m.$$

Da qui discende che le condizioni

$$m' = 0 \pmod{3}, \text{ in ogni P,}$$

equivalgono alle

$$m^* = 0 \pmod{3}, \text{ in ogni P.}$$

Pertanto:

Se il grafo G' che si deriva da un grafo G per trisezione delle facce di un insieme Σ risulta ternario, lo stesso accade per il grafo G^ che si ottiene da G per trisezione delle facce dell'insieme Σ^* complementare a Σ .*

Un insieme Σ di facce di G tale che il corrispondente grafo G' risulti ternario, verrà brevemente detto un G -insieme. Usando questa locuzione, e poggiando sui nn. 33, 34 e particolarmente sulla (40), abbiamo che:

Affinchè un insieme Σ di facce di G risulti un G -insieme, occorre e basta che la frontiera di Σ sia un G -sistema, od anche che i caratteri μ di Σ soddisfino alla

$$(43) \quad m + \mu = 0 \pmod{3}, \quad \text{in ogni vertice } P \text{ di } G.$$

Il numero delle 4-colorazioni di G è uguale alla metà del numero degli insiemi Σ per cui valgono le (43), in quanto, mentre ogni Σ siffatto definisce una 4-colorazione di G , una tale colorazione è associata ad esattamente due G -insiemi, fra loro complementari. Pertanto:

Il problema dei quattro colori equivale ad indagare se è vero che ogni grafo sferico triangolare, G , ammette qualche G -insieme, e cioè se per G esiste qualche insieme Σ di facce che soddisfi alle (43).

Siano ora Σ_1, Σ_2 due insiemi di facce di G , aventi nei vertici P di G i caratteri μ_1, μ_2 . Gli analoghi caratteri μ_3, μ_4 dei loro insiemi intersezione e congiungente:

$$(44) \quad \Sigma_3 = \Sigma_1 \cap \Sigma_2, \quad \Sigma_4 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2,$$

soddisfano in ogni vertice P di G alla

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4;$$

sicchè, se tre di quei sistemi Σ soddisfano alle (43), lo stesso può dirsi del rimanente sistema Σ . Ne discende che:

Se quattro insiemi Σ di facce di un grafo sferico triangolare G , legati dalle (44), sono tali che tre di essi risultino dei G -insiemi e portino quindi ad altrettante 4-colorazioni di G , lo stesso deve accadere in relazione al rimanente insieme.

In modo consimile si ottengono casi ulteriori in cui, da certi G -insiemi o 4-colorazioni di G , se ne possono dedurre degli altri. Così ad esempio, poggiando ancora sulle (43), si vede agevolmente che:

Se $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ sono tre G -insiemi privi di facce ad essi tutti comuni e che nel loro complesso ricoprono G interamente, anche l'insieme

$$(\Sigma_2 \cap \Sigma_3) \cup (\Sigma_3 \cap \Sigma_1) \cup (\Sigma_1 \cap \Sigma_2)$$

risulta un G -insieme.

VII. INTERPRETAZIONE DEL PROBLEMA DEI QUATTRO COLORI
ENTRO UNA GEOMETRIA DI GALOIS,
E NUMERO DELLE 4-COLORAZIONI POSSIBILI

35. Nel presente paragrafo perverremo ad una formulazione puramente algebrica del problema dei quattro colori, nella quale interverranno certe matrici ad elementi 1 o 0 ed una calotta K completa di uno spazio di Galois $S_{f-1,2}$. Incominciamo coll'introdurre quest'ultima, stabilendo il seguente teorema.

Se in uno spazio $S_{f-1,2}$ di Galois si considerano f iperpiani indipendenti, i punti del primo che non stanno su nessuno di questi sono in numero di 2^{f-1} ed ivi costituiscono una calotta K completa.

Introduciamo in $S_{f-1,2}$ coordinate proiettive omogenee di punto $y = (y_1, y_2, \dots, y_f)$, scegliendo i suddetti iperpiani quali iperpiani coordinati $y_h = 0$ ($h = 1, 2, \dots, f$). L'insieme K dei punti di $S_{f-1,2}$ che non stanno su nessuno di tali iperpiani consta allora dei punti y per cui ciascuna delle y_h assume un valore non nullo del campo base $GF(3)$, ossia $y_h = 1$ oppure $y_h = -1$. Poichè il punto y non differisce dal punto λy se e soltanto se $\lambda = \pm 1$, così K viene a constare di esattamente 2^{f-1} punti.

Siano ora y e z due punti distinti di K ; la loro congiungente contiene quindi altri due punti di $S_{f-1,2}$, dati da $y + z$ ed $y - z$. Se uno di questi - ad esempio il primo - appartenesse esso pure a K , dovrebbe essere $y_h + z_h \neq 0$ per $h = 1, 2, \dots, f$; però, essendo $y_h = \pm 1, z_h = \pm 1$, quella relazione implica la $y_h = z_h$ (per $h = 1, 2, \dots, f$), ossia $y = z$, che contraddice l'ipotesi dianzi ammessa. Pertanto, i punti di K sono a tre a tre non allineati, e cioè K risulta di fatto una calotta.

Mostriamo poscia che, se un punto x di $S_{f-1,2}$ non sta in K , per esso passa sempre certamente qualche corda yz di K , ciò che val quanto dire che K è completa. L'ipotesi fatta sul punto x esprime che almeno una delle coordinate di tale punto è nulla, e sia per esempio $x_1 = 0$; le rimanenti coordinate saranno allora non tutte nulle e, per fissare le idee, si può ad esempio supporre $x_2 \neq 0$. Assunto quindi

$$y_1 = 1, \quad z_1 = -1, \quad y_2 = z_2 = -x_2 \quad (\neq 0),$$

ed inoltre, per $h = 3, 4, \dots, f$,

$$\text{se } x_h \neq 0: \quad y_h = z_h = -x_h,$$

$$\text{se } x_h = 0: \quad y_h = 1, \quad z_h = -1,$$

è manifesto che i punti y, z sono distinti e che ciascuno di essi appartiene a K ; inoltre, la retta yz passa per x , essendo $y + z = x$, onde l'asserto.

36. Riferiamoci ora ad un qualunque grafo, G , che sia sferico e triangolare (nn. 1, 2); e, in vista di poter giungere ad una traduzione algebrica del problema dei quattro colori (enunciato nel n. 2), proponiamoci anzitutto di dare una formulazione combinatoria delle ipotesi ammesse per G .

Il grafo G consta (n, l) di tre specie di elementi:

e vertici P_i ($i = 1, 2, \dots, v$),

s spigoli S_l ($l = 1, 2, \dots, s$),

f facce T_k ($k = 1, 2, \dots, f$),

a due a due legati da condizioni di incidenza, compendibili mediante le seguenti tre *matrici d'incidenza*:

$$A = A^{(v,s)} = \| a_{ij} \|,$$

$$B = B^{(s,f)} = \| b_{kl} \|,$$

$$C = C^{(v,f)} = \| c_{ik} \|.$$

Qui abbiamo indicato in alto il tipo delle matrici; inoltre, gli elementi a, b, c valgono tutti 0 od 1, il secondo caso avendo i seguenti significati:

$a_{ij} = 1$ se, e soltanto se, P_i è un vertice di T_k ,

$b_{kl} = 1$ se, e soltanto se, S_l è uno spigolo al contorno di T_k ,

$c_{ik} = 1$ se, e soltanto se, P_i è un estremo di S_l .

Se, in conformità col n. 1, denotiamo con m_i il grado di G nel vertice P_i , si ha che gli elementi uguali ad 1 debbono risultare così distribuiti:

1) tre in ogni riga, ed m_i nella i -ma colonna di A ;

2) tre in ogni riga, e due in ogni colonna di B ;

3) due in ogni riga, ed m_i nella i -ma colonna di C .

Dalle 1), 2), 3) discendono subito ordinatamente le uguaglianze:

$$3f = \sum_{i=1}^v m_i, \quad 3f = 2s, \quad 2s = \sum_{i=1}^v m_i,$$

la seconda delle quali non è che la (11) del n. 4 e risulta anche conseguenza immediata delle altre due.

Facciamo ora alcune osservazioni.

a) Non è restrittivo supporre che *due qualunque vertici di G siano gli estremi di al più uno spigolo di G* ; ciò val quanto dire che *la matrice*

$$J_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

non dev'essere una sottomatrice di C .

Invero, in caso contrario, ossia se G contenesse un biangolo, si potrebbe ottenere una 4-colorazione di G con procedimento induttivo analogo a quello indicato nel n. 20.

3) Supporremo inoltre — senza restrizione essenziale — che, per ogni $i = 1, 2, \dots, v$, risulti $m_i \geq 3$.

Ed infatti, se fosse $m_1 = 2$, il punto P_1 sarebbe vertice di due sole facce triangolari, aventi necessariamente gli stessi vertici. Sicché, in virtù di α), sarebbe $v = 3$; ma, per questo caso, il teorema dei quattro colori diventa del tutto banale.

Da β) discende subito che *neppure B può contenere J_2 come sottomatrice*. Invece, A contiene J_2 *come sottomatrice 3 volte*, in quanto due elementi l di A che appartengano ad una stessa riga o colonna di A stanno in una ed una sola siffatta J_2 (la quale viene a corrispondere biunivocamente alla coppia di facce di G adiacenti lungo uno spigolo, ed agli estremi di questo).

γ) Possiamo infine supporre che *tre vertici di G a due a due adiacenti (nel senso del n. 1) siano sempre necessariamente i vertici di una faccia di G*.

Invero, si considerino i tre spigoli di G che congiungono a due a due tre vertici siffatti, e le due regioni triangolari in cui essi spezzano la sfera su cui G è tracciato. Se nessuna di queste regioni fosse una faccia di G, il grafo G determinerebbe in ciascuna di esse una triangolazione avente qualche vertice interno. Chiudendo ciascuna di tali triangolazioni con l'aggiungere ad esse un'ulteriore faccia triangolare i cui lati si identifichino coi tre spigoli suddetti, si otterrebbero due grafi sferici triangolari, G', G'' , ognuno avente un numero di vertici inferiore a v . Con procedimento induttivo (analogo a quello del n. 5) se ne trarrebbe l'esistenza di 4-colorazioni per G' e G'' , dalle quali seguirebbe tosto la 4-colorabilità di G.

La condizione γ) ci permette di asserire che:

La matrice C contiene esattamente f sottomatrici quadrate del 3° ordine che, con opportune permutazioni effettuate sulle righe e sulle colonne, risultano della forma $J_3 - I_3$ (hanno cioè nulli gli elementi sulla diagonale principale ed uguali ad 1 i rimanenti); più precisamente, le sottomatrici distinte di quel tipo che contengono due elementi l di una stessa riga di C risultano sempre in numero di due.

37. Ci rimane infine da porre sotto forma combinatoria la condizione che il grafo G sia sferico, e cioè da esprimere che la superficie S costituita dalle facce triangolari T - soggette alle incidenze di cui al n. 36 - risulti *topologicamente equivalente ad una sfera*. Il base ad un classico teorema sulla topologia delle superficie (per il quale cfr. ad esempio [37], p. 140 e loc. ivi cit. a p. 319, 22), quest'ultima proprietà equivale alla simultanea validità delle seguenti quattro condizioni:

- 1) S dev'essere omogenea in ogni vertice P, e cioè l'intorno di P su S deve risultare una bicella;
- 2) S dev'essere connessa;
- 3) S dev'essere orientabile;
- 4) S dev'essere di genere zero.

Procediamo quindi a tradurre le 1)-4) algebricamente, per il tramite delle matrici A, B, C introdotte al n. 36.

1) In relazione al vertice P di G, si adottino le notazioni del n. 3. Avuto riguardo al n. 36, α), attualmente gli m punti (10) risultano distinti; sicché l'omo-

genità di S in P viene combinatoriamente espressa dalle adiacenze fra le facce (9) di cui al n. 3. Usufruendo del n. 36, 1) e 3), da qui si trae che quell'omogeneità può venire espressa col sottoporre A e C alle seguenti condizioni.

Si consideri una qualunque colonna di A , in cui figurino m elementi 1. Portando tale colonna al primo posto, ed ordinando opportunamente le altre colonne, dev'essere possibile di ordinare le m righe di A determinate dai suddetti elementi 1, in guisa tale che i tre elementi 1 che compaiono in dette m righe risultino così distribuiti:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & \\ 1 & & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & & 1 \end{array}$$

Si consideri una qualunque colonna di C , in cui figurino m elementi 1. Portando tale colonna al primo posto, ed ordinando opportunamente le altre colonne, dev'essere possibile di ordinare le m righe di C determinate dai suddetti elementi 1 e certe altre m righe di C da quelle definite, in guisa che i due elementi 1 che compaiono in tali $2m$ righe risultino così distribuiti:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & & \\ 1 & & 1 & \\ 1 & & & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & & & 1 & \\ 1 & & & & 1 \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 \end{array}$$

2) In virtù del n. 36 si ha $f = 2n/3 < n$, e quindi: il rango di B è $\leq f$. Poiché, in base al n. 36, 2), la somma di tutti gli elementi di una qualsiasi colonna di B vale 2, ed è quindi $\equiv 0 \pmod{2}$, si ha pure che: il rango mod 2 di B è $\leq f-1$.

In base al § 24 di [37], la superficie S definita da un grafo G - che soddisfi alle condizioni del n. 36 ed alla precedente condizione 1) di omogeneità - consta di un certo numero k (≥ 1) di «pseudovarietà» a due a due prive di punti comuni (ciascuna delle quali è connessa); inoltre, poggiando sulla «Satz I» di quello stesso § 24, si vede che si ha allora precisamente:

$$\text{rango mod 2 di } B = f - k.$$

Poiché chiaramente S risulta connessa se, e soltanto se, $k = 1$, così:

La proprietà di connessione della superficie S si traduce con la condizione

$$\text{rango mod 2 di } B = f - 1.$$

3) Considerati i vertici di G in un ordine determinato, e sia per fissare le idee quello dato dagli indici crescenti:

$$P_1, P_2, \dots, P_r,$$

possiamo dedurre da G un complesso simpliciale 2-dimensionale, G^* , coll'orientarne spigoli e facce in guisa che, per ognuno di quelli e di queste, i vertici si susseguano nel verso positivo secondo valori crescenti dei rispettivi indici. Con ciò rimangono definite le matrici di incidenza B^*, C^* di G^* , analoghe alle B, C del n. 36, e da esse deducibili - in un modo univocamente definito dalle precedenti convenzioni - col mutare taluno dei loro elementi da 1 in -1 [ad esempio, C^* si ricava da C col sostituire in ogni riga il primo dei due elementi 1 (e questo soltanto) con un -1]. In base a proprietà ben note (cfr. per esempio [37], § 21, (2)), le matrici B^*, C^* così introdotte soddisfano alla

$$(45) \quad B^*C^* = 0.$$

La già citata "Satz I" del § 24 di [37], mostra inoltre come i due casi della orientabilità o non orientabilità di S si differenzino per il valore del rango di B^* , fornendo che:

L'orientabilità della superficie S si traduce precisamente con la condizione:

$$\text{rango di } B^* = f - 1.$$

Aggiungiamo poi che, avuto riguardo alla (45) ed al n. 36, si ottiene senza difficoltà che le matrici A, B, C risultano connesse dall'identità

$$BC = 2A.$$

Infine, dalla 1) del n. 36 discende agevolmente che:

$$\text{rango mod } 3 \text{ di } A \leq v - 1.$$

4) Quando G soddisfa alle precedenti condizioni 1)-3), il fatto che S abbia ad essere di *genere zero* si traduce in ciò che per G deve sussistere la formula di Eulero [e cioè la (1) del n. 1]. Avuto riguardo alla (11) del n. 4, od anche al n. 36, 2), questo val quanto dire che:

I caratteri v, s, f di G (e delle matrici A, B, C) risultano fra loro legati dalle

$$f = 2v - 4, \quad s = 3v - 6.$$

38. Riferendoci ora agli sviluppi del n. 34, e tenendo conto del n. 36, è chiaro come un qualsiasi insieme Σ di facce di G sia univocamente rappresentabile sotto la forma

$$(46) \quad \Sigma = \sum_{k=1}^f s_k T_k,$$

dove ciascuna delle x assume uno qualunque dei valori 0, 1; e che l'insieme complementare sia similmente dato da

$$\Sigma^* = \sum_{i=1}^f x_i^* T_i,$$

dove $x_i^* = 1 - x_i$. In forza del n. 36, il carattere μ_i (di cui al n. 34) relativo a Σ nel vertice P_i , viene allora espresso da:

$$(47) \quad \mu_i = \sum_{h=1}^f x_h a_{hi};$$

mentre il grado m_i di G in P_i è dato dalla

$$(48) \quad m_i = \sum_{h=1}^f a_{hi}.$$

Posto per abbreviare

$$(49) \quad y_h = 1 + x_h \quad (h = 1, 2, \dots, f),$$

le $y_h \bmod 3$ assumono tutti e soli i valori -1 e $+1$; sicchè nello spazio $S_{f-1,2}$ il punto $y = (y_1, y_2, \dots, y_f)$ descrive precisamente la calotta K di cui al n. 35. Tale punto viene così a corrispondere al sistema Σ di facce di G dato dalla (46); esso non differisce dal punto $-y$ che, in guisa perfettamente analoghi, corrisponde al sistema complementare Σ^* . Pertanto:

Nel modo testè specificato, i 2^{f-1} punti di K corrispondono biunivocamente alle 2^{f-1} coppie d'insiemi complementari di facce di G .

Si è visto nel n. 34 che, affinchè uno - e quindi ambedue - gli insiemi di una coppia siffatta risultino dei G -insiemi, occorre e basta che valgano le congruenze (43). In virtù delle (47), (48), (49), nello spazio $S_{f-1,2}$ di Galois queste congruenze si riducono al sistema di equazioni lineari omogenee

$$(50) \quad \sum_{h=1}^f y_h a_{hi} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, v),$$

avente precisamente la trasposta A_{-1} della A quale matrice dei coefficienti, e definiscono quindi uno spazio $S_{t,2}$ subordinato di $S_{f-1,2}$. Per la dimensione t di quest'ultimo, in virtù del n. 37, 3) e 4), vale la limitazione

$$t \geq (f-1) - (v-1) = v-4.$$

Poggiando sul n. 34, otteniamo in conclusione che:

Il numero τ delle 4-colorazioni di un grafo sferico triangolare G_n è dato precisamente dal numero dei punti in cui la calotta K completa di $S_{f-1,2}$ (definita al n. 35) viene incontrata dal suddetto $S_{t,2}$.

Pertanto:

Il problema dei quattro colori equivale ad indagare se, per ogni matrice $A = [a_{ij}]$ che soddisfi alle condizioni algebrico-combinatorie specificate nei nn. 36, 37, lo spazio $S_{t,2}$ rappresentato dalle (50) incontra la calotta K .

Si noti che, in virtù della definizione di K , il caso contrario in cui quell' $S_{i,2}$ sia privo di punti a comune con K e che quindi fornirebbe un controesempio al teorema dei quattro colori, equivale a ciò che:

Per ogni soluzione y delle (50), qualcuna delle y_k è $\equiv 0 \pmod{3}$.

Per quanto sopra, il numero τ di cui al terz'ultimo enunciato è legato a quello ω delle soluzioni y del sistema (50), colle $y_k \in GF(3)$ tutte diverse da zero, dalla semplice relazione

$$\tau = \omega/2.$$

D'altra parte, in virtù dell'ultimo capoverso della Nota [35], il suddetto carattere ω può venire espresso colla

$$\omega = 2^f - \text{rango } M$$

dove M denota una matrice quadrata d'ordine 2^f , i cui elementi sono certe funzioni lineari omogenee della a_{ik} dipendenti linearmente ed omogeneamente da v indeterminate. Risulta pertanto:

$$\tau = \text{numero delle 4-colorazioni di } G = 2^{f-1} - \frac{1}{2} \text{ rango } M,$$

sicchè in particolare:

Il grafo G ammette qualche 4-colorazione se, e soltanto se, il determinante della suddetta matrice M si annulla su $GF(3)$ identicamente nelle v indeterminate da cui dipende.

Il problema dei quattro colori equivale dunque ad investigare se ciò ha luogo o meno, in corrispondenza ad ogni matrice A che soddisfi alle condizioni algebrico-combinatorie indicate nei nn. 36, 37. Questo rende ben conto della sostanziale complessità di quel problema, indicando allo stesso tempo un'eventuale via di attacco, che sarà presumibilmente percorribile almeno per matrici A particolari; tuttavia — con la terminologia dei nn. 7, 30, 34 — riuscirà forse in molti casi più semplice uno studio diretto delle parole lecite attaccate a G o dei G -sistemi o G -insiemi, secondo quanto apparirà dagli esempi che esporremo nel successivo § VIII (lasciando al lettore di esplicitare le corrispondenti matrici A, B, C, M).

I precedenti risultati puramente algebrici possono venire raffrontati ad alcuni di tipo consimile citati nell'Introduzione, e particolarmente a quelli risalenti a Hearwood [18], Birkhoff [2] e Veblen [43].

Si osservi inoltre che, nella precedente trattazione, è lecito semplificare il sistema (50) coll'omettere due sue equazioni che corrispondano a due vertici adiacenti P_i, P_j di G . Ed inverso, presa una delle due facce T di G aventi P_i e P_j quali vertici, non è restrittivo supporre che T non appartenga all'insieme Σ dato dalla (46), potendosi in caso contrario sostituire a Σ l'insieme complementare Σ^c . Basta allora applicare il teorema del n. 29 alla triangolazione definita da G nella regione triangolare che si ottiene sopprimendo T dalla sfera S e sottoponendo quindi a triscizione le facce di Σ , per vedere che ogni soluzione (y_1, y_2, \dots, y_f) con $y_1 y_2 \dots y_f \neq 0$ del sistema semplificato verifica altresì le due equazioni omesse.

Va rilevato che, nello spazio $S_{v-1,3}$ di Galois, il sistema semplificato rappresenta un $S_{v,3}$, che passa per $S_{v,3}$ ed ha la dimensione

$$t' \geq (f-1) - (v-2) = v-3.$$

Pertanto, il numero τ delle 4-colorazioni di G uguaglia il numero dei punti in cui tale $S_{v,3}$ incontra la suddetta calotta K completa.

VIII. ESEMPLI, ED ALTRE VIE DI ATTACCO PER IL PROBLEMA DEI QUATTRO COLORI

39. Un caso del tutto banale è quello del tetraedro, ossia di un grafo G avente 4 vertici, 6 spigoli e 4 facce, con ovvie relazioni di incidenza. Tale G risulta ternario (nel senso del n. 4), ed ammette una sola 4-colorazione, coincidente con la sua colorazione canonica. Pertanto, c'è per esso un solo G -sistema (dato dall'insieme vuoto degli spigoli di G), ed una sola coppia di G -insiemi complementari (costituita dall'insieme vuoto delle facce di G , e dall'insieme di tutte le facce di G).

Supponiamo ora che G sia una doppia piramide, costituita da una base $P_1 P_2 \dots P_n$ ($n \geq 3$) e da due ulteriori vertici fra loro opposti, O ed O' . Attualmente, ciascuno dei vertici P ha in G grado 4; sicché (n. 8) una parola lecita definita in P da una colorazione di G può soltanto essere r^4 od $(rs)^2$. Ne discende che due spigoli OP , $O'P$ sono necessariamente dello stesso tipo r od s , onde le parole lecite relative ai vertici O ed O' - ciascuno dei quali ha grado n - necessariamente coincidono. Per una colorazione di G distinguiamo due possibilità, secondoche in essa O ed O' hanno colori (i) diversi o (ii) uguali.

(i) Questa eventualità si presenta se, e soltanto se, n è pari, ossia se il grafo G è pari (nel senso del n. 4). Allora - e soltanto allora - uno e quindi ciascuno degli spigoli dell' n -gono $P_1 P_2 \dots P_n$ è di tipo s , il che implica che ciascuno dei rimanenti spigoli sia di tipo r ; la colorazione di G risulta quindi così definita in modo essenzialmente unico.

(ii) Nella seconda eventualità ciascuno degli spigoli dell' n -gono $P_1 P_2 \dots P_n$ è di tipo r , e le 4-colorazioni di G corrispondono biunivocamente alle parole lecite di n lettere (r od s) ch'esse attaccano ai vertici O ed O' . Per i primi valori di n , tali parole [a prescindere da una permutazione circolare diretta od inversa delle loro lettere: cfr. n. 8, I)] sono tutte e sole le seguenti:

$$\begin{aligned} n=3 &: r^3, \\ n=4 &: r^4, (rs)^2, \\ n=5 &: r^2s^3, \\ n=6 &: r^6, (rs^2)^2, r^2sr^2, r^4. \end{aligned}$$

In particolare, per $n=4$, da quanto sopra discende che:

Un ottaedro ammette esattamente quattro colorazioni. Una di queste è quella che attribuisce soltanto tre colori, uno a ciascuna delle tre coppie di vertici opposti.

Le altre colorazioni attaccano colori diversi ad una coppia di vertici opposti, i rimanenti due colori venendo allora attribuiti uno a ciascuna delle due restanti coppie di vertici opposti.

40. In un piano affine, consideriamo un n -gono convesso $P_1 P_2 \dots P_n$ ($n \geq 3$) e due punti O, O' l'uno interno e l'altro esterno alla regione finita da esso delimitata (ad esempio, O potrà essere il baricentro dell' n -gono, ed O' un punto all'infinito del piano); e sia poi $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ il trasformato di $P_1 P_2 \dots P_n$ mediante una omotetia di centro O e rapporto < 1 . La regione anulare racchiusa fra i due n -goni viene divisa in $2n$ triangoli dal $(2n)$ -gono

$$(51) \quad P_1 Q_1 P_2 Q_2 \dots P_n Q_n;$$

se ora congiungiamo O a ciascuno dei punti Q ed O' a ciascuno dei punti P otteniamo un grafo sferico triangolare, G , avente i seguenti caratteri:

$$v = 2n + 2, \quad s = 6n, \quad f = 4n,$$

per il quale i vertici O ed O' hanno grado n , mentre ciascuno dei vertici P, Q ha grado 5.

Avuto riguardo a ciò ch'è stato detto nel n. 39 per $n = 5$, ne discende che:

In corrispondenza ad una qualunque 4-colorazione di G , gli spigoli di tipo r debbono essere tali che ciascun vertice P o Q di G risulti estremo di esattamente due di essi, e che questi due risultino fra loro consecutivi (con ciò intendiamo significare che essi siano spigoli di una stessa faccia di G).

Da qui si trae agevolmente che:

Se esiste una 4-colorazione di G per la quale tre consecutivi fra gli spigoli del $(2n)$ -gono (51) siano di tipo r , per essa di conseguenza anche ciascuno dei $2n$ spigoli di tale poligono risulta di tipo r .

Denominati con $0, 1, 2, 3$ i quattro colori della colorazione e supposto, con'è lecito, che questa attribuisca a P_i, Q_1, P_2 rispettivamente i colori $1, 2, 3$, ne consegue che per $i = 1, 2, \dots, n$ debbono valere le relazioni

$$\text{colore di } P_i + i + 1 = 0 \pmod{3},$$

$$\text{colore di } Q_i + i = 0 \pmod{3},$$

$$\text{colore di } O = \text{colore di } O' = 0,$$

e che:

Affinchè esista una 4-colorazione di G per la quale tre consecutivi e quindi tutti gli spigoli del poligono (51) siano di tipo r , occorre e basta che risulti $n = 0 \pmod{3}$, nel qual caso la colorazione rimane definita in modo unico.

41. Esaminiamo più particolarmente il caso in cui sia $n = 5$, per il quale il grafo G del n. 40 si riduce a quello dato dai vertici e dagli spigoli di un icosaedro regolare. Questo ha grado 5 in ciascuno dei suoi 12 vertici; sicchè — in una qualunque sua 4-colorazione — precisamente 12 degli spigoli debbono

essere di tipo r , in quanto (n. 40) per ognuno dei vertici debbono uscire esattamente due spigoli di tipo r .

Due spigoli siffatti debbono poi essere fra loro consecutivi; e ciascuno di essi è pure consecutivo ad un ulteriore spigolo di tipo r . Questo non può differire dal terzo spigolo della faccia di G determinata dai primi due: invero, in caso contrario, si otterrebbero tre spigoli di tipo r , lati consecutivi di un $(2n)$ -gono come (51) avente $n = 5$, il che è però impossibile in base al risultato finale del n. 40. Pertanto:

In una qualsiasi 4-colorazione dell'icosaedro, ci sono esattamente 12 spigoli di tipo r , i quali sono caratterizzati dalla proprietà di risultare i lati di quattro facce a due a due prive di punti a comune.

Se ora fissiamo una qualunque delle 20 facce dell'icosaedro, le facce prive di punti a comune con quella sono in numero di 10, fra cui la faccia ad essa opposta e le tre a questa adiacenti. Le rimanenti

$$10 - 1 - 3 = 6$$

facce, si distribuiscono - com'è subito visto - in due terne di facce a due a due prive di punti a comune; aggregando ad una terna siffatta la faccia inizialmente considerata, otteniamo manifestamente una quaterna Σ di facce a due a due prive di punti a comune e non v'è altro modo per farlo, onde il numero complessivo di siffatte quaterne Σ vale

$$20 : 2 : 4 = 10.$$

In base al n. 34, i 10 insiemi formati dai 12 spigoli delle facce di tali quaterne sono tutti e soli i G -sistemi; inoltre, i suddetti insiemi Σ , ed i loro complementari in G , sono tutti e soli i G -insiemi. Poggiando ancora sul n. 34, ne discende subito che:

Un icosaedro G ammette precisamente dieci 4-colorazioni, ciascuna delle quali si costruisce passando al grafo ternario G' derivato da G col triseccare le facce di uno di quegli insiemi Σ , e col restringere poi a G la colorazione canonica di G' . In una siffatta 4-colorazione, le sei coppie di vertici opposti di G assumono tutte le $\binom{4}{2} = 6$ coppie di colori.

Si vede inoltre che:

Quando l'icosaedro G è regolare, le suddette dieci 4-colorazioni vengono scambiate fra loro transitivamente dai movimenti diretti ed inversi di G in sé. Quelle colorazioni si distribuiscono in due sistemi di imprimitività, comprendente ognuno cinque colorazioni e mutati in sé dai movimenti diretti di G .

Risulta in tal guisa come il problema elementare delle colorazioni dell'icosaedro sia tutt'altro che banale, potendo venir collegato con i classici sviluppi con cui F. Klein [26] ha fatto intervenire l'icosaedro regolare nella teoria delle equazioni algebriche di 5° grado. La trattazione precedente potrebbe venir anche utilizzata per determinare il polinomio cromatico dell'icosaedro: una non facile questione, su cui Birkhoff ha attirato l'attenzione alla fine del suo già citato lavoro [2].

42. Se G è un qualsiasi grafo sferico triangolare, ad ogni suo vertice P di grado m si può associare l'intero

$$c = 0, 1, 2, \quad \text{con } c \equiv m \pmod{3}.$$

Risulta quindi definito l'intero non negativo

$$k = \sum c_i,$$

che in un certo senso misura lo scarto di G dalla ternarietà e che, in virtù della (12) del n. 4, soddisfa sempre alla

$$k \equiv 0 \pmod{3}.$$

È chiaro (nn. 4, 19) che:

k risulta positivo, ad eccezione soltanto del caso in cui G sia ternario, per il quale G ammette la 4-colorazione canonica.

Nei casi restanti, e cioè se $k > 0$, sarebbe interessante studiare la distribuzione delle c in relazione alla struttura di G . Ad esempio, in base al n. 27 si ha senz'altro che

Se $k = 3$, i due o tre vertici di G in cui $c \neq 0$ non possono risultare mutuamente adiacenti fra loro.

Sullo studio proposto si potrebbe cercare di impostare una dimostrazione del teorema dei quattro colori per induzione decrescente rispetto a k , alla quale si perverrebbe provando che

Il carattere h di un grafo G non ternario può venire diminuito, col sottoporre talune facce (opportunamente scelte) di G a trisezione.

Ad esempio, per l'icosaedro (n. 41) il carattere $k = 24$ viene a diminuire di sei unità ove si trisechi una qualunque faccia di quello; ma la difficoltà risiede nell'accertare la possibilità di diminuzione per un grafo G qualsiasi, il che risulterà certamente difficile in vista della molteplicità dei casi da distinguere.

43. Una via d'attacco più sistematica per l'analisi del suddetto teorema si ha procedendo nel modo che ora passiamo ad esporre.

Ammissa per intanto in via ipotetica la falsità della congettura dei quattro colori, esisterà un grafo sferico triangolare, G , dotato del numero minimo v di vertici e per il quale la suddetta congettura viene a cadere in difetto. Pertanto, mentre G non dev'essere 4-colorabile, il teorema dei quattro colori dovrà valere per ogni grafo sferico triangolare avente meno di v vertici.

Ciò premesso, consideriamo uno qualunque degli s spigoli di G , di cui P_1 e P_2 siano gli estremi; denotiamo poi con T_1, T_2 le due facce di G adiacenti a tale spigolo P_1P_2 , e con O_1, O_2 rispettivamente i vertici di T_1, T_2 opposti a questo spigolo. In virtù del n. 36 a), γ), possiamo supporre che i punti O_1, O_2 siano fra loro distinti e non adiacenti. Ne discende che i triangoli T_1, T_2 rico-

primo un quadrangolo O, P_1, O_1, P_2 e che da G possiamo derivare un nuovo grafo sferico triangolare, G' , sopprimendo lo spigolo P_1, P_2 , le facce T_1, T_2 e — mediante una variazione continua entro quel quadrangolo — facendo tendere O_1 ed O_2 ad uno stesso punto O' interno al quadrangolo, e quindi gli spigoli P_1, O_1, P_2, O_2 ad uno stesso spigolo P_1, O' e gli spigoli P_2, O_1, P_1, O_2 ad uno stesso spigolo P_2, O' .

Il grafo G' viene a possedere $v' = v - 1$ vertici [ed inoltre $f' = f - 2$ facce ed $s' = s - 3$ spigoli, talchè esso verifica — come deve — la formula (1) di Eulero]. In virtù di quanto ammesso nel 2° capoverso del presente numero, esisterà certamente una 4-colorazione K' di G' . Si noti che, in questa, i vertici P_1 e P_2 debbono avere uno stesso colore: invero, altrimenti, si otterrebbe una 4-colorazione di G coll'assegnare ad ogni vertice di G il colore che K' attribuisce al vertice di G' derivato da quello nel modo indicato, il che non può essere in virtù di quanto ammesso per G .

Si ottengono così tante condizioni in corrispondenza agli s spigoli P_1, P_2 di G , le quali vanno studiate nel loro complesso. Un'eventuale dimostrazione della loro incompatibilità porterebbe manifestamente al teorema dei quattro colori; mentre la compatibilità condurrebbe ad un qualche grafo G che le soddisfa, di cui dovrebbe poi venire investigato se esso risulta o meno 4-colorabile, le due alternative corrispondendo rispettivamente alla validità o non validità di quel teorema.

Dal punto di vista algebrico, si ha intanto che la matrice A' di G' , analoga alla A del n. 36 relativa a G , si ottiene subito dalla A sopprimendo le due righe attinenti a T_1 e T_2 , e sostituendo alle due colonne inerenti ai vertici O_1, O_2 una sola colonna (relativa al vertice O') data dalla somma di quelle due. In base al n. 38, e con notazioni evidenti, l'esistenza della 4-colorazione K' si tradurrà nell'esistenza di una soluzione y' del sistema

$$\sum_{i=1}^{v'} y'_i a'_{iv} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, v' = v - 1),$$

analogo a (50), colle $y'_i \in GF(3)$ tutte diverse da zero.

Per fissare le idee, supponiamo che O' sia il vertice $P_{v'}$, e che O_1 ed O_2 coincidano rispettivamente con $P_{v'-1}$ e $P_{v'}$. Osserviamo inoltre, che in virtù delle (49), (46), risulta

$$y'_h = 1 + x'_h \quad (h = 3, 4, \dots, f),$$

essendo

$$x'_h = \sum_{i=1}^{v'} x'_i T'_i$$

un G' -insieme corrispondente alla 4-colorazione K' di G' . A questo possiamo associare l'insieme di facce di G dato da

$$x_h = \sum_{i=1}^{v'} x_i T_i.$$

con $x_1 = x_2 = 0$, $x_h = x'_h$ (per $h = 3, 4, \dots, f$); inoltre, per Σ e Σ' introduciamo i caratteri

$$\mu_i = \mu(P_i) \quad (i = 1, 2, \dots, v)$$

e

$$\mu'_i = \mu'(P'_i) \quad (i = 1, 2, \dots, v' = v - 1),$$

di cui al n. 34.

È manifesto che, per $i = 3, 4, \dots, v - 2$, risulta

$$m_i = m'_i, \quad \mu_i = \mu'_i,$$

e quindi

$$m_i + \mu_i = m'_i + \mu'_i = 0 \pmod{3}.$$

Poiché (nn. 33, 38) la colorazione K' di G' è quella subordinata alla colorazione canonica del grafo ternario che si ottiene da G' sottoponendo a trisezione le facce del G -insieme Σ' , utilizzando il fatto che P_1 e P_2 ammettono in K' lo stesso colore ed applicando l'Osservazione del n. 19 alla suddetta colorazione canonica, si vede che per $i = v - 1$ ed $i = v$ sussistono le congruenze:

$$m_i + \mu_i = 1 \pmod{3}.$$

Per $i = 1, 2$ si ha infine:

$$m_i = m'_i + 2, \quad \mu_i = \mu'_i,$$

e quindi

$$m_i + \mu_i = m'_i + \mu'_i + 2 = 2 \pmod{3}.$$

Basta ora svolgere, in relazione all'insieme Σ di facce di G , considerazioni analoghe a quelle indicate nel n. 38, e tener conto del n. 36, per ottenere la seguente proposizione:

L'ipotetico grafo G di cui al 2° capoverso del presente numero è tale che, mentre il relativo sistema (50) non ammette nessuna soluzione y colle $y_h \in \text{GF}(3)$ tutte diverse da zero, deve esistere qualche soluzione y siffatta per ciascuno degli s sistemi che si ottengono da (50) col porre a secondo membro:

2 invece di 0, in corrispondenza ad una coppia di valori i', i'' dell'indice i che corrispondano a due vertici adiacenti di G , talchè nella trasposta A_{-1} della matrice A c'è una sottomatrice J_2 le cui righe hanno in A_{-1} i posti i' ed i'' ;

ed 1 invece di 0, in corrispondenza ai restanti due valori di i per cui si ha un 1 in una delle due colonne di A_{-1} che contengono quella J_2 .

Va rilevato che, a norma del n. 36, 1), la somma di tutte le colonne di A consta di elementi tutti uguali a 3; ne discende che, affinchè un sistema ottenibile dalle (50) col porvi quali secondi membri degli interi arbitrari, ammetta una soluzione y colle $y_h \in \text{GF}(3)$ tutte diverse da zero, occorre che la somma di tali

secondi membri sia $\equiv 0 \pmod{3}$. Condizione, questa, che è palesemente soddisfatta per ciascuno degli s sistemi definiti nell'ultimo enunciato, ma che non è detto debba risultare sufficiente per l'esistenza di soluzioni del tipo richiesto.

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. BERGE (1967) - *Théorie des graphes et ses applications*, 10^e ed. (Paris, Dunod).
- [2] G. D. BIRKHOFF (1912-13) - *A determinat formula for the number of ways of colouring a map*, «Ann. of Math.», 14, 42-46.
- [3] G. D. BIRKHOFF (1913) - *The Reducibility of Maps*, «Amer. Journal of Math.», 35, 115-128.
- [4] G. D. BIRKHOFF and D. C. LEWIS (1946) - *Chromatic polynomials*, «Trans. Amer. Math. Soc.», 66, 335-451.
- [5] H. R. BRAUANA (1923) - *The four-color problem*, «Amer. Math. Monthly», 30, 234-243.
- [6] A. CAYLEY (1878) - *On the Colouring of Maps*, «Proc. London Math. Soc.», 9, 148.
- [7] A. CAYLEY (1879) - *On the Colouring of Maps*, «Proc. Roy. Geographic Soc.», (N.S.) 1, 259-261 - *Collected Papers*, XI, 707, 7-8.
- [8] H. S. M. CONYER (1939) - *The four-color map problem*, «The Mathematics Teacher», 52, 283-289.
- [9] S. M. DE BACKER (1946) - *Contribution au problème des quatre couleurs. Emploi des congruences module 5*, «Acad. Roy. de Belgique», (3) 32, 441-453.
- [10] G. A. DIRAC (1954) - *Theorems related to the four colour conjecture*, «Journ. London Math. Soc.», 29, 143-149.
- [11] G. A. DIRAC (1956) - *Map colour theorems related to the Heawood colour formula*, «Journ. London Math. Soc.», 31, 460-471.
- [12] A. ERBERA (1925) - *Une contribution au problème des quatre couleurs*, «Bull. Soc. Math. de France», 53, 42-55.
- [13] A. ERBERA (1927) - *Exposé historique du problème des quatre couleurs*, «Per. di Mat.», (4) 7, 20-41.
- [14] A. ERBERA (1952) - *Une vue d'ensemble sur le problème des quatre couleurs*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino», 11, 5-19.
- [15] P. FRANKLIN (1922) - *The four color problem*, «Amer. Journal of Math.», 44, 255-236.
- [16] M. GARDNER (1975) - *Set sensazionali scoperte per diversi motivi sfuggite all'attenzione del pubblico*, «Le Scienze», 83 (settembre), 86-90.
- [17] P. J. HEAWOOD (1890) - *Map-colour theorem*, «Quarterly Journ. Math.», 24, 332-338.
- [18] P. J. HEAWOOD (1898) - *On the four-colour map theorem*, «Quarterly Journ. Math.», 29, 270-285.
- [19] P. J. HEAWOOD (1932) - *On extended congruences connected with the four-colour map theorem*, «Proc. London Math. Soc.», (2) 33, 253-256.
- [20] P. J. HEAWOOD (1935) - *Failures in congruences connected with the four-colour map theorem*, «Proc. London Math. Soc.», (2) 40, 189-202.
- [21] P. HERGARD (1936) - *Bemerkungen zum Vierfarbenproblem*, «Math. Sbornik», 1, 43, 685-693.
- [22] L. HOPFFER (1891) - *Ueber das Problem der Nachbargebiete*, «Math. Ann.», 38, 477-508.

- [23] S. G. HOGGAR (1975) - *Chromatic Polynomials and Broken Cycles*, « Journ. Combin. Theory » (B), 19, 77-86.
- [24] A. B. KEMPE (1879) - *On the geographical problem of the four colours*, « Amer. Journal of Math. », 2, 193-200.
- [25] A. B. KEMPE (1879-80) - *How to colour a map with four colours*, « Nature », 21, 399-400.
- [26] F. KLEIN (1884) - *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, (Leipzig, Teubner).
- [27] K. O. MAY (1965) - *The origin of the four-color conjecture*, « Isis », 56, 346-348.
- [28] O. ORE (1965) - *I grafi e le loro applicazioni*, Trad. di L. Muracchini, dall'originale pubblicato nel 1963 dalla Yale University, (Bologna, Zanichelli).
- [29] O. ORE (1967) - *The four-color problem*, (New York, Academic Press).
- [30] O. ORE and J. STEMPLE (1968) - *On the Four Color Problem*, « Notices Amer. Math. Soc. », 15 (1), 196.
- [31] C. N. REYNOLDS (1927) - *On the problem of coloring maps in four colors*, I and II, « Ann. of Math. », (2) 28, 1-15 and 477-492.
- [32] R. C. READ (1968) - *An introduction to chromatic polynomials*, « Journ. Combin. Th. », 4, 52-71.
- [33] G. RINGEL (1959) - *Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen*, (Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften).
- [34] G. RINGEL (1974) - *Map Color Theorem*, (Berlin Heidelberg New York, Springer).
- [35] B. SEGRE (1960) - *Sul numero delle soluzioni di un qualsiasi sistema di equazioni algebriche sopra un campo finito*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », (8) 28, 271-277.
- [36] B. SEGRE (1975) - *Su di un presunto controesempio per l'ipotesi dei quattro colori*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », (8) 39 (novembre).
- [37] H. SEIFERT and W. THRELHALL (1934) - *Lehrbuch der Topologie*, (Leipzig, Teubner).
- [38] W. E. STORY (1879) - *Note on the Preceding Paper*, « Amer. Journal of Math. », 2, 201-204.
- [39] P. G. TAIT (1880) - *On the Colouring of Maps*, « Proc. Roy. Soc. of Edinburgh », 10, 301-303, 729.
- [40] H. TETZKE (1910) - *Einige Bemerkungen über das Problem des Kartenfärbens auf einseitigen Flächen*, « Jahresber. der Deutschen Math. Ver. », 19, 155-159.
- [41] H. TETZKE (1949) - *Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit*, I, II, (München, Biederstein Verlag), Bd. II, 48-67, 220-228.
- [42] G. TRUZZI (1950) - *Una osservazione sul problema dei quattro colori*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », 19, 103-107.
- [43] O. VEHLN (1912-13) - *An application of modular equations in analysis situs*, « Ann. of Math. », (2) 14, 86-94.
- [44] K. WAGNER (1936) - *Bemerkungen zum Vierfarbenproblem*, « Jahresber. der Deutschen Math. Ver. », 46, 26-32.
- [45] H. WHITNEY (1932) - *The colouring of graphs*, « Ann. of Math. », 33, 688-718.
- [46] H. WHITNEY (1937) - *A numerical equivalent of the four color map problem*, « Month. Math. Phys. », 45, 207-213.
- [47] C. E. WINN (1937) - *A case of coloration in the four color problem*, « Amer. Journ. of Math. », 59, 515-528.
- [48] C. E. WINN (1938) - *Sur l'histoire du problème des quatre couleurs*, « Bull. Inst. Egypte », 20, 191-192.
- [49] C. E. WINN (1940) - *On the Minimum Number of Polygon in an Irreducible Map*, « Amer. Journal of Math. », 62, 406-416.