MAURO PICONE (*)

Su un'equazione integrale lineare di tipo non ancora considerato (**)

SUMMARY. — Necessary and sufficient conditions are given for the existence of a solution for a certain linear integral equation. This equation intervenes in a research of the Author concerning partial differential linear equations of the first order.

Assegnati i numeri reali a, a', b, b' essendo $a < a', b < b'$, si consideri nel piano (x, y), riferito a due assi cartesiani ortogonali, il rettangolo R, luogo dei punti verificanti le limitazioni

(1) $$a \leq x \leq a' \quad , \quad b \leq y \leq b'$$

cioè, come soglio dire, di punti estremi inferiore (a, b) e superiore (a', b') e siano assegnate le funzioni reali e continue

$$\alpha(x, y, \xi) \quad , \quad \beta(x, y, \eta) \quad , \quad \gamma(x, y, \xi, \eta)$$

delle variabili reali x, y, ξ, η, definite nei punti arbitrarii (x, y) e (ξ, η) di R.

Assegnata una funzione reale $f(x, y)$, definita in R e ivi continua, si chiede se esiste e calcolarla, nel caso affermativo, una funzione reale $u(x, y)$, continua in R, verificante l'equazione integrale

(2) $$\int_a^x \alpha(x, y, \xi)\, u(\xi, y)\, d\xi + \int_b^y \beta(x, y, \eta)\, u(x, \eta)\, d\eta + \int_a^x \int_b^y \gamma(x, y, \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = f(x, y).$$

Ad una tale equazione sono pervenuto, in un caso particolare, nella mia Nota lincea: *Sull'esistenza dell'unica soluzione di una certa equazione lineare a derivate parziali del primo ordine* (1) e scopo della presente è di dare condizioni

(*) Accademico dei XL.

(**) Presentata il 3 gennaio 1975.

(1) Rendiconti della Classe di Scienze fisiche dell'Accademia Nazionale dei Lincei. Serie VIII, vol. LIV, fascicolo 5, Maggio 1973.

necessarie e condizioni sufficienti per l'esistenza di soluzioni della (1) e, nel caso dell'esistenza un metodo per il loro calcolo.

È intanto ovvio che condizione necessaria affinché l'equazione (1) possieda soluzioni è che si abbia

$$f(a\,,b)=0\,, \tag{3}$$

e tale eguaglianza sarà sempre supposta verificata in seguito.

1. Caso $a(x\,,y\,,\xi)=\beta(x\,,y\,,\eta)=0$ in R. In tal caso l'equazione (1) si riduce alla classica equazione integrale di Volterra, di prima specie,

$$\int_a^x\int_b^y \gamma(x\,,y\,,\xi\,,\eta)\,u(\xi\,,\eta)\,d\xi\,d\eta=f(x\,,y)\,, \tag{4}$$

alla quale credo opportuno dare qui la seguente breve trattazione.

Evidentemente, condizione necessaria affinché sia possibile soddisfare la (4) è che si abbia, identicamente,

$$f(a\,,y)=f(x\,,b)=0\,. \tag{5}$$

Se si suppone che la funzione $\gamma(x\,,y\,,\xi\,,\eta)$ abbia, continue in R, le derivate parziali

$$\gamma_x(x\,,y\,,\xi\,,\eta)\quad,\quad \gamma_y(x\,,y\,,\xi\,,\eta)\quad,\quad \gamma_{xy}(x\,,y\,,\xi\,,\eta) \tag{6}$$

e sia sempre ivi

$$\gamma(x\,,y\,,x\,,y)\neq 0\,, \tag{7}$$

condizione necessaria affinché la (4) possiede la richiesta soluzione è che siano, continue in R, le derivate

$$f_x(x\,,y)\quad,\quad f_y(x\,,y)\quad,\quad f_{xy}(x\,,y)$$

ed in tale ipotesi, verificandosi le (5), l'equazione (4) equivale alla seguente

$$u(x\,,y)=\frac{f_{xy}(x\,,y)}{\gamma(x\,,y\,,x\,,y)}-\int_a^x\frac{\gamma_x(x\,,y\,,\xi\,,y)}{\gamma(x\,,y\,,x\,,y)}\,u(\xi\,,y)\,d\xi$$

$$-\int_b^y\frac{\gamma_y(x\,,y\,,x\,,\eta)}{\gamma(x\,,y\,,x\,,y)}\,u(x\,,\eta)\,d\eta-\int_a^x\int_b^y\frac{\gamma_{xy}(x\,,y\,,\xi\,,\eta)}{\gamma(x\,,y\,,x\,,y)}\,u(\xi\,,\eta)\,d\xi\,d\eta\,,$$

la quale, com'è ben noto, possiede una ed una sola soluzione, che può essere calcolata mediante approssimazioni successive.

Sussiste dunque il teorema:

I. *Supposta soddisfatta la* (7), *se, per* $(x\,,y)$ *e* $(\xi\,,\eta)$ *in* R, *sussistono le identità* (5) *e le*

$$a(x\,,y\,,\xi)=\beta(x\,,y\,,\eta)=0$$

ed ivi suppostevi continue le derivate (6), *è sempre*

$$\gamma(x, y, x, y) \neq 0,$$

l'equazione (1) *possiede una ed una sola soluzione, continua in* R *che può essere calcolata per approssimazioni successive.*

2. Caso generale. Per $x = a$ e per $y = b$, le due funzioni

$$u(a, y) \quad , \quad u(x, b)$$

devono, rispettivamente, soddisfare le due equazioni integrali di Volterra, di prima specie,

$$\int_b^y \beta(a, y, \eta)\, u(a, \eta)\, d\eta = f(a, y),$$

$$\int_a^x \alpha(x, b, \xi)\, u(\xi, b)\, d\xi = f(x, b),$$

e quindi, supposta l'esistenza e la continuità in R, delle derivate

(8) $$\beta_y(a, y, \eta) \quad , \quad \alpha_x(x, b, \xi) \quad , \quad f_y(a, y) \quad , \quad f_x(x, b),$$

le due equazioni

(9) $$\begin{cases} \beta(a, y, y)\, u(a, y) + \int_b^y \beta_y(a, y, \eta)\, u(a, \eta)\, d\eta = f_y(a, y), \\ \alpha(x, b, x)\, u(x, b) + \int_a^x \alpha_x(x, b, \xi)\, u(\xi, b)\, d\xi = f_x(x, b). \end{cases}$$

Se si suppone che risulti

(10) $$\begin{cases} \beta(a, y, y) \neq 0, & \text{per } b \leq y \leq b', \\ \alpha(x, b, x) \neq 0, & \text{per } a \leq x \leq a', \end{cases}$$

la prima e la seconda delle equzioni (9) sono equazioni integrali lineari di Volterra, di seconda specie, il soddisfacimento delle quali è possibile e determina le funzioni

(11) $$u(a, y) \quad , \quad u(x, b).$$

Sussiste dunque il teorema:

II. *Nell'ipotesi dell'esistenza e della continuità, in* R, *delle derivate* (8) *e siano verificate le* (10), *della soluzione* $u(x, y)$ *dell'equazione integrale* (2) *riescono determinati i valori* (11) *che essa deve assumere sui lati* $x = a$ *e* $y = b$ *del rettangolo* R, *ma la coincidenza di tali valori, rispettivamente, per* $y = b$ *e per* $x = a$, *fornisce la seguente ulteriore condizione necessaria per l'esistenza della soluzione*

$$\frac{f_y(a, b)}{\beta(a, b, b)} = \frac{f_x(a, b)}{\alpha(a, b, a)}.$$

3. Traduzione dell'equazione (1) in un sistema di infinite equazioni integrali di Fischer–Riesz. Assunto un abritrario sistema

$$\varphi_1(x,y),\ \varphi_2(x,y),\cdots,\ \varphi_k(x,y),\cdots,$$

di funzioni reali, continue in R, ivi hilbertianamente completo, condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione (1) sia soddisfatta è che lo siano le infinite seguenti

$$\int_a^{a'}\int_b^{b'}\Big[\int_a^x \alpha(x,y,\xi)\,u(\xi,y)\,d\xi+\int_b^y \beta(x,y,\eta)\,u(x,\eta)\,d\eta$$

$$+\int_a^x\int_b^y \gamma(x,y,\xi,\eta)\,u(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\Big]\varphi_k(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_a^{a'}\int_b^{b'} f(x,y)\,\varphi_k(x,y)\,dx\,dy, \qquad (k=1,2,\cdots)$$

che si scrivono

$$\int_a^{a'}\int_b^{b'} u(\xi,\eta)\,\psi_k(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=\int_a^{a'}\int_b^{b'} f(x,y)\,\varphi_k(x,y)\,dx\,dy, \tag{12}$$

essendo

$$\psi_k(\xi,\eta)=\int_\xi^{a'} \alpha(x,\eta,\xi)\,\varphi_k(x,\eta)\,dx+\int_\eta^{b'} \beta(\xi,y,\eta)\,\varphi_k(\xi,y)\,dy \tag{13}$$

$$+\int_\xi^{a'}\int_\eta^{b'} \gamma(x,y,\xi,\eta)\,\varphi_k(x,y)\,dx\,dy.$$

Si ha dunque il teorema:

III. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione* (1) *abbia una ed una sola soluzione è che il sistema di funzioni* $[\psi_k(\xi,\eta)]$ *dedotto dal sistema* $[(\varphi_k(x,y)]$, *hilbertianamente completo in* R, *mediante le* (13), *sia esso pure ivi hilbertianamente completo e sia soddisfatta la nota condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema* (12) *nella funzione incognita* $u(x,y)$ *possieda la soluzione* (2).

Un tale ovvio teorema sussiste d'altronde, per equazioni integrali *lineari* di qualsivoglia tipo e forse una paziente ricerca bibliografica potrebbe farlo relegare fra cose già note.

4. Caso pluridimensionale. Avrebbe interesse, a mio avviso, considerare le equazioni integrali, estensioni della (1), al caso di un qualsivoglia numero

(2) Cfr. Picone e Viola, *Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione*, pag. 240.

di variabili reali indipendenti. Se tale numero è tre, si dovrebbe considerare un dominio rettangolare R dello spazio a tre dimensioni, x, y, z, di punti estremi inferiore (a, b, c) e superiore (a', b', c') essendo assegnate le funzioni

$$\alpha(x, y, z, \xi) \quad , \quad \beta(x, y, z, \eta) \quad , \quad \gamma(x, y, z, \zeta)$$
$$\alpha_1(x, y, z, \xi, \eta) \quad , \quad \beta_1(x, y, z, \eta, \zeta) \quad , \quad \gamma_1(x, y, z, \zeta, \xi),$$
$$\delta(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \quad , \quad f(x, y, z)$$

per punti (x, y, z) e (ξ, η, ζ) in R, funzioni ivi continue e ricercare una funzione $u(x, y, z)$, del pari continua in R, verificante ivi l'equazione integrale:

$$\begin{aligned} (14) \qquad & \int_a^x \alpha(x, y, z, \xi)\, u(\xi, y, z)\, d\xi + \int_b^y \beta(x, y, z, \eta)\, u(x, \eta, z)\, d\eta \\ & + \int_c^z \gamma(x, y, z, \zeta)\, u(x, y, \zeta)\, d\zeta \\ & + \int_a^x \int_b^y \alpha_1(x, y, z, \xi, \eta)\, u(\xi, \eta, z)\, d\xi\, d\eta \\ & + \int_b^y \int_c^z \beta_1(x, y, z, \eta, \zeta)\, u(x, \eta, \zeta)\, d\eta\, d\zeta \\ & + \int_c^z \int_a^x \gamma_1(x, y, z, \zeta, \xi)\, u(\xi, y, \zeta)\, d\zeta\, d\xi \\ & + \int_a^x \int_b^y \int_c^z \delta(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)\, u(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = f(x, y, z). \end{aligned}$$

Quest'equazione, per $y = b$ e $z = c$, per $z = c$ e $x = a$, per $x = a$ e $y = b$ dà luogo a tre equazioni integrali di Volterra, di prima specie, e pertanto, supponendo l'esistenza e la continuità di alcune derivate parziali delle funzioni assegnate, si perviene ad un teorema (cfr. teor. II) secondo il quale sono determinati i valori della soluzione u della (14), lungo le tre costole del parallelepipedo R uscenti dal suo vertice (a, b, c) e due eguaglianze sulle funzioni assegnate necessarie, oltre la $f(a, b, c) = 0$, per l'esistenza della soluzione stessa.