FROIM MARCUS (*)

Sur les surfaces qui admettent ∞^2 transformations projectives en elles-mêmes (**)

Résumé : On démontre plusieurs propriétés des surfaces qui possèdent un groupe continu à deux parametres de collinéations en elles-mêmes.

1. — L'étude des surfaces possédant une infinité de transformations projectives en elles-mêmes commence avec un memoire de F. Enriques [1]. En excluant les surfaces avec plus de ∞^2 transformations projectives en elles-mêmes qui ont été déterminées aussi par Sophus-Lie [2] p. 501, les surfaces de l'espace ordinaire avec ∞^2 et pas plus de transformations projectives en elles-mêmes sont rationelles et appartiennent à un des types suivants [2] p. 500 :

a) les surfaces algébriques de Klein-Lie d'équation

$$x_1^{r_1} x_2^{r_2} x_3^{r_3} x_4^{r_4} = 1 ,$$

où r (i = 1, 2, 3, 4) sont quatre nombre entiers liés par la relation $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$;

b) les surfaces qui contiennent un faisceau de coniques, coupées par des plans par une droite ;

c) les surfaces d'ordre six avec sections elliptiques.

Comme il est bien connu, Fubini [3] a étudié les surfaces qui admettent un groupe continu G de deformations projectives (d.p.) en elles-mêmes. Il a montré que dans le cas d'une surface non réglée, le groupe G a deux paramètres au plus et a determiné les surfaces correspondantes.

En paramètres asymptotiques ces surfaces sont [4] p. 390-94 :

$\bar{a}$) les surfaces de coincidence ;

$\bar{b}$) les surfaces déterminées par

$$\beta = \frac{1}{\alpha(u - v)} \; ; \; \gamma = - \frac{\alpha}{u - v} \; ; \; \alpha = \text{const.} \; ;$$

(*) Technion Israel Institute of Technology, Depart. Mathematics, Haifa, Israel.

(**) Memoria presentata dall'Accademico dei XL E. Bompiani il 5-3-1974.

$\bar{c}$) les surfaces données par

$$\beta = \sqrt{\frac{2}{|K|}}\ \frac{1}{u - v}\ ;\ \gamma = -\sqrt{\frac{2}{|K|}}\ \frac{\alpha}{u - v}\ ;\ K(K+2) \neq 0\ ,$$

K constante < 0 étant la courbure de la première forme différentielle de Fubini [5], β, γ les coefficients du sistème complètement intégrable qui détermine à une homographie près une surface :

$$x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x \quad ; \quad x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v + p_{22} x\,. \tag{1.1}$$

Les conditions d'intégrabilité du systeme (1.1) sont [5]

$$\begin{gathered} L_v + 2\beta\gamma_u + \gamma\beta_u = 0\ ;\ M_u + 2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v = 0 \\ \beta M_v + 2M\beta_v + \beta_{vvv} = \gamma L_u + 2L\gamma_u + \gamma_{uuu}\,, \end{gathered} \tag{1.2}$$

ou

$$L = \theta_{uu} - \tfrac{1}{2}\theta^2_u - 2p_{11} - \beta\theta_v - \beta_v\ ;\ M = \theta_{vv} - \tfrac{1}{2}\theta^2_v - 2p_{22} - \gamma\theta_u - \gamma_u\,. \tag{1.3}$$

Si les t.i. qui engendre un groupe de d.p. d'une surface en elle-même, transforment en elles-mêmes aussi la troisième forme différentielle de la surface

$$L\,du^2 + M\,dv^2\,, \tag{1.4}$$

alors le groupe devient *un groupe de collinéations et non de déformations projectives* [4].

Le but de ce travail est de donner quelques proprietés qui caractérisent les surfaces avec ∞^2 transformations projectives, conformement aux notions de la géomètrie projective différentielle de Fubini.

2. — Soit $x(u, v)$ une surface non réglée, u, v, les asymptotiques. Une transformation infinitésimale asymptotique (t.i.a.) de la surface en elle-même est représentée par le symbole

$$X = k(u)\frac{\partial}{\partial u} + l(v)\frac{\partial}{v\,\partial}\,, \tag{2.1}$$

ou par les équations

$$\bar{u} = u + \varepsilon k(u) \qquad \bar{v} = v + \varepsilon l(v)\,, \tag{2.2}$$

ε étant un paramètre independant de u, v, dont on néglige le carré.

X est une déformation projective (d.p.) de la surface en elle-même si elle conserve au premier ordre l'élément linéaire de Fubini, c'est-à-dire si l'on a :

$$\frac{\bar\beta\, d\bar u^2 + \bar\gamma\, d\bar v^2}{2\, d\bar u\; d\bar v} = \frac{\beta\, du^2 + \gamma\, dv^2}{2\, du\; dv}. \tag{2.3}$$

Si X conserve aussi la troisième forme différentielle de la surface, alors X est une transformation projective (t.p.) de la surface en elle-même et non une d.p. Si la surface possède un groupe G_2 de d.p. en elle-même, on peut se servir d'un changement des parametres u, v, [3] pour réduire le symbole X à une de formes :

1°) $X_1 = \frac{\partial}{\partial u}$; $X_2 = \frac{\partial}{\partial v}$. 2°) $X_1 = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$; $X_2 = u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}$.

Les surfaces de coincidence [4] p. 401. admettent un G_2 de d.p. en elles-mêmes engendré par les t.i.a. $X_1 = \frac{\partial}{\partial u}$ et $X_2 = \frac{\partial}{\partial v}$, tandis que le groupe G_2 des surfaces ($\bar b$) et ($\bar c$) est engendré par les t.i.a. $X_1 = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$; $X_2 = u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}$.

Si (x) est une surface de coincidence on peut prendre [4] p. 157 $\beta = \gamma = 1$, puis normer le coordonnées de sorte que $\theta = \text{const.}$ Des conditions d'intégrabilité il résultera

$$p_{11} = cu + h\ ;\ p_{22} = cv + k\ (c, h, k,\ \text{const.}) \tag{2.4}$$

et de (1.3) on aura

$$L = -2(cu + h)\quad ;\quad M = -2(cv + k). \tag{2.5}$$

Si l'on cherche les surfaces de coincidence avec ∞^2 t.p. en elles-mêmes le G_2 engendré par $X_1 = \frac{\partial}{\partial u}$ et $X_2 = \frac{\partial}{\partial v}$ doit porter en elle-même $L\,du^2 + M\,dv^2$.

Par conséquent L et M doivent être des constante, et de (2.5) il résultera

$$c = 0 \tag{6.2}$$

Dans ce cas [5] p. 102 les surfaces de coincidence sont les surfaces tétraédrales de Klein-Lie.

Les valeurs de β, γ, L, M vérifient dans ce cas les conditions

$$\beta M_v + 2M\beta_v + \beta_{vvv} = \gamma L_u + 2L\gamma_u + \gamma_{uuu} = 0. \tag{A}$$

Mais d'apres O. Mayer [6] si les fonctions β, γ, L, M, d'une surface vérifient une des conditions (A), *la surface est minima-projective.*

Par conséquent : *Seulement les surfaces de coincidence minima projectives possédent un groupe G_2 de t.p. en elles-mêmes.*

Donc les *surfaces de Klein-Lie sont minima projectives.*
Considerons maintenant les surfaces $(\bar{b})$

Les conditions d'intégrabilité (1.2) donnent :

$$(2.7)\quad L = \frac{-3}{2(u-v)^2} + a u^2 + b u + c \; ; \; M = -\frac{3}{2(u-v)^2} + \alpha^2 (a v^2 + b v + c)\,,$$

a, *b*, *c*, des constantes non simultanément nulles.

Si le G_2 doit être un groupe de collinéations et non de d.p., alors L et M doivent être des fonctions de l'argument $\tau = u - v$, vérifiant aussi les équations

$$(2.8)\qquad 2L + u\frac{\partial L}{\partial u} + v\frac{\partial L}{\partial v} = 2M + u\frac{\partial M}{\partial u} + v\frac{\partial M}{\partial v} = 0\,,$$

et en tenant compte de (2.7) il s'ensuit

$$(2.9)\qquad a = b = c = 0\,.$$

Par conséquent : *Les surfaces* $(\bar{b})$ *avec* ∞^2 *transformations projectives en elles-mêmes se déterminent par :*

$$(\mathrm{I})\qquad \beta = \frac{1}{\alpha(u-v)} \; ; \; \gamma = -\frac{\alpha}{u-v} \; ; \; L = M = -\frac{3}{2(u-v)^2}\,.$$

Ces surfaces sont projectivement indéformables. Les β, γ, L, et M de (I) vérifient aussi les conditions (A). Donc :

Les surfaces (I) sont aussi des surfaces minima projectives.

De (I) on observe que les fonctions L et M ne dépendent pas de α. Par consequent :

Les surfaces (I) que l'on obtient en faisant varier le parametre α $(\alpha \neq 0, +\infty)$ *ont en commun la première et la troisième forme différentielle de Fubini.*

Rècemment nous avons démontré le résultat suivant [7] :

Une surface minima projective engendre une infinité de surfaces de même espèce avec l'aide d'une correspondance asymptotique de troisième espèce [5] p. 201 *conservant la première et la troisième forme différentielle de Fubini.*

Les surfaces (I) s'obtiennent avec une telle correspondance. En effet on part par exemple de la surface determiné par $\beta = \frac{1}{u-v} = -\gamma$, $L = M = -\frac{3}{2(u-v)^2}$ et on applique cette correspondance.

Les valeurs de β et γ de (I) satisfont l'equation

$$\frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \log \gamma}{\partial u \partial v} = \beta \gamma . \tag{2.10}$$

Donc les asymptotiques de ces surfaces appartiennent a des complexes lineaires [*4*] *p. 115.*

Enriques a étudié la surface

$$k (x_1 x_3 - x^2{}_2)^3 = (x^2{}_1 x_4 + 2 x^3{}_2 - 3 x_1 x_2 x_3)^2 \tag{2.11}$$

où k est une constante arbitraire. Si l'on exclu les valeurs $k = 0$, 4 et ∞, on obtient des surfaces non réglées avec ∞^2 t.p. en elles-mêmes. Voir E. Castelnuovo [5'].

Enriques a montrè aussi que les lignes asymptotiques sont de cubiques gauches. E. P. Lane et M. L. Macqueen [8] on montré que les equations paramètrique de la surface d'Enriques supposées rapporté aux lignes asymptotiques sont données par:

$$\begin{gathered} x_1 = 1 \quad ; \quad x_2 \frac{1+h}{2} u + \frac{1-h}{2} v \quad ; \quad x_3 = \frac{1+h}{2} u^2 + \frac{1-h}{2} v^2 \\ x_4 = \frac{(1+h)^2}{4h} u^3 - \frac{3(1-h^2)}{4h} u^2 v + 3 \frac{1-h^2}{4h} u v^2 - \frac{(1-h)^2}{4h} v^3 , \end{gathered} \tag{2.12}$$

avec

$$h^2 = \frac{4}{4+k} . \tag{2.13}$$

Tenant compte des valeurs exclues de k, il résulte que

$$h^2 \neq 1 , \quad h \neq 0 , \quad \text{et} \quad h \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

Des équations (2.12) on trouve:

$$\begin{gathered} \beta = \frac{1}{\alpha (u-v)} \quad ; \quad \gamma = \frac{\alpha}{u-v} \quad ; \quad \theta_u = \frac{1}{u-v} \quad ; \quad \theta_u = -\frac{1}{u-v} , \\ L = M = -\frac{3}{2(u-v)^2} , \end{gathered} \tag{2.14}$$

avec

$$\alpha = \frac{h-1}{h+1} . \tag{2.15}$$

Donc les surfaces (I) *avec* $\alpha \neq 0, \infty$, $\alpha \neq -1$, $\alpha \neq 2\sqrt{2}-3$, et $\alpha \neq -(3+2\sqrt{2})$ *sont les surfaces non réglées d'Enriques.*

Wilczynski [9] a montré que les surfaces rapportées aux lignes asymptotiques dont les équations paramètriques sont

$$\begin{aligned} & x_1 = 1 \quad ; \quad x_2 = u + v \quad ; \quad x_3 = U' - V', \\ & x_4 = -2(U' - V')(u - v) + 4(U + V), \end{aligned} \tag{2.16}$$

où U et V *sont des polynomes cubiques respectivement en* u *et en* v, *sont des surfaces algébriques d'ordre six dont les courbes directrices sont indéterminées et les asymptotiques sont des cubiques gauches.*

Nous voulons montrer que les surfaces (I) coincident avec les surfaces de Wilczynski (2.16).

En effet posons $U = a u^3 + a_1 u + a_2$; $V = b v^3 + b_1 v + b_2$. Les coordonnées x_i vérifient un système de forme (1.1) et on trouve que :

$$\theta_u + \beta = 0 \quad ; \quad \theta_v + \gamma = 0 \quad ; \quad \beta = -\frac{a}{a u + b v} \quad ; \quad \gamma = -\frac{b}{a u + b v}.$$

En posant $a u = \bar{u}$; $b v = -\bar{v}$ on obtient (en écrivant de nouveau u, v, au lieu de $\bar{u}, \bar{v}$) precisement les surfaces (I), avec $\alpha = \frac{a}{b}$. Nous avons donc le résultat suivant :

Les surfaces (c) *avec* ∞^2 *t.p. en elles-mêmes sont les surfaces* (2.16) *de Wilczynski Les surfaces d'Enriques se trouvent parmi les surfaces de Wilczynski.*

Les surfaces (2.16) *de Wilczynski appartiennent a la classe des surfaces limites de Tzitzeica Wilczynski* [4] *p. 168.*

Nous donnons maintenant la demonstration du résultat suivant :

Parmi les surfaces dont toutes les asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires, les seules qui sont minima-projectives, sont les surfaces limites de Tzizeica-Wilczynski.

En effet une surface dont les asymptotiques appartiennent a des complexes linéaires est une surface isothermo-asymptotique de Fubini, et on peut par un changement des paramètres asymptotiques rendre $\beta = \gamma$ ou β est une solution de l'equation [4] p. 115.

$$\frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \partial u} = \beta^2, \tag{2.19}$$

dont l'intégrale général est

$$\beta = \frac{\sqrt{U' V'}}{U + V}, \; U' V' \neq 0, \tag{2.20}$$

$U = U(u)$ et $V = V(v)$. Des conditions d'intégrabilité (1.2) on a [4] p. 115.

$$L + \frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \beta}{\partial u}\right)^2 = U_1 ,$$

(2.21)

$$M + \frac{\partial^2 \log \beta}{\partial v^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \beta}{\partial v}\right)^2 = V_1 ,$$

où

(2.22) $$U_1 = \frac{k U^2 + (1 - h) U + p}{U'} \quad ; \quad V_1 = \frac{k V^2 + (h - l) V + p}{V'} ,$$

h, k, l, p, des constantes pas toutes essentielles.

Les conditions (A) de O. Mayer sont équivalentes à une des conditions suivantes.

(2.23) $$2 \beta^2 M + 2 \beta \beta_{vv} - \beta^2_v = f(u) \quad ; \quad 2 \gamma^2 L + 2 \gamma \gamma_{uu} - \gamma^2_u = \Phi(v) .$$

En substituant par exemple M, β et ses dérivées dans la première des équations (2.23) on obtient :

(2.24) $$2 \frac{U' V'}{(U + V)^2} V_1 = f(u) ,$$

et de (2.22) il s'ensuit :

(2.25) $$2 U' (k V^2 + (h - l) V + p) = f(u) (U + V)^2 .$$

En opérant trois fois avec l'opérateur $\frac{\partial}{\partial v}$ et en observant que $U'V' \neq 0$, on obtient :

(6.26) $$2 k U' = f(u) .$$

Par conséquent

(2.27) $$V' V_1 = k (U + V)^2 .$$

Opérant maintenant avec l'opérateur $\frac{\partial}{\partial u}$ il résulte

(2.28) $$k U' (U + V) = 0 .$$

Donc $k = 0$. Par conséquent $f(u) = 0$ et de (2.27) il s'ensuit $V_1 = 0$. Donc

(2.29) $$k = h - l = p = 0 .$$

La condition (2.29) montre *que la première directive de la surface passe par un point O fixe de l'espace et la seconde directrice de Wilczynski est contenue dans un plan passant par* O [4] p. 168, *et par conséquent les surfaces apartiennent aux surfaces limites de Tzizeica-Wilczynski.*

Ce resultat explique pourqui les surfaces (I) *sont des surfaces minima-projectives.*

Considerons maintenant les surfaces $(\bar{c})$ qui admettent ∞^2 t.p. en elles-mêmes. Comme dans le $\varnothing$ 2 ces surfaces se détèrminent avec

$$\text{(II)}\qquad \beta = \sqrt{\frac{2}{|K|}}\,\frac{1}{u-v}\ ;\ \gamma = -\sqrt{\frac{2}{|K|}}\,\frac{1}{u-v},\ K(K+2)\neq 0$$
$$L = M = \frac{3}{|K|}\,\frac{1}{(u-v)^2}.$$

3. — A différence des surfaces de coincidence et le surfaces (I) les surfaces (II) ne peuvent pas etre minima-projectives. En effet de (A) il résulte que

$$\beta M_v + 2 M \beta_v + \beta_{vvv} = 6\sqrt{\frac{2}{|K|}}\,\frac{1}{(u-v)^2}\left(\frac{|K|-2}{|K|}\right), \tag{3.1}$$

qui ne peut pas s'annuller parceque $K+2\neq 0$.

Montrons tout d'abord que ces surfaces, contiennent un faisceau de coniques.

Pour cela considérons le sous groupe G_1 de t.p. en elles-mêmes de ces surfaces.

Il est engendré par $X_1 = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$.

Les trajectoires de ce sous-groupe sont

$$du - dv = 0. \tag{3.2}$$

Elles sont des lignes de Darboux car de (II) il résulte $\beta+\gamma=0$. Elles sont des lignes planes car elles vérifient en même temps l'équation des pangéodésiques de Fubini [4] p. 141 et l'équation des lignes projectives de B. Segre [10].

D'apreès un résultat de Bompiani [11] les lignes de Segre $du+dv=0$ *sont les lignes canoniques des surfaces* (II).

Donc les surfaces (II) *ont une famile de linges de Darboux qui sont pangéodésiques.*

En observant que $\beta_v = \gamma_u$ il résulte que le réseau double

$$du^2 - dv^2 = 0, \tag{3.3}$$

formé par les trajectories (3.2) et le lignes de Segre $du+dv=0$, est un réseau isothermo-conjugué. D'après un résultat de F. Marcus [12] *les courbes* $du+dv=0$ *sont aussi pangéodésiques et projectives.* Donc ce réseau est un réseau double de Koenigs [5] p. 204, c'est-à-dire leurs plans passent par deux droite fixes généralement non coplanaires.

Récemment nous avons démontré [13] le théorème: *Les surfaces determinées par* $\beta = -\gamma = \Phi(u - v)$ *et* $L = M = -\dfrac{3\,\Phi^2}{2} + C$, Φ *fonction arbitraire de l'argument* $\tau = u - v$, *sont les seules surfaces telles que les lignes de Darboux* $du - dv = 0$ *et les lignes correspondantes de Segre, forment un réseau de Koenigs.*

Ces surfaces admettent évidement un groupe G_1 de d.p. en elles-mêmes parceque β et γ sont fonctions de $\tau = u - v$. Elles admettent un G_2 de déformations projectives si

$$u\,\Phi' - v\,\Phi' + \Phi = 0\,. \tag{3.4}$$

D'ou $\Phi = \dfrac{C_1}{u - v}$ et par conséquent les surfaces correspondantes sont

$$\beta = -\gamma = \frac{C_1}{u - v}\;;\quad L = M = -\frac{3}{2}\,\frac{C_1^2}{(u - v)^2} + C\,. \tag{III}$$

Ce groupe G_2 se réduit à un groupe G_2 de t.p. si et seulement si $C = 0$. En posant

$$C_1 = \sqrt{\frac{2}{|K|}}\,, \tag{3.5}$$

nous trouvons précisement les surfaces (II).

D'après Süs et Su Buchin [14] *les surfaces (II) sont des surfaces P.R. (Projektivrotationflächen) et leurs lignes de Darboux* $du = dv = 0$ *sont des coniques.*

En effet de (1.1) avec $\theta =$ const., de (II) et (1.3) on a le long des courbes $du - dv = 0$

$$\frac{d^3 x}{d v^3} - (3\,\beta^2 - 2\,\beta_v - 4\,p_{11})\,\frac{d x}{d v} = \frac{d^3 x}{d v^3} = 0\,. \tag{3.6}$$

Ce qui montre que les trajectoires $du - dv = 0$ situées dans un faisceau de plans sont des coniques.

Nous avons donc le résultat suivant :

Les surfaces avec ∞^2 *t.p. en elles-mêmes qui contiennent un faisceau de coniques sont des surfaces de rotation - projective indéformable projectivement. Les lignes conjuguées aux coniques sont aussi situées dans un faisceau de plans et forment avec les coniques un réseau double de Koenigs qui généralement est aussi un réseau de Petterson.*

Il y a une exception seulement. En effet changeons le repère asymptotique avec un repère conjugué en posant $u = \bar u + \bar v$, $v = \bar u - \bar v$. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} & x_{\bar u \bar v} - \Phi\, x_{\bar u} = 0\,, \\ & x_{\bar u \bar u} + x_{\bar v \bar v} + 2\,\Phi\, x_{\bar v} - (3\,\Phi^2 + 2\,\Phi')\,x = 0\,. \end{aligned} \qquad \left(\Phi = \sqrt{\frac{2}{|K|}}\,\frac{1}{u - v}\right) \tag{3.7}$$

Les axes des deux faisceaux de plans sont coplanaires si le déterminant

$$(x_1 , (x_1)_{\bar v} , x_{-1} , (x_{-1})_{\bar u}) = 0 , \text{ ou}$$

(3.8) $$x_1 = x_{\bar v} - \Phi x \quad ; \quad x_{-1} = x_{\bar u} ,$$

sont les transformées de Laplace du point x dans le sens des lignes $\bar u =$ const., $\bar v =$ const [15].

De (3.7) il résulte $6\,\Phi^2 + 4\,\Phi' = 0$ et on obtient pour K la valeur

(3.9) $$K = -\frac{9}{2} .$$

Donc le *réseau de Koenigs sur les surfaces (II) avec* $| K | = \frac{9}{2}$ *n'est pas un réseau de Petterson.*

Enfin nous voulons montrer qu'il existe une surface (II) telle que les lignes de Segre $du + dv = 0$, sont aussi des coniques. En effet sur une ligne de Segre $du + dv = 0$ des surfaces (II) l'on a

(3.10) $$\frac{d^3 x}{d v^3} - \beta \frac{d^2 x}{d v^2} - 2\,(2\,\beta_v + 2\,p_{11} + \beta^2)\frac{d x}{d v} - 4\,(2\,p_{11v} + \beta\,p_{11})\,x = 0 .$$

D'apres Wilczynski [16] p. 61 une courbe plane d'équation

(3.11) $$x''' + 3\,p_1\,x'' + 3\,p_2\,x' + p_3 x = 0 ,$$

$x = x\,(t)$, est une conique si l'invariant θ_3 de l'équation (3.11), c'est-à-dire si

(3.12) $$\theta_3 = p_3 - 3\,p_1\,p_2 + 2\,p^3_1 - p''_1 - \frac{3}{2}\,p'_2 + 3\,p_1\,p'_1 + \frac{3}{2}\,p''_1 ,$$

est égal a zero.

De (3.10) et de (II) il resulte que $\theta_3 = 0$ si $\Phi'' - \frac{8}{9}\,\Phi^3 = 0$.

Mais $\Phi = \sqrt{\frac{2}{| K |}}\,\frac{1}{u - v}$.

Donc

(3.13) $$| K | = \frac{8}{9} .$$

D'ou le resultat :

La surface (II) avec $K = -\frac{8}{9}$ *contient deux faisceaux de coniques.*

L'équation de ces coniques est :

$$\frac{d^3 x}{d v^3} - \frac{3}{2 \tau} \frac{d^2 x}{d v^2} - \frac{57}{4 \tau^2} \frac{d x}{d v} - \frac{165}{8 \tau^3} = 0 . \qquad (\tau = u - v) \tag{3.14}$$

Les résultats precedents montrent que les surfaces qui possedent ∞^2 transformées projectives en elles-mêmes sont :

1) *les surfaces de coincidence minima projectives* ;

2) *les surfaces de Wilczynski* (2.16). *Les surfaces d'Enriques coincident avec ces surfaces a quelques exception près* ;

3) *une classe de surfaces de rotation projective indéformables projectivement.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Enriques : Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sé stesse. Atti del R. Istituto Veneto T. IV s. VII 1892-93. Intorno alla memoria, Le superficie con infinite trasf. ecc. Ibidem 1893-94.

[2] F. Conforto : Le superficie razionali, N. Zanichelli, Bologna 1939.

[3] G. Fubini, Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale. « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » 43, 1-46, (1919).

[4] G. Fubini e E. Čech : Geometria proiettiva differenziale, N. Zanichelli, Bologna 1926.

[5'] E. Castelnuovo : « Di una classe di superficie razionali che ammettono ∞^2 trasformazioni proiettive in sé. « Rendiconti dei Lincei ser. 6 vol. 24 (1936) p. 342-346.

[6] O. Mayer : Contribution à l'étude des surfaces minima projectives. Bull. des Sci. Math. 1932 T. LVI.

[7] F. Marcus : Sur les surfaces minima projectives Arch. Math. Brno 6 (1971) 145-147.

[8] Lane E. P., Mac Queen M. L. : Surfaces whose asymptotic curves are twisted cubics. American Journal of Mathematics. Vol. 60 1938 p. 337-344.

[9] E. J. Wilczynski : Abstract, Bulletin of the American Mathematical Society vol. 20 (1913-14), p. 312.

[10] B. Segre : Ibirapporti sulle superficie non sviluppabili dello spazio. 2 Notes. Rendiconti del-l'Ac. Naz. dei Lincei 1935 vol. XXXI p. 656-660 et 692-697.

[11] E. Bompiani : Rappresentazioni geodetico-proiettive fra due superficie. Annali di mat. pura ed applicata. Seria quarta T. III 1926, p. 171-188.

[12] F. Marcus : Sur les reseaux de Koenigs, Revue de Math. pures et appliquées T. II 1957. Bucuresti.

[13] F. Marcus : Sur les surfaces de rotations projectives, Bull. de la classe des Sci. Academie Royale de Belgique 5e serie T. LVIII, 1972-7 p. 862-871.

[14] Su Buchin : On a certain class of surfaces whose Darboux curves etc. The Tôhoku Mat. Journal, vol. 36, 1933, p. 241-252.

[15] G. Tzitzeica : Géométrie projective différentielle des réseaux, Bucarest, 1924.

[16] E. J. Wilczynski : Projective differential geometry, of curves and ruled surfaces, New York, Chelsea.