P. DE BARTOLOMEIS (*)

Algebre di Stein nel caso reale (**)

SUMMARY. — Results recently given by O. Forster [9, 10] for the Stein algebras attacled to analytic spaces in the complex field are here extended, employing suitable new techniques, to the real field.

INTRODUZIONE

Dato uno spazio di Stein, non necessariamente ridotto, $(X, \mathcal{O}_X)$ si consideri l'algebra $A = H^0(X, \mathcal{O}_X)$, che viene detta algebra di Stein.

O. Forster in vari lavori ([9] e [10]) studia le proprietà delle algebre di Stein ed, in particolare, dimostra:

1) che dall'algebra $A = H^0(X, \mathcal{O}_X)$ si può recuperare lo spazio $(X, \mathcal{O}_X)$ (in sostanza $(X, \mathcal{O}_X)$ è isomorfo allo spettro massimale chiuso di $H^0(X, \mathcal{O}_X)$);

2) per le algebre di Stein (che non sono noetheriane) valgono molte proprietà degli anelli noetheriani;

3) per gli ideali delle algebre di Stein si hanno teoremi di decomposizione primaria;

tali risultati si ottengono in gran parte usando il fatto che le algebre di Stein hanno naturale struttura di spazio di Fréchet.

Scopo di questo lavoro è di estendere i risultati di O. Forster alle algebre $A = H^0(X, \mathcal{O}_X)$ dove $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio analitico reale; in questo caso non esiste su A una struttura di spazio di Fréchet e quindi bisogna ricorrere ad altre tecniche: a tale scopo si introducono gli ideali speciali che sostituiscono gli ideali chiusi. Usando gli ideali speciali si ridimostrano nel caso reale quasi tutte le proprietà date da O. Forster nel caso complesso.

(*) Pisa, Scuola Normale Superiore, Piazza de' Cavalieri 7.

(**) Memoria presentata dall'Accademico dei XL BENIAMINO SEGRE il 7 marzo 1975.

CAPITOLO 0

Questo capitolo contiene una breve esposizione dei risultati principali della teoria degli spazi analitici, risultati che costituiscono la base delle sezioni successive.

0.1. *Teoria classica e teorica coerente*

Nozione centrale è quella di fascio coerente: sia $\mathscr{H}$ un fascio di anelli con identità sopra uno spazio topologico X.

Definizione 0.1.1. Un fascio $\mathscr{F}$ di $\mathscr{H}$-moduli si dice $\mathscr{H}$-coerente o, più semplicemente, coerente se:

a) è di tipo finito:

$$\forall x \in X \quad \exists U \in \mathfrak{U}(x), \quad \exists a_1, \cdots, a_{n_x} \in H^0(U, \mathscr{F})$$

t.c. $\forall y \in U \; a_{1,y}, \cdots, a_{n_x,y}$ generano $\mathscr{F}_y$ come $\mathscr{H}_y$-modulo;

b) $\forall W$ aperto di X, $\forall \varphi : \mathscr{H}^n_{|W} \to \mathscr{F}_{|W}$ omomorfismo di fasci, ker φ è di tipo finito.

Sia **K** un corpo che può essere **R** o **C**, sia Ω un aperto di $\mathbf{K}^n$: indicheremo con $\mathcal{O}(\Omega)$ il fascio dei germi delle funzioni analitiche su Ω.

Definizione 0.1.2. Si dice **K**-modello locale (di spazio analitico) il dato di una coppia $(\Omega, \mathscr{I})$ dove Ω è un aperto di $\mathbf{K}^n$ e $\mathscr{I}$ è un fascio coerente di ideali di $\mathcal{O}(\Omega)$;

dato il modello locale $(\Omega, \mathscr{I})$ sia $Y = \operatorname{supp} \mathcal{O}(\Omega)/\mathscr{I}$:

considerato il fascio $\mathscr{C}(Y)$ dei germi di funzioni continue su Y a valori in **K**, si ha l'omomorfismo canonico

$$\rho : \quad \mathcal{O}(\Omega)/\mathscr{I} \,|\, Y \to \mathscr{C}(Y)$$

definito da: $f_x \mapsto f(x) = f_x/\mathfrak{M}_x$ valore di f in x, con $\mathfrak{M}_x$ ideale massimo di $(\mathcal{O}(\Omega)/\mathscr{I})_x$: se ρ è iniettivo, il modello si dice ridotto;

è chiaro che ogni modello locale individua un insieme analitico, appunto $Y = \operatorname{supp} \mathcal{O}(\Omega)/\mathscr{I}$, in senso classico; i teoremi di Oka-Cartan ed in particolare il seguente

TEOREMA 0.1.3. *Sia* A *un sotto-insieme analitico complesso di* $\Omega \subset \mathbf{C}^n$: $\mathscr{I}(A)$ *il fascio dei germi di funzioni olomorfe nulli su* A *è coerente*

assicurano che se $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ è vero l'inverso, identificando in sostanza la teoria classica con quella che puo essere definita teorica coerente degli spazi analitici;

esempi celebri mostrano come nel caso reale il Teorema 0.1.3 sia falsa, anzi Cartan ha dimostrato il seguente

TEOREMA 0.1.4. *Sia* A *un sottoinsieme analitico di* Ω *aperto di* $\mathbf{R}^n$: *sono fatti equivalenti*:

a) A *è il luogo di zeri di un fascio coerente di ideali di* $\mathcal{O}(\Omega)$;

b) A *è il luogo di zeri di un numero finito di elementi di* $H^0(\Omega, \mathcal{O}(\Omega))$;

egli ha dato inoltre esempi di sottoinsiemi analitici reali non definibili globalmente; questi fatti mostrano chiaramente come, come nel caso reale, la teoria classica e la teoria coerente risultino essenzialmente distinte.

Noi ci occuperemo soltanto della teoria coerente.

Definizione 0.1.5. Si dice spazio **K**-analitico il dato di $(X, \mathcal{O})$ (X spazio topologico, $\mathcal{O}$ fascio di anelli di base X), localmente rappresentabile come **K**-modello locale; se le rappresentazioni locali sono tutte ridotte, lo spazio si dice ridotto.

N. B. In base a questa definizione, chiameremo nel seguito spazio analitico reale quello che spesso, nella letteratura, è indicato come spazio analitico reale coerente.

0.2. *Spazi di Stein, Teoremi* A *e* B.

Definizione 0.2.1. Uno spazio analitico complesso $(X, \mathcal{O})$ si dice di Stein se:

a) X è a base numerabile;

b) $(X, \mathcal{O})$ è olomorficamente convesso: dato K compatto di X, l'inviluppo olomorfo di K

$$\hat{K} = \{x \in X \mid \forall f \in H^0(X, \mathcal{O}), |f_x/\mathfrak{M}_x| \leq \sup_{y \in K} |f_y/\mathfrak{M}_y|\}$$

è compatto;

c) $\forall x \in X \quad \exists n_x \in \mathbf{N} \quad \exists \Phi : (X, \mathcal{O}) \to \mathbf{C}^{n_x}$ che fornisce una realizzazione locale;

d) le sezioni globali seperano i punti;

è noto che *a*)-*d*) ammettono svariate formulazioni equivalenti; la fecondità della teoria degli spazi di Stein appare immediatamente non appena si considerino i teoremi di Serre-Cartan:

TEOREMA 0.2.2. *Sia* $(X, \mathcal{O})$ *uno spazio di Stein*, $\mathcal{F}$ *un fascio coerente di* $\mathcal{O}$*-moduli di base* X, *allora*:

TEOREMA A: $\forall x \in X$ $\mathcal{F}_x$ *è generato da elementi di* $H^0(X, \mathcal{F})$;

TEOREMA B: $\forall q \geq 1$ $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$.

Il Teorema B è potentissimo e rappresenta la vera chiave di volta della teoria: un'applicazione tipica, la cui importanza risulterà evidente nel seguito (cfr. per esempio 1.1) è la seguente: sia $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ una successione esatta di fasci di $\mathcal{O}$-moduli su uno spazio di Stein $(X, \mathcal{O})$ e $\mathcal{F}'$ sia coerente: un notissimo risultato di algebra omologica (il cosiddetto Lemma del serpente) assicura che è esatta la successione:

$$0 \to H^0(X, \mathcal{F}') \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{F}'') \to$$
$$\to H^1(X, \mathcal{F}') \to H^1(X, \mathcal{F}) \to \cdots$$

per il teorema B $H^1(X\mathscr{F}') = 0$ quindi risulta essere esatta la successione delle sezioni globali:

$$0 \to H^0(X, \mathscr{F}') \to H^0(X, \mathscr{F}) \to H^0(X, \mathscr{F}'') \to 0 .$$

Il Teorema A ammette anche la seguente generalizzazione:

TEOREMA 0.2.3. *Sia* $(X, \mathcal{O})$ *uno spazio di Stein, sia* $\mathscr{F}$ *un fascio coerente di* $\mathcal{O}$*-moduli: per il Teorema* A:

$\forall x \in X \quad \exists f_1, \cdots, f_{r_x} \in H^0(X, \mathscr{F})$ t.c. $f_{1,x}, \cdots, f_{r_x,x}$ *generano* $\mathscr{F}_x$ *su* $\mathcal{O}_x$: *allora*:

a) *se* $\exists q \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall x \in X\ r_x \leq q\ \exists \tilde{q} = \tilde{q}(q)\ \exists f_1, \cdots, f_{\tilde{q}} \in H^0(X, \mathscr{F})$ t.c. $\forall y \in X\ f_{1,y}, \cdots, f_{\tilde{q},y}$ *generano* $\mathscr{F}_y$ *su* $\mathcal{O}_y$;

b) *se* $\nexists q \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall x \in X\ r_x \leq q\ \exists (f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *successione di elementi di* $H^0(X, \mathscr{F})$ t.c. $\forall y \in X$, $(f_{n,y})_{n \in \mathbf{N}}$ *generano* $\mathscr{F}_y$ *su* $\mathcal{O}_y$.

0.3. *Complessificazione, Teoremi* A *e* B *nel caso reale.*

Definizione 0.3.1. Sia $(X, \mathcal{O})$ uno spazio analitico reale: lo spazio analitico complesso $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}})$ si dice complessificazione di $(X, \mathcal{O})$ se:

a) $X \subset \tilde{X}$ ed è chiuso;

b) $\forall x \in X \qquad \tilde{\mathcal{O}}_x = \mathcal{O}_x \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$;

dato uno spazio analitico complesso $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}})$ è possibile definire, in modo ovvio, in base alle realizzazioni locali, localmente una struttura reale soggiacente: si prova facilmente che tale struttura in toto è indipendente dalle realizzazioni locali, il che permette di parlare di struttura reale soggiacente globale $(\tilde{X}^{\mathbf{R}}, \tilde{\mathcal{O}}^{\mathbf{R}})$ su cui si possono definire in maniera canonica sezioni olomorfe e sezioni antiolomorfe.

Definizione 0.3.2. Dati due spazi analitici complessi $(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$, $(\tilde{Y}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}})$ si dice applicazione antiolomorfa di $\tilde{X}$ in $\tilde{Y}$ il dato di un morfismo $(\varphi, {}^*\varphi) : (\tilde{X}^{\mathbf{R}}, \mathcal{O}^{\mathbf{R}}_{\tilde{X}}) \to (\tilde{Y}^{\mathbf{R}}, \mathcal{O}^{\mathbf{R}}_{\tilde{Y}})$ t.c. ${}^*\varphi$ mandi sezioni olomorfe in sezioni antiolomorfe.

Definizione 0.3.3. Dato uno spazio complesso $(\tilde{X}, \mathcal{O})$ si dice anti-involuzione su $\tilde{X}$ un'applicazione antiolomorfa σ di $\tilde{X}$ in sé t.c. $\sigma^2 = \text{id}$.

Si hanno a questo punto una serie di risultati:

TEOREMA 0.3.4. (*Teorema di complessificazione*): *sia* $(X, \mathcal{O}_X)$ *uno spazio analitico reale: esiste sempre una complessificazione* $(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ *di* $(X, \mathcal{O}_X)$; *inoltre*:

a) *se* $(X, \mathcal{O}_X)$ *è ridotto,* $(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ *può essere costruito ridotto;*

b) *se* X *è paracompatto, si può costruire* $\tilde{X}$ *paracompatto e su un intorno di* X *in* $\tilde{X}$ *risulta definita un'anti-involuzione* σ *di cui* X *è parte fissa.*

TEOREMA 0.3.5. *Siano* $(X, \mathcal{O}_X)$ *uno spazio analitico reale paracompatto e* $(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ *una sua complessificazione paracompatta: lo spazio* X *ha in* $\tilde{X}$ *un sistema fondamentale di intorni che sono spazi di Stein.*

TEOREMA 0.3.6. *Sia* $(X, \mathcal{O}_X)$ *uno spazio analitico reale,* $\mathcal{F}$ *un fascio coerente di* $\mathcal{O}_X$*-moduli:*

$\exists (\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ *complessificazione (di Stein) di* $(X, \mathcal{O}_X)$, $\exists \tilde{\mathcal{F}}$ *fascio coerente di* $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$*-moduli che prolunga* $\mathcal{F}$ *nel senso che* $\forall x \in X$, $\tilde{\mathcal{F}}_x = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$; *inoltre tale prolungamento è unico nel senso che se* $\tilde{\mathcal{F}}_1$ $\tilde{\mathcal{F}}_2$ *prolungano* $\mathcal{F}$, *in un opportuno intorno di* X *essi coincidono.*

Questi sono i risultati centrali per l'estensione al caso reale dei Teoremi A e B.

Diamo adesso una breve traccia di come ottenere tale estensione: sia $(X, \mathcal{O})$ uno spazio analitico reale, sia $\mathcal{F}$ un fascio coerente di $\mathcal{O}$-moduli: in base a 0.3.6, esso è estendibile come $\tilde{\mathcal{F}}$ ad una complessificazione $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}})$ di $(X, \mathcal{O})$; sia $(X_i)_{i \in I}$ un sistema fondamentale di intorni di Stein di X in $\tilde{X}$; per $q \geq 1$ si ha:

$$H^q(X, \mathcal{F}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = H^q(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) = H^q(X, \tilde{\mathcal{F}}) = \varinjlim H^q(X_i, \tilde{\mathcal{F}}) = 0$$

che dà immediatamente il Teorema B per spazi analitici reali paracompatti; il Teorema A si ottiene in modo assai facile; nel seguito considereremo solo spazi paracompatti.

0.4. *Teoremi di immersione.*

H. Grauert e R. Remmert hanno dimostrato il seguente

TEOREMA 0.4.1. *Sia* $(X, \mathcal{O})$ *uno spazio di Stein ridotto di dimensione complessa* n*: allora esiste un'applicazione iniettiva analitica propria e di rango massimo nei punti regolari:*

$$\Phi: \quad X \to \mathbf{C}^{2n+1}$$

se inoltre, ogni punto di X *ha un intorno aperto realizzabile in* $\mathbf{C}^q$, q *fisso* $> n$, *allora* $(X, \mathcal{O})$ *è isomorfo ad un sottoinsieme analitico di* $\mathbf{C}^{n+q}$ *ed ammette equazioni globali.*

Anche questo Teorema ha un'estensione reale nel seguente

TEOREMA 0.4.2. *Sia* $(X, \mathcal{O})$ *uno spazio analitico reale di dimensione* n*: indicato con* X_{rid} *lo spazio ridotto associato, esiste un'applicazione:*

$$\Phi: \quad X_{rid} \to \mathbf{R}^{4n+2}$$

iniettiva analitica propria e di rango massimo nei punti regolari.

0.5. *Convessità olomorfa negli spazi di Stein.*

È di Oka e Weil il seguente

Teorema 0.5.1. *Sia* $(\tilde{X}, \mathcal{O})$ *uno spazio di Stein ridotto,* $U \subset \tilde{X}$ *un aperto d'olomorfia: sono fatti equivalenti:*

a) *assegnata comunque* $f \in H^0(U, \mathcal{O})$, $\forall K$ *compatto di* U, $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists g \in H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}) \quad \text{t.c.} \qquad |g(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in K$$

b) U *è* $\tilde{X}$*-convesso:*

assegnato $K \subset U$ *compatto, l'inviluppo* $\tilde{X}$*-convesso di* K

$$\hat{K} = \{x \in U \mid \forall f \in H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}) \ |f(x)| \leq \sup_{y \in K} |f(y)|\}$$

è compatto;

un aperto che goda di una e quindi di tutte le precedenti proprietà si dice di Runge o $\tilde{X}$*-convesso.*

In particolare si ricava il Teorema di approssimazione di Runge:

Teorema 0.5.2. *Sia* $(\tilde{X}, \mathcal{O})$ *uno spazio di Stein ridotto, un aperto di Runge: l'applicazione naturale di restrizione:*

$$H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}) \to H^0(U, \mathcal{O})$$

è densa per la topologia della convergenza uniforme sui compatti.

Si noti che, nel Teorema 0.5.1, richiedendo approssimazione sui valori, si può togliere facilmente l'ipotesi di riduzione. Anche il Teorema 0.5.2: sussiste nel caso di $(\tilde{X}, \mathcal{O})$ spazio di Stein non ridotto, quando $H^0(U, \mathcal{O})$ sia dotato della topologia che descriveremo in 1.1, ma la dimostrazione non appare immediata conseguenza di quanto già visto.

Nota bibliografica al Capitolo 0.

Per quanto riguarda la teoria dei fasci, rimando canonico è R. Godement [12];

i problemi dei fasci coerenti e dei rapporti fra teoria classica e coerente sono essenzialmente in H. Cartan [5] e [7], mentre i Teoremi A e B si trovano in H. Cartan [6]; la generalizzazione del teorema A è dovuta a S. Coen [8];

la complessificazione (e quindi l'estensione al caso reale dei Teoremi A e B), provata sui modelli locali sempre in H. Cartan [7], ha successive estensioni in F. Bruhat e H. Whitney [3], H. Grauert [13] e A. Tognoli [24] e [25];

la dimostrazione dei teoremi di immersione, pur più volte annunciata da H. Grauert e R. Remmert, è apparsa solo nel 1960 in R. Narasimhan [16]; l'estensione al caso reale si trova in A. Tognoli [25] ed infine, le questioni sulla convessità olomorfa si possono studiare sulla base di K. Oka [18], H. Behnke [2] e K. Stein [23].

CAPITOLO 1

ALGEBRE DI SEZIONI GLOBALI DI SPAZI ANALITICI

1.1. *Algebre di Stein.*

Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio analitico complesso:

$\mathcal{O}_X$ ammette in modo naturale la struttura di fascio di Fréchet, t.c. cioè $\forall U$ aperto di X la C-algebra $H^0(U, \mathcal{O}_X)$ delle sezioni di $\mathcal{O}_X$ su U sia uno spazio di Fréchet ed inoltre tutte le applicazioni di restrizione risultino continue:

$$\forall x \in X \quad \exists U_x \in \mathcal{U}(x) \text{ t.c. } \quad (U_x, \mathcal{O}_X)$$

è isomorfo ad un modello locale: cioè $\exists \Omega$ aperto di un opportuno C^n, $\exists \mathcal{I}$ fascio coerente di ideali di $\mathcal{O}(\Omega)$ per cui se $Y = \operatorname{supp} \mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{I}$ si ha:

$$(U_x, \mathcal{O}_X) \simeq (Y, \mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{I})$$

risulta inoltre la successione esatta di fasci:

$$0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{I} \to 0$$

è ovvio che Ω può essere scelto di Stein, per esempio un policilindro: quindi per il teorema B si ha la corrispondente successione esatta fra le sezioni, da cui si ricava:

$$H^0(U_x, \mathcal{O}_X) \simeq H^0(Y, \mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{I}) \simeq H^0(\Omega, \mathcal{O}(\Omega))/H^0(\Omega, \mathcal{I});$$

$H^0(\Omega, \mathcal{I})$ (cfr. 1.3 a) è un sottospazio chiuso dello spazio di Fréchet $H^0(\Omega, \mathcal{O}(\Omega))$ per cui il quoziente: $H^0(\Omega, \mathcal{O}(\Omega))/H^0(\Omega, \mathcal{I})$ risulta ancora uno spazio di Fréchet.

Sia U un fissato aperto di X: U ammette una base numerabile di aperti di tipo U_x: sia questa $(U_n)_{n \in N}$: sia $\mathcal{A} = \{(n, m) \in N^2 \mid U_n \cap U_m \neq \varnothing\}$; $\forall (n, m) \in \mathcal{A}$ sia $r^n_{nm} : H^0(U_n, \mathcal{O}_X) \to H^0(U_n \cap U_m, \mathcal{O}_X)$ l'applicazione naturale di restrizione che risulta, mediante semplice verifica, continua; si pone:

$$\omega : \prod_{n \in N} H^0(U_n, \mathcal{O}_X) \to \prod_{(n,m) \in \mathcal{A}} H^0(U_n \cap U_m, \mathcal{O}_X)$$

def. da: $$(f_n)_{n \in N} \mapsto (r^n_{nm}(f_n) - r^m_{nm}(f_m))_{(n,m) \in \mathcal{A}};$$

anche ω è continua, quindi $\ker \omega$, come sottospazio chiuso dello spazio di Fréchet $\prod_{n \in N} H^0(U_n, \mathcal{O}_X)$, è ancora uno spazio di Fréchet; poiché sussiste in modo naturale l'isomorfismo algebrico:

$$H^0(U, \mathcal{O}_X) \simeq \ker \omega$$

la struttura, indotta da tale isomorfismo, risulta completamente definita; è chiaro inoltre, per costruzione stessa, che $H^0(U, \mathcal{O}_X)$ risulta avere la topologia meno fine per cui le applicazioni naturali di restrizione $r_n : \mathrm{H}^0(\mathrm{U}, \mathcal{O}_\mathrm{X}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{U}_n, \mathcal{O}_\mathrm{X})$ risultino continue.

Si verifica assai facilmente che la topologia così definita è indipendente dalla scelta degli $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbf{N}}$; ancora, sia $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un'esaustione di X (il ragionamento può essere ripetuto per un qualsiasi aperto $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}$) in aperti relativamente compatti: si può provare che $\forall n \in \mathbf{N}\ \exists$ una seminorma $\|\ \|_n$ in $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}_n, \mathcal{O}_\mathrm{X})$ e quindi anche in $\mathrm{A} = \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X})$ t.c.

a) $\quad \|\ \|_n \leq \|\ \|_{n+1}$

b) $\quad d(f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|f-g\|_j}{1+\|f-g\|_j} \qquad f, g \in \mathrm{A}$

è una metrica invariante per traslazioni che definisce la topologia di A.

$(\|\ \|_n)_{n\in\mathbf{N}}$ si dice sistema esaustivo di seminorme relativo a $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbf{N}}$; è chiaro infine che se $(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X})$ è ridotto la topologia descritta è quella della convergenza uniforme sui compatti.

1.2. *Algebre di Stein* (*II*).

Definizione 1.2.1. Un'algebra di Stein è un'algebra topologica su $\mathbf{C}$ isomorfa all'algebra delle sezioni globali su uno spazio di Stein, dotata della topologia descritta in 1.1.

Osservazione. Sia A un'algebra di Stein; allora $\mathrm{A} = \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X})$ con $(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X})$ spazio di Stein: sia $(\mathrm{X}, \mathcal{O}_{\mathrm{X}^r})$ lo spazio ridotto, che come noto è ancora di Stein, associato a $(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X}) : \mathrm{A}_r = \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{O}_{\mathrm{X}^r})$ si dice algebra ridotta di A; in modo naturale è definito un omomorfismo surgettivo $\rho : \mathrm{A} \to \mathrm{A}_r$: è interessante caratterizzare A_r in modo indipendente da X; a questo proposito si ha

Lemma 1.2.2. *Sia* $\rho : \mathrm{A} \to \mathrm{A}_r$ *l'omomorfismo naturale e* $\mathrm{R} = \ker \rho$: *si ha*:

a) R *è l'insieme dei nilpotenti generalizzati di* A, *cioè l'insieme degli* $f \in \mathrm{A}$ *t.c.* $\forall c \in \mathbf{C}$ $\lim_n (cf)^n = 0$;

b) R *è l'intersezione degli ideali massimali di* A, *cioè* R *è il radicale di Jacobson di* A, $\mathcal{R}(\mathrm{A})$;

c) R *è l'intersezione degli ideali massimali chiusi di* A.

Dimostrazione. Gli elementi di R sono, per definizione stessa, le sezioni globali di $(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X})$ che hanno valore nullo in ogni punto, quindi se $f \in \mathrm{R}$, $\forall x \in \mathrm{X}$ in base al Nullstellensatz analitico il germe f_x è nilpotente, cioè $\forall x \in \mathrm{X}\ \exists \mathrm{U}_x \in \mathfrak{U}(x)\ \exists k_{\mathrm{U}_x} \in \mathbf{N}$ t.c. $\forall n \in \mathbf{N}\ n \geq k_{\mathrm{U}_x}\ \forall c \in \mathbf{C}\ (cf)^n_{\mathrm{U}_x} = 0$; è ovvio che $\lim_n (cf)^n = 0$ e che quindi f è un nilpotente generalizzato; se viceversa $f \notin \mathrm{R}$, $\exists \bar{x} \in \mathrm{X}$ t.c. $\lambda^{-1} = f(\bar{x}) \neq 0$ e $\lim_n (\lambda f)^n \neq 0$: questo per *a*); *b*) e *c*): $\mathrm{R} \subset \mathcal{R}(\mathrm{A})$, altrimenti $\exists \mathfrak{M} \in \mathrm{Max}(\mathrm{A})$ t.c. $\mathfrak{M} + \mathrm{R} = (1)$ cioè $\exists g \in \mathfrak{M}\ \exists h \in \mathrm{R}$ t.c.

$g+h=1$: da quanto visto in *a*) segue facilmente che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} h^n$ rappresenta l'inverso di $1-h=g\in\mathfrak{M}$ da cui l'assurdo; viceversa R contiene l'intersezione degli ideali massimali chiusi, infatti se $f\notin \mathrm{R}$ $\exists \bar{x}\in \mathrm{X}$ t.c. $f(\bar{x})\neq 0$ e $f\notin \mathfrak{M}_{\bar{x}}=\{g\in \mathrm{A}\mid g(\bar{x})=0\}$, ideale massimale chiuso.

1.3. *Algebre di Stein (III)*.

Sia $\mathrm{A}=\mathrm{H}^0(\mathrm{X},\mathcal{O}_\mathrm{X})$ un'algebra di Stein; $\mathfrak{a}\subset \mathrm{A}$ sia un ideale:

$\mathcal{O}\mathfrak{a}$ rappresenta il fascio di ideali di $\mathcal{O}_\mathrm{X}$ generato da $\mathfrak{a}$: $\forall x\in\mathrm{X}$ si ha cioè:

$$\mathcal{O}_x\,\mathfrak{a}=\left\{\sum_{i=1}^{n} m_x^i g_x^i \mid m_x^i\in\mathcal{O}_x\ g^i\in\mathfrak{a}\right\}$$

da risultati classici di H. Cartan (cfr. 1.3 a) si deduce che $\mathcal{O}\mathfrak{a}$ è un fascio coerente di ideali;

diamo adesso un altro risultato dovuto a H. Cartan, che costituisce un po' il punto di partenza per alcune generalizzazioni di cui ci occuperemo in seguito:

Teorema 1.3.1:

a) *sia* $\mathfrak{a}$ *un ideale dell'algebra di Stein* $\mathrm{A}=\mathrm{H}^0(\mathrm{X},\mathcal{O}_\mathrm{X})$: *allora* $\bar{\mathfrak{a}}=\mathrm{H}^0(\mathrm{X},\mathcal{O}_\mathfrak{a})$

b) *sia* $\mathfrak{N}$ *un fascio, coerente, di ideali di* $\mathcal{O}_\mathrm{X}$: $\mathrm{M}=\mathrm{H}^0(\mathrm{X},\mathfrak{N})$ *è un ideale chiuso di* A *e* $\mathcal{O}\mathrm{M}=\mathfrak{N}$.

Dimostrazione. $\mathrm{H}^0(\mathrm{X},\mathcal{O}\mathfrak{a})$ è chiuso (cfr. ancora 1.3 a); si dimostra che $\mathfrak{a}$ è denso in $\mathrm{H}^0(\mathrm{X},\mathcal{O}\mathfrak{a})$ in modo tale da ottenere anche qualche sottoprodotto che sarà utile in seguito: sia $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un'esaustione di X con aperti di Stein relativamente compatti e t.c. $\forall n\in\mathbf{N}$ la coppia $(\mathrm{X},\mathrm{U}_n)$ sia di Runge (cfr. (2) e (23)): $\forall x\in\mathrm{X}$, per la coerenza di $\mathcal{O}\mathfrak{a}$, $\exists \mathrm{U}_x\in\mathfrak{U}(x)$, $\exists s_1,\cdots,s_p\in\mathrm{H}^0(\mathrm{X},\mathcal{O}\mathfrak{a})$ t.c. $\forall y\in\mathrm{U}_x$, $s_{1,y},\cdots,s_{p,y}$ generano $\mathcal{O}_y\mathfrak{a}$ su $\mathcal{O}_y$; ma per $1\leq i\leq p$ $s_{i,x}=\sum_{j=1}^{r_i} m_x^{ij} h_x^{ij}$ con $m_x^{ij}\in\mathcal{O}_x\, h^{ij}\in\mathfrak{a}$ e la relazione resta valida in tutto un intorno di x: in sostanza $\forall x\in\mathrm{X}$ $\exists \mathrm{V}_x\in\mathfrak{U}(x)$ $\exists h^1,\cdots,h^k\in\mathfrak{a}$ t.c. $\forall y\in\mathrm{V}_x$ $h_y^1,\cdots,h_y^k$ generano $\mathcal{O}_y\mathfrak{a}$ su $\mathcal{O}_y$ $(\mathrm{V}_y)_{y\in\mathrm{U}_n}$ costituisce un ricoprimento aperto del compatto $\bar{\mathrm{U}}_{n-1}$: se ne può estrarre quindi un sottoricoprimento finito $\{\mathrm{V}_{y_i}\}_{1\leq i\leq t}$: siano $h^1,\cdots,h^{r_n}$ gli elementi di $\mathfrak{a}$ relativi ai $\mathrm{V}_{y_1},\cdots,\mathrm{V}_{y_t}$: su U_{n-1} l'omomorfismo di fasci $\mathcal{O}_\mathrm{X}^{r_n}\to\mathcal{O}\mathfrak{a}$ definito da $(m_x^1,\cdots,m_x^{r_n})\mapsto\sum_{i=1}^{r_n} m_x^i h_x^i$ risulta surgettivo; per il Teorema B si ha la successione esatta: $\mathrm{H}^0(\mathrm{U}_{n-1},\mathcal{O}_\mathrm{X})^{r_n}\to\mathrm{H}^0(\mathrm{U}_{n-1},\mathcal{O}\mathfrak{a})\to 0$ cioè, fissato $f\in\mathrm{H}^0(\mathrm{X},\mathcal{O}\mathfrak{a})$, $\exists p_1^n,\cdots,p_{r_n}^n\in\mathrm{H}^0(\mathrm{U}_{n-1},\mathcal{O}_\mathrm{X})$ t.c. $f_{|\mathrm{U}_{n-1}}=\left(\sum_{i=1}^{r_n} p_i^n h^i\right)_{|\mathrm{U}_{n-1}}$ per la scelta degli U_n, l'applicazione naturale di restrizione $\mathrm{H}^0(\mathrm{X},\mathcal{O}_\mathrm{X})\to\mathrm{H}^0(\mathrm{U}_{n-1},\mathcal{O}_\mathrm{X})$

è densa: in particolare, scelto un sistema esaustivo di seminorme $(\| \ \|_n)_{n \in \mathbf{N}}$ relativo a $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$,

$$\exists \tilde{p}_1^n, \cdots, \tilde{p}_{s_n}^n \in H^0(X, \mathcal{O}_X) \quad \text{t.c.} \quad \|p_i^n - \tilde{p}_i^n\|_{n-1} < \frac{1}{n^2 s_n (\|h^i\|_{n-1} + 1)} \; 1 \leq i \leq s_n$$

se si pone: $\forall n \in \mathbf{N}$ $f_n = \sum_{i=1}^{s_n} \tilde{p}_i^n h^i$ si ha $\lim_n f_n = f$ infatti:

$$\|f_n - f\|_{n-1} = \left\| \sum_{i=1}^{s_n} (\tilde{p}_i^n - p_i^n) h^i \right\|_{n-1} \leq \frac{1}{n^2 s_n} \sum_{i=1}^{s_n} \frac{\|h^i\|_{n-1}}{(\|h^i\|_{n-1} + 1)} < \frac{1}{n^2}$$

quindi

$$d(f, f_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|f - f_n\|_j}{1 + \|f - f_n\|_j} = \sum_{j=1}^{n-1} + \sum_{j=n}^{\infty} < \frac{1}{n} + \frac{1}{2^{n-1}}$$

questo conclude la dimostrazione di *a*); per *b*): occorre solo provare che $\mathcal{O}M = \mathfrak{N}$: chiaramente $\mathcal{O}M \subset \mathfrak{N}$; l'inclusione inversa è semplicemente il Teorema A.

1.3 a. *Appendice a* 1.3.

In questa Appendice vogliamo, quasi come facile esercizio, dedurre alcuni risultati della teoria degli spazi di Stein, utilizzati nel corso delle dimostrazioni, dai risultati classici di H. Cartan sull'anello delle serie convergenti nel caso complesso; il teorema da cui si muove può essere enunciato in questa forma (cfr. (4) oppure (14)):

Teorema 1.3 a.1. *Sia* $0 \in \mathbf{C}^n$ e M_0 *un sottomodulo di* $\mathcal{O}_{n,0}^q \cong (\mathbf{C}\{x_1, \cdots, x_n\})^q$: $\exists \{f_1, \cdots, f_p\}$ *sistema di generatori di* M_0 *su* $\mathcal{O}_{n,0}$ *e* $\exists \mathcal{U} = \{U_m\}_{m \in \mathbf{N}}$ *sistema fondamentale di intorni di zero in modo che le* f_j *siano definite da funzioni olomorfe su tutti gli* U_m *t.c.*:

a) *se* $h = (h_1, \cdots, h_q)$ *è una q-upla di funzioni olomorfe su* U_m *t.c.* $h_0 \in M_0$, $\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_p$ *funzioni olomorfe su* U_m *t.c.* $h = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j f_j$ *su* U_m;

b) $\forall m \in \mathbf{N}$ $\exists M_m > 0$ *costante t.c., se* $h = (h_1, \cdots, h_q)$ *è una q-upla di funzioni olomorfe su* U_m *e* $h_0 \in M_0$ *e se* $\|h\|_{U_m} < \infty$ *(norma del sup.)*, $\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_p$ *funzioni olomorfe su* U_m *t.c.*

$$h = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j f_j \quad e \quad \|\alpha_j\|_{U_m} \leq M_m \|h\|_{U_m}$$

un primo gruppo di conseguenze è contenuto nella

Proposizione 1.3 a.2.

a) *sia* M_0 *un sottomodulo di* $\mathcal{O}_{n,0}^q$ *e* $(h_k)_{k \in \mathbf{N}}$ *sia una successione di q-uple di funzioni olomorfe in un intorno* U *di* 0 *t.c.* $\forall k \in \mathbf{N}$, $h_{k,0} \in M_0$ *e* $h_k \to h$ *uniformemente su* U; *allora* $h_0 \in M_0$

Dimostrazione. $\exists m \in \mathbf{N}$ t.c. $U_m \subset U$ $\forall k \in \mathbf{N}$ si ha $h_k = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{k,j} f_j$ con $\|\alpha_{k,j}\|_{U_m} \leq M_m \|h_k\|_{U_m}$ poiché chiaramente $\{h_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ è limitata, le successioni $(\{\alpha_{k,j}\}_{k \in \mathbf{N}})_{1 \leq j \leq p}$ sono limitate: per il teorema di Montel è possibile estrarre una sottosuccessione $\{\alpha_{r_k,j}\}_{k \in \mathbf{N}}$ convergente ad α_j olomorfa su U_m $1 \leq j \leq p$: è chiaro che $h = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j f_j$ cioè appunto $h_0 \in M_0$

b) sia $\mathcal{I}$ un fascio di ideali di $\mathcal{O}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ aperto: allora $H^0(\Omega, \mathcal{I})$ è chiuso in $H^0(\Omega, \mathcal{O}(\Omega))$ per la topologia della convergenza uniforme sui compatti.

Dimostrazione. Sia $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ una successione di elementi di $H^0(\Omega, \mathcal{I})$ convergente ad f: scegliendo un intorno compatto di ogni punto ed applicando *a*), si ottiene: $\forall x \in X$ $f_x \in \mathcal{I}_x$ cioè appunto $f \in H^0(\Omega, \mathcal{I})$

c) sia E una parte di $H^0(\Omega, \mathcal{O}(\Omega))$: il fascio $\mathcal{F}$ generato su $\mathcal{O}(\Omega)$ da E è coerente.

Dimostrazione. $\forall x \in \Omega$ sia $U(x)$ un elemento del sistema fondamentale di intorni di x usato nel Teorema 1.3 a.1: siano $f_1, \cdots, f_p$ i relativi generatori di $\mathcal{F}_x$ su $\mathcal{O}_x(\Omega)$: $\forall y \in U(x)$ $\mathcal{F}_y$ è generato da un numero finito di elementi di E, siano questi $q_1, \cdots, q_r$; per 1.3 a. 1 *a*), poiché, ovviamente $q_{1,x}, \cdots, q_{r,x} \in \mathcal{F}_x$, $\exists \alpha_{i,1}, \cdots, \alpha_{i,p}$ funzioni olomorfe su $U(x)$ t.c. $q_{i|U(x)} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} f_{j|U(x)}$, il che ha come conseguenza immediata che $\forall y \in U(x)$, $f_{1,y}, \cdots, f_{p,y}$ generano $\mathcal{F}_y$ su $\mathcal{O}_y(\Omega)$, cioè il fascio $\mathcal{F}$ è di tipo finito; poiché il suo fascio delle relazioni, essendo $\mathcal{F}$ sottofascio di un fascio coerente, è di tipo finito, questo conclude la prova.

Si hanno estensioni abbastanza naturali agli spazi di Stein:

Proposizione 1.3 a. 3.

a) sia $(X, \mathcal{O})$ uno spazio analitico complesso, $A = H^0(X, \mathcal{O})$, E una parte di A: il fascio $\mathcal{F}$ generato da E su $\mathcal{O}$ è coerente.

Dimostrazione. Fissato $x \in X$, $\exists U \in \mathfrak{U}(x)$ t.c. $(U, \mathcal{O})$ è isomorfo al modello locale $(Y, \mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{I})$, dove l'aperto Ω può essere scelto di Stein: si consideri l'applicazione naturale di proiezione $\pi : \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{I}$: poiché, per il Teorema B, tale proiezione è surgettiva a livello di sezioni, se si considera il fascio $\mathcal{G}$ di ideali di $\mathcal{O}(\Omega)$ generato da $\pi^{-1}(E_{|U})$, è chiaro che $\pi(\mathcal{G}) = \mathcal{F}_{|U}$: per 1.3 a. 2 *c*), $\mathcal{G}$ è coerente: da ciò segue per risultati canonici la coerenza di $\mathcal{F}$

b) sia $(X, \mathcal{O})$ uno spazio analitico complesso, $\mathcal{I}$ un fascio di ideali di $\mathcal{O}$: allora $H^0(X, \mathcal{I})$ è un chiuso di $H^0(X, \mathcal{O})$ per la topologia descritta in 1.1.

Dimostrazione. Fissato $x \in X$, $\exists U \in \mathfrak{U}(x)$ t.c. $(U, \mathcal{O})$ è isomorfo al modello locale $(Y, \mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{I})$, dove ancora l'aperto Ω può essere scelto di Stein: si ha facilmente, nelle notazioni del punto precedente, sempre utilizzando il Teorema B, $\pi^{-1}(\mathrm{H}^0(\mathrm{Y}, \mathscr{F})) = \mathrm{H}^0(\Omega, \pi^{-1}(\mathscr{F}))$: per 1.3 a. 2 *b*), $\mathrm{H}^0(\Omega, \pi^{-1}(\mathscr{F}))$ è chiuso, quindi $\mathrm{H}^0(\mathrm{Y}, \mathscr{F})$ è chiuso: passando al limite proiettivo si completa la Dimostrazione.

1.4. *Algebre speciali.*

Si può inquadrare la situazione precedente in una formulazione più generale:

Definizione 1.4.1:

a) sia **K** un corpo: si dice **K**-spazio geometrico $(\mathrm{X}, \mathscr{C})$ il dato di uno spazio topologico X e di un fascio $\mathscr{C}$ di **K**-algebre di base X;

b) siano $(\mathrm{X}, \mathscr{A})(\mathrm{Y}, \mathscr{B})$ due **K**-spazi geometrici: si dice morfismo di spazi geometrici $(\varphi, {}^*\varphi) : (\mathrm{X}, \mathscr{A}) \to (\mathrm{Y}, \mathscr{B})$ il dato di un'applicazione continua $\varphi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ è di un omomorfismo di fasci ${}^*\varphi : \mathrm{X} \oplus_\varphi \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ dove $\mathrm{X} \oplus_\varphi \mathscr{B}$ è definito per spiga come $(\mathrm{X} \oplus_\varphi \mathscr{B})_x = \mathscr{B}_{\varphi(x)}$;

c) si dice **K**-algebra geometrica l'algebra $\mathrm{A} = \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathscr{C})$ delle sezioni globali di un **K**-spazio geometrico.

Definizione 1.4.2. Sia α un ideale di un'algebra geometrica $\mathrm{A} = \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathscr{C})$: si dice specializzato di α l'ideale $\hat{\alpha}$ definito da $\hat{\alpha} = \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathscr{C}\alpha)$; un ideale β si dice speciale se $\beta = \hat{\beta}$.

Osservazione. Siano α, β ideali di A: allora:

a) $\alpha \subset \hat{\alpha}$;
b) $\alpha \subset \beta \Rightarrow \hat{\alpha} \subset \hat{\beta}$;
c) $\hat{\hat{\alpha}} = \hat{\alpha}$.

Dimostrazione. *a*) e *b*) sono ovvi; per *c*): sia $f \in \hat{\hat{\alpha}} : \forall x \in \mathrm{X}, f_x = \sum_{i=1}^{r} m_x^i g_x^i$ con $m_x^i \in \mathscr{C}_x, g^i \in \hat{\alpha}$; quindi $\forall i \ 1 \leq i \leq r \ g_x^i = \sum_{j=1}^{s_i} n_x^{ij} h_x^{ij}$ con $n_x^{ij} \in \mathscr{C}_x, h^{ij} \in \alpha$; pertanto $\forall x \in \mathrm{X} \ f_x = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s_i} m_x^i n_x^{ij} h_x^{ij} \in \mathscr{C}_x \alpha$ cioè $f \in \hat{\alpha}$; l'inclusione inversa segue da *a*) e *b*).

Altri risultati sugli ideali speciali si hanno col seguente

Lemma 1.4.3:

a) *sia* $(\beta_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *una famiglia qualsiasi di ideali speciali di* A: $\alpha = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \beta_i$ *è speciale;*

b) *sia* $x \in \mathrm{X}$, $\alpha_x \subset \mathscr{C}_x$ *sia un ideale: l'ideale di* A $\sigma(\alpha_x) = \{f \in \mathrm{A} \mid f_x \in \alpha_x\}$ *è speciale, cioè i 'saturati' globali di ideali puntuali sono speciali;*

c) *sia* α *un ideale speciale di* A, M *una qualsiasi parte di* A: *allora* $(\alpha : \mathrm{M})$ *è speciale.*

Dimostrazione. *a*) sia $f \in \widehat{\bigcap_{i \in I} \beta_i} = H^0\left(X, \mathcal{O} \bigcap_{i \in I} \beta_i\right)$: $\forall x \in X \; f_x = \sum_{i=1}^{r} m_x^i g_x^i$ con $g^i \in \bigcap_{i \in I} \beta_i$ quindi $\forall x \in X, \forall i \in I \; f_x \in \mathcal{O}_x \beta_i$ cioè $f \in \bigcap_{i \in I} H^0(X, \mathcal{O}\beta_i) = \bigcap_{i \in I} \beta_i$;

b) basta osservare che $\mathcal{O}_x \alpha \subset \alpha_x$;

c) si ha: $(\alpha : M) = \{a \in A \mid \forall m \in M \; am \in \alpha\} = \bigcap_{m \in M} (\alpha : m)$ fissato $m \in M$ sia $f \in \widehat{(\alpha : m)}$: $\forall x \in X \; f_x = \sum_{i=1}^{r} n_x^i g_x^i$ con $g^i \in (\alpha : m)$ perciò $m_x f_x \in \mathcal{O}_x \alpha \; \forall x \in X$ e poiché α è speciale, $mf \in \alpha$ e $f \in (\alpha : m)$ che risulta pertanto essere speciale: applicando *a*) si ottiene il risultato completo.

Definizione 1.4.4. Si dice algebra speciale $(A, \mathfrak{S})$ il dato di un'algebra A di sezioni globali di uno spazio geometrico e della famiglia $\mathfrak{S}$ dei suoi ideali speciali.

Definizione 1.4.5. Un **K**-spazio geometrico si dice regolare se $A x \in X \; \mathcal{O}_x$ è un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{M}_x$ t.c. $\mathcal{O}_x/\mathfrak{M}_x = \mathbf{K}$ ed inoltre l'algebra geometrica $A = H^0(X, \mathcal{O})$ è sufficientemente ricca da separare i punti nel senso della seguente

Osservazione. La prima proprietà permette di assegnare in ogni punto dello spazio, ad una sezione globale $f \in A$ un valore in **K**: fissato $x \in X$, sia $\pi : \mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_x/\mathfrak{M}_x = \mathbf{K}$ la proiezione naturale: si pone (e questa sarà la notazione costantemente usata) $f(x) = \pi(f_x)$; è chiaro che l'insieme $\{(x, f(x))\}_{x \in X}$ non determina univocamente la sezione: premesso ciò, evidentemente domandare che A separi i punti equivale a richiedere che, assegnati due punti distinti $x, y \in X$, $\exists f \in A$ t.c. $f(x) \neq (y)$; è di immediata verifica che gli spazi di Stein e gli spazi analitici reali sono spazi geometrici regolari.

Definizione 1.4.6. Sia $(X, \mathcal{O})$ un **K**-spazio geometrico regolare, $A = H^0(X, \mathcal{O})$ la **K**-algebra geometrica associata, $\alpha \subset A$ un ideale: si dice luogo di zeri di α $V(\alpha) = \{x \in X \mid \forall f \in \alpha \; f(x) = 0\}$.

Osservazione 1.4.7. Se, nella situazione della definizione precedente, α è speciale e proprio, $V(\alpha) \neq \varnothing$.

Dimostrazione. $\forall x \notin V(\alpha) \; \exists f \in \alpha$ t.c. $f(x) \neq 0$ cioè $f_x \notin \mathfrak{M}_x$, poiché, per definizione $\mathcal{O}_x$ è locale, $\exists f_x^{-1} \in \mathcal{O}_x$ e $\mathcal{O}_x \alpha = \mathcal{O}_x$: quindi se

$$V(\alpha) = \varnothing \qquad \tilde{\alpha} = \alpha = H^0(X, \mathcal{O}\alpha) = H^0(X, \mathcal{O}) = A:$$

assurdo.

Definizione 1.4.8. Si definisce spettro speciale della **K**-algebra geometrica A l'insieme:

$$S(A) = \{\varphi : A \to \mathbf{K} \mid \varphi \text{ omomorfismo di } \mathbf{K}\text{-algebre t.c. } \ker \varphi \text{ sia speciale}\}$$

Lemma 1.4.9. *Se* $(X, \mathcal{O})$ *è un* **K**-*spazio geometrico regolare, esiste una bigezione naturale tra* X *e* S(A).

Dimostrazione. Si pone $\Gamma : X \to S(A)$ definita da $\Gamma(x) = \varphi_x$ dove $\varphi_x(f) = f(x)$ si osserva che:

a) Γ è ben definita: infatti $\ker \varphi_x = \{f \in A \mid f_x \in \mathfrak{M}_x\}$ è speciale per 1.4.3 *b*);

b) Γ è iniettiva: se $\varphi_x = \varphi_y$ si ha $\forall f \in A \;\; f(x) = f(y)$ e poiché A separa i punti, $x = y$;

c) Γ è surgettiva: assegnato $\varphi \in S(A)$, $\ker \varphi$ è un ideale massimale speciale; in base a 1.4.7, $V(\ker \varphi) \neq \emptyset$: poiché, di nuovo, A separa i punti, e per la massimalità $V(\ker \varphi) = \{x\}$, senz'altro $\Gamma(x) = \varphi$.

Si può porre adesso il seguente problema generale:

dato uno spazio geometrico $(X, \mathcal{O})$, è possibile assegnare su $A = H^0(X, \mathcal{O})$ una struttura di spazio topologico, ragionevolmente compatibile con la struttura algebrica, in cui dato un ideale $\mathfrak{a}$ di A, $\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}}$?

Come visto in 1.3.1: se $(X, \mathcal{O})$ è uno spazio di Stein, la topologia naturale su $A = H^0(X, \mathcal{O})$ risolve completamente la questione.

Non affronteremo il problema in tutta la sua generalità, ma ci limiteremo a considerarne alcuni aspetti nel caso di $(X, \mathcal{O})$ spazio analitico reale.

1.5. *Algebre reali coerenti (I).*

Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio analitico reale, $A = H^0(X, \mathcal{O}_X)$ sia l'algebra delle sue sezioni globali; vogliamo definire una topologia per A: si procede per gradi:

a) convergenza: si dice che una successione di elementi di A, $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge ad $f \in A$ se: $\exists (\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ complessificazione di $(X, \mathcal{O}_X)$ cui le $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ e la f siano estendibili e dove $f_n \to f$ per la topologia naturale di $\tilde{A} = H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$;

b) (il procedimento è standard e vale in situazioni molto più generali) assegnato $E \in \mathscr{P}(A)$ si definisce aderenza di E: $\mathrm{ad}(E) = \{f \in A \mid \exists (f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ successione di elementi di E t.c. $\lim_n f_n = f\}$; immediatamente si ha:

i) dati $E_1, E_2 \in \mathscr{P}(A)$ $\mathrm{ad}(E_1 \cup E_2) = \mathrm{ad}(E_1) \cup \mathrm{ad}(E_2)$

ii) data $(E_i)_{i \in I}$ famiglia di elementi di $\mathscr{P}(A)$

$$\mathrm{ad}\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} \mathrm{ad}(E_i)$$

c) $F \in \mathscr{P}(A)$ si dice esatto se: $\mathrm{ad}(F) = F$; la famiglia $\mathscr{E}$ delle parti esatte di A soddisfa agli assiomi della famiglia dei chiusi di una topologia (segue dal punto precedente): considereremo su A la topologia in cui i chiusi sono appunto gli insiemi esatti;

d) è di facile verifica che tale topologia risulta compatibile con la struttura di **R**-algebra e rende A una **R**-algebra topologica completa;

si noti che, in generale, in situazioni di questo tipo, assegnato $E \in \mathscr{P}(A)$, $\mathrm{ad}(E) \subsetneqq \bar{E}$.

Definizione 1.5.1. Si dice algebra reale coerente la $\mathbf{R}$-algebra delle sezioni globali di uno spazio analitico reale dotata della topologia descritta.

1.6. *Algebre reali coerenti (II).*

Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio analitico reale, $A = H^0(X, \mathcal{O}_X)$ sia l'algebra reale coerente associata.

J. Frisch ha dimostrato (11), provando risultati notevolmente più forti, il seguente:

Teorema 1.6.1. *Sia* Y *un sottoinsieme analitico di* X, $\mathcal{F}$ *un fascio analitico coerente su* Y: *ogni famiglia filtrante crescente* $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ *di sottofasci analitici coerenti di* $\mathcal{F}$ *è localmente stazionaria.*

Il Teorema precedente ha un importantissimo corollario nella seguente:

Proposizione 1.6.2. *Sia* Y *un sottoinsieme analitico di* X, $\mathcal{F}$ *un fascio analitico coerente su* X; *sia* E *una parte di* $H^0(Y, \mathcal{F})$: *il fascio* $\mathcal{G}$ *generato da* E *su* Y *è coerente; in particolare se* α *è un ideale di* A, *il fascio di ideali* $\mathcal{O}\alpha$ *è coerente.*

Dimostrazione. Per ogni parte finita E_i di E, il sottofascio $\mathcal{G}_i$ generato su Y da E_i è coerente: $\mathcal{G}$ è l'unione della famiglia filtrante crescente $(\mathcal{G}_i)_{i \in I}$ ed è coerente per 1.6.1.

Si ha inoltre:

Lemma 1.6.3. *Sia sempre* $(X, \mathcal{O})$ *uno spazio analitico reale,* $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ *una famiglia filtrante crescente di fasci analitici* $\mathcal{O}$*-coerenti su* X: $\exists (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}})$ *complessificazione (di Stein) di* $(X, \mathcal{O})$ *cui gli* $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ *sono estendibili come fasci* $\tilde{\mathcal{O}}$*-coerenti* $(\tilde{\mathcal{F}}_i)_{i \in I}$.

Dimostrazione. Per 1.6.1, la famiglia filtrante crescente $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ è localmente stazionaria: $\forall x \in X \ \exists U(x) \in \mathfrak{U}(x)$, che può essere scelto chiuso, $\exists i_x \in I$ t.c. $\forall j \geq i_x \ \mathcal{F}_{j|U(x)} = \mathcal{F}_{i_x|U(x)}$: fissata una complessificazione di $(X, \mathcal{O})$, $(\tilde{X}', \tilde{\mathcal{O}}')$ $\exists \tilde{U}(x)$ intorno di $U(x)$ in $\tilde{X}'$ cui sono estendibili gli $(\mathcal{F}_{j|U(x)})_{j \in I}$: considerato il ricoprimento di X $\{\tilde{U}(x)\}_{x \in X}$, se ne può prendere un raffinamento localmente finito $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$: $\forall x \in X \ \exists W(x) \in \mathfrak{U}(x)$ in $\tilde{X}'$ t.c. su $W(x)$ le estensioni relative agli U_λ, che sono in numero finito, coincidano:

$U = \bigcup_{x \in X} W(x)$ è un intorno di X in $\tilde{X}'$ che contiene una complessificazione $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}})$ cui sono estendibili gli $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$.

Questi risultati costituiscono lo strumento chiave, dato α ideale dell'algebra reale coerente A, per indagare i rapporti fra $\bar{\alpha}$ e $\hat{\alpha}$;

prima di tutto si ha:

Lemma 1.6.4. *Sia* $\alpha \subset A$ *un ideale speciale: allora* α *è chiuso.*

Dimostrazione. Sia $(f_n)_{n \in N}$ una successione di elementi di α convergente ad $f \in A$: per definizione esiste una complessificazione $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}}_{\tilde{X}})$, che si può supporre di Stein, di $(X, \mathcal{O}_X)$ t.c. le f_n sono estendibili come $\tilde{f}_n$ ad $\tilde{X}$ e qui convergono all'estesa $\tilde{f}$ di f; sia $\tilde{\alpha}$ l'ideale generato dalle $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ in $\tilde{A} = H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$: da 1.3.1 *a*) segue che $\tilde{f} \in H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}\, \tilde{\alpha})$ cioè, in particolare, $\forall x \in X$ $\tilde{f}_x = \sum_{j=1}^{p} m_x^j g_x^j$ con $m_x^j \in \mathcal{O}_{\tilde{X},x} = \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ e $g^j \in \tilde{\alpha}$; $\forall j$ $1 \leq j \leq p$ $m_x^j = h_x^j + ik_x^j$ con $h_x^j, k_x^j \in \mathcal{O}_{X,x}$ e $g^j = \sum_{l=1}^{r_j} t_{jl}\, f_{n_{jl}}$ con $t_{jl} \in \tilde{A}$ quindi $t_{jl,x} = u_{jl,x} + iv_{jl,x}$ con $u_{jl,x} v_{jl,x} \in \mathcal{O}_{X,x}$ pertanto:

$$g_x^j = \sum_{l=1}^{r_j} t_{jl,x} f_{n_{jl},x} = \sum_{l=1}^{r_j} u_{jl,x} f_{n_{jl},x} + i \sum_{l=1}^{r_j} v_{jl,x} f_{n_{jl},x}$$

da cui:

$$\tilde{f}_x = f_x = \sum_{j=1}^{p} \left[h_x^j \sum_{l=1}^{r_j} u_{jl,x} f_{n_{jl},x} - k_x^j \sum_{l=1}^{r_j} v_{jl,x} f_{n_{jl},x} \right] + iB$$

necessariamente $B = 0$ e perciò subito si ha: $\forall x \in X$ $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}\, \alpha$ cioè: $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X\, \alpha) = \alpha$.

Osservazione 1.6.5:

a) sia α un ideale di A: per $f \in A$ sono fatti equivalenti:

i) $\forall U$ aperto relativamente compatto di X, $f \in H^0(U, \mathcal{O}_X) \cdot \alpha$

ii) $f \in \hat{\alpha}$.

Dimostrazione:

i) $\Rightarrow$ ii) è ovvio

ii) $\Rightarrow$ i): è essenzialmente la prima parte di 1.3.1 *a*) nel caso reale: basta osservare che per tale dimostrazione si sono utilizzate solo proprietà di coerenza, quindi in base a 1.6.2 si può procedere allo stesso modo;

b) sia α un ideale di A: sono fatti equivalenti:

i) $\hat{\alpha} = (1)$

ii) $\forall U$ aperto relativamente compatto di X, $\exists f \in \alpha$ t.c. $f_{|U}$ è invertibile in $H^0(U, \mathcal{O}_X)$.

Dimostrazione: i) $\Rightarrow$ ii): se $1 \in \hat{\alpha}$ per *a*) $1 \in H^0(U, \mathcal{O}_X) \cdot \alpha$ cioè su U, $1 = \sum_{j=1}^{r} m_j g_j$ con $m_j \in H^0(U, \mathcal{O}_X)$ e $g_j \in \alpha$: si ha subito che $\sum_{j=1}^{r} g_{j|U}^2$ è invertibile in $H^0(U, \mathcal{O}_X)$; ii) $\Rightarrow$ i) è ovvio;

c) sia α un ideale di A finitamente generato: allora α è speciale.

Dimostrazione. Tipica applicazione del Teorema B: siano $(f_1, \cdots, f_n)$ generatori di α: l'omomorfismo di fasci:

$\mathcal{O}^n \to \mathcal{O}_X$ definito da $(\alpha_{1,x}, \cdots, \alpha_{n,x}) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{i,x} f_{i,x}$ è surgettivo...

È noto inoltre il cosiddetto teorema di Runge relativo che può, per esempio, essere enunciato nella forma:

Teorema 1.6.6. *Sia* $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}})$ *uno spazio di Stein non necessariamente ridotto: sia* $\tilde{A} = H^0(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}})$ *la sua algebra di Stein e* $\mathfrak{a}$ *un ideale chiuso di* $\tilde{A}$ *con* $\emptyset \neq V(\mathfrak{a}) = \tilde{Y}$; *sia* $\mathscr{I}(\tilde{Y})$ *il fascio coerente di ideali di* $\tilde{\mathcal{O}}$ *dei germi nulli su* $\tilde{Y}$; *dato* $U \subset \tilde{X}$ *un aperto di Runge relativamente compatto,* $F \in H^0(U, \tilde{\mathcal{O}})$ *t.c.* $\exists g \in H^0(\tilde{Y}, \tilde{\mathcal{O}}/\mathscr{I}(\tilde{Y}))$ *per cui* $F_{|U \cap \tilde{Y}} = g_{|U \cap \tilde{Y}}$ *allora* $\forall$ *compatto* $K \subset U$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists h \in \tilde{A}$ *t.c.*:

1) $\forall x \in K \qquad |h(x) - F(x)| < \varepsilon$
2) $h_{|\tilde{Y}} = g_{|\tilde{Y}}$

il Teorema vale inoltre nel caso σ-invariante, cioè se $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}})$ *è la complessificazione dello spazio analitico reale* $(X, \mathcal{O})$ *e* $F_{|X}, g_{|X}$ *sono sezioni reali, si può scegliere* h *in modo che* $h_{|X} \in A = H^0(X, \mathcal{O})$.

Si hanno, a questo punto, gli strumenti necessari per compiere un passo abbastanza importante nello studio dei rapporti fra specializzazione e chiusura di ideali di un'algebra reale coerente A: si può dimostrare il seguente:

Lemma 1.6.7. *Sia* $\mathfrak{M}$ *un ideale massimale di* A; *sono fatti equivalenti*:

i) $\mathfrak{M}$ *è speciale*
ii) $\mathfrak{M}$ *è chiuso.*

Dimostrazione. Per 1.6.4, i) $\Rightarrow$ ii); occorre pertanto provare solo l'implicazione inversa che si riduce immediatamente a:

$$\hat{\mathfrak{M}} = (1) \Rightarrow \overline{\mathfrak{M}} = (1);$$

sia $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un'esaustione di X in aperti relativamente compatti: come osservato in 1.6.5 *b*), dall'ipotesi $\hat{\mathfrak{M}} = (1)$ segue:

$$\forall n \in \mathbf{N} \ \exists f_n \in \mathfrak{M} \quad \text{t.c.} \quad f_{n|X_n} \quad \text{è invertibile in} \quad A_n = H^0(X_n, \mathcal{O});$$

$\forall n \in \mathbf{N}$ si pone:

a) $Z_n = V([f_1, \cdots, f_n]) \qquad$ (è chiaro che $\forall n \in \mathbf{N} \ \ Z_n \neq \emptyset$);
b) $\mathscr{F}_n = \mathcal{O}[f_1, \cdots, f_n]$;

sia $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}})$ una complessificazione di Stein di $(X, \mathcal{O})$ cui siano estendibili gli $\mathscr{F}_n$ come $\tilde{\mathscr{F}}_n$: tale complessificazione esiste per 1.6.3:

$\forall n \in \mathbf{N}$ sia $\mathfrak{a}_n = H^0(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{F}}_n)$: $(\mathfrak{a}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è una successione crescente di ideali e quindi $(V(\mathfrak{a}_n))_{n \in \mathbf{N}}$ una successione decrescente di sottoinsiemi analitici chiusi; $\forall n \in \mathbf{N}$ si ha $Z_n = V(\mathfrak{a}_n) \cap X$ infatti chiaramente vale $\subset$; sia $x \notin Z_n$: allora $\mathscr{F}_{n,x} = \mathcal{O}_x$ da cui

$$\tilde{\mathscr{F}}_{n,x} = \mathscr{F}_{n,x} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = \mathcal{O}_x \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = \tilde{\mathcal{O}}_x \qquad \text{cioè} \quad x \notin V(\mathfrak{a}_n);$$

è possibile (cfr. per esempio (25)) costruire un intorno U_1 di X_1 in $\tilde{\mathrm{X}}$ relativamente compatto t.c. $\exists \mathrm{V}_1 \in \mathfrak{U}(\overline{\mathrm{U}}_1)$ in $\tilde{\mathrm{X}}$ di Runge t.c. $\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}(\alpha_1) = \varnothing$: per il teorema di Runge relativo nel caso σ-invariante $\exists \tilde{g}_1 \in \tilde{\mathrm{A}} = \mathrm{H}^0(\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathcal{O}})$ t.c.:

a) $|\tilde{g}_1(x) - 1| < \varepsilon \quad \forall x \in \overline{\mathrm{U}}_1$ e quindi, per ε opportuno $g_{1|\overline{\mathrm{U}}_1} \neq 0$ sempre;

b) $\tilde{g}_{1|\mathrm{V}(\alpha_1)} = 0$;

c) $g_1 = \tilde{g}_{1|\mathrm{X}} \in \mathrm{A}$;

si osserva che $g_1 \in \mathfrak{M}$: se infatti $(g_1 + \mathfrak{M}) = (1)$ si avrebbe $ag_1 + m = 1$ per $a \in \mathrm{A}$ e $m \in \mathfrak{M}$ da cui $m_{|\mathrm{Z}_1} \neq 0$ sempre, $m^2 + f_1^2 \neq 0$ sempre e conseguentemente l'assurdo $\mathfrak{M} = (1)$; per ricorrenza, notando che si può scegliere

$$\cdots \mathrm{U}_{n-1} \subset \mathrm{U}_n \subset \mathrm{U}_{n+1} \cdots$$

si costruisce $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbf{N}}$: sia $\mathfrak{Z}$ l'ideale di $\tilde{\mathrm{A}}$ generato dalle $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$: per costruzione $1 \in \hat{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{Z}$, cioè, per definizione stessa $1 \in \overline{\mathfrak{M}}$.

1.7. *Teoremi di spec.*

In questo paragrafo ci proponiamo di generalizzare alcuni risultati dovuti a J. Igusa (15) e R. Remmert (19) e perfezionati da O. Forster (10): e ciò mediante il seguente:

TEOREMA 1.7.1. *La categoria degli spazi di Stein (risp. degli spazi analitici reali) e la categoria delle algebre di Stein (risp. delle algebre reali coerenti) sono ant'-equivalenti.*

N. B. Ricordiamo che due categorie $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ sono ant'-equivalenti se $\exists \mathrm{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ functore contravariante in modo che $\forall b \in \mathscr{B} \;\; \exists a \in \mathscr{A}$ t.c. $b \simeq \mathrm{F}(a)$ e $\forall a_1, a_2 \in \mathscr{A}$ l'applicazione $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(a_1, a_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathrm{F}(a_2), \mathrm{F}(a_1))$ definita da $\varphi \mapsto \mathrm{F}(\varphi)$ è bigettiva.

Dimostrazione:

a) sia $\mathbf{K}$ un corpo che può essere $\mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$; sia $\mathscr{W}$ la categoria delle $\mathbf{K}$-algebre commutative con identità topologiche con gli omomorfismi continui di $\mathbf{K}$-algebre come morfismi e $\mathscr{E}$ la categoria dei $\mathbf{K}$-spazi geometrici regolari con i morfismi naturali.

Per prima cosa si vuole costruire un functore contravariante $\Sigma : \mathscr{W} \to \mathscr{E}$:

$$\forall \mathrm{A} \in \mathscr{W} \qquad \text{bisogna quindi costruire} \quad \Sigma(\mathrm{A}) = (\mathrm{S}^*(\mathrm{A}), \sigma(\mathrm{A})):$$

sia $\mathrm{S}^*(\mathrm{A})$ lo spettro di Gelfand di A, cioè

$$\mathrm{S}^*(\mathrm{A}) = \{\varphi : \mathrm{A} \to \mathbf{K} \text{ omomorfismo continuo di } \mathbf{K}\text{-algebre}\}$$

equipaggiato con la topologia in cui una sottobase di intorni è data da:

$$\mathscr{B}(\varphi_0, f, \varepsilon) = \{\varphi \in \mathrm{S}^*(\mathrm{A}) \,\big|\, |\varphi(f) - \varphi_0(f)| < \varepsilon\} \qquad \text{con} \quad \varepsilon > 0 \text{ e } f \in \mathrm{A};$$

per la costruzione del fascio $\sigma(\mathrm{A})$ si procede nel modo seguente: fissato $x \in \mathrm{S}^*(\mathrm{A})$ sia $\mathfrak{M}(x) = \ker x$ l'ideale massimale chiuso delle $f \in \mathrm{A}$ t.c. $x(f) = 0$; (per evidenti ragioni conviene invertire la notazione ponendo $x(f) = f(x)$);

si pone poi: $\sigma^*(\mathrm{A})_x = \mathbf{K}\{(\mathrm{X}_f)_{f \in \mathfrak{M}(x)}\}$, l'anello delle serie di potenze convergenti nelle variabili $(\mathrm{X}_f)_{f \in \mathfrak{M}(x)}$ in cui, naturalmente, ogni serie dipende da un numero finito di variabili;

definendo $\sigma^*(\mathrm{A}) = \bigcup_{x \in \mathrm{S}^*(\mathrm{A})} \sigma^*(\mathrm{A})_x$ si è costruito un fascio nel senso di espace étalé (cfr. (12)) dotato come segue della topologia naturale; fissato:

$$\alpha = \sum_{i_1, \cdots, i_k = 0}^{\infty} c_{i_1 \cdots i_k} \mathrm{X}_{f_1}^{i_1} \cdots \mathrm{X}_{f_k}^{i_k} \in \sigma^*(\mathrm{A})_x$$

risulta definito $\mathrm{U} \in \mathfrak{U}(x)$ in $\mathrm{S}^*(\mathrm{A})$ dato da:

$$\mathrm{U} = \{ y \in \mathrm{S}^*(\mathrm{A}) \mid |f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon \quad 1 \leq i \leq k \}$$

se $y \in \mathrm{U}$ la serie:

$$\sum_{i_1, \cdots, i_k = 0}^{\infty} c_{i_1 \cdots i_k} (\mathrm{X}_{f_1 - f_1(y)} + f_1(y))^{i_1} \cdots (\mathrm{X}_{f_k - f_k(y)} + f_k(y))^{i_k}$$

può essere ordinata nella serie convergente:

$$\alpha_y = \sum_{i_1, \cdots, i_k = 0}^{\infty} \alpha_{i_1 \cdots i_k} \mathrm{X}_{f_1 - f_1(y)}^{i_1} \cdots \mathrm{X}_{f_k - f_k(y)}^{i_k};$$

risulta immediato che gli insiemi del tipo $\{\alpha_y\}_{y \in \mathrm{U}}$ scelti come intorni descrivono completamente la topologia di $\sigma^*(\mathrm{A})$; $\forall x \in \mathrm{S}^*(\mathrm{A})$ si pone:

$$\rho(\mathrm{A})_x = \left\{ \alpha = \sum_{i_1, \cdots, i_k = 0}^{\infty} c_{i_1 \cdots i_k} \mathrm{X}_{f_1}^{i_1} \cdots \mathrm{X}_{f_k}^{i_k} \in \sigma^*(\mathrm{A})_x \;\middle|\; \forall r \in \mathbf{N} : \sum_{i_1 + \cdots + i_k < r} c_{i_1 \cdots i_k} f_1^{i_1} \cdots f_k^{i_k} \in \mathfrak{M}(x)^r \right\}$$

è di rapida verifica che:

$$\rho(\mathrm{A}) = \overbrace{\bigcup_{x \in \mathrm{S}^*(\mathrm{A})} \rho(\mathrm{A})_x}^{\circ}$$

è un sottofascio di ideali di $\sigma^*(\mathrm{A})$: prendendo adesso $\sigma(\mathrm{A}) = \sigma^*(\mathrm{A})/\rho(\mathrm{A})$ si completa la costruzione di $\Sigma(\mathrm{A})$.

Per ultimare la costruzione del functore $\Sigma : \mathscr{W} \to \mathscr{E}$ occorre, assegnato un omomorfismo continuo di $\mathbf{K}$-algebre $\mathrm{F} : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{W}$, definire $\Sigma(\mathrm{F}) : \Sigma(\mathrm{B}) \to \Sigma(\mathrm{A})$:

$$\Sigma(\mathrm{F}) \text{ è del tipo: } (\varphi, {}^*\varphi) : (\mathrm{S}^*(\mathrm{B}), \sigma(\mathrm{B})) \to (\mathrm{S}^*(\mathrm{A}), \sigma(\mathrm{A}))$$

che viene descritto nel modo seguente:

$$\varphi : \quad \mathrm{S}^*(\mathrm{B}) \to \mathrm{S}^*(\mathrm{A}) \qquad \text{è dato da} \quad \varphi(y) = y \circ \mathrm{F}$$

che risulta banalmente continuo; per definire ${}^*\varphi : \mathrm{S}^*(\mathrm{B}) \oplus_\varphi \sigma(\mathrm{A}) \to \sigma(\mathrm{B})$ si parte da:

$$\psi : \quad \mathrm{S}^*(\mathrm{B}) \oplus_\varphi \sigma^*(\mathrm{A}) \to \sigma^*(\mathrm{B})$$

definito per spighe come

$$\psi_y \Big(\sum_{i_1, \cdots, i_k = 0}^{\infty} c_{i_1 \cdots i_k} \mathrm{X}_{f_1}^{i_1} \cdots \mathrm{X}_{f_k}^{i_k} \Big) = \sum_{i_1, \cdots, i_k = 0}^{\infty} c_{i_1 \cdots i_k} \mathrm{X}_{\mathrm{F}(f_1)}^{i_1} \cdots \mathrm{X}_{\mathrm{F}(f_k)}^{i_k}$$

è standard la dimostrazione che la famiglia $(\psi_y)_{y \in S(B)}$ definisce un omomorfismo di fasci ψ e che questo passa al quoziente individuando appunto ${}^*\varphi$;

b) si vuole adesso descrivere il comportamento del functore Σ sulla categoria $\mathscr{S}$ delle algebre di Stein (risp. delle algebre reali coerenti): sia $\mathscr{R}$ la categoria degli spazi di Stein (risp. degli spazi analitici reali): per prima cosa si ha: assegnato $(\mathrm{X}, \mathcal{O}) \in \mathscr{R}$, esiste un isomorfismo naturale:

$$i_{(\mathrm{X}, \mathcal{O})} : \quad (\mathrm{X}, \mathcal{O}) \to \Sigma [\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{O})]$$

se $\mathrm{A} = \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{O})$, lo spettro di Gelfand $\mathrm{S}^*(\mathrm{A})$ corrisponde allo spettro speciale $\mathrm{S}(\mathrm{A})$:

se $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ questo segue da 1.3.1 *a*);

se $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ questo segue da 1.6.4 e 1.6.7.

Per 1.4.9, esiste una bigezione naturale fra X e S(A), $\Gamma : \mathrm{X} \to \mathrm{S}(\mathrm{A})$ definita da: $\Gamma(x) = \varphi_x$ dove $\forall f \in \mathrm{A} \ \ \varphi_x(f) = f(x)$: Γ è un omoemorfismo:

sia $\mathbf{K} = \mathbf{C}$: assegnato $\varphi \in \mathrm{S}(\mathrm{A})$ questo si lascia fattorizzare come segue: $\varphi = \varphi_\rho \circ \rho$ con $\mathrm{A} \xrightarrow{\rho} \mathrm{A}_r \xrightarrow{\varphi_\rho} \mathbf{C}$ dove (cfr. 1.2) A_r è l'algebra ridotta associata e $\rho : \mathrm{A} \to \mathrm{A}_r$ è l'omomorfismo naturale che è aperto e surgettivo: se ne deduce facilmente $\mathrm{S}(\mathrm{A}) \simeq \mathrm{S}(\mathrm{A}_r)$ che ci riconduce al caso ridotto: per provare che Γ è un omeomorfismo basta provare che $\forall x_0 \in \mathrm{X} \ \ \forall \mathrm{U} \in \mathfrak{U}(x_0)$ $\exists f_1, \cdots, f_k \in \mathrm{A}_r \ \ \exists \varepsilon > 0$ t.c.

$$x_0 \in \bigcap_{i=1}^{k} \{ x \in \mathrm{X} \mid |f_i(x)| < \varepsilon \}$$

sia pertanto X_0 l'unione delle componenti irriducibili di X che contengono x_0 e X_1 l'unione delle altre: certamente $\dim \mathrm{X}_0 = m < \infty$ quindi per i teoremi classici di immersione (cfr. (16)): $\exists f_1, \cdots, f_{2m+1} \in \mathrm{A}_{r|\mathrm{X}_0}$ che immergono propriamente X_0 in $\mathbf{C}^{2m+1}$, quindi, in particolare, $\exists \varepsilon > 0$

$$\exists f_1, \cdots, f_{2m+1} \in \mathrm{A}_r \ \text{ t.c. } \ x_0 \in \bigcap_{i=1}^{2m+1} \{ x \in \mathrm{X} \mid |f_i(x)| < \varepsilon \} \cap \mathrm{X}_0 \subset \mathrm{U} \cap \mathrm{X}_0$$

poiché, come tipica applicazione del Teorema B, $\exists f \in A$, t.c. $f_{|X_0} = 0$ e $f(x_0) \neq 0$, si può costruire $f_{2m+2} \in A$, t.c. $f_{2m+2|X_0} = \varepsilon$ e $f_{2m+2}(x_0) = 0$: si ha subito:

$$x_0 \in \bigcap_{i=1}^{2m+2} \{x \in X \mid |f_i(x)| < \varepsilon\} \subset U\,;$$

sia $\mathbf{K} = \mathbf{R}$: sia $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}})$ una complessificazione di Stein di $(X, \mathcal{O})$ e siano $\tilde{A} = H^0(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}})$ l'algebra di Stein associata e $S(\tilde{A})$ il suo spettro; si consideri il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{i}{\hookrightarrow} & \tilde{X} \\ \downarrow{\scriptstyle \Gamma_1} & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma_2} \\ S(A) & \overset{j}{\hookrightarrow} & S(\tilde{A}) \end{array}$$

dove $j = \Gamma_2 \circ i \circ \Gamma_1^{-1}$ è l'immersione naturale: poiché Γ_1 è continua, appare evidente che provare che j è continua completa la dimostrazione;

sia $\mathcal{B}(\varepsilon, x_0, f)$, con $x_0 \in S(\tilde{A})$ $f \in \tilde{A}$, un elemento della sottobase canonica di intorni in $S(\tilde{A})$: sia $x \in j^{-1}(\mathcal{B}(\varepsilon, x_0, f))$:

$$\exists \eta_i > 0 \quad \exists f_1, \cdots, f_n \in \tilde{A} \quad \text{t.c.} \quad \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{B}(\eta_i, j(x), f_i) \subset \mathcal{B}(\varepsilon, x_0, f);$$

si può inoltre supporre, per semplicità di calcolo: $f_1(j(x)) = \cdots = f_n(j(x)) = 0$ adesso, osservando che per definizione $f(j(x)) = f(x)$,

$$j^{-1}(\mathcal{B}(\eta_i, j(x), f_k)) = \{y \in S(A) \mid |f_k(j(y))| < \eta_i\}$$

e se $f_k = m_k + i n_k$ con $m_k, n_k \in A$,

$$j^{-1}(\mathcal{B}(\eta_i, j(x), f_k)) = \{y \in S(A) \mid m_k^2(y) + n_k^2(y) < \eta_i^2\}$$

che è aperto, da cui facilmente la continuità di j.

Si passa adesso alla costruzione dell'isomorfismo di fasci ${}^*\varphi : X \oplus_\Gamma \sigma(A) \to \mathcal{O}$: si definisce prima un omomorfismo di fasci $\psi : X \oplus_\Gamma \sigma^*(A) \to \mathcal{O}$ con nucleo $X \oplus_\Gamma \rho(A)$: e questo per spighe:

$$\forall x \in X \quad (X \oplus_\Gamma \sigma^*(A))_x = \sigma^*(A)_{\Gamma(x)} = \mathbf{K}\{(X_f)_{f \in \mathfrak{M}(x)}\}$$

dove ovviamente $\mathfrak{M}(x) = \{f \in A \mid f(x) = 0\}$ è l'ideale massimale su x; sia adesso $\mathbf{K} = \mathbf{C}$: se

$$\alpha = \sum_{i_1, \cdots, i_k = 0}^{\infty} c_{i_1 \cdots i_k} X_{f_1}^{i_1} \cdots X_{f_k}^{i_k} \in \mathbf{C}\{(X_f)_{f \in \mathfrak{M}(x)}\}$$

si pone

$$\psi_x(\alpha) = \sum_{i_1, \cdots, i_k = 0}^{\infty} c_{i_1 \cdots i_k} f_{1,x}^{i_1} \cdots f_{k,x}^{i_k} \in \mathcal{O}_x$$

è immediato che la collezione $(\psi_x)_{x \in X}$ definisce un omomorfismo di fasci; poiché $(X, \mathcal{O})$ è uno spazio di Stein, $\exists f_1, \cdots, f_n \in \mathfrak{M}(x)$ che determinano un sistema di coordinate locali, quindi: $\psi_x(\mathbf{C}\{X_{f_1}, \cdots, X_{f_n}\}) = \mathcal{O}_x$ e l'omomorfismo di fasci ψ è surgettivo; H. Cartan (4) (cfr. anche 1.3 a) ha dimostrato che gli ideali $\mathfrak{a}$ di $\mathcal{O}_x$ sono chiusi rispetto alla convergenza uniforme in un intorno di x: quindi $\forall r \in \mathbf{N}$, poiché $f_1, \cdots, f_k \in \mathfrak{M}(x)$ $\sum_{i_1+\cdots+i_k \geq r} c_{i_1 \cdots i_k} f_{1,x}^{i_1} \cdots f_{k,x}^{i_k} \in \mathfrak{M}_x^r$ ($\mathfrak{M}_x$ è l'ideale massimale di $\mathcal{O}_x$) quindi affinché

$$\alpha = \sum_{i_1, \cdots, i_k = 0}^{\infty} c_{i_1 \cdots i_k} X_{f_1}^{i_1} \cdots X_{f_k}^{i_k} \in \ker \psi_x$$

è necessario che

$$\sum_{i_1+\cdots+i_k < r} c_{i_1 \cdots i_k} f_1^{i_1} \cdots f_k^{i_k} \in \mathfrak{M}(x)^r \qquad \forall r \in \mathbf{N}$$

il Teorema di Krull, da cui segue immediatamente $\bigcap_{r \in \mathbf{N}} \mathfrak{M}_x^r = 0$, assicura che tali condizioni sono anche sufficienti; quindi $\ker \psi = X \oplus_\Gamma \varphi(A)$, il che permette la definizione per passaggio al quoziente dell'isomorfismo di fasci ${}^*\varphi : X \oplus_\Gamma \sigma(A) \to \mathcal{O}$; per il caso $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ si procede allo stesso modo, osservando che fissato $x \in X$ e $\alpha = \sum_{i_1 \cdots i_k = 0}^{\infty} c_{i_1 \cdots i_k} X_{f_1}^{i_1} \cdots X_{f_k}^{i_k} \in \mathbf{R}\{(X_f)_{f \in \mathfrak{M}(x)}\}$ $\exists (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}})$ complessificazione di Stein di $(X, \mathcal{O})$ a cui sono estendibili $f_1, \cdots, f_k$: questo dà completamente senso alla definizione di $\psi_x(\alpha)$ e agli altri passaggi.

Nel caso generale, comunque, si ottiene facilmente che il diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
(X_1, \mathcal{O}_1) & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & (X_2, \mathcal{O}_2) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle i_{(X_1, \mathcal{O}_1)}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i_{(X_2, \mathcal{O}_2)}} \\
\Sigma[H^0(X_1, \mathcal{O}_1)] & \xrightarrow{\Sigma H^0(\varphi)} & \Sigma[H^0(X_2, \mathcal{O}_2)]
\end{array}$$

è commutativo $\forall (X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2) \in \mathscr{R}$ $\forall$ morfismo $\varphi : (X_1, \mathcal{O}_1) \to (X_2, \mathcal{O}_2)$; per concludere la dimostrazione dell'anti-equivalenza delle categorie $\mathscr{A}$ e $\mathscr{R}$, basta osservare che esiste un isomorfismo naturale

$$\forall A \in \mathscr{A} \qquad j_A : \quad A \to H^0(\Sigma(A))$$

assegnato infatti

$$f \in A \quad , \quad \forall x \in S^*(A) \quad , \quad f(x) + X_{f-f(x)} \in \sigma^*(A)_x$$

e $(f(x) + X_{f-f(x)})_{x \in S^*(A)}$ è una sezione di $\sigma^*(A)$ che determina immediatamente $j_A(f) \in H^0(S(A), \sigma(A))$: chiaramente l'applicazione $f \to j_A(f)$ è un omomorfismo di $\mathbf{K}$-algebre; per completare basta considerare il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
H^0(X, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\quad\cong\quad} & A \\
\Big\downarrow{\scriptstyle H^0(i_{(X, \mathcal{O})})} & & \Big\downarrow{\scriptstyle j_A} \\
H^0\Sigma H^0(X, \mathcal{O}) & \xrightarrow{H^0\Sigma(\varphi)} & H^0(\Sigma(A))
\end{array}$$

Osservazione. Il Teorema 1.7.1 assicura in particolare che, dato $(X, \mathcal{O})$ spazio analitico reale e posto $A = H^0(X, \mathcal{O})$, la struttura $(A, \mathfrak{S})$ di algebra speciale, che sarà costantemente usata nel Capitolo 2, è completamente determinata dalla struttura di algebra reale coerente, cioè dalla struttura di $\mathbf{R}$-algebra topologica di A: da questa infatti si può ricostruire lo spazio $(X, \mathcal{O})$ e quindi la famiglia degli ideali speciali.

Osservazione 1.7.2. O. Forster (10) ha provato che se $\mathfrak{M}$ è un ideale chiuso massimale di un'algebra di Stein, allora esso è finitamente generato; questo risultato si estende facilmente al caso delle algebre reali coerenti:

sia $(X, \mathcal{O})$ uno spazio analitico reale, $A = H^0(X, \mathcal{O})$ sia l'algebra reale coerente associata, $\mathfrak{M}$ un ideale massimale chiuso: come visto, $\exists x \in X$ t.c. $\mathfrak{M} = \{f \in A \mid f(x) = 0\}$; sia $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}})$ una complessificazione di Stein di $(X, \mathcal{O})$ e sia $\tilde{\mathfrak{M}} = \{g \in H^0(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}}) \mid g(x) = 0\}$; per quanto dimostrato da Forster, $\exists g_1, \cdots, g_k \in \tilde{A} = H^0(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}})$ t.c. $\tilde{\mathfrak{M}} = ((g_1, \cdots, g_k))$: chiaramente $\forall y \in \tilde{X} - (x)$ $\exists i$ $1 \leq i \leq k$ t.c. $g_i(y) \neq 0$ siano inoltre $f_1, \cdots, f_r \in A$ (Teorema A) tali da generare $\mathcal{O}_x \mathfrak{M}$ su $\mathcal{O}_x$: si consideri adesso l'applicazione: $\mathcal{O}^{2k+r} \to \mathcal{O}\mathfrak{M}$ definita da:

$$(\alpha_{1,x}, \cdots, \alpha_{2k+r,x}) \mapsto \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Re}\, g_{i,x} \alpha_{i,x} + \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}\, g_{i,x} \alpha_{i+k,x} + \sum_{i=1}^{r} f_{i,x} \alpha_{i+2k,x}$$

per costruzione stessa l'applicazione è surgettiva: il teorema B assicura che sono sufficienti $2k + r$ elementi per generare $\mathfrak{M}$; ricordando 1.6.5 *c*), si può enunciare la seguente:

Proposizione 1.7.3. *Sia A un'algebra di Stein (risp. un'algebra reale coerente); il suo spettro speciale o, equivalentemente, il suo spettro di Gelfand è costituito dagli ideali massimali finitamente generati.*

1.8. *Ideali regolari.*

È possibile in modo abbastanza naturale introdurre un'altra classe di ideali di un'algebra reale coerente A, dove, come per la classe degli ideali massimali le operazioni di chiusura e specializzazione si equivalgano.

Definizione 1.8.1. Sia $(X, \mathcal{O})$ uno spazio analitico reale, $A = H^0(X, \mathcal{O})$ l'algebra reale coerente associata: un ideale $\mathfrak{p}$ di A si dice regolare se $\exists (f_i)_{i \in I}$, sistema di generatori di $\mathfrak{p}$, che ammettono estensione ad una comune complessificazione $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}})$ di $(X, \mathcal{O})$; esempio banale: ogni ideale finitamente generato è regolare.

Proposizione 1.8.2. *Sia $\mathfrak{p}$ un ideale regolare: allora* $\overline{\mathfrak{p}} = \tilde{\mathfrak{p}}$.

Dimostrazione. In base a 1.6.4, $\overline{\mathfrak{p}} \subset \tilde{\mathfrak{p}}$: occorre quindi provare solo l'inclusione inversa: sia $(f_i)_{i \in I}$ un sistema di generatori di $\mathfrak{p}$ estendibili come $(\tilde{f}_i)_{i \in I}$ alla complessificazione $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}})$ di $(X, \mathcal{O})$; sia $f \in \tilde{\mathfrak{p}}$: chiaramente non è restrittivo supporre che anche f sia estendibile a $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}})$ come $\tilde{f}$: è chiaro che $\forall x \in X$

$$\tilde{\mathcal{O}}_x [(\tilde{f}_i)_{i \in I}] = \mathcal{O}_x \mathfrak{p} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = \tilde{\mathcal{O}}_x [\tilde{f}, (f_i)_{i \in I}]$$

cioè i fasci di ideali $\tilde{\mathcal{O}} [(\tilde{f}_i)_{i \in I}]$ e $\tilde{\mathcal{O}} [\tilde{f}, (\tilde{f}_i)_{i \in I})$ sono entrambi estensioni di $\mathcal{O}\mathfrak{p}$ e quindi in una complessificazione $(\tilde{X}_1, \tilde{\mathcal{O}}_1)$ coincidono: ciò ha come immediata conseguenza che $\tilde{f} \in [\widehat{(\tilde{f}_i)_{i \in I}}] = [\overline{(\tilde{f}_i)_{i \in I}}]$ cioè la tesi.

Capitolo 2

DECOMPOSIZIONE PRIMARIA

2.1. *Ideali primari speciali.*

Sia $(X, \mathcal{O})$ uno spazio di Stein (risp. uno spazio analitico reale) e sia A l'algebra associata.

Definizione 2.1.1. Si dice che per $(X, \mathcal{O})$ vale il teorema di identità se, date $f, g \in A$ t.c. $\exists x \in X$ per cui $f_x = g_x$, allora $f = g$; è possibile dare una caratterizzazione puramente algebrica degli spazi di Stein per cui vale il teorema di identità ed estendere, almeno parzialmente, tale risultato al caso reale; occorre premettere il seguente

Lemma 2.1.2. *Sia $(X, \mathcal{O})$ uno spazio di Stein (risp. uno spazio analitico reale) e sia q un ideale primario chiuso (risp. speciale) di $A = H^0(X, \mathcal{O})$, sia infine $a \in V(q)$: per $f \in A$ sono fatti equivalenti:*

i) $f \in q$

ii) $f_a \in \mathcal{O}_a q$.

Dimostrazione. i) $\Rightarrow$ ii) è ovvio; per ii) $\Rightarrow$ i): $\mathcal{O}q$ è un fascio coerente di ideali (nel caso reale cfr. 1.6.2): si consideri $\mathcal{F} = (\mathcal{O}q : f)$; $\mathcal{F}$ è coerente (cfr. (22)) e $\mathcal{F}_a = \{h_a \in \mathcal{O}_a \mid f_a h_a \in \mathcal{O}_a q\} = \mathcal{O}_a$; per il Teorema A, $\exists g \in H^0(X, \mathcal{F})$ t.c. $g(a) = 1$ inoltre $fg \in H^0(X, \mathcal{O}q) = q$ perché, per ipotesi q è chiuso (risp. speciale): se $f \notin q$, $\exists n \in \mathbf{N}$ t.c. $g^n \in q$ il che porta immediatamente ad un assurdo perché $g^n(a) = 1$ mentre $a \in V(q)$; il precedente Lemma può avere anche la seguente interpretazione: un ideale primario chiuso (risp. speciale) q è il «saturato» (cfr. 1.4.3 *b*)), $\forall x \in V(q)$, dell'ideale puntuale $\mathcal{O}_x q$.

Corollario 2.1.3. *Si considerino i due enunciati:*

i) *in* $A = H^0(X, \mathcal{O})$ *ogni divisore di zero è nilpotente;*

ii) *per* $(X, \mathcal{O})$ *vale il teorema di identità;*

se $(X, \mathcal{O})$ *è uno spazio di Stein allora* i) $\Longleftrightarrow$ ii);

se $(X, \mathcal{O})$ *è uno spazio analitico reale allora* i) $\Rightarrow$ ii).

Dimostrazione:

i) $\Rightarrow$ ii) (nel caso reale o complesso):

dire che ogni divisore di zero è nilpotente equivale ad asserire che l'ideale $\{0\}$ è primario: siano $f, g \in A$ t.c. $f_x = g_x$ per qualche $x \in X$: allora $(f-g)_x \in \mathcal{O}_x 0$ e per il Lemma precedente (banalmente $\{0\}$ è chiuso o speciale!) $f - g \in \{0\}$;

ii) $\Rightarrow$ i) (nel caso complesso):

supponiamo che $\exists f, g \in A$ t.c. $fg = 0$, $g \neq 0$ e $\forall n \in \mathbf{N}$ $f^n \neq 0$: adesso o $\forall x \in X$ $f(x) = 0$ cioè, per il Nullstellensatz analitico, f_x è nilpotente, cioè ancora $\exists k \in \mathbf{N}$ t.c. $f_x^k = 0_x$ mentre $f^k \neq 0$, oppure $\exists \bar{x} \in X$ t.c. $f(\bar{x}) \neq 0$ e immediatamente $g_{\bar{x}} = 0_{\bar{x}}$ mentre $g \neq 0$: in entrambi i casi non vale il teorema di identità.

Dal Lemma 2.1.2, si ricava anche il

Corollario 2.1.4. (*Estensione del Teorema di Krull*).

Sia $(X, \mathcal{O})$ *uno spazio di Stein* (*risp. uno spazio analitico reale*) *t.c. l'algebra di Stein* (*risp. l'algebra reale coerente*) *associata* A *sia nullprimaria, i.e. l'ideale* $\{0\}$ *sia primario; sia* $\mathfrak{M}$ *un ideale massimale chiuso di* A: *allora* $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathfrak{M}^n = \{0\}$.

Dimostrazione. Ricordando che, in base a 1.6.7, nel caso reale $\mathfrak{M}$ è speciale, sia $\{x\} = V(\mathfrak{M})$: se $f \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathfrak{M}^n$, $f_x \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathfrak{M}_x^n = \{0\}$ per il Teorema di Krull: poiché A è nullprimaria, $f = 0$.

Risultati di questo tipo permettono di estendere almeno parzialmente il Nullstellensatz agli spazi di Stein:

Definizione 2.1.5. Sia A un'algebra di Stein o un'algebra reale coerente, $\mathfrak{a}$ un ideale di A; si pone:

$$\operatorname{rad} \mathfrak{a} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{M} \in \mathfrak{M}(A) \\ \mathfrak{M} \supset \mathfrak{a}}} \mathfrak{M}$$

si osserva immediatamente che $\operatorname{rad} \mathfrak{a} = \{f \in A \mid f_{|V(\mathfrak{a})} = 0\}$ e, ovviamente, $\mathfrak{a} \subset \sqrt{\mathfrak{a}} \subset \operatorname{rad} \mathfrak{a}$; si ha il seguente:

Teorema 2.1.6. *Sia* $(X, \mathcal{O})$ *uno spazio di Stein,* q *sia un ideale primario chiuso nell'algebra di Stein* $A = H^0(X, \mathcal{O})$, *allora*: $\sqrt{q} = \operatorname{rad} q$ *e* $\exists n \in \mathbf{N}$ *t.c.* $(\sqrt{q})^n \subset q$.

Dimostrazione. Per passaggio al quoziente (è noto (cfr. per esempio (9)) che se A è un'algebra di Stein, $\mathfrak{a}$ un suo ideale chiuso, $A/\mathfrak{a}$ è ancora un'algebra di Stein) si può supporre $q = (0)$: è chiaro che, nelle notazioni di 1.2.2, $\operatorname{rad} 0 = R$: fissato $x \in X$, $\exists n \in \mathbf{N}$ t.c. $(\mathcal{O}_x R)^n = \mathcal{O}_x 0$ ($\mathcal{O}_x$ è noetheriano...), quindi per 2.1.3 $R^n = 0$ etc...

Questi risultati permettono di muovere i primi passi nella direzione, che verrà d'ora in poi costantemente seguita, di dimostrare che per le algebre di Stein e per le algebre reali coerenti valgono teoremi analoghi a quelli che si possono stabilire per gli anelli noetheriani per una più completa esposizione della teoria tratteremo anche alcuni aspetti del caso complesso sulla base di (9); per esempio è noto che, in un anello noetheriano, ogni famiglia di ideali possiede elementi massimali e che, come sottoprodotto della decomposizione primaria, ogni famiglia di ideali primi possiede elementi minimali: per le algebre di Stein si ha:

TEOREMA 2.1.7. *Sia* $(X, \mathcal{O})$ *uno spazio di Stein,* $A = H^0(X, \mathcal{O})$ *sia l'algebra di Stein associata: ogni famiglia di ideali primari chiusi di A ammette elementi massimali; ogni famiglia di ideali primi chiusi ammette elementi minimali.*

Prima di dare la dimostrazione di questo Teorema, vogliamo introdurre brevemente la teoria coerente dei sottospazi analitici: sia $(X, \mathcal{O})$ uno spazio di Stein oppure uno spazio analitico reale: in modo naturale si ha la seguente:

Definizione 2.1.8. $Y \subset X$ si dice sottoinsieme analitico coerente se $\exists \alpha$ ideale di $A = H^0(X, \mathcal{O})$ t.c. $Y = V(\alpha)$; è chiaro che α si può supporre speciale, poiché è immediato che $V(\alpha) = V(\tilde{\alpha})$; inoltre, come già osservato nel Capitolo 0, nel caso complesso la teoria coerente coincide con quella classica; si pone poi:

Definizione 2.1.9. Un sottoinsieme analitico coerente si dice irriducibile se non è unione propria di due sottoinsiemi analitici coerenti; sia $Y \subset X$ un sottoinsieme analitico coerente: si pone $I(Y) = \{f \in A \mid f_{|Y} = 0\}$: si ha:

LEMMA 2.1.10. *Sia* $Y \subset X$ *un sottoinsieme analitico coerente; sono fatti equivalenti:*

i) Y *è irriducibile;*

ii) $I(Y)$ *è un ideale primo.*

Dimostrazione. (È standard e vale in situazioni molto più generali):

i) $\Rightarrow$ ii): se $I(Y)$ non è primo, $\exists f_1, f_2 \in A \sim I(Y)$ t.c. $f_1 f_2 \in I(Y)$ si ha

$$I(Y) = [I(Y) + f_1] \cap [I(Y) + f_2]$$

e quindi $Y = V([I(Y) + f_1]) \cup V([I(Y) + f_2])$ assurdo: in fatti l'inclusione $\subset$ è immediata; sia $h \in [I(Y) + f_1] \cap [I(Y) + f_2]$ allora: $h = a_1 + m_1 f_1 = a_2 + m_2 f_2$ se $h \notin I(Y)$, $\exists z \in Y$ t.c. $h(z) \neq 0$ e subito $f_1 f_2(z) \neq 0$ contraddittorio: questo prova l'inclusione inversa e quindi l'uguaglianza;

ii) $\Rightarrow$ i): se Y è riducibile, $Y = Z \cup T$ e $\exists f \in A$ t.c. $f_{|Z} \equiv 0$, $f_{|Y} \not\equiv 0$ $\exists g \in A$ t.c. $g_{|T} \equiv 0$ $g_{|Y} \neq 0$; segue $fg \in I(Y)$ che risulta non primo.

Dimostrazione del Teorema 2.1.7. Sia $(q_i)_{i \in I}$ una catena ascendente per inclusione di ideali primari chiusi di A: in base a 2.1.6 e 2.1.10, $(V(q_i))_{i \in I}$ è una famiglia di sottoinsiemi analitici (coerenti)irriducibili di X: è noto che se $q_i \subset q_j$, cioè se $V(q_i) \supset V(q_j)$, si ha $\dim V(q_j) < \dim V(q_i)$ oppure $V(q_j) = V(q_i)$: questo ha come immediata conseguenza che $(V(q_i))_{i \in I}$ ha elemento minimo: sia questo $V(q_n)$: se $V(q_n) = 0$, da 1.3.1 e 1.4.7 segue $q_n = A$; altrimenti, sia $x \in V(q_n)$ e quindi $\forall i \in I$ $x \in V(q_i)$ per la minimità: nell'anello noetheriano $\mathcal{O}_x$, la famiglia di ideali $(\mathcal{O}_x q_i)_{i \in I}$ ha un massimo elemento sia questo $\mathscr{C}_x\, q_m$: per 2.1.2, q_m è massimo; il Lemma di Zorn completa la dimostrazione del primo enunciato;

sia $(\mathfrak{p}_i)_{i \in I}$ una catena discendente di ideali primi chiusi di A: supponendo che tutti siano propri, $\exists x \in \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{p}_i)$; sempre per 2.1.6 e 2.1.10, i $V(\mathfrak{p}_i)$ sono sottoinsiemi analitici irriducibili e quindi (cfr. per esempio (17)) omogeneo-dimensionali: in particolare, si ha: $\forall i \in I$, $\dim V(\mathfrak{p}_i) < \dim_x X$; sia $V(\mathfrak{p}_m)$ di dimensione massima $\forall i \in I$ $V(\mathfrak{p}_m) \supset V(\mathfrak{p}_i)$, da cui, sempre in base a 2.1.6, $\mathfrak{p}_m \subset \mathfrak{p}_i$ etc. . .

In questa direzione, utilizzando solo proprietà di coerenza, che permettono con tecniche di specializzazione, l'estensione al caso reale, si può dare il seguente:

LEMMA 2.1.11. *Sia* $(X, \mathscr{O})$ *uno spazio di Stein (risp. uno spazio analitico reale), sia* $(q_i)_{i \in I}$ *una catena ascendente per inclusione di ideali primari chiusi (risp. speciali) di* $A = H^0(X, \mathscr{O})$; *sono fatti equivalenti*:

i) $(q_i)_{i \in I}$ *ammette massimo elemento*

ii) $\sum_{i \in I} q_i = \bigcup_{i \in I} q_i$ *è speciale.*

Dimostrazione:

i) $\Rightarrow$ ii) è banale;

ii) $\Rightarrow$ i): basta osservare l'immediata uguaglianza:

$$V\left(\sum_{i \in I} q_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(q_i);$$

se $\sum_{i \in I} q_i$ è speciale $V\left(\sum_{i \in I} q_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(q_i) \neq \varnothing$ per 1.4.7; si procede poi come nella dimostrazione di 2.1.7.

Il Lemma precedente mette in luce come, in questioni di questo tipo, ci si scontri con fatti strettamente geometrici che, di fatto, sorreggono fortemente la dimostrazione di 2.1.7: per affrontare il problema con tecniche algebriche, sarebbe quindi importante dare, anche nel caso reale, una caratterizzazione algebrica e speciale degli ideali che definiscono sottoinsiemi analitici coerenti irriducibili: su questa strada però, si incontrano notevoli difficoltà:

a) non sembra possibile ottenere un'estensione agli spazi analitici reali del cosiddetto Nullstellensatz reale (cfr. (20), (21) e nota più oltre) analoga a quella di 2.1.6;

b) ammessa l'esistenza di tale estensione, è possibile dare esempi di ideali primi $\mathfrak{p}$ t.c. real $\mathfrak{p}$ (cfr. nota) non sia primo; questo toglie, riguardo al problema dell'irriducibilità ogni importanza all'estensione: in sostanza, come è naturale, si ereditano le difficoltà del caso algebrico reale.

Nota 2.1.12. Il Nullstellensatz reale.

Definizione a. Sia A un anello: un ideale $\mathfrak{a}$ di A si dice reale se:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 \in \mathfrak{a} \Rightarrow f_1, \cdots, f_n \in \mathfrak{a}.$$

OSSERVAZIONE *b.* Ogni ideale reale coincide col suo radicale: infatti sia $\mathfrak{a}$ reale e $f \in \sqrt{\mathfrak{a}} : f^n \in \mathfrak{a}$ da cui $f^{2^n} \in \mathfrak{a}$ e $f \in \mathfrak{a}$.

OSSERVAZIONE *c.* Dato un ideale $\mathfrak{a}$, esiste real $\mathfrak{a}$, il minimo ideale reale che lo contiene, che risulta dato da:

$$\operatorname{real} \mathfrak{a} = \left\{ f \in \mathrm{A} \mid f^{2d} + \sum_{i=1}^{n} g_i^2 \in \mathfrak{a}, g_i \in \mathrm{A} \right\}$$

TEOREMA *d.* (*Nullstellensatz algebrico reale*).

Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di $\mathbf{R}[x_1, \cdots, x_n]$, sia $\mathrm{V}(\mathfrak{a})$ il suo luogo di zeri: si ha:

$$\mathrm{I}(\mathrm{V}(\mathfrak{a})) = \{ f \in \mathbf{R}[x_1, \cdots, x_n] \mid f_{\mathrm{V}(\mathfrak{a})} = 0 \} = \operatorname{real} \mathfrak{a}.$$

TEOREMA *e.* (*Nullstellensatz analitico reale*).

Vale il Teorema d sostituendo $\mathbf{R}\{x_1, \cdots, x_n\}$ a $\mathbf{R}[x_1, \cdots, x_n]$; si noti infine che, in base alle Osservazioni b e c, $\sqrt{\mathfrak{q}} \subset \sqrt{\operatorname{real} \mathfrak{q}} = \operatorname{real} \mathfrak{q}$.

Sia $(\mathrm{X}, \mathcal{O})$ uno spazio analitico reale, $\mathrm{A} = \mathrm{H}^*(\mathrm{X}, \mathcal{O})$ l'algebra reale coerente associata, $\mathfrak{a}$ un ideale di A: è chiaro che, nelle notazioni di 2.1.5:

$$\mathfrak{a} \subset \sqrt{\mathfrak{a}} \subset \operatorname{real} \mathfrak{a} \subset \operatorname{rad} \mathfrak{a}.$$

Vogliamo concludere il paragrafo con la seguente:

OSSERVAZIONE 2.1.13. Si è visto (cfr. dim. di 1.6.7) che, assegnato nello spazio analitico reale $(\mathrm{X}, \mathcal{O})$ un sottoinsieme analitico coerente Y, $\exists (\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathcal{O}})$ complessificazione di $(\mathrm{X}, \mathcal{O})$, $\exists \mathrm{Z}$ sottoinsieme analitico coerente di $\tilde{\mathrm{X}}$ t.c. $\mathrm{Z} \cap \mathrm{X} = \mathrm{Y}$: se $\mathrm{Y} = \mathrm{V}(\mathfrak{a})$, basta prendere il fascio $\mathcal{F}$ che prolunga $\mathcal{O}\mathfrak{a}$ e calcolarne il luogo di zeri; non c'è speranza di avere unicità neppure localmente di tale prolungamento, come mostra il seguente facilissimo esempio:

$$\{z_1^2 + z_2^2 = 0\} \subset \mathbf{C}^2 \quad \text{e} \quad \{z_1^2 + 2 z_2^2 = 0\} \subset \mathbf{C}^2$$

inducono entrambi l'origine in $\mathbf{R}^2$ ma, ovviamente non coincidono neppure in un intorno di questa.

2.2. *Famiglie localmente finite di ideali.*

In questo paragrafo verranno descritti alcuni risultati preliminari al teorema di decomposizione primaria.

Definizione 2.2.1. Sia A un'algebra di Stein (risp. un'algebra reale coerente): una famiglia $(\mathfrak{a}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ di ideali di A si dice localmente finita se tale è la famiglia $(\mathrm{V}(\mathfrak{a}_i))_{i \in \mathrm{I}}$.

N. B. È chiaro che, affinché una famiglia $(\alpha_i)_{i\in I}$ di ideali sia localmente finita in senso proprio, cioè nella topologia di A, è necessario che sia finita (basta considerare un intorno di zero etc.).

È importante assegnare, come nel caso algebrico, significato geometrico alla decomposizione di un ideale: in questo senso, si hanno una serie di enunciati:

TEOREMA 2.2.2. *Sia* $(X, \mathcal{O})$ *uno spazio di Stein (risp. uno spazio analitico reale), sia* $(\alpha_i)_{i\in I}$ *una famiglia localmente finita di ideali chiusi (risp. speciali) di* $A = H^0(X, \mathcal{O})$: *si ha*:

i) $V\left(\bigcap_{i\in I}\alpha_i\right) = \bigcup_{i\in I} V(\alpha_i)$;

ii) $\operatorname{rad}\left(\bigcap_{i\in I}\alpha_i\right) = \bigcap_{i\in I}\operatorname{rad}\alpha_i$.

Dimostrazione. Si premettono alcune osservazioni:

a) è immediato che i) $\Rightarrow$ ii);

b) la dimostrazione è istantanea se $\varkappa_0(I) < \infty$;

c) nelle ipotesi del Teorema, l'enunciato i) è equivalente a:

i'): $\qquad \forall x \in X \qquad \mathcal{O}_x \bigcap_{i\in I}\alpha_i = \bigcap_{i\in I}\mathcal{O}_x\alpha_i$

infatti: i') $\Rightarrow$ i): è chiaro che $\bigcup_{i\in I} V(\alpha_i) \subset V\left(\bigcap_{i\in I}\alpha_i\right)$; viceversa, sia $x \notin V\left(\bigcap_{i\in I}\alpha_i\right)$: senz'altro $\mathcal{O}_x\bigcap_{i\in I}\alpha_i = \bigcap_{i\in I}\mathcal{O}_x\alpha_i$ è proprio: $\exists \bar{\imath} \in I$ t.c. $\mathcal{O}_x\alpha_{\bar{\imath}}$ è proprio e $x \in V(\alpha_{\bar{\imath}})$;

i) $\Rightarrow$ i'): la locale finitezza della famiglia $(\alpha_i)_{i\in I}$ assicura che $\forall x \in X$, $\bigcap_{i\in I}\mathcal{O}_x\alpha_i = \bigcap_{i\in I(x)}\mathcal{O}_x\alpha_i$ dove $I(x)$ è finito; poiché (cfr. (22)) l'intersezione di un numero finito di fasci coerenti è coerente, dal Teorema A segue subito $\bigcap_{i\in I(x)}\mathcal{O}_x\alpha_i = \mathcal{O}_x\bigcap_{i\in I(x)}\alpha_i$ e per i) appunto $\mathcal{O}_x\bigcap_{i\in I(x)}\alpha_i = \mathcal{O}_x\bigcap_{i\in I}\alpha_i$.

Per la dimostrazione del Teorema:

$$H^0\left(X, \mathcal{O}\bigcap_{i\in I}\alpha_i\right) = \bigcap_{i\in I}\alpha_i = \bigcap_{i\in I} H^0(X, \mathcal{O}\alpha_i) = H^0\left(X, \bigcap_{i\in I}\mathcal{O}\alpha_i\right)$$

dalla coerenza di $\bigcap_{i\in I}\mathcal{O}\alpha_i$, per 1.3.1 *b*), si ha proprio

$$\forall x \in X \qquad \mathcal{O}_x\bigcap_{i\in I}\alpha_i = \bigcap_{i\in I}\mathcal{O}_x\alpha_i.$$

Nel caso complesso il Teorema vale anche togliendo l'ipotesi di chiusura sugli ideali $(\alpha_i)_{i\in I}$; per la dimostrazione occorrono due Lemmi.

LEMMA 2.2.3. *Sia* A *un'algebra di Stein*: $\exists \mathfrak{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sistema fondamentale di intorni* 1 *t.c.* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall m > n$:

$$U_n \supset U_{n+1}\cdot U_{n+2}\cdot\dots\cdot U_m \qquad \textit{(prodotto in senso vettoriale)}.$$

Dimostrazione. Sia $(X_j)_{j\in\mathbf{N}}$ un ricoprimento dello spazio di Stein X sotteso ad A t.c. $\forall j\in\mathbf{N}$ $(X_j, \mathcal{O})$ sia isomorfo ad un modello locale: è sempre possibile scegliere tale ricoprimento in modo che $\forall j\in\mathbf{N}$

$$H^0(X_j, \mathcal{O}) \simeq H^0(P(m_j), \mathcal{O}(P(m_j)))/H^0(P(m_j), \mathcal{I})$$

dove $P(m_j)$ è il policilindro unitario di centro l'origine in $\mathbf{C}^{m_j}$ e $\mathcal{I}$ è un fascio coerente di ideali del fascio $\mathcal{O}(P(m_j))$ dei germi di funzioni olomorfe su $P(m_j)$; fissato j, $\forall n\in\mathbf{N}$ si consideri:

$$\tilde{U}_n^{(j)} = \left\{ f\in H^0(P(m_j), \mathcal{O}(P(m_j))) \;\middle|\; |f(z)-1| < 3^{-n} \right.$$
$$\left. \forall (z_1, \cdots, z_{m_j})\in\mathbf{C}^{m_j} \ \text{ t.c. } \ |z_k| < 1-\frac{1}{n} \quad 1\le k\le m_j \right\}$$

è chiaro che $\{\tilde{U}_n^{(j)}\}_{n\in\mathbf{N}}$ costituisce in $H^0(P(m_j), \mathcal{O}(P(m_j)))$ un sistema fondamentale di intorni di 1 e si vede facilmente che, $\forall n\in\mathbf{N}$ $\forall k>n$, $\tilde{U}_n^{(j)} \supset \tilde{U}_{n+1}^{(j)}\cdot\cdots\cdot\tilde{U}_k^{(j)}$; sia $\hat{U}_n^{(j)}$ l'immagine di $\tilde{U}_n^{(j)}$ attraverso la proiezione (che, come è noto, è continua ed aperta):

$$\pi: \quad H^0(P(m_j), \mathcal{O}(P(m_j))) \to H^0(X_j, \mathcal{O});$$

siano

$$\forall j\in\mathbf{N} \qquad r_j: \quad H^0(X, \mathcal{O}) \to H^0(X_j, \mathcal{O})$$

le applicazioni di restrizione; si pone:

$$U_n = \{f\in H^0(X, \mathcal{O}) \mid \forall j\le n \ r_j(f)\in\hat{U}_n^{(j)}\}$$

si è osservato in 1.1 che $H^0(X, \mathcal{O})$ ha la topologia meno fine che rende continue le applicazioni di restrizione r_j: questo ha come immediata conseguenza che $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è un sistema fondamentale di intorni di 1 con la proprietà richiesta.

Osservazione 2.2.4. Sia E un'algebra topologica commutativa completa e con unità, tale da ammettere un sistema fondamentale di intorni di 1, $\mathfrak{U} = (U_n)_{n\in\mathbf{N}}$, godente della proprietà del precedente Lemma; sia $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una successione di elementi di E t.c. $\forall n\in\mathbf{N}$ $f_n\in U_n$: allora il prodotto $\prod_{n\in\mathbf{N}} f_n$ converge.

Dimostrazione. $\forall n\in\mathbf{N}$ sia $P_n = \prod_{i=1}^{n} f_i$: occorre dimostrare che $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è una successione di Cauchy: sia $V\in\mathfrak{U}(0)$: $\exists m\in\mathbf{N}$ t.c. $\exists W\in\mathfrak{U}(0)$ t.c. $P_m\cdot U_m\cdot W\subset V$ infatti: per la continuità della moltiplicazione, $\exists U_m\in\mathfrak{U}(1)$, $\exists\tilde{W}\in\mathfrak{U}(0)$ t.c. $f_1\cdot U_m\cdot\tilde{W}\subset V$ inoltre $\exists W\in\mathfrak{U}(0)$ t.c. $f_2\cdots f_m W\subset\tilde{W}$: per la commutatività appunto $P_m\cdot U_m\cdot W\subset V$; adesso $W+1\in\mathfrak{U}(1)$ quindi $\exists n\in\mathbf{N}$ t.c. $U_n\subset W+1$; sia $r=\max(m, n)$: $\forall k, h>r$ se $k>h$ si ha

$$P_k - P_h = P_h\left(\prod_{i=h+1}^{k} f_i - 1\right) = P_m\cdot f_{m+1}\cdots f_h\left(\prod_{i=h+1}^{k} f_i - 1\right) = a$$

ora $f_{m+1}\cdot\cdots\cdot f_h\in U_m$ e $\prod_{i=h+1}^{k} f_i - 1\in U_h - 1\subset W$: per quanto visto $a\in V$ etc.

LEMMA 2.2.5. *Sia* $(\alpha_i)_{i \in I}$ *una famiglia localmente finita di ideali nell'algebra di Stein* $A = H^0(X, \mathcal{O})$: $\forall U$ *aperto non vuoto di* A, $\exists K \subset I$ con $\varkappa_i(k) < \infty$ *t.c.* $\forall L \subset I \sim K$ $\varkappa_i(L) < \infty$ *si abbia*: $U + \bigcap_{l \in L} \alpha_l = A$

Dimostrazione. Sia $(X_n)_{n \in N}$ un'esaustione di X in aperti di Stein relativamente compatti: assegnato U aperto in $A = H^0(X, \mathcal{O})$, per la definizione stessa della sua topologia, $\exists n \in \mathbf{N}$ $\exists V$ aperto non vuoto in $H^0(X_n, \mathcal{O}) = A_n$ t.c. $U \supset r_n^{-1}(V)$; per la locale finitezza della famiglia $(\alpha_i)_{i \in I}$ $\exists K \subset I$ sottoinsieme finito t.c. $\forall i \in I \sim K$ $V(\alpha_i) \cap X_n = \varnothing$; sia L una parte finita di $I \sim K$ e $\beta = \bigcap_{l \in L} \alpha_l$: è chiaro che $V(\beta) \cap X_n = \varnothing$ e quindi $\forall x \in X_n$ $\mathcal{O}_x \beta = \mathcal{O}_x$ da cui, per 1.3.1 *a*), $\overline{A_n r_n(\beta)} = A_n$: il Teorema di Runge (cfr. (2) e (23)) assicura che $A_n = \overline{r_n(A)}$ da cui $\overline{r_n(\beta)} = A_n$ ed anche $r_n(\beta) + V = A_n$ ossia $\beta + U = A$ che è la tesi.

Si è in grado, a questo punto, di dimostrare il Teorema annunciato, cioè:

TEOREMA 2.2.6. *Sia* $(X, \mathcal{O})$ *uno spazio di Stein*, $A = H^0(X, \mathcal{O})$ *sia la sua algebra di Stein*, $(\alpha_i)_{i \in I}$ *sia una famiglia localmente finita di ideali; allora*:

i) $V\left(\bigcap_{i \in I} \alpha_i\right) = \bigcup_{i \in I} V(\alpha_i)$;

ii) $\operatorname{rad}\left(\bigcap_{i \in I} \alpha_i\right) = \bigcap_{i \in I} \operatorname{rad} \alpha_i$.

Dimostrazione. Sia $x \notin \bigcup_{i \in I} V(\alpha_i)$ e sia $\mathfrak{U} = (U_n)_{n \in N}$ il sistema fondamentale di intorni di 1 costruito nel Lemma 2.2.3: è ovvio che non è restrittivo supporre $0 \notin \overline{\{f(x) \mid f \in U_n\}}$; in base a 2.2.5, $\exists K \subset I$ parte finita, $\exists (L_n)_{n \in N}$ successione di parti finite di $I \sim K$ t.c.:

a) $\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} L_n\right) \sqcup K = I$;

b) $\forall n \in \mathbf{N}$ $\quad U_n + \bigcap_{l \in L_n} \alpha_l = A$;

$\exists h \in \bigcap_{j \in K} \alpha_j$ t.c. $h(x) \neq 0$ inoltre $\forall n \in \mathbf{N}$, $\exists f \in \left(\bigcap_{l \in L_n} \alpha_l\right) \cap U_n$; per Osservazione 2.2.4, $h \cdot \prod_{n \in \mathbf{N}} f_n$ converge ad $f \in \bigcap_{i \in I} \alpha_i$ e chiaramente $f(x) \neq 0$; questo prova che $x \notin V\left(\bigcap_{i \in I} \alpha_i\right)$, cioè l'inclusione $V\left(\bigcap_{i \in I} \alpha_i\right) \subset \bigcup_{i \in I} V(\alpha_i)$; l'inclusione inversa e il seguito della dimostrazione, come già osservato, sono banali.

Queste tecniche hanno delle semplici applicazioni non direttamente legate al problema della decomposizione primaria; ad esse accenneremo solo brevemente: per prima cosa, è possibile ottenere alcuni miglioramenti di precedenti enunciati: si ha infatti il seguente:

Lemma 2.2.7. *Sia* $(\alpha_i)_{i\in I}$ *una famiglia localmente finita di ideali in un'algebra di Stein; allora:*

a) $\forall U$ *aperto non vuoto di* A, $\exists K$ *parte finita di* I *t.c.* $U + \bigcap_{i\in I - K} \alpha_i = A$;

b) $\forall W \in \mathfrak{U}(0)$ $\exists K$ *parte finita di* I *t.c.* $\bigcap_{k\in K} \alpha_k \subset W + \bigcap_{i\in I} \alpha_i$.

Dimostrazione: a) è immediato; per *b)*:

$\forall W \in \mathfrak{U}(0)\ \exists U \in \mathfrak{U}(0)$ t.c. $U \cdot U \subset W$; sia $K \subset I$ una parte finita t.c. $U + \bigcap_{i\in I-K} \alpha_i = A$; sia $f \in \bigcap_{k\in K} \alpha_k : \exists \lambda \in \mathbf{C} - \{0\}$ t.c. $\lambda f \in U$; λ^{-1} può essere identificato ad un elemento di A, quindi $\exists k \in U\ \exists h \in \bigcap_{i\in I-K} \alpha_i$ t.c. $\lambda^{-1} = k + h$; ne segue $f = \lambda f k + \lambda f h$, cioè la tesi.

Con procedimenti analoghi si può stabilire il seguente «Teorema di struttura», che non verrà qui dimostrato:

Teorema 2.2.8. *Sia* $(\alpha_i)_{i\in I}$ *una famiglia localmente finita di ideali chiusi in un'algebra di Stein* $A : \forall U \in \mathfrak{U}(0)$, $\exists (W_i)_{i\in I}$ *famiglia di intorni* 0 *t.c.* $W_i = A$ *salvo al più per un numero finito di indici t.c.* $\bigcap_{i\in I} (\alpha_i + W_i) \subset \left(\bigcap_{i\in I} \alpha_i\right) + U$.

È stato dato l'appellativo di «Teorema di struttura» al precedente enunciato perché esso ammette la seguente formulazione equivalente:

Teorema 2.2.8 bis. *Sia* $(\alpha_i)_{i\in I}$ *una famiglia localmente finita di ideali chiusi nell'algebra di Stein* A; $\{\varphi_i : A \to A/\alpha_i\}_{i\in I}$ *sia la famiglia dei corrispondenti omomorfismi canonici; allora:*

$$\mathop{\mathsf{X}}_{i\in I} \varphi_i : \quad A \to \prod_{i\in I} (A/\alpha_i)$$

è un omomorfismo di A *su una sottoalgebra chiusa dell'algebra di Stein* $\prod_{i\in I} (A/\alpha_i)$ *(per il prodotto di algebre di Stein cfr.* (9)).

Per l'equivalenza delle due formulazioni:

a) se vale il Teorema 2.2.8:

sia $\omega = \mathop{\mathsf{X}}_{i\in I} \varphi_i$: occorre provare, per la definizione stessa di omomorfismo di algebre topologiche, che $\chi : A/\ker \omega \to \omega(A)$ è un omeomorfismo; si osserva subito che $\ker \omega = \bigcap_{i\in I} \alpha_i$: si ha pertanto il diagramma:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\pi"'] & \prod_{i\in I} (A/\alpha_i) \\ A/\bigcap_{i\in I} \alpha_i \arrow[ur, "\chi"'] & \end{tikzcd}$$

π è continua ed aperta, ω è continua, quindi χ è continua; per ipotesi ω è aperta, quindi χ è un omeomorfismo;

b) è del tutto analogo l'inverso.

Concluderemo questo paragrafo con un altro risultato:

Lemma 2.2.9. *Sia* $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ *una famiglia localmente finita in un'algebra di Stein* A; *sia* $\mathfrak{p}$ *un ideale primo chiuso di* A; *allora:*

$$\bigcap_{i\in I}\mathfrak{a}_i\subset\mathfrak{p}\Rightarrow\exists i\in I\quad\text{t.c.}\quad\mathfrak{a}_i\subset\mathfrak{p}$$

Dimostrazione. Sia $U=A\sim\mathfrak{p}$; per 2.2.7 *a*), $\exists K$ parte finita di I t.c.

$$U+\bigcap_{i\in I\sim K}\mathfrak{a}_i=A$$

cioè

$$U\cap\Big(\bigcap_{i\in I\sim K}\mathfrak{a}_i\Big)\neq\varnothing\quad;\quad\exists f\in\Big(\bigcap_{i\in I\sim K}\mathfrak{a}_i\Big)\sim\mathfrak{p}:$$

se

$$\forall i\in I\quad\mathfrak{a}_i\not\subset\mathfrak{p}\ ,\ \forall k\in K\quad\exists f_k\in\mathfrak{a}_k\sim\mathfrak{p}$$

e pertanto

$$h=f\cdot\prod_{k\in K}f_k\in\bigcap_{i\in I}\mathfrak{a}_i\sim\mathfrak{p}.$$

Il precedente Lemma ammette una versione «debole» che si estende al caso reale; esattamente si ha:

Lemma 2.2.10. *Sia* $(X,\mathcal{O})$ *uno spazio di Stein (risp. uno spazio analitico reale), sia* $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ *una famiglia localmente finita di ideali chiusi (risp. speciali) di* $A=H^*(X,\mathcal{O})$ *e* $\mathfrak{p}$ *sia un ideale primo chiuso (risp. speciale); allora:*

$$\bigcap_{i\in I}\mathfrak{a}_i\subset\mathfrak{p}\Rightarrow\exists i\in I\quad\text{t.c.}\quad\mathfrak{a}_i\subset\mathfrak{p}.$$

Dimostrazione. Sia $x\in V(\mathfrak{p})$: per la locale finitezza, $\bigcap_{i\in I}\mathcal{O}_x\mathfrak{a}_i=\bigcap_{i\in K}\mathcal{O}_x\mathfrak{a}_i$ con $\varkappa(K)<\infty$; per 2.2.2 *c*): $\bigcap_{i\in I}\mathcal{O}_x\mathfrak{a}_i=\mathcal{O}_x\bigcap_{i\in I}\mathfrak{a}_i=\mathcal{O}_x\bigcap_{i\in K}\mathfrak{a}_i$; adesso $\exists\bar{\imath}\in K$ t.c. $\forall f\in\mathfrak{a}_{\bar{\imath}}\ f_x\in\mathcal{O}_x\mathfrak{p}$ altrimenti $\exists i\in K\ \forall f_i\in\mathfrak{a}_i$ t.c. $f_{i,x}\notin\mathcal{O}_x\mathfrak{p}$: senz'altro $f_i\notin\mathfrak{p}$ quindi $\prod_{i\in K}f_i\notin\mathfrak{p}$; per 2.1.2, $\prod_{i\in K}f_{i,x}\notin\mathcal{O}_x\mathfrak{p}$ quindi $\mathcal{O}_x\bigcap_{i\in K}\mathfrak{a}_i\not\subset\mathcal{O}_x\mathfrak{p}$: contraddizione; sempre per 2.1.2, si ha subito $\mathfrak{a}_{\bar{\imath}}\subset\mathfrak{p}$.

2.3. *Primärzerlegung.*

Definizione 2.3.1. Sia $(\gamma_i)_{i\in I}$ una famiglia di ideali nell'algebra di Stein (risp. reale coerente) A: la decomposizione $\mathfrak{a}=\bigcap_{i\in I}\gamma_i$ si dice irriducibile se $\forall K\subsetneqq I\ \ \mathfrak{a}\neq\bigcap_{i\in K}\gamma_i$;

in generale, data una decomposizione, non è possibile renderla irriducibile, come mostra il seguente semplicissimo esempio:

sia A l'algebra di Stein delle funzioni olomorfe su $\mathbf{C}$ e sia $\mathfrak{a}_n$ l'ideale delle funzioni di A che si annullano nell'origine di ordine $\geq n$: $\bigcap_{n\in N}\mathfrak{a}_n=\{0\}$

è una decomposizione sempre riducibile; un teorema di irriducibilità si ottiene se $(\gamma_i)_{i\in I}$ è una famiglia localmente finita di ideali chiusi (risp. speciali): esattamente si ha:

Lemma 2.3.2. *Sia $(\gamma_i)_{i\in I}$ una famiglia localmente finita di ideali chiusi (risp. speciali) nell'algebra di Stein (risp. reale coerente) A e $\alpha = \bigcap_{i\in I} \gamma_i$: $\exists J \subset I$ t.c. la decomposizione $\alpha = \bigcap_{j\in J} \gamma_j$ è irriducibile.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{A} = \{J \in \mathscr{P}(I) \mid \bigcap_{i\in J} \gamma_i = \alpha\} \neq \varnothing$; si deve provare che $\mathscr{A}$ ammette elementi minimali; sia $\mathscr{B}$ una catena di elementi di $\mathscr{A}$: dimostrando che $K = \bigcap_{J\in\mathscr{B}} J \in \mathscr{A}$, la tesi segue dal Lemma di Zorn; $\forall x \in X$ dalla locale finitezza si ottiene: $\exists J_1 \in \mathscr{B}$ t.c. $x \notin \bigcup_{J_1 - K} V(\gamma_i)$; per 2.2.2 c):

$$\mathcal{O}_x\left(\bigcap_{i\in K}\gamma_i\right) = \bigcap_{i\in K}\mathcal{O}_x\gamma_i = \bigcap_{i\in J_1}\mathcal{O}_x\gamma_i = \mathcal{O}_x\alpha$$

cioè appunto

$$\bigcap_{i\in K}\gamma_i = \alpha \quad \text{e} \quad K \in \mathscr{A}.$$

Definizione 2.3.3. Sia $(q_i)_{i\in I}$ una famiglia localmente finita di ideali primari chiusi (risp. speciali): la decomposizione primaria $\alpha = \bigcap_{i\in I} q_i$ si dice canonica se:

i) è irriducibile;

ii) i primi associati $\mathfrak{p}_i = \sqrt{q_i}$ sono a due a due distinti.

Osservazione 2.3.4. Data una decomposizione primaria $\alpha = \bigcap_{i\in I} q_i$, se $(q_i)_{i\in I}$ è una famiglia localmente finita di ideali primari chiusi (risp. speciali), ci si può sempre ricondurre ad una decomposizione canonica.

Dimostrazione. Il Lemma 2.3.2 ci consente di pervenire ad una decomposizione irriducibile; per la locale finitezza, osservando che $V(q) = V(\sqrt{q})$, assegnato un ideale primo $\mathfrak{p}$, $\exists q_1, \cdots, q_n$ al più, ideali primari della famiglia $(q_i)_{i\in I}$ t.c. $\sqrt{q_1} = \cdots = \sqrt{q_n} = \mathfrak{p}$: ponendo $q = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$, q è chiuso (risp. speciale) e, come noto, $\sqrt{q} = \mathfrak{p}$: ovvio che, raggruppando in questo modo gli ideali, si ottiene una decomposizione canonica.

Definizione 2.3.5. Sia $\alpha = \bigcap_{i\in I} q_i$ una decomposizione primaria canonica: q_h si dice componente primaria immersa se $\exists m \in I$ t.c. $V(q_h) \subset V(q_m)$: una componente primaria non immersa si dice isolata; sia $(q_h)_{h\in H\subset I}$ un insieme di componenti primarie: l'insieme si dice isolato se

$$m \in H \qquad i \in I \qquad V(q_m) \subset V(q_i) \Rightarrow i \in H \qquad \text{se } (q_h)_{h\in H};$$

è un insieme isolato, $\bigcap_{h\in H} q_h$ si dice componente associata isolata.

Siamo in grado di dimostrare il Teorema centrale di questa sezione:

Teorema 2.3.6. *Sia* $(X, \mathcal{O})$ *uno spazio di Stein (risp. uno spazio analitico reale),* $A = H^0(X, \mathcal{O})$ *sia l'algebra di Stein (risp. l'algebra reale coerente) associata e* α *sia un ideale chiuso (risp. speciale) di* A:

i) α *ammette decomposizione primaria canonica* $\alpha = \bigcap q_i$ *nel caso complesso si ha inoltre:*

ii) *i primi associati sono determinati univocamente;*

iii) *le componenti associate isolate sono determinate univocamente:*

Dimostrazione:

i): $\forall x \in X$ sia $M(x) = \{f \in A \mid f_x \in \mathcal{O}_x \alpha\}$; per 1.4.3 *b*), $M(x)$ è un ideale speciale e $\alpha = \bigcap_{x \in X} M(x)$; dal Teorema A segue immediatamente $\mathcal{O}_x M(x) = \mathcal{O}_x \alpha$ quindi, poiché entrambi i fasci sono coerenti, coincidendo in un punto, coincidono in tutto un intorno: cioè

$$\forall x \in X \quad , \quad \exists U(x) \in \mathfrak{U}(x) \quad \text{t.c.} \quad \forall y \in U(x) \quad \mathcal{O}_y M(x) = \mathcal{O}_y \alpha$$

e quindi

$$\forall y \in U(x) \qquad M(x) \subset M(y)\,;$$

il ricoprimento $\{U(x)\}_{x \in X}$ ammette un raffinamento localmente finito numerabile

$$\{U(x_n)\}_{n \in N} \quad \text{t.c.} \quad \alpha = \bigcap_{n \in N} M(x_n) \quad \text{e,} \quad \forall x \in U(x_n) \quad , \quad \mathcal{O}_x \alpha = \mathcal{O}_x M(x_n);$$

$\forall n \in N$ nell'anello noetheriano $\mathcal{O}_{x_n}$ l'ideale $\mathcal{O}_{x_n} \alpha$ ammette decomposizione primaria: $\mathcal{O}_{x_n} \alpha = \bigcap_{i=1}^{r_n} Q_{ni}$; sia $q_{ij} = \{f \in A \mid f_{x_i} \in Q_{ij}\}$: sempre per 1.4.3 *b*) i q_{ij} sono ideali primari speciali e $M(x_i) = \bigcap_{j=1}^{r_i} q_{ij}$ per cui $\alpha = \bigcap_{n \in N} \bigcap_{j=1}^{r_n} q_{nj}$; si può rendere la decomposizione localmente finita: sia

$$T_n = \{p \in \{1, \cdots, r_n\} \mid V(q_{np}) \cap U(x_j) = \emptyset\ \forall j < n\} \quad \text{e} \quad S_n = \{1, \cdots, r_n\} \sim T_n:$$

è chiaro che la decomposizione $\beta = \bigcap_{n \in N} \bigcap_{j \in T_n} q_{nj}$ è localmente finita e che $\beta \supset \alpha$; si vuole ottenere l'inclusione inversa, che, poiché sono in gioco ideali speciali, tenendo presente 1.3.1, può essere dimostrata provando: $\forall x \in X$ $\mathcal{O}_x \beta \subset \mathcal{O}_x \alpha$; si otterrà questo per induzione sul minimo indice m t.c. $x \in U(x_m)$:

a) $m = 1$: se $x \in U(x_1)$,

$$\mathcal{O}_x \beta = \mathcal{O}_x \Big(\bigcap_{n \in N} \bigcap_{j \in T_n} q_{nj} \Big) \subset \mathcal{O}_x \Big(\bigcap_{j \in T_1} q_{1j} \Big) = \mathcal{O}_x M(x_1) = \mathcal{O}_x \alpha$$

b) supponiamo di sapere che $\forall y \in \bigcup_{j=1}^{m-1} \mathrm{U}(x_j)$ si abbia

$\mathcal{O}_y \beta \subset \mathcal{O}_y \left(\bigcap_{j=1}^{m-1} \bigcap_{i \in \mathrm{T}_j} q_{ij} \right) \subset \mathcal{O}_y \alpha$: sia $\sigma \in \mathrm{S}_m$: $\exists a \in \mathrm{V}(q_{m\sigma}) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m-1} \mathrm{U}(x_j) \right)$;

se $f \in \bigcap_{j=1}^{m-1} \bigcap_{i \in \mathrm{T}_j} q_{ij}$, $f_a \in \mathcal{O}_a \alpha \subset \mathcal{O}_a q_{m\sigma}$ e quindi per 2.1.2, $f \in q_{m\sigma}$ cioè $\bigcap_{j=1}^{m-1} \bigcap_{i \in \mathrm{T}_j} q_{ij} \subset \bigcap_{\sigma \in \mathrm{S}_m} q_{m\sigma}$ ed anche: $\bigcap_{j=1}^{m} \bigcap_{i \in \mathrm{T}_j} q_{ij} \subset \bigcap_{j=1}^{r_m} q_{mj}$ da cui facilmente: $\forall x \in \mathrm{U}(x_m)$ $\mathcal{O}_x \beta \subset \mathcal{O}_x \left(\bigcap_{j=1}^{m} \bigcap_{i \in \mathrm{T}_j} q_{ji} \right) \subset \mathcal{O}_x \mathrm{M}(x_m) = \mathcal{O}_x \alpha$; per 2.3.4, si può passare ad una decomposizione canonica;

ii): (solo per il caso complesso) siano $\alpha = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} q_i$ $\alpha = \bigcap_{j \in \mathrm{J}} \mathfrak{m}_j$ due decomposizioni canoniche: si vuole arrivare a costruire una bigezione $\sigma : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ t.c. $\forall i \in \mathrm{I}$ $\sqrt{\mathfrak{m}_{\sigma(i)}} = \sqrt{q_i}$; 2.1.7 assicura che la famiglia $(\sqrt{q_i})_{i \in \mathrm{I}}$ ammette elementi massimali; sia $\mathrm{K}_0 = \{i \in \mathrm{I} \mid \sqrt{q_i}$ è massimale in $(\sqrt{q_j})_{j \in \mathrm{I}}\}$, sia H_0 l'analogo sottoinsieme di J; $\forall k \in \mathrm{K}_0$ $\exists h \in \mathrm{H}_0$ t.c. $\sqrt{q_k} \subset \sqrt{\mathfrak{m}_h}$ altrimenti:

$$(\alpha : q_k) = \left(\bigcap_{i \in \mathrm{I}} q_i : q_k \right) = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} (q_i : q_k) = \bigcap_{\substack{i \in \mathrm{I} \\ i \neq k}} q_i =$$

$$= \left(\bigcap_{j \in \mathrm{J}} \mathfrak{m}_j : q_k \right) = \bigcap_{j \in \mathrm{J}} (\mathfrak{m}_j : q_k) = \bigcap_{j \in \mathrm{J}} \mathfrak{m}_j = \alpha$$

(per i risultati sugli ideali primari usati in questa catena di uguaglianze cfr. per esempio (1)): la decomposizione $\alpha = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} q_i$ risulta pertanto riducibile: assurdo; analogamente, $\forall s \in \mathrm{H}_0$ $\exists t \in \mathrm{K}_0$ t.c. $\sqrt{\mathfrak{m}_s} \subset \sqrt{q_t}$; per la massimalità risulta chiaramente determinata una bigezione $\omega : \mathrm{K}_0 \to \mathrm{H}_0$ t.c. $\sqrt{\mathfrak{m}_{\omega(i)}} = \sqrt{q_i}$: se $\mathrm{I}_0 = \mathrm{I} \sim \mathrm{K}_0$ e $\mathrm{J}_0 = \mathrm{J} \sim \mathrm{H}_0$ si ha: $\bigcap_{i \in \mathrm{I}_0} q_i = \bigcap_{j \in \mathrm{J}_0} \mathfrak{m}_j$: infatti, sia

$$\gamma = \left(\bigcap_{k \in \mathrm{K}_0} q_k \right) \cap \left(\bigcap_{h \in \mathrm{H}_0} \mathfrak{m}_h \right): \quad \forall k \in \mathrm{K}_0 \quad (q_k : \gamma) = \mathrm{A} \quad \forall h \in \mathrm{H}_0 \quad (\mathfrak{m}_h : \gamma) = \mathrm{A}$$

comunque scelto $i \in \mathrm{I}_0$, $\forall m \in \mathrm{K}_0$: $\sqrt{q_m} \not\subset \sqrt{q_i}$ cioè $q_m \not\subset \sqrt{q_i}$ ed analogamente $\forall h \in \mathrm{H}_0$ $\mathfrak{m}_h \not\subset \sqrt{q_i}$: per 2.2.9, $\exists f \in \gamma \sim \sqrt{q_i}$ cioè: $q_i \subset (q_i : \gamma) \subset (q_i : f) = q_i$ ovvero $(q_i : \gamma) = q_i$; analogamente $\forall h \in \mathrm{J}_0$ $(\mathfrak{m}_h : \gamma) = \mathfrak{m}_h$ pertanto:

$$(\alpha : \gamma) = \left(\bigcap_{i \in \mathrm{I}} q_i : \gamma \right) = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} (q_i : \gamma) = \bigcap_{i \in \mathrm{I}_0} q_i =$$

$$= \left(\bigcap_{j \in \mathrm{J}} \mathfrak{m}_j : \gamma \right) = \bigcap_{j \in \mathrm{J}_0} (\mathfrak{m}_j : \gamma) = \bigcap_{j \in \mathrm{J}_0} \mathfrak{m}_j$$

si può quindi ripetere il precedente ragionamento per le due decomposizioni primarie canoniche $\alpha_1 = \bigcap_{i \in I_0} q_i$, $\alpha_1 = \bigcap_{j \in J_0} \mathfrak{m}_j$, ottenendo una bigezione globale per completa iterazione;

iii): (sempre solo per il caso complesso) siano $\alpha = \bigcap_{i \in I} q_i$ $\alpha = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{m}_i$ due decomposizioni primarie canoniche: si noti che, per ii), non è affatto restrittivo supporre che l'insieme degli indici sia lo stesso e che $\sqrt{q_i} = \sqrt{\mathfrak{m}_i}$; sia $(q_m)_{m \in M}$ un insieme isolato di componenti primarie: senz'altro $\forall i \in I \sim M$ $\forall m \in M$ $q_i \cap \mathfrak{m}_i \not\subset \sqrt{q_m}$, altrimenti $\sqrt{q_i \cap \mathfrak{m}_i} \subset \sqrt{q_m}$, contraddicendo l'isolamento; ponendo $\beta = \bigcap_{i \in I \sim M} (q_i \cap \mathfrak{m}_i)$, ancora per 2.2.9, si ha: $\beta \sim \sqrt{q_m} \neq \varnothing$: segue che $\beta \cap \sqrt{q_m}$ è un sottospazio vettoriale chiuso di β e $\beta \sim \sqrt{q_m}$ è aperto e denso in β; per il Teorema di Baire (si ricordi che, per la locale finitezza $\varkappa(I) \leq \aleph_0$): $\bigcap_{m \in M} (\beta \sim \sqrt{q_m}) = \left(\bigcap_{i \in I \sim M} (q_i \cap \mathfrak{m}_i) \right) \sim \bigcup_{m \in M} \sqrt{q_m} = \gamma$ è denso in β; in particolare, $\exists f \in \gamma$: si ha:

$$(\alpha : f) = \bigcap_{i \in I} (q_i : f) = \bigcap_{m \in M} q_m = \bigcap_{i \in I} (\mathfrak{m}_i : f) = \bigcap_{m \in M} \mathfrak{m}_m$$

il che assicura appunto che le componenti associate sono univocamente determinate e completa la dimostrazione del Teorema di decomposizione primaria.

È chiara l'interpretazione geometrica del Teorema di decomposizione primaria:

sia $(X, \mathcal{O})$ uno spazio di Stein (risp. uno spazio analitico reale), sia $A = H^0(X, \mathcal{O})$ l'algebra associata e α un ideale chiuso (risp. speciale) di A; data una decomposizione primaria canonica $\alpha = \bigcap_{i \in I} q_i$, in base a 2.2.2 i):

$$V(\alpha) = \bigcup_{i \in I} V(q_i) = \bigcup_{i \in I} V(\sqrt{q_i})$$

nel caso complesso, i $V(\sqrt{q_i})$ risultano univocamente determinati e in base al Nullstellensatz (cfr. 2.1.6 e poi 2.1.10) essi sono sottoinsiemi analitici irriducibili: si recupera negli spazi di Stein, per via algebrica, un risultato classico, dimostrato in modo affatto diverso (cfr. per esempio (17)): nel caso complesso ogni sottoinsieme analitico Y di X (ed in particolare X stesso che corrisponde all'ideale $\{0\}$) ammette una ed una sola decomposizione in componenti irriducibili.

È possibile dare di questo fatto geometrico una dimostrazione valida anche nel caso reale; occorrono alcuni risultati preliminari:

Osservazione 2.3.7. Siano $(X, \mathcal{O})$ e A come sopra:

a) sia α un ideale di A e $f \in A$; allora: $V(\alpha) \subset V(\alpha : f) \cup V(f)$.

Dimostrazione. Sia $x \in \mathrm{V}(\alpha)$: $\forall g \in \alpha \;\; g(x) = 0$; se $x \notin \mathrm{V}(f) \;\; f(x) \neq 0$; adesso $\forall h \in (\alpha : f) \;\; hf \in \alpha$ quindi $hf(x) = 0$ cioè $h(x) = 0$ e pertanto $x \in \mathrm{V}(\alpha : f)$;

b) se $\alpha = \operatorname{rad} \alpha$, $\forall f \in \mathrm{A} \;\; (\alpha : f) = \operatorname{rad}(\alpha : f)$.

Dimostrazione. Ovviamente basta provare $\operatorname{rad}(\alpha : f) \subset (\alpha : f)$; sia $g \in \operatorname{rad}(\alpha : f) : g_{|\mathrm{V}(\alpha : f)} \equiv 0$ cioè $gf_{|\mathrm{V}(\alpha : f) - \mathrm{V}(f)} = 0$ e quindi per *a*) $gf_{|\mathrm{V}(\alpha)} = 0$ e $gf \in \alpha$ cioè appunto $g \in (\alpha : f)$;

c) sia $(\beta_i)_{i \in \mathrm{I}}$ una famiglia localmente finita di ideali chiusi (risp. speciali) di A e $\alpha = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \beta_i$ sia tale che $\alpha = \operatorname{rad} \alpha$ (e quindi $\alpha = \sqrt{\alpha}$): si ha: $\alpha = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \sqrt{\beta_i}$.

Dimostrazione. Immediato; per 2.2.2 ii): $\alpha = \operatorname{rad} \alpha = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \operatorname{rad} \beta_i \supset \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \sqrt{\beta_i}$; l'inclusione inversa è ovvia.

Si ha adesso il seguente

LEMMA 2.3.8. *Sia α un ideale di* A *t.c.* $\alpha = \operatorname{rad} \alpha$ (*per definizione stessa α è chiuso* (*risp. speciale*)); *sia $\alpha = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{q}_i$ una decomposizione primaria canonica: allora i primi associati $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ sono univocamente determinati; sono altresì univocamente determinati i* $\operatorname{rad}(\mathfrak{q}_i)$, *che risultano ideali primi.*

Dimostrazione. Sia $f \in \mathrm{A}$: $(\alpha : f) = \left(\bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{q}_i : f \right) = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} (\mathfrak{q}_i : f)$: senz'altro $\mathrm{V}(\mathfrak{q}_i : f) \subset \mathrm{V}(\mathfrak{q}_i)$, quindi $(\mathrm{V}(\mathfrak{q}_i : f))_{i \in \mathrm{I}}$ è localmente finita; in base a 1.4.3 *c*), ogni $(\mathfrak{q}_i : f)$ è chiuso (risp. speciale): unendo 2.3.7 *b*) e *c*) si ha:

$$\sqrt{(\alpha : f)} = (\alpha : f) = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \sqrt{(\mathfrak{q}_i : f)} = \bigcap_{f \notin \mathfrak{q}_i} \sqrt{\mathfrak{q}_i};$$

se $(\alpha : f)$ è primo, per 2.2.10, $\exists \bar{\imath} \in \mathrm{I}$ t.c. $(\alpha : f) = \sqrt{\mathfrak{q}_{\bar{\imath}}} = \mathfrak{p}_{\bar{\imath}}$; d'altra parte, se $j \in \mathrm{I}$, $\exists f_j \notin \mathfrak{q}_j$, $f_j \in \bigcap_{i \in \mathrm{I} \sim \{j\}} \mathfrak{q}_i$, per l'irriducibilità della decomposizione e si ha: $\sqrt{(\alpha : f_j)} = (\alpha : f_j) = \sqrt{\mathfrak{q}_j} = \mathfrak{p}_j$; i primi associati risultano pertanto essere gli ideali primi dell'insieme $\{(\alpha : f)\}_{f \in \mathrm{A}}$ e sono quindi indipendenti dalla decomposizione scelta; ovviamente, anche i $(\operatorname{rad} \mathfrak{q}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ non dipendono dalla decomposizione; sia $i \in \mathrm{I}$: $\operatorname{rad} \mathfrak{q}_i$ o è primo, allora non c'è niente da dimostrare, o non è primario: in quest'ultimo caso sia $\operatorname{rad} \mathfrak{q}_i = \bigcap_{j \in \mathrm{J}(i)} \mathfrak{r}_{ij}$ una decomposizione primaria canonica: per ipotesi, $\operatorname{rad} \mathfrak{q}_i \subsetneqq \mathfrak{r}_{ij} \subset \operatorname{rad} \mathfrak{r}_{ij}$ quindi la decomposizione $\operatorname{rad} \mathfrak{q}_i = \bigcap_{j \in \mathrm{J}(i)} \operatorname{rad}(\mathfrak{r}_{ij})$ è propria; ciò ha come conseguenza immediata: $\alpha = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \operatorname{rad} \mathfrak{q}_i = \left(\bigcap_{j \neq i} \operatorname{rad} \mathfrak{q}_j \right) \cap \left(\bigcap_{j \in \mathrm{J}(i)} \operatorname{rad} \mathfrak{r}_{ij} \right)$ con i $\operatorname{rad} \mathfrak{q}_i$ non univocamente determinati: assurdo.

L'interpretazione geometrica è immediata: dato un sottoinsieme analitico coerente $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$, $\mathrm{I}(\mathrm{Y}) = \operatorname{rad}(\mathrm{I}(\mathrm{Y}))$. . .

Vogliamo concludere enunciando un'altra conseguenza, nel caso complesso, del Teorema di decomposizione primaria: la caratterizzazione degli ideali chiusi α di un'algebra di Stein A per cui valga il Nullstellensatz, cioè per cui $\sqrt{\alpha} = \operatorname{rad} \alpha$;

sia α un ideale di un'algebra di Stein A; si pone:

$$h(\alpha) = \{\text{minimo naturale } h \quad \text{t.c.} \quad \forall f \in \operatorname{rad} \alpha \quad f^h \in \alpha\}$$

se tale numero non c'è, si pone $h(\alpha) = +\infty$; per esempio, sulla base di 2.1.6, che se q è un ideale primario chiuso $h(q) < +\infty$; sia P una famiglia localmente finita di ideali primari chiusi; $\forall q \in \mathrm{P}$ sia:

$$\mathrm{P}_q = \{r \in \mathrm{P} \mid \mathrm{V}(r) \supset \mathrm{V}(q)\} ;$$

si pone:

$$\mathrm{H}(\mathrm{P}, q) = \left\{\text{minimo naturale H} \quad \text{t.c.} \quad \forall f \in \bigcap_{r \in \mathrm{P}_q} \operatorname{rad} r \quad f^{\mathrm{H}} \in q\right\}$$

ovviamente $\mathrm{H}(\mathrm{P}, q) \leq h(q) < +\infty$; si ha adesso il seguente

Teorema 2.3.9. *Sia* P *una famiglia localmente finita di ideali primari chiusi in un'algebra di Stein* A; *si ha*:

$$h\left(\bigcap_{q \in \mathrm{P}} q\right) = \sup_{q \in \mathrm{P}} \mathrm{H}(\mathrm{P}, q)$$

il Nullstellensatz vale per $\alpha = \bigcap_{q \in \mathrm{P}} q$ *se e solo se* $h\left(\bigcap_{q \in \mathrm{P}} q\right) < +\infty$, *cioè se per un ideale chiuso vale il Nullstellensatz, questo vale con esponente finito.*

Bibliografia

[1] Atiyah M. F.–Mac Donald I. G. (1969) – *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley publishing co.

[2] Behnke H. (1953) – *Généralisation du théorème de Runge pour des fonctions multiformes de variables complexes*, Coll. de Bruxelles, 81-96.

[3] Bruhat F.-Whitney H. (1959) – *Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques réels*, « Comm. Math. Helvetici », *36*, 2, 132-160.

[4] Cartan H. (1944) – *Idéaux de fonctions analytiques de variables complexes*, « Ann. Ecole Normale Sup. », *61*, 149-197.

[5] Cartan H. (1950) – *Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes*, « Bull. Soc. Math. de France », *78*, 28-64.

[6] Cartan H. (1953) – *Variétés analytiques complexes et cohomologie*, Coll. de Bruxelles, 41-55.

[7] Cartan H. (1957) – *Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes*, « Bull. Soc. Math. de France », *85*, 77-99.

[8] Cohn S. (1967) – *Sul rango dei fasci coerenti*, « B.U.M.I. », 373-382.

[9] Forster O. (1964) – *Primärzerlegung in Steinschen Algebren*, « Math. Annalen », *154*, 307-329.

[10] Forster O. (1967) – *Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln*, « Math. Zeitschrift », *97*, 376-405.

[11] Frisch J. (1967) – *Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes*, « Inventiones Math. », *4*, 118–138.
[12] Godement R. (1958) – *Topologie algébriques et théorie des faisceaux*, « Act. Scien. et Ind. », *1252*, Hermann Paris.
[13] Grauert H. (1958) – *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifold*, « Ann. Math. », *68*, 460–472.
[14] Hervé M. (1963) – *Several complex variables, local theory*, Oxford Univ. Press & Tata institute of fundamental research.
[15] Igusa J. (1952) – *On a property of the domain of regularity*, « Mem. Coll. Sc. Univ. of Kyoto », *27*, 95–97.
[16] Narasimhan R. (1960) – *Imbedding of holomorphically complete complex spaces*, « Am. J. of Math. », *82*, 917–934.
[17] Narasimhan R. (1966) – *Introduction to the Theory of Analytic Spaces*, « Lecture Notes in Math. », *25*, Springer Verlag Berlin.
[18] Oka K. (1953) – *Sur les functions analytiques de plusieurs variables IX. Domaines finis sans point critique interieur*, « Japan J. of Math. », *23*, 87–155.
[19] Remmert R. (1957) – Habilitationsschrift Münster.
[20] Risler J. J. (1970) – *Une caractérisation des idéaux des variétés algébriques réelles*, « C. R. Acad. Sci. Paris », Ser. A–B 271, A1171–A1173.
[21] Risler J. J. (1972) – *Un théorème des zéros en géometrie analytique réelle*, « C. R. Acad. Sci. Paris », Ser. A–B 274, A1488–A1490.
[22] Serre J. P. (1955) – *Faisceaux algébriques cohérents*, « Ann. Math. », *61*, 197–278.
[23] Stein K. (1956) – *Überlagerungen holomorph-vollständiger komplexer Räume*, « Arch. Math. », *7*, 354–361.
[24] Tognoli A. (1966) – *Proprietà globali degli spazi analitici reali*, « Atti Ac. Naz. dei Lincei, Rend. Cl. Sc. Mat. Fis. Nat. » (8), *41*, 460–463.
[25] Tognoli A. (1967) – *Proprietà globali degli spazi analitici reali*, « Ann. Mat. pura ed appl. » (4), *75*, 143–218.