A. CRUMEYROLLE (*)

# Fibrations spinorielles et Twisteurs Généralisés (**)

Summary: In the first part my purpose is to find existence conditions for a spin structure on a manifold in the purely differential geometry scope, without algebric topology machinary and avoiding systematically any matricial formalism.
A spin structure can be considered as a G-structure (using a classical terminology). Groups, called by myself « groups of spinoriality » play essential part in this probleme. We study their in second part with a few details.
Third part is devoted to introduce, the notion of twistors, generalising studies already made in particular cases. Twistorial fibrations naturally go with spin fibrations.
Broadly, twistors of order 2 are for the conformal group, in signature (p, q) what are spinors for the isometric group in signature (p + 1, q + 1).

## Première Partie

## VARIETES PSEUDO-RIEMANNIENNES A STRUCTURE PIN Q-SPINORIELLE

### 1°) Rappels de definitions.

$R^{2r}$ est muni de la forme quadratique Q, de signature quelconque, non dégénérée. On sait que le groupe Pin Q constitue un revêtement d'ordre 2 du groupe O (Q). Si $\gamma \in$ Pin Q, nous définissons $p(\gamma)(x) = \gamma x \gamma^{-1}$, $x \in R^{2r}$, $p(\gamma) \in O(Q)$.

Pour toutes les notions de base sur les algèbres de Clifford et les spineurs, le lecteur se reportera à [2] et à [3, a].

V est une variété réelle, de dimension $n = 2r$, pseudo-riemannienne, paracompacte, munie d'une métrique, notée Q avec un léger abus. $\xi(E, V, O(Q), \Pi)$, en abrégé $\xi$, est le fibré principal des repères orthonormés.

*Définition* 1: Nous dirons qu'il existe sur V, une structure Pin Q-spinorielle au sens strict, si l'on peut construire un fibré principal $\eta(P, V, \text{Pin } Q, q)$ et un

---

(*) Université Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne, Toulouse, France.
(**) Memoria presentata dall'Accademico dei XL E. Bompiani il 5-3-1974.

morphisme principal h de $\eta$ sur $\xi$, donc tel que le diagramme ci-dessous où $R_\gamma$, $R_{p(\gamma)}$ désignent les translations à droite, soit commutatif, quel que soit $\gamma$ appartenant à Pin Q.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "R\gamma"] \arrow[d, "h"'] & P \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "q"] & \\
E \arrow[r, "R_{p(\gamma)}"'] & E \arrow[r, "\Pi"'] & V
\end{tikzcd}$$

Il est toujours possible de définir les deux fibrations $\eta$ et $\xi$ à l'aide d'ouverts communs de trivialisations $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$, et des sections locales $z_\alpha, \Omega_\alpha$, à fonctions de transitions $\gamma_{\alpha\beta}$ et $p_{(\gamma_{\alpha\beta})}$ respectivement :

$$z_\beta\,(x) = z_\alpha\,(x)\,.\,\gamma_{\alpha\beta}\,(x)\,,\ \gamma_{\alpha\beta}\,(x) \in \text{Pin Q},$$
$$h\,(z_\beta\,(x)) = \Omega_\beta\,(x) = h\,(z_\alpha\,(x))\,.\,p\,(\gamma_{\alpha\beta}\,(x)) = \Omega_\alpha\,(x)\,.\,p\,(\gamma_{\alpha\beta}\,(x)).$$

Considérons l'algèbre de Clifford « standard » C (Q) de $R^n$, puis l'algèbre complexifiée, C (Q′), Q′ étant la complexifiée de Q, et soit

$$(x_1\,,\ldots,x_r\,,y_1\,,y_2\,,\ldots,y_r)\,,\ \text{en abrégé}\ \{x_i\,,y_j\}$$

une base de Witt de $C^n$, « réelle », c'est-à-dire associée naturellement à une base orthonormée de $R^n$ selon la construction donnée dans [3, a, p. 34].

L'ensemble des $\{x_{i_1}\,x_{i_2}\ldots x_{i_h}\,y_{j_1}\,y_{j_2}\ldots y_{j_k}\}$, $\begin{matrix} 1 \leqslant i_1 < i_2 \ldots \leqslant r \\ 1 \leqslant j_1 < j_2 \ldots \leqslant r \end{matrix}$, en abrégé $\{x_{i_1}\ldots y_{j_1}\ldots\}$ est une base de C (Q′). Le choix d'une telle base identifie linéairement C (Q′) à $C^{2^n}$ par un isomorphisme $\varphi$.

On associe au fibré principal $\eta$ un fibré « spinoriel » $\zeta$ (S , V , Pin Q , $\widehat{q}$), de fibre $C^{2^r}$ et groupe Pin Q opérant effectivement sur $C^{2^r}$ (espace d'une représentation spinorielle de C (Q′)). Il est loisible de choisir n'importe quelle représentation irréductible de C (Q′) dans $C^{2^r}$. Il sera commode de choisir la représentation obtenue en faisant opérer $u \in C\,(Q')$, naturellement à gauche dans l'idéal minimal C (Q′) f, $f = y_1\,y_2\ldots y_r$. C (Q′) f, dont les $x_{i_1}\,x_{i_2}\ldots x_{i_h}$ f, en abrégé $x_{(i)}$ f, constituent une base standard sera appelé espace des spineurs types.

La restriction de $\varphi$ à C (Q′) f identifie linéairement cet espace à $C^{2^r}$.

Au-dessus d'un ouvert U de V muni de la section $z : x \to z\,(x)$ de $\eta$, un champ de spineurs $\psi$ sera défini par une application différentiable $\psi$ de P dans $C^{2^r} : z \to \psi\,(z)$, telle que si

$$\psi\,(z) = \varphi\,(u)\,, [6] :$$

$$(1) \qquad \psi\,(z\,.\,\gamma^{-1}) = \gamma\,.\,\psi\,(z) = \varphi\,(\gamma\,u)\,,\ \forall\,\gamma \in \text{Pin Q}\,.$$

On pourra noter $\psi_x$ la restriction de $\psi$ à $S_x = \widehat{q}^{-1}\,(x)$ et on observera que : $(\gamma\,.\,\psi_x\,(z))^{i_1\ldots i_h}\,x_{i_1}\ldots x_{i_h}\,f = (\psi_x\,(z))^{i_1\ldots i_h}\,(\gamma\,x_{i_1}\ldots x_{i_h}\,f)$ (2).

2°) Conditions necessaires d'existence d'une structure Pin Q-spinorielle au sens strict.

Soit $x \to z_x$ une section locale au-dessus de U, ouvert de trivialisation du fibré $\eta$, $z_x = \nu(x, g(x)) = \nu^x(g(x))$, $g(x) \in$ Pin Q ; selon la construction des fibrés associés $(z_x, x_{(i)} f)$ identifié à $(z_x \cdot \gamma^{-1}, \gamma \cdot x_{(i)} f)$ est une section au-dessus de U de $\zeta$, notée $[z_x, x_{(i)} f]$ ou $\mu^x(x_{(i)} f)$. Posons aussi $\Omega_x = h(z_x)$.

Si $(U_\alpha)$ est un atlas d'ouverts de trivialisation du fibré des repères pseudo-riemanniens, on peut toujours supposer qu'il existe au-dessus de $U_\alpha$ une section $z_\alpha$ de $\eta$; nous posons encore $\Omega_\alpha(x) = h(z_\alpha(x))$, les $z_\alpha, \Omega_\alpha$ admettant respectivement $\gamma_{\alpha\beta}$ et $p(\gamma_{\alpha\beta})$ comme fonctions de transitions selon ce que l'on a dit au 1°).

On peut donc écrire, $W'_\alpha(x)$ étant la base de Witt « réelle » naturellement associé à $\Omega_\alpha(x)$, et *avec un abus de notation* : $h(z_\alpha(x)) = W'_\alpha(x) = \theta^x_\alpha\{x_i, y_j\}$, où les $\theta^x_\alpha$ admettent les $p(\gamma_{\alpha\beta})$ à valeurs dans O (Q) comme fonctions de transitions.

Les $\Omega_\alpha$ sont aussi des sections locales de $\xi_C$, complexifié de $\xi$ et permettent de construire des sections locales — repères des fibrés de Clifford, Cli (V , Q′) dont les fibres au-dessus de x seront notées $C(Q)_x$, $C(Q')_x$.

Les $\gamma_{\alpha\beta}$ sont fonctions de transitions de sections de $\zeta$.

Signalons que selon la définition des fibrés de Clifford, fibrés en algèbre, localement triviaux, $\theta^x_\alpha$ définit un isomorphisme de C (Q) sur l'algèbre $(C(Q)_x$.

Rappelons qu'il est possible de définir une structure Pin Q-Spinorielle — d'un point de vue purement algèbrique ou trivial — par une classe d'équivalence de couples $(\boldsymbol{R}, g)$, où $\boldsymbol{R}$ est un repère orthonormé réel, g un élément de Pin Q, étant entendu que $(\boldsymbol{R}, g) \sim (\boldsymbol{R}', g')$ signifie que $\boldsymbol{R}' = \sigma(\boldsymbol{R})$, $p(\gamma) = \sigma$ avec $g' = \gamma g$, $g, g'$, $\gamma \in$ Pin Q [cf. 4 (p. 129-132)]. Nous avons déjà utilisé ce point de vue dans [3, a]. Choisir un couple $(\boldsymbol{R}, g)$ dans une classe d'équivalence, c'est fixer un « repère Pin Q-spinoriel origine », aux divers choix possibles correspondent des espaces de spineurs isomorphes [4]. Si on utilise des repères de Witt, on pourra définir une telle structure Pin Q-spinorielle par une classe d'équivalence de couples, $(W, g) \sim (W', g')$ signifiant que $W' = \sigma(W)$ avec $p(\gamma) = \sigma$, et $g' = \gamma g$, $\gamma \in$ Pin Q, mais $g, g'$ pouvant appartenir à Pin Q′. Dans une telle classe il y aura toujours des repères de Witt « réels », puisque O (Q′) opère transitivement dans l'ensemble des repères de Witt réels ou complexes de l'espace vectoriel standard. On pourra donc définir une structure Pin Q-spinorielle triviale à partir d'un repère de Witt « non réel » origine, tout aussi bien.

Avec le choix de la représentation spinorielle fixée au 1°) un spineur s'identifie à un élément bien déterminé d'un idéal à gauche minimal de C (Q′).

S'il existe sur V une structure Pin Q-spinorielle, elle induit sur l'espace tangent en x une structure Pin Q-spinorielle (au sens purement algébrique), qui se trouve définie par une classe d'équivalence de couples $(W_x, g_x)$, $W_x$ repère de Witt, $g_x \in$ Pin Q′, dépendant différentiablement de x.

Avec les notations antérieures au point $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ on doit pouvoir obtenir deux repères origines :

$$(\theta_\alpha^x \{\lambda_\alpha(x)(x_i, y_j)\lambda_\alpha^{-1}(x)\} = W_\alpha^x, g_\alpha(x))$$

et

$$(\theta_\beta^x \{\lambda_\beta(x)(x_i, y_j)\lambda_\beta^{-1}(x)\} = W_\beta^x, g_\beta(x))$$

($\lambda_\alpha(x), \lambda_\beta(x) \in \text{Pin } Q'$, $g_\alpha(x), g_\beta(x) \in \text{Pin } Q'$, $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$ définis respectivement sur $U_\alpha$ et $U_\beta$, $g_\alpha$ et $g_\beta$ sur un voisinage de x inclus dans $U_\alpha \cap U_\beta$) qui nécessairement déterminent la même structure spinorielle triviale sur l'espace tangent en x.

Appelons $p(g_{\alpha\beta})$ les fonctions de transitions des $W_\alpha^x, W_\beta^x$, à valeurs dans Pin $Q'$, $p(\lambda_\alpha g_{\alpha\beta} \lambda_\beta^{-1}) = p(\gamma_{\alpha\beta})$, et posons aussi :

$$\theta_\alpha^x(\lambda_\alpha(x)(x_i, y_j)\lambda_\alpha^{-1}(x)) = \varphi_\alpha^x(x_i, y_j)$$

les $\varphi_\alpha^x$ définissent un isomorphisme de $(C(Q')$ sur $C(Q')_x$.

D'après l'étude antérieure on a la condition nécessaire :

$$p(g_\beta(x)) = p(g_{\alpha\beta}(x)\, g_\alpha(x)). \tag{3}$$

En x le repère-origine de $\zeta$ peut s'identifier à : $\varphi_\alpha^x\{x_{i_1} \dots x_{i_h} f\}$ si on considère que $x \in U_\alpha$. En effet si un spineur a pour composantes $\alpha^{i_1 \dots i_h}(x)$ dans le repère origine $(W_\alpha^x, g_{\alpha(x)})$ et si on l'identifie à :
$\varphi_\alpha^x(\alpha^{i_1 \dots i_h}(x)\, x_{i_1} \dots x_{i_h} f)$, dans le repère qui s'en déduit par $\gamma \in \text{Pin } Q'$, son expression est :
$\varphi_\alpha^x((\gamma^{-1} \cdot \alpha^{i_1 \dots i_h}(x))\, \gamma\, x_{i_1} \dots x_{i_h} f)$, égale d'après (2) à la valeur précédente.

Considérons le spineur qui s'identifie dans le premier repère à $\varphi_\alpha^x(f)$, dans le deuxième repère il doit s'identifier à $\varphi_\beta^x(\varepsilon\, g_{\alpha\beta}^{-1} f)$ $(\varepsilon = \pm 1)$, ce qui donne :

$$f = \varepsilon\, f\, g_{\alpha\beta}^{-1}(x), \tag{4}$$

et entraine, en appliquant l'antiautomorphisme principal,

$$g_{\alpha\beta}(x)\, f = \pm f, \tag{5}$$

et signifie que $g_{\alpha\beta}(x)$ appartient à un sous-groupe H de Pin Q, qui s'applique par p sur un sous-groupe de O (Q) appelé dans [3. b] groupe de spinorialité $\boldsymbol{s}$. On observe que $\boldsymbol{s} \subset SO(Q)$.

On peut encore présenter le raisonnement comme ceci :

Avec les notations du 1°) si $\psi(W_\alpha^x, g_\alpha(x)) = \varphi(f)$, $\psi(W_\beta^x, g_\beta(x)) = \varphi(\varepsilon\, g_{\alpha\beta}^{-1}(x) f)$, comme le spineur que l'on définit en x est un élément bien déterminé de $C(Q')_x$ :

$$\varphi_\alpha^x(f) = \varphi_\beta^x(\varepsilon\, g_{\alpha\beta}^{-1}(x) f)\,, \text{ etc...}$$

Nous avons ensuite :

$$\varphi_\beta^x (f) = \varphi_\alpha^x (g_{\alpha\beta} (x)) \, \varphi_\alpha^x (f) \, \varphi_\alpha^x (g_{\alpha\beta}^{-1} (x))$$

que nous noterons :

$f_\beta (x) = \widehat{g}_{\alpha\beta} (x) \, f_\alpha (x) \, \widehat{g}_{\alpha\beta}^{-1} (x)$, ce qui donne tenant compte de (5) :

$$f_\beta (x) = N (\widehat{g}_{\alpha\beta} (x)) \, f_\alpha (x) \, . \tag{6}$$

On observera que les $p(g_{\alpha\beta})$ sont fonctions de transitions de sections du fibré complexifié de $\xi$. Le cocycle $p(\gamma_{\alpha\beta})$ qui définit $\xi$ et le cocycle $p(g_{\alpha\beta})$ sont cohomologues dans $O(Q')$. Il n'est pas possible d'affirmer plus ici, du moins en général.

En résumé nous avons obtenu :

Proposition 1 :

1) *S'il existe sur $V$ une structure Pin $Q$-spinorielle au sens strict, il existe sur $V$, modulo un facteur $\pm 1$, un champ de $r$-vecteurs isotropes, pseudo-section du fibré Cli $(V, Q')$ donc une sous-fibration vectorielle de Cli $(V, Q')$.*

1) *Le fibré pseudo-riemannien complexifié $\xi_c$, admet des sections locales, au-dessus des ouverts de trivialisation $U_\alpha$, à fonctions de transitions $p(g_{\alpha\beta})$ $g_{\alpha\beta}(x) \in$ Spin $Q$, telles que si $x \in U_\alpha \cap U_\beta \to f_\alpha (x)$, définit localement le pseudo-champ de $r$-vecteurs isotropes :*

$$f_\beta (x) = N (\widehat{g}_{\alpha\beta} (x)) \, f_\alpha (x)$$

$$f_\beta (x) = \widehat{g}_{\alpha\beta} (x) \, f_\alpha (x) \, \widehat{g}_{\alpha\beta}^{-1} (x)$$

3) *Le groupe structural du fibré pseudo-riemannien $\xi$ est réductible dans $O(Q')$ à un groupe de spinorialité.*

## 3°) L'identification de $\zeta$ a un sous-fibre vectoriel de Cli $(V, Q')$ .

Les repères locaux $W_\alpha^x = \varphi_\alpha^x \{x_I \, , y_J\}$ peuvent être considérés comme projections de repères locaux $\psi_\alpha^x \{x_{(I)} f\}$ de $\zeta$.

Nous avons identifié le repère $\psi_\alpha^x \{x_{(I)} f\}$ à $\varphi_\alpha^x \{x_{(I)} f\}$ et $\varphi_\beta^x \{x_{(I)} , f\} =$ $= \varphi_\alpha^x \{g_{\alpha\beta} (x) \, x_{(I)} \, f \, g_{\alpha\beta}^{-1} (x)\} = \varphi_\alpha^x \{g_{\alpha\beta} (x) \, x_{(I)} \, f\}$, de sorte que cette identification conduit à dire que pour les fibrations réduites, à fonctions de transitions $p(g_{\alpha\beta})$ le morphisme de $\zeta$ dans $\xi_C$ est linéaire principal.

Au spineur de composantes $u^{I_1 \cdots I_h} (x)$ dans le repère « origine », on peut donc associer au-dessus de $U_\alpha$, la section cliffordienne $u^{I_1 \cdots I_h} (x) \, \varphi_\alpha^x (x_{I_1} \ldots x_{I_h} f)$, notée encore $(u^{I_1 \cdots I_h} x_{I_1 \ldots I_h} f)_\alpha^x$, cela n'ayant de sens intrinsèque que pour les trivialisations réduites.

On observera enfin que, réciproquement, si $\psi_\alpha^x (x_{(I)} f)$ peut s'identifier à $\varphi_\alpha^x (x_{(I)} f)$ nécessairement $f_\beta (x) = N (\widehat{g}_{\alpha\beta} (x)) \, f_\alpha (x)$.

Au-dessus de $\theta_\alpha^x \{x_I, y_J\}$ nous avons $\varphi_\alpha^x \{\lambda_\alpha^{-1} x_{(I)} f\}$ ce qui peut s'écrire $\theta_\alpha^x \{x_{(I)} \lambda_\alpha (x)\}$ $f_\alpha (x) = \{\xi_{I_1} \ldots \xi_{I_h} \widehat{\lambda}_\alpha (x) f_\alpha (x)\}$ en accord avec [3, a] si nous posons $\theta_\alpha^x (x_I , y_J) = (\xi_I , \eta_J)_x$.

4°) Conditions suffisantes d'existence d'une structure Pin Q-spinorielle

P r o p o s i t i o n  2 : *Soit* $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ *un atlas de trivialisations du fibré pseudo-riemannien* $\xi_C$ *de* $V$, *à fonctions de transitions* $p(g_{\alpha\beta})$ *à valeurs dans* $O(Q)$. *S'il existe sur* $V$ *un pseudo-champ de r-vecteurs isotropes (pseudo-section de* $Cli(V, Q')$*), défini localement par :* $x \in U_\alpha \to f_\alpha(x)$ *et tel que pour* $x \in U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$,

$$f_\beta(x) = \widehat{g}_{\alpha\beta}(x) f_\alpha(x) \widehat{g}^{-1}_{\alpha\beta}(x) \quad , \quad \varphi^x_\alpha(g_{\alpha\beta}(x)) = \widehat{g}_{\alpha\beta}(x),$$

$$f_\beta(x) = N(\widehat{g}_{\alpha\beta}(x)) f_\alpha(x)$$

*la variété* $V$ *admet une structure Pin Q-spinorielle au sens strict.*

De $f_\beta(x) \widehat{g}_{\alpha\beta}(x) = \widehat{g}_{\alpha\beta}(x) f_\alpha(x)$ on déduit selon la propriété établie dans ([2] p. 71) : l'intersection d'un idéal minimal à droite et d'un idéal minimal à gauche est de dimension 1, que :

$$N(\widehat{g}_{\alpha\beta}(x)) f_\alpha(x) \widehat{g}_{\alpha\beta}(x) = \widehat{g}_{\alpha\beta}(x) f_\alpha(x) = \mu(x) f_\alpha(x), \ \mu(x) \in C^*,$$

puis $\widehat{g}_{\alpha\beta}(x) f_\alpha(x) = \pm f_\alpha(x)$ et $f_\beta(x) \widehat{g}^{-1}_{\alpha\beta}(x) = \pm f_\alpha(x)$. Donc $g_{\alpha\beta}(x) f = \pm f$ et $g_{\alpha\beta}(x) \in H$.

Si en $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $\varphi^x_\alpha(y'_1 y'_2 \dots y'_r) = f_\alpha(x)$, on peut compléter les vecteurs $y'_1, y'_2, \dots y'_r$ par $x'_1, x'_2 \dots x'_r$ de manière que $\varphi^x_\alpha\{x'_i, y'_j\}$ et $\varphi^x_\beta\{x'_i, y'_j\}$ constituent des bases de Witt du fibré complexifié $\xi_C$ à fonctions de transitions $p(g_{\alpha\beta})$ (c'est une conséquence banale du théorème de Witt). Nous supprimerons donc les accents et supposons que $\varphi^x_\alpha(y_1 \dots y_r) = f_\alpha(x)$.

Formons au-dessus de $U_\alpha$ la section locale de $Cli(V, Q')$ :

$$x \to (x_{(i)} f)^x_\alpha = \varphi^x_\alpha(x_{(i)} f), \text{ pour tout } \alpha \in A,$$

$$\text{si } x \in U_\alpha \cap U_\beta, f_\beta(x) \widehat{g}^{-1}_{\alpha\beta}(x) = \pm f_\alpha(x)$$

$(x_{(i)} f)^x_\beta = \pm \widehat{g}_{\alpha\beta}(x) (x_{(i)} f)^x_\alpha$, où le signe à prendre est déterminé sans ambiguité.

A $x \in V$ on sait donc associer différentiablement un sous-espace de dimension $2^r$, de l'espace tangent par les isomorphismes $\varphi^x_\alpha$ : $\varphi^x_\alpha(x_{(i)} f) = (x_{(i)} f)^x_\alpha$ et les fonctions de transitions des $\varphi^x_\alpha$ sont les $p(g_{\alpha\beta})$. On a donc construit un fibré spinoriel au-dessus de $V$, de fibré $C^{2^r}$. Au repère $\{x_{(i)} f\}^x_\alpha$ nous associons le repère $\varphi^x_\alpha\{(x_i, y_j)\} =$
$= p\{x_{(i)} \cdot f\}^x_\alpha \varphi^x_\beta\{x_i, y_j\} = \widehat{g}_{\alpha\beta}(x) \varphi^x_\alpha\{x_i, y_j\} \widehat{g}^{-1}_{\alpha\beta}(x) = p\{g_{\alpha\beta}(x) x_{(i)} f\}^x_\alpha$ .

On peut déterminer $\lambda_\alpha, \lambda_\alpha(x)$ appartenant à $\mathrm{Pin}\, Q'$, de manière que : $p\{\lambda_\alpha x_{(i)} f\}^x_\alpha = \varphi^x_\alpha(\lambda_\alpha\{x_i, y_j\} \lambda^{-1}_\alpha)_x$ avec les $\varphi^x_\alpha(\lambda_\alpha\{x_i, y_j\} \lambda^{-1}_\alpha)_x$ repères de Witt «réels» de $\xi_C$. On a bien une structure Pin Q-spinorielle.

Proposition 3: *Pour que la variété pseudo-riemannienne admette une structure Pin Q-spinorielle au sens strict, il suffit que le groupe structural se réduise dans $O(Q')$ à un groupe de spinorialité.*

Si on a des fonctions de transitions $p(g_{\alpha\beta})$, $g_{\alpha\beta}(x) \in H$, comme $g_{\alpha\beta}(x)\, f = \pm f$, $\varphi_\alpha^x$ appliquant $C(Q')$ sur $C(Q')_x$ :

$$\varphi_\alpha^x (g_{\alpha\beta}(x)\, f) = \pm f_\alpha(x)$$

$$\hat{g}_{\alpha\beta}(x)\, f_\alpha(x) = \pm f_\alpha(x) \Rightarrow f_\alpha(x)\, \hat{g}_{\alpha\beta}^{-1}(x) = \pm f_\alpha(x)$$

et de $\quad f_\beta(x) = \hat{g}_{\alpha\beta}(x)\, f_\alpha(x)\, \hat{g}_{\alpha\beta}^{-1}(x)$, on déduit :

$$f_\beta(x) = \pm \hat{g}_{\alpha\beta}(x)\, f_\alpha(x) = \pm f_\alpha(x)$$

$f_\beta(x)\, \hat{g}_{\alpha\beta}^{-1}(x) = \pm f_\alpha(x)\, \hat{g}_{\alpha\beta}^{-1}(x) = \pm f_\alpha(x)$ et à partir de là peut se reprendre la démonstration de la proposition 2.

## 5°) Autres définitions des structures Pin Q-spinorielles.

On suppose que la variété V, de dimension $n = 2r$ est la base d'un fibré principal $\eta$ de groupe Pin Q. A tout couple de sections locales $x \in U_\alpha \to z_\alpha(x)$, $x \in U_\beta \to z_\beta(x)$, avec $z_\beta(x) = z_\alpha(x) \cdot \gamma_{\alpha\beta}(x)$, pour $x \subset U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, on peut associer une application différentiable de $U_\alpha \cap U_\beta$ dans $O(Q)$ : $x \to p(\gamma_{\alpha\beta}(x))$ et définir ainsi un fibré principal $\xi'$, de groupe $O(Q)$, dont les fonctions de transitions sont les $p(\gamma_{\alpha\beta}(x))$ ; on peut le considérer comme le fibré des repères d'un fibré pseudo-riemannien associé de fibre $R^{2r}$, $O(Q)$ opérant dans cette fibre selon : $a \to \gamma\, a\, \gamma^{-1}$ ($\gamma \in \text{Pin}\, Q$, $a \in R^{2r}$). La donnée de $\eta$ détermine ce fibré à un isomorphisme près, dans $O(Q)$.

$\xi$ ayant le même sens qu'au début, on donne encore la définition suivante [1] :

*Définition 2 : V admet une structure Pin Q-spinorielle, si le fibré $\xi$ est isomorphe au fibré $\xi'$, dans un isomorphisme principal, selon le groupe $O(Q)$.*

Cela revient à dire qu'un cocycle, équivalent dans $O(Q)$ à $p(\gamma_{\alpha\beta})$, définit la fibration $\xi$.

Comparons les définitions (1) et (2).

S'il existe une structure spinorielle au sens de la définition (1), on peut associer à $z_\alpha$ la section locale de $\xi'$ au-dessus de $U_\alpha$ :

$$x \to \{z_\alpha(x), (x_i, y_j)\}, \text{ étant entendu que :}$$

$$\{z_\beta(x), (x_i, y_j)\} = \{z_\alpha(x) \cdot \gamma_{\alpha\beta}(x), (x_i, y_j)\}$$
$$= \{z_\alpha(x), \gamma_{\alpha\beta}(x)\, (x_i, y_j)\, \gamma_{\alpha\beta}^{-1}(x)\},$$

définissant ainsi un mophisme principal $h'$ de $\eta$ sur $\xi'$.

$\xi'$ et $\xi$ admettant pour les mêmes ouverts $U_\alpha$, les mêmes fonctions de transitions $p(\gamma_{\alpha\beta})$ sont bien isomorphes.

Réciproquement : S'il existe une structure spinorielle au sens de la définition (2), comme il existe toujours, nous venons de le voir, un morphisme de $\eta$ sur $\xi'$, il existe donc un morphisme de $\eta$ sur $\xi$ et on retrouve la définition (1).

On donne et on utilise également dans la littérature une autre définition ([5], [6, a], [7]).

*Définition* 3 : *$\xi$ étant le fibré principal pseudo-riemannien de groupe $O(Q)$, on dit que $V$ admet une structure Pin $Q$-spinorielle, s'il est possible de construire un fibré principal $\eta$ de groupe Pin $Q$, base $V$, tel que si les $\gamma_{\alpha\beta}$, $\gamma_{\alpha\beta}(x) \in \mathrm{Pin}\, Q$ sont ses fonctions de transitions pour des ouverts $U_\alpha$, les $p(\gamma_{\alpha\beta})$ (ou un cocycle équivalent dans $O(Q)$), définissent la fibration $\xi$ (avec les mêmes ouverts de trivialisation $U_\alpha$).*

Si on a une structure spinorielle au sens (2) on a une structure spinorielle au sens (3), c'est immédiat.

Réciproquement : Si les $p(\gamma'_{\alpha\beta})$ définissent la fibration $\xi$, $p(\gamma'_{\alpha\beta})$ cocycle équivalent à $p(\gamma_{\alpha\beta})$ dans $O(Q)$, $\gamma_{\alpha\beta}$ définissant la fibration $\eta$, il est possible de construire un système de sections $z_\alpha$ de $\eta$ à fonctions de transitions $\gamma_{\alpha\beta}$, et d'associer à ces sections $z_\alpha$ des sections de $\xi'$ de manière à définir un morphisme de $\eta$ sur $\xi'$, $\xi'$ est isomorphe à $\xi$ et on retrouve la définition (2).

6°) $H^1(V, \boldsymbol{C}^*)$ est l'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés principaux de base $V$, groupe $\boldsymbol{C}^*$. $\dim V = 2r$.

P r o p o s i t i o n 4 : *Si la signature de $Q$ est définie et si la variété $V$ admet une structure presque complexe, elle admet aussi une structure Spin $Q$-spinorielle lorsque l'une des conditions :*

*a*) $H^1(V, \boldsymbol{C}^*) = 1$,

*b*) *Le groupe structural $U(r, \boldsymbol{C})$ se réduit à $S\,U(r, \boldsymbol{C})$ dans $O(Q')$ (*), est satisfaite.*

Soit $(U_\alpha, \theta^\alpha)$ un atlas de trivialisation de $\xi$. On peut toujours supposer que $V$ a une structure presque hermitienne, elle porte alors un champ de r-vecteurs isotropes, modulo un facteur complexe de module 1 :

$$f_\alpha(x) = \theta_\alpha^x(f)$$
$$f_\beta(x) = \hat{g}_{\alpha\beta}(x)\, f_\alpha(x)\, \hat{g}_{\alpha\beta}^{-1}(x),\ g_{\alpha\beta}(x) \in \mathrm{Spin}\ Q$$
$$f_\beta(x) = \mu_{\alpha\beta}(x)\, f_\alpha(x)\,,\ |\mu_{\alpha\beta}(x)| = 1.$$

Les $\mu_{\alpha\beta}\, N(g_{\alpha\beta})$ définissent un cocycle à valeurs dans $\boldsymbol{C}^*$ (ici $N(g_{\alpha\beta}) = 1$), il existe donc une fibration principale avec ouverts de trivialisations $U_\alpha$ et fonctions de tran-

(*) $SU(r, C) \sim \mathbf{S}$ (Cf. plus bas, 2.eme partie).

sitions $\mu_{\alpha\beta} N(g_{\alpha\beta})$. Dans les deux cas envisagés elle est triviale, car $\mu_{\alpha\beta}(x)$ représente le déterminant de la restriction de $p(g_{\alpha\beta}(x))$ à f (cas b).

Il existe donc des applications $x \in U_\alpha \to \sigma_\alpha^2(x) \in \boldsymbol{C}^*$ telles que pour $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ :

$$\sigma_\beta^2(x) = \sigma_\alpha^2(x) \cdot \mu_{\alpha\beta}(x)\, N(g_{\alpha\beta}(x)).$$

Selon un résultat établi dans [3 b, p. 313] il existe $\delta_\alpha(x) \in \mathrm{Spin}\, Q$, tel que : $\dfrac{1}{\sigma_\alpha(x)} f = \delta_\alpha(x) f$, et au-dessus de $U_\alpha$ :

$$\hat{\delta}_\alpha(x)\, f_\alpha(x) = \frac{1}{\sigma_\alpha(x)} f_\alpha(x)\, , \text{ si } \hat{\delta}_\alpha(x) = \theta_\alpha^x(\delta_\alpha(x)).$$

Cela entraine [3, b] :

$$f'_\alpha(x) = \hat{\delta}_\alpha(x)\, f_\alpha(x)\, \hat{\delta}_\alpha^{-1}(x) = \frac{1}{\sigma_\alpha^2(x)} N(\delta_\alpha(x))\, f_\alpha(x) \text{ et :}$$

$$f'_\beta(x) = N(\hat{\gamma}_{\alpha\beta}(x))\, f'_\alpha(x)$$

$$f'_\beta(x) = \hat{\gamma}_{\alpha\beta}(x)\, f'_\alpha(x)\, \hat{\gamma}_{\alpha\beta}^{-1}(x)$$

avec $$\gamma_{\alpha\beta}(x) = \delta_\alpha^{-1}(x)\, g_{\alpha\beta}(x)\, \delta_\alpha(x),$$

donc d'après la proposition (2) la variété admet une structure Spin Q-spinorielle (construite à partir des $f'_\alpha$, comme dans la démonstration de la proposition 2) : On dira qu'elle est naturellement associée à la structure presque complexe.

*Remarques* : La condition a) de la proposition 4 est une condition suffisante assez forte. On peut voir que $S^2$ ne satisfait pas à cette condition bien qu'admettant les deux structures.

$H^1(V, C^*)$ est isomorphe à $H^2(V, Z)$, l'hypothèse a) équivaut à $H^2(V, \boldsymbol{Z}) = O$, elle entraine que la première classe de Chern est nulle, donc la 2ème classe de Stiefel-Whitney, qui en est la réduction modulo 2, est nulle.

Comme $\boldsymbol{s} = SU(r, \boldsymbol{C})$, b) est aussi nécessaire (cf. 2ème partie).

C o r o l l a i r e. — *Si la variété V est kählérienne à courbure de Ricci nulle, elle admet de manière naturelle une structure Spin Q-spinorielle.*

C'est une conséquence du théorème de réduction au groupe d'holonomie dans O (Q). Si la courbure de Ricci est nulle, celui-ci est dans $SU(r, \boldsymbol{C})$ [6, b p. 261]. On sait que $c_1(V)$, première classe de Chern est nulle, condition qui équivaut ici à la nullité de la courbure de Ricci.

*Remarque* : Les variétés à structure Pin Q-spinorielle Q definie, admettant une connexion « spin-euclidienne » propre, riemannienne, sont à courbure de Ricci nulle, comme on le voit aisément en se reportant à [3, c]. Elles généralisent donc les variétés kählériennes à courbure de Ricci nulle. A. Lichnérowicz signale d'ailleurs dans [6, b] que ces dernières variétés portent un champ de r-formes à dérivée covariante nulle construites à partir de bases de Witt « réelles ».

C'est tout à fait l'analogue qu'on a rencontré dans [3, c] pour des variétés plus générales, à connexion spin-euclidienne propre.

**Proposition 5:** *Soit $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ un atlas de trivialisations du fibré pseudo-riemannienne $\xi_C$, à fonctions de transitions $p\,(g_{\alpha\beta}(x) \in O\,(Q)$. S'il existe sur $V$ un pseudo-champ de r-vecteurs isotropes, défini localement par $x \in U_\alpha \to f_\alpha(x)$ tel que pour $x \in U_\alpha \cap U_\beta$:*

$$f_\beta(x) = \widehat{g}_{\alpha\beta}(x)\, f_\alpha(x)\, \widehat{g}^{-1}_{\alpha\beta}(x)\,, \quad \varphi^x_\alpha(g_{\alpha\beta}(x)) = \widehat{g}_{\alpha\beta}(x)$$

$$f_\beta(x) = \mu_{\alpha\beta}(x)\, f_\alpha(x)\,, \quad \mu_{\alpha\beta}(x) \in \boldsymbol{C}^*.$$

*Si de plus $H^1(V, \boldsymbol{C}^*) = 1$, alors le pseudo-champ définit naturellement une structure Pin Q-spinorielle.*

La démonstration est identique à celle de la proposition précédente.

7°) En signature elliptique, cherchons à caractériser l'existence d'une structure Pin Q-spinorielle par des conditions indépendantes du choix de la métrique Q. On a :

**Proposition 6:** *Pour qu'une variété $V$, proprement riemannienne, de dimension paire, admette une structure Pin Q-spinorielle, il faut et il suffit :*

*1) qu'il existe sur $V$ un champ de r-vecteurs : $x \to f_x$ section de l'algèbre extérieure du fibré tangent complexifié $T^C(V)$ ;*

*2) et que $f_x$ et son conjugué $\overline{f}_x$ déterminent une décomposition de $T^C_x(V)$ en somme directe de deux sous-espaces complexes, pour tout $x \in V$.*

La condition est nécessaire : le 1° a été établi.

En ce qui concerne le 2°, nous remarquons que si Q est définie, dans l'algèbre de Clifford standard, f étant défini par une base de Witt « réelle », alors $f\,\overline{f} \neq 0$, ce qui équivaut à $F' \cap \overline{F}' = 0$ si $F'$ est le s.t.i.m. de f [2].

Avec les notations du 2°) $\theta^x_x(\lambda_\alpha(x)\, f\, \lambda^{-1}_x(x)) = \varphi^x_\alpha(f) = f_\alpha(x)$, $\lambda_\alpha(x)\, f\, \lambda^{-1}_\alpha(x)$ définit un s.t.i.m de $C\,(Q')$. Dans ce s.t.i.m il existe $f'(x) = \mu(x)\,\lambda_\alpha(x)\, f\lambda^{-1}_\alpha(x))$, $\mu(x) \in \boldsymbol{C}^*$, qui peut être considéré comme construit à l'aide d'une base de Witt « réelle », on a donc $f'(x)\,\overline{f}'(x) \neq 0$ et $G'(x) \cap \overline{G}'(x) = 0$ si $G'(x)$ est le s.t.i.m de $f'(x)$, cela implique que $f'_\alpha(x) = \theta^x_\alpha(f'(x))$ et tel que $f'_\alpha(x)\,\overline{f}'_\alpha(x) \neq 0$ et donc $f_\alpha(x)\,\overline{f}_\alpha(x) \neq 0$.

La condition est suffisante :

Si $f_x, \overline{f}_x$ déterminent une décomposition directe de $T^C_x(V)$ selon :

$$T^C_x = F'_x \oplus \overline{F}'_x$$

où les $F'_x, \bar{F}'_x$ dépendent différentiablement de $x$ : introduisons une forme bilinéaire $B(x)$ sur $T_x^C$, en posant, si $u_x \in T_x$ et

$$u_x = v_x + w_x, \; v_x \in F'_x, \; w_x \in \bar{F}_x{}',$$

$$v_x = v_x^i (\xi_i)_x, \; (\xi_i)_x \text{ base de } F'_x,$$

$$B(x)((u\,x), u'(x)) = \sum_1^r v_x^i w'^i_x + w_x^i v'^i_x \;, \text{ avec des notations évidentes.}$$

B est bien une forme bilinéaire réelle sur V et définie, $x \to f_x$ est un champ de r-vecteurs isotropes pour le fibré de Clifford associé. On peut alors appliquer la proposition 2.

## 8°) Varietes a structure Pin Q'-spinorielle.

Elles se définissent comme les variétés à structure Pin Q-spinorielle, il suffit de remplacer dans la définition du (I, 1°) Pin Q, O (Q) respectivement par Pin Q' et O (Q'). Pin Q', on le rappelle, est un revêtement d'ordre 4 de O (Q'), $\varepsilon$ utilisé dans la formule (4) du (I, 2°) est égal à $\pm 1$ ou $\pm i$, de sorte que la condition (6) s'écrit :

$$f_\beta(x) = \pm f_\alpha(x).$$

et dans O (Q') le groupe de spinorialité se définit par projection à partir de $g_{\alpha\beta}(x) f = \varepsilon f$.

La proposition (1) et la proposition (2) du (I, 2°) s'énoncent de manière analogue en remplaçant la condition (6) par $f_\beta(x) = \pm f_\alpha(x)$ et en observant bien que $g_{\alpha\beta}(x) \in$ Pin Q'.

P r o p o s i t i o n  7 : *Pour que V admette une structure Pin Q'-spinorielle il faut et il suffit qu'il existe sur V un champ de r-espaces totalement isotropes maximaux.*

La condition est nécessaire, selon les résultats antérieurs.

Elle est suffisante, car il existe alors $f_\alpha(x), f_\beta(x)$ avec $f_\beta(x) = \mu_{\alpha\beta}(x) f_\alpha(x)$, $\mu_{\alpha\beta}(x) \in C^*$, en utilisant les notations antérieures ; la démonstration de la proposition 4 adaptée montre que l'on peut déterminer $f'_\alpha, f'_\beta$ avec :

$$f'_\beta(x) = \pm f'_\alpha(x).$$

Observons que le groupe structural est réductible à un sous-groupe de Spin Q'. On peut donc parler de structure Spin Q'-spinorielle.

### 9°) Structures Pin Q-spinorielles au sens large

Dans $SO(Q)$ appelons groupe de spinorialité élargi $\mathbf{s}_e$, tout sous-groupe projection par $p$ de l'esemble $H_e$ des éléments $g$ de Pin Q tels que :

$$g f = \mu(g) f, \ \mu(g) \in \boldsymbol{C}^*, \ f \text{ étant un r-vecteur isotrope.}$$

$$g f = \pm \mu f \text{ équivaut à : } g f g^{-1} = N(g) \mu^2 f,$$

donc $\mathbf{s}_e$ est le sous-groupe stabilisateur de l'espace $F'$ déterminé par f. On peut supposer que f est construit à partir d'une base de Witt « réelle » [3, c].

Dans le cas où Q est définie, on voit aisément que $|\mu(g)| = 1$ et que $\mathbf{s}_e$ s'identifie à la représentation réelle du groupe $U(r, \boldsymbol{C})$ (cf. étude des groupes de spinorialité, deuxième partie).

Si Q est neutre, $\mu(g)$ est réel quelconque. Si Q est de signature quelconque, non neutre, non définie, alors $\mu(g)$ peut être un nombre complexe quelconque.

*Si le groupe structural de $\xi$ se réduit dans $O(Q')$ à un groupe de spinorialité élargi il existe sur $V$ un champ de s.t.i.m et a fortiori une structure Pin $Q'$-spinorielle.*

(Considérer des sections de Witt à fonctions de transitions dans $\mathbf{s}_e$, elles déterminent un champ de s.t.i.m.).

Si dans la proposition 2 du I, on prend $p(g_{\alpha\beta}(x)) \in O(Q)$

$$f_\beta(x) = \widehat{g}_{\alpha\beta}(x) f_\alpha(x) \widehat{g}_{\alpha\beta}^{-1}(x)$$

$f_\beta(x) = \mu_{\alpha\beta}(x) f_\alpha(x)$, $\mu_{\alpha\beta}(x) \in \boldsymbol{C}^*$, alors on peut affirmer que la variété admet une structure Pin Q-spinorielle au sens large (reprendre le début de la démonstration ; on aboutit à $g_{\alpha\beta}$ ($x \in H_e$ au lieu de H si $p(H_e) = \mathbf{s}_e$).

*En particulier : Si $V$ a une structure presque complexe, elle admet une structure Pin Q-spinorielle au sens large.*

Si $H^1(V, \boldsymbol{C}^*) = 1$ alors, si V a une structure spinorielle au sens large elle a une structure Pin Q-spinorielle au sens strict.

### 10°) Structures Spin Q-spinorielles en dimension impaire $n = 2r + 1$

Nous supposons V de dimension $n = 2r + 1$, orientable. La définition 1 reste la même, Spin Q et $SO(Q)$ remplaçant respectivement Pin Q et $O(Q)$.

$C^+(Q)$ est centrale, simple [2]. $C^+(Q')$ pour $n = 2r + 1$ est isomorphe à $C(Q')$ pour $n = 2r$. On introduit une base de Witt $(x_1, \ldots x_r, y_1 \ldots y_r, z)$ avec z non isotrope et la représentation de $C^+(Q')$ se fait dans l'espace des $x_{i_1} \ldots x_{i_h} f$, $f = y_1 \ldots y_h$, $\zeta$ se définit de la même manière.

Dans l'étude des conditions nécessaires d'existence d'une structure Spin Q-spinorielle, rien n'est modifié que dans certains détails, on aboutit à un énoncé identique à la proposition 1, les $g_{\alpha\beta}(x)$ étant dans Spin Q, la réduction à un groupe de spinorialité se faisant dans S O (Q′). Les conditions suffisantes 4°) s'établissent de la même manière et la proposition 3 s'adapte immédiatement.

La notion de structure Pin Q-spinorielle au sens large généralise en dimension impaire la notion de structure *presque cocomplexe* (Bouzon, Sasaki).

### Deuxième Partie

## DESCRIPTION DES GROUPES DE SPINORIALITE ET « TWISTEURS » GENERALISES SUR UNE VARIETE PSEUDO-RIEMANNIENNE DE DIMENSION PAIRE

### I. - Description des groupes de spinorialité.

Dans une publication antérieure [3, b] nous avons mis en évidence le rôle essentiel joué dans l'étude du problème d'existence des structures spinorielles par des sous-groupes de O (Q) que nous avons appelés « groupes de spinorialité » ; nous nous proposons dans le (I) de les décrire avec précision. Les notations sont celles de nos articles antérieurs [3].

V est une variété de dimension $n = 2r$, $r \geqslant 1$.

1°) H est le sous-groupe des éléments $\gamma$ de Spin Q tels que $\gamma f = \pm f$, f étant un r-vecteur isotrope du s.t.i.m. F′, p(H) = **s**, **s** *est le groupe de spinorialité* associé à f. Si on remplace f par tout autre r-vecteur de F′, $f' = \lambda f, \lambda \in C^*$, et la définition de H est indépendante du choix de f dans $\Lambda^r F'$.

Si on choisit un autre s.t.i.m, H se change en un sous-groupe conjugué (a priori dans Pin Q′), mais nous avons :

*Lemme* 1 : *Deux sous-groupe H et $H_1$, associés à f et $f_1$, sont conjugués dans Pin Q.*

En effet selon [3, c], page 193, tout s.t.i.m contient r vecteurs $y_1, y_2, \ldots y_r$ auxquels on peut adjoindre $x_1, x_2, \ldots, x_r$ de manière que $\{x_i, y_j\}$ constitue une base de Witt « réelle ». Il existe alors un élément de O (Q) qui applique l'un sur l'autre deux telles bases.

On peut donc se borner à considérer des groupes de spinorialité construits à l'aide de r-vecteurs isotropes $y_1, y_2, \ldots y_r$ prélevés sur une base de Witt réelle et déterminant un s.t.i.m : c'est ce que nous ferons par la suite.

P r o p o s i t i o n 1 : *En signature elliptique* $\boldsymbol{s}$ *s'identifie au groupe spécial unitaire* $SU(r, C)$ *c'est l'ensemble des éléments de déterminant* 1 *du stabilisateur d'un s.t.i.m. La dimension de* $\boldsymbol{s}$ *est* $r^2 - 1$. $\boldsymbol{s}$ *est connexe et simplement connexe.*

Prenons $f = y_1 y_2 \ldots y_r$ avec $y_j = \dfrac{ie_j - e_{n-j+1}}{\sqrt{2}}$,

les $(e_j)$ constituant dans l'espace standard E un repère orthonormé,

$$\gamma f = \pm f \text{ équivaut à } \gamma f \gamma^{-1} = f \ [3, b], \text{ et si}$$

$$y_{j'} = \gamma y_j \gamma^{-1}, \quad \text{alors :} \quad \begin{aligned} y_{j'} &= A^j_{j'} y_j \\ x_{j'} &= \overline{A^j_{j'}} x_j \end{aligned}$$

où on a pris $x_j = \dfrac{ie_j + e_{n-j+1}}{\sqrt{2}}$ et $x^{j'} = \gamma x_j \gamma^{-1}, \gamma \in \operatorname{Pin} Q$.

Le repère de Witt $\{x_i, y_j\}$ étant appliqué sur le repère de Witt $\{x_{i'}, y_{j'}\}$, on a : $\sum_j A^j_{i'} \overline{A^j_{k'}} = \delta_{i'k'}$.

Interprétant $y_1 y_2 \ldots y_r$ comme un r-vecteur de $\Lambda^r F'$, on voit immédiatement que $\det(p(\gamma)) = 1$.

Ainsi $\boldsymbol{s} \sim SU(r, C)$, les autres résultats sont classiques.

P r o p o s i t i o n 2 : *En signature* $(k, n-k)$ $(k < n-k$, $k$ *termes positifs et* $r \geqslant 2)$ $\boldsymbol{s}$ *est isomorphe au sous-groupe des éléments de* $S\,L(n, R)$ *de matrice :*

$$\left\| \begin{matrix} \alpha & -\bar{\mu} & \lambda & \mu \\ 0 & \beta & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\nu} & \bar{\beta} \end{matrix} \right\| \qquad \text{avec} \begin{cases} \alpha \in M_k(\boldsymbol{R}),\ \det \alpha = \pm 1 \\ \beta \in M_{r-k}(\boldsymbol{C}),\ \beta^t \bar{\beta} = Id,\ \det \beta = \det \alpha, \\ \alpha\, {}^t\rho = Id,\ \lambda \in M_k(\boldsymbol{R}), \\ \mu \in \boldsymbol{C}^{k(r-k)},\ \nu \in \boldsymbol{C}^{(r-k)k} \\ \nu = -\beta\, {}^t\mu\, \rho,\ {}^t\rho\, \lambda + {}^t\lambda\, \rho = {}^t\nu\, \bar{\nu} + {}^t\bar{\nu}\, \nu. \end{cases}$$

$\boldsymbol{s}$ *a deux composantes connexes et s'identifie à l'ensemble des éléments de déterminant* 1 *du stabilisateur d'un s.t.i.m.* $\dim \boldsymbol{s} = (r^2 - 2) + \dfrac{k(k-1)}{2}$.

$$\text{Prenons } f = y_1 y_2 \ldots y_r \begin{cases} y_j = \dfrac{e_j - e_{n-j+1}}{\sqrt{2}}, \quad x_j = \dfrac{e_j + e_{n-j+1}}{\sqrt{2}}, \ j \leqslant k \\ y_j = \dfrac{ie_j - e_{n-j+1}}{\sqrt{2}}, \quad x_j = \dfrac{ie_j + e_{n-j+1}}{\sqrt{2}} \ j > k \end{cases}$$

Définissons $\sigma \in \boldsymbol{s}$ par sa matrice :

$$y_{r'} = \sum_{j \leq k} A^j_{r'} y_j + \sum_{j > k} A^j_{r'} y_j$$

$$x_{r'} = \sum_{j \leq k} B^j_{r'} x_j + \sum_{j > k} B^j_{r'} x_j + \sum_{j \leq k} C^j_{r'} y_j + \sum_{j > k} C^j_{r'} y_j .$$

Ecrivant que $\sigma$ est réelle, on obtient $\alpha$ réel, $\beta = \overline{\beta}$, $\rho$ réel, $\lambda$ réel et deux relations de conjugaison ; puis exprimant que $B(x_{r'}, y_{j'}) = \delta_{r'j'}$ et $B(x_{r'}, x_{j'}) = 0$ :

$$\alpha\, {}^t\rho = I , \beta\, {}^t\overline{\beta} = I , \nu = - \beta\, {}^t\mu\, \rho \text{ et enfin}$$

$$^t\rho\, \lambda + {}^t\lambda\, \rho = {}^t\nu\, \overline{\nu} + {}^t\overline{\nu}\, \nu \quad (1)$$

Considérant un chemin différentiable issu de l'identité dans $\boldsymbol{s}$, on trouve en dérivant (1) que :

$$l + {}^tl = 0 \quad \text{avec} \quad l = \left(\frac{d\lambda(t)}{dt}\right)_{t=0} .$$

Il suffit alors d'observer que $\gamma f \gamma^{-1} = f$ si $p(\gamma) = \sigma$.

Le calcul de la dimension et l'existence de deux composantes connexes sont des résultats immédiats puisque SL (k) et SU (r - k) sont connexes.

P r o p o s i t i o n 3 : *Si $Q$ est neutre $(k = r)$, $\boldsymbol{s}$ est isomorphe au sous-groupe des éléments de $SL(n, \boldsymbol{R})$ de matrice :*

$$\left\| \begin{matrix} \alpha & \lambda \\ & \\ 0 & \rho \end{matrix} \right\| \qquad \text{avec} \begin{cases} \alpha \in M_r(\boldsymbol{R}) , \; det\; \alpha = 1 \\ \alpha\, {}^t\rho = I\, d \\ {}^t\rho\, \lambda + {}^t\lambda\, \rho = 0 \end{cases}$$

*$\boldsymbol{s}$ est connexe et s'identifie à l'ensemble des éléments de déterminant 1 du stabilisateur d'un s.t.i.m.*

$$\dim \boldsymbol{s} = r^2 - 1 + \frac{r(r-1)}{2} = \frac{(r-1)(3r+2)}{2}$$

La démonstration est identique à celle de la proposition 2.

Signalons que ce cas avait été négligé dans [3, b].

*Remarques* : On observera que si $\sigma \in \boldsymbol{s}$ induit l'identité dans F' il appartient à un sous-groupe de dimension $\frac{k(k-1)}{2}$ quand $k > 1$. Pour $k = 1$, et également en signature elliptique, ce sous-groupe se réduit à l'identité.

### 2°) Les groupes de spinorialite elargis

Si on cherche le sous-groupe $H_e$ des éléments $\gamma$ de Spin Q tels que $\gamma f = \chi e^{i\theta} f$, $\chi e^{i\theta} \in C^*$, on obtient pour l'ensemble des $p(\gamma)$ le groupe stabilisateur d'un s.t.i.m par l'action de $S\,O\,(Q)$.

En signature elliptique nécessairement $\chi = 1$, de sorte que $p\,(H_e) = \mathbf{s}_e \simeq U\,(r\,, C)$. En signature quelconque $\chi$ peut être différent de 1. De tels sous-groupes de $S\,O\,(Q)$ seront dits « groupes de spinorialité élargis ». Ils sont de dimension $r^2 + \dfrac{k\,(k-1)}{2}$, pour tout k, $0 \leqslant k \leqslant r$ ; on observera que pour $k \neq 0$, un groupe élargi ne se ramène pas à un groupe unitaire généralisé.

$\mathbf{s}_e$ est connexe pour $k = 0$ ou r et a deux composantes connexes pour $0 < k < r$.

$\boldsymbol{s}$ est distingué dans $\mathbf{s}_e$ associé au même r-vecteur isotrope f.

### 3°) Les groupes de spinorialite complexes

Considérons dans $O\,(Q')$ (en fait dans $S\,O\,(Q')$) le sous-groupe du stabilisateur d'un s.t.i.m (avec déterminant égal à $\pm 1$). On sait [3, b] que $\gamma f = \pm \mu f$, $\mu \in C^*$ équivaut à $\gamma f \gamma^{1} = N\,(\gamma)\,\mu^2 f$.

On peut voir (se reporter aussi au calcul du 4°) plus bas) qu'un élément de $\boldsymbol{s}'$ a pour matrice

$$\left\| \begin{matrix} A & C \\ 0 & B \end{matrix} \right\| \qquad \begin{aligned} & A \in G\,L\,(C, r)\,,\ \det A = \pm 1 \\ & {}^tA\,B = I\,d \\ & {}^tB\,C + {}^tC\,B = 0 \end{aligned}$$

et qu'il s'exprime comme le produit d'une matrice de changement de bases de Witt de $F \oplus F'$ :

$$\left\| \begin{matrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{matrix} \right\| \qquad \text{avec } \det \alpha = \pm 1 \text{ et } {}^t\alpha\,\beta = I\,d,$$

par une matrice de la forme :

$$m = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$$

à éléments complexes, antisymétriques, $m \in p\ (\exp\,(\Lambda^2 F'))$, et réciproquement tout élément de $p\ (\exp\ (\Lambda^2 F'))$ a la forme donnée pour m — (cf. 4° plus bas) —.

On écrira $H' = p\,(\boldsymbol{s}')$.

Les groupes $H'_e$, $\boldsymbol{s}_e'$, se définissent de la même façon que $H_e$, $\mathbf{s}_e$.

4°) Sous-groupe de $O(Q')$ qui induit l'identite dans F.

Les considérations de ce paragraphe s'appliquent à toute forme quadratique neutre, elles se transposent à ce cas en remplaçant partout $Q'$ par $Q$, $E'$ par $E$, $G'$ par $G$, $G'_0$ par $G_0$. Nous présentons ici dans un cadre plus simple certains résultats donnés dans le livre de Chevalley [2].

Soit $\{x_i, y_j\}$ une base de Witt de $E' = E_C$ (décomposition $F \oplus F'$), et $\sigma$ une isométrie de $E'$ qui conserve $F$ point par point. On obtient, après action de $\sigma$, une nouvelle décomposition de Witt :

$$F \oplus F'_1 \text{ avec } F'_1 = \sigma(F').$$

Posons $\quad \sigma(x_i) = x_i$

$$\sigma(y_i) = a_i^j x_j + b_i^k y_k, \; i = 1, 2 \ldots r.$$

La propriété d'isométrie de $\sigma$ se traduit par $b_i^j = \delta_i^j$, $a_i^j + a_j^i = 0$ et nous obtenons :

*Lemme 2 : Pour que $\sigma \in O(Q')$ se réduise sur F à l'identité, il faut et il suffit qu'il soit de la forme :*

$$\sigma(x_i) = x_i$$
$$\sigma(y_i) = a_i^j x_j + y_i, \quad \|a_i^j\| \quad \textit{antisymétrique.}$$

On observera que la donnée de F, ne détermine pas uniquement $F'$ tel que $F \oplus F'$ soit une décomposition de Witt de $E_C = E'$.

*L'exponentiation dans $\Lambda^2 F$* [2].

Il n'y a aucune difficulté à définir une exponentielle dans $\Lambda^2 F$ car les puissances de $X = \sum\limits_{i<j\leq r} a^{ij}(x_i \wedge x_j)$ sont nulles au-delà d'un certain exposant. Ecrivons $X = \Sigma X_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots N$.

$$\exp X = 1 + \Sigma X_\alpha + \sum_{\alpha_1 < \alpha_2} X_{\alpha_1} X_{\alpha_2} + \sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3} X_{\alpha_1} X_{\alpha_2} X_{\alpha_3} \ldots$$

$$= \pi_\alpha (1 + X_\alpha), \text{ puisque } (x_i \wedge x_j)^2 = 0.$$

Si $X = x \wedge y$, $\exp X = 1 + X$, $\exp(-X) = 1 - X$.

Proposition 4: *Si $u \in \Lambda^2 F$, alors $\exp u \in G_0^{'+}$ et $p(\exp u)$ laisse invariant les éléments de F. Réciproquement tout élément de $O(Q')$ qui laisse invariant chaque élément de F est dans $p(G_0^{'+})$ et peut s'écrire $p(\exp u)$, $u \in \Lambda^2 F$.*

Les éléments de la forme $\exp u$, $u \in \Lambda^2 F$ forment un groupe. Tout élément de $\Lambda^2 F$ étant somme d'éléments décomposables, il suffit de montrer que si $x_1, x_2 \in F$, $\exp(x_1 x_2) \in G'$, pour affirmer que $\exp u \in G'$ ($G'$, groupe de Clifford).

Or de : $x_i\,y + y\,x_i = 2\,B(x_i, y)$, $i = 1, 2$, $y \in F'$,
on déduit : $\exp u\, y\, (\exp u)^{-1} = (1 + u)\, y\, (1 - u)$, si $u = x_1 x_2$,
$$= y + 2\,B(x_2, y)\,x_1 - 2\,B(x_1, y)\,x_2 \in E'.$$

Il est évident que $\exp u \in G'^{+}$.

$\beta(x_1 x_2) = - x_1 x_2$, de sorte que si u est décomposable :

$\beta(\exp u) = \exp(-u) = (\exp u)^{-1}$, donc $\exp u \in G'^{+}$, et ce résultat

s'étend facilement à $u \in \Lambda^2 F$, quelconque. Enfin, comme u commute avec les éléments de F, $(\exp u)$ laisse invariant chaque élément de F.

Réciproquement : Il suffit d'établir que $p(\exp(\Lambda^2 F))$ est l'ensemble des éléments de $O(Q')$ qui laissent invariant F point par point.

Si $u = a^{i_1 i_2} x_{i_1} x_{i_2}$ (sans sommation en $i_1, i_2$),

$\exp u\, y_j\, (\exp u)^{-1} = y_j + 2\,a^{i_1 i_2} (\delta_{i_2 j}\, x_{i_1} - \delta_{i_1 j})\, x_{i_2}$

Si $u = \Sigma\, a^{i_1 i_2} x_{i_1} x_{i_2} = \Sigma\, X_\alpha$ avec $a^{i_1 i_2} = - a^{i_2 i_1}$,

$\exp X = \underset{\alpha}{\pi}(1 + X_\alpha)$ ; en itérant le calcul déjà fait, il vient :

$\exp u\, y_j\, (\exp u)^{-1} = y_j + 4\,a^{ji}\, x_i$, ce qui est bien l'élément général écrit antérieurement.

*Lemme 3 : Si $V, V', V''$ sont des s.t.i.m tels que $V \cap V' = V \cap V''$, alors il existe $\sigma \in p(\dot{G}_o^{+})$ qui laisse fixe tous les éléments de V et applique V′ dans V″* [2].

Appliquant une isométrie $\tau$, le problème n'est pas modifié, $\sigma$ est remplacé par $\sigma' = \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$, et si $\sigma \in p(\dot{G}_o^{+})$, $\sigma'$ également. D'autre part si $\tau(V) = V_1$, $\sigma'(V_1) = V_1$ et $\sigma'$ laisse fixe tous les éléments de $V_1$.
$\tau(V) \cap \tau(V') = \tau(V) \cap \tau(V'')$. On peut donc supposer que $V = F$.

Soit $\{x_i, y_j\}$ une base de *Witt* de $E' = F \oplus F'$ et supposons que $F \cap V' = F \cap V'' = (x_1, x_2, \ldots x_h)$.

$$F_1 = (x_{h+1}, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_h) \text{ est un s.t.i.m.}$$

L'intersection de $F_1$ avec $V'$ est nulle. En effet :
Si $z \in F_1 \cap V'$ il est orthogonal à tous les éléments de $F_1$ et de $V'$, donc à $(x_1, \ldots, x_h, x_{h+1}, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_h)$ ; or l'espace orthogonal à ce dernier, qui a la dimension $r + h$, et contient $x_{h+1}, \ldots, x_r$, n'est autre que $(x_{h+1}, \ldots x_r)$, ainsi $z \in (x_{h+1}, \ldots, x_r)$, mais comme $z \in V'$ et que $F \cap V' = (x_1, \ldots, x_h)$, z est nécessairement nul.

On peut écrire $E' = F_1 \oplus V' = F_1 \oplus V''$ et appliquant une nouvelle isométrie se ramener que si $E' = F \oplus V' = F \oplus V''$, il existe $\sigma \in p(\exp \Lambda^2 F)$ qui envoie $V'$ dans $V''$ (proposition 4).

On peut construire une base de Witt pour la décomposition $F \oplus V''$ (on choisit $x'_1$ dans F, on lui associe $y'_1$ dans $V''$ avec $B(x'_1, y'_1) = 1$, l'espace $(x'_1, y'_1)$ est non isotrope, $E' = (x'_1, y'_1) \oplus F_1 \oplus V''$, avec $\dim F_1 = \dim V''_1 = r - 1$ etc...).

Soit u une isométrie qui envoie $\{x_i, y_j\}$ de $F \oplus F'$ respectivement sur $\{x_{i'}, y_{j'}\}$ de $F \oplus V'$.

$$x_{i'} = u(x_i) = A_i^k x_k$$
$$y_{i'} = u(y_i) = B_i^k y_k + C_i^k x_k.$$

On a ${}^tA\,B = I$, u est le produit de deux isométries :

$$x_i \to A_i^k x_k = X_i \to X_i$$
$$y_i \to B_i^k y_k = Y_i \to Y_i + C_i^k (A^{-1})_k^l X_l$$

dont la première traduit un simple changement de bases de Witt. Ce changement fait, on a une isométrie $\sigma$ qui conserve F point par point et envoie $F'$ sur $V'$. De même pour F et $V''$. Le lemme 3 est établi.

## II. - Generalisation de la notion de twisteur.

### 1°) Fibrations en twisteurs canoniquement associees a une fibration Pin Q-spinorielle sur une variete.

Généralisant une terminologie utilisée par R. Penrose [8] nous appellerons *twisteur d'ordre q*, tout élément d'un espace vectoriel isomorphe à la somme directe de q espaces de spineurs. Avec la représentation choisie un twisteur est un élément d'un idéal à gauche de $C(Q')$.

S'il existe sur V une structure Pin Q-spinorielle, il existe pour le complexifié du fibré tangent, modulo un facteur scalaire, un champ de r-vecteurs isotropes défini localement par : $x \in U_\alpha \to f_\alpha(x) = \varphi_\alpha^x(f)$, $\varphi_\alpha^x$ isomorphisme de $C(Q')$ sur $C(Q')_x$ (1ère partie), les $(U_\alpha)$ constituant l'atlas de fibration.

*Cherchons s'il existe, en dehors de toute autre considération sur la topologie de V*, supposée à structure Pin Q-spinorielle, d'autres r-vecteurs $f'$ de $C(Q')$ tels que $\varphi_\alpha^x(f')$ soit aussi, et de la même façon, la restriction à $U_\alpha$, d'un champ de r-vecteurs isotropes (modulo un facteur scalaire). S'il existe un tel $f' = g f g^{-1}$, $g \in \mathrm{Pin}\, Q'$ et $N(g_{\alpha\beta}(x))\, \varphi_\alpha^x(g f g^{-1}) = \varphi_\beta^x(g f g^{-1})$, où les $g_{\alpha\beta}$ sont les fonctions de transitions des $\varphi_\alpha^x$ (1ère partie).

Nécessairement : $(g^{-1} g_{\alpha\beta}(x)\, g) f = \pm f$, $\forall\, g_{\alpha\beta}(x) \in \mathrm{Pin}\, Q$.

$$g_{\alpha\beta}(x) f' = \pm f',$$

g sera donc dans le normalisateur de $H \subset \mathrm{Pin}\, Q'$. Il existera donc d'autres « pseudo-champs » de r-vecteurs isotropes si $\boldsymbol{s}$ est aussi groupe de spinorialité pour $f'$ avec $f' \neq \lambda f$, $\lambda \in \boldsymbol{C}^*$.

Or si $\gamma \in \boldsymbol{s}$, $\gamma f = \pm f$ équivaut à $\gamma \bar{f} = \pm \bar{f}$. Donc il existe toujours deux r-vecteurs isotropes $f, \bar{f}$, qui définissent le même groupe de spinorialité $\boldsymbol{s}$, $f \neq \lambda \bar{f}$, si $0 \leqslant k < r$. Il vient ainsi :

P r o p o s i t i o n 1 : *S'il existe sur $V$ une fibration Pin $Q$-spinorielle, il existe une fibration en twisteurs d'ordre 2, somme de Whitney de deux sous-fibrations Pin $Q$-spinorielles pour $0 \leqslant k < r$.*

On observera que la deuxième fibration ainsi obtenue n'est pas nécessairement la fibration conjuguée de la fibration envisagée, les $\varphi_x^\Sigma$ appliquant C (Q′) sur C (Q′)$_x$.

P r o p o s i t i o n 2 : *S'il existe sur $V$ une structure Pin $Q$-spinorielle, le fibré de Clifford, Cli $(V, Q')$, contient un sous-fibré en twisteurs d'ordre $2^{r-k}$, si la forme quadratique $Q$ est de signature $(k, n-k)$ $(0 \leqslant k < n-k)$. Ce fibré de twisteurs est la somme directe de $2^{r-k}$ sous-fibrés Pin $Q$-spinoriels, isomorphes dans Pin $Q'$.*

*Dans le cas elliptique, Cli $(V, Q')$ est donc la somme directe de $2^r$ fibrés Pin $Q$-spinoriels.*

On cherche les r-vecteurs isotropes f′ de C (Q′) tels que $f' = g f g^{-1}$, $g \in$ Pin Q′, avec $g^{-1} H g \subset H'$, $p(H') = s'$, groupe de spinorialité complexe, $H' \supset \exp(\Lambda^2 F')$ (I, 4°).

La démonstration résultera de deux lemmes :

*Lemme* 1 : On suppose Q définie.

*Soit $F_1$ un s.t.i.m quelconque tel que $F_1 \oplus \bar{F}' = E'$, on peut transformer $F'$ en $F_1$ par un élément $g \in$ Pin $Q'$ tel que $g^{-1} H g \subset H$.*

On peut considérer $\bar{F}' \oplus F'$ avec la base de Witt « réelle » $\{x_i, y_j\}$, on peut passer de F′ à $\bar{F}'$ en échangeant $x_i$ et $y_i$, $i = 1, \ldots r$, obtenant par projection sur O (Q) une isométrie $p(\gamma_0) = \begin{Vmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{Vmatrix}$, qui est dans le normalisateur de l'ensemble des matrices $\begin{Vmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \bar{\beta} \end{Vmatrix}$ de O (Q).

Pour tout $F_1$ déduit de $\bar{F}'$ par un élément $\gamma$ qui conserve F′ point par point, $\gamma \in \exp(\Lambda^2 F')$, donc $\gamma \in H'$. $\gamma\gamma_0$ permet de passer de F′ à $F_1$ et $\gamma\gamma_0 H \gamma_0^{-1}\gamma^{-1} \subset H$ puisque H est distinguée dans H′.

*Lemme* 2 : On suppose Q non définie.

*Soit $F_1$ un s.t.i.m tel que $F' \cap \bar{F}' = F' \cap F_1$. Il existe $g \in$ Pin $Q'$ avec $g F' g^{-1} = F_1$ et tel que $g^{-1} H g \subset H$.*

On considère la base de Witt déjà utilisée plus haut (I, 1°). On passe de F′ à $\bar{F}'$ en échangeant $x_j$ et $y_j$ pour $j > k$, obtenant par projection sur O (Q) l'isométrie de matrice :

$$\begin{Vmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

qui est dans le normalisateur de l'ensemble des matrices de (I, 1°, prop. 2) dans O (Q).

Tout $F_1$ peut se déduire de $\overline{F}'$ par un élément $\gamma \in \exp \Lambda^2 F' (I, 4^o)$, $\gamma \in H'$; on aboutit au même résultat que précédemment.

*Démonstration de la proposition 2*

*Supposons Q définie.* La proposition sera établie en étudiant l'action de exp $(\Lambda^2 F')$ sur $C(Q')\, x_1 \ldots x_r = C(Q')\, \overline{f}$.

Si $F' \oplus F_1 = E'$, avec $F' \cap F_1 = 0$ et $\{x_i, y_j\}$ base de Witt associée à cette décomposition, $y_1 \ldots y_r x_1 \ldots x_r$ est, modulo un scalaire, un idempotent de l'algèbre simple $C(Q')$.

$$\text{Si } \exp u = \exp (a y_1 y_2) = 1 + a y_1 y_2$$

$$(1 + a y_1 y_2)(y_1 \ldots y_r x_1 \ldots x_r)(1 - a y_1 y_2)$$

$$= y_1 y_2 \ldots y_r x_1 \ldots x_r \pm 4a\, y_r y_{r-1} \ldots y_3 (y_1 y_2 x_3 \ldots x_r).$$

En itérant un tel calcul on obtiendra à droite tous les r-vecteurs isotropes déduits de $x_1 \ldots x_r$ en remplaçant un nombre pair de facteurs par $y_i y_j$ de toutes les manières possibles. Cela donnera finalement une somme directe de $2^{r-1}$ sous-espaces de dimension $2^r$.

A chaque sous-espace obtenu, on fera correspondre par conjugaison complexe dans $C(Q')$ (proposition 1) un nouveau sous-espace, obtenant finalement $2^r$ sous-espaces de spineurs.

*Supposons Q non définie.* On utilise, modulo un facteur scalaire, un idempotent :

$$(x_1 \ldots x_k y_{k+1} \ldots y_r)(y_1 \ldots y_k x_{k+1} \ldots x_r).$$

On retrouve le calcul antérieur avec $\exp u = 1 + a y_j y_{j+1}$, $j \geqslant k+1$, mais on obtient seulement $2^{r-k-1}$ sous-espaces de dimension $2^r$. On utilise ensuite une conjugaison complexe dans $C(Q')$. On dira des fibrations déduites de la fibration donnée en modifiant simplement le choix de $f \in C(Q')$ qu'elles lui sont *« canoniquement associées »*; nous complèterons la proposition 2 par :

P r o p o s i t i o n 3 : *Il n'existe pas d'autres fibrations Pin Q-spinorielles « canoniquement associées » à la fibration donnée* $(0 \leqslant k < n - k)$.

On rappelle qu'on néglige ici toute possibilité de réduction du groupe du fibré Pin Q-spinoriel ; le raisonnement suppose que les $g_{\alpha\beta}(x)$ peuvent prendre des valeurs quelconques dans Pin Q.

La démonstration de la proposition 3 utilisera le lemme suivant :

*Lemme 3 :* Soient $g, \gamma \in$ Pin $Q'$.
*Si $g\gamma \in$ Pin $Q'$ applique $f$ sur $f'$, et appartient au normalisateur $N$ de $H$ dans Pin $Q'$, si $\gamma$ applique aussi $f$ sur $f'$ alors $\gamma$ appartient à $N$.*

$\gamma f = f' \gamma$ et $g \gamma f = f' g \gamma$, $\gamma, g \in$ Pin $Q'$, cela implique d'après une propriété fréquemment utilisée :

$$(\gamma^{-1} g \gamma) f = f, \gamma^{-1} g \gamma \in H_e'.$$

Par hypothèse : $g'_2 = g\gamma g'_1 \cdot (g\gamma)^{-1} \in H$, $\forall g'_1 \in H$.

$$\gamma^{-1} g'_2 \gamma = (\gamma^{-1} g \gamma) g'_1 (\gamma g \gamma^{-1}),$$

H étant distingué dans $H'_r$, $\gamma^{-1} g'_2 \gamma \in H$ ; $g'_2$ étant arbitraire dans H, $\gamma$ est bien dans N.

*Démonstration de la proposition* 3.

Soit $F_1$ tel que $\gamma \bar{F}' \gamma^{-1} = F_1$ et $\gamma H \gamma^{-1} \subset H$, $\gamma \in \operatorname{Pin} Q'$ ; si $h' \in H$, posons $\gamma h' \gamma^{-1} = h \in H$.

Soit $z \in F' \cap F_1$, h envoie z dans F′, et comme h′ réel, conserve $\bar{F}'$ aussi bien que F′, $h(z) \in F_1$. $F' \cap F_1$ est donc globalement invariant pour l'action de tout $h \in H$.

Si $F' = F_1$, il n'y a rien à démontrer.

Si $F' \neq F_1$, alors nécessairement, d'après l'étude détaillée de H faite au I :

dans le cas elliptique $F' \cap F_1 = 0$,

dans le cas non elliptique $F' \cap F_1 = 0$ ou $F' \cap \bar{F}'$.

Montrons que dans le cas non elliptique $F' \cap F_1 = 0$ est impossible.

En effet si $F' \cap F_1 = 0$, on peut écrire $E' = F' \oplus F_1$, choisir une base de Witt (non « réelle ») adaptée à cette décomposition et envoyer $F_1$ sur F′ par une isométrie $\sigma$ de matrice $\begin{vmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{vmatrix}$ (échanger les $x_i$ et $y_i$, $i = 1 \dots r$). Cette isométrie est dans O (Q′), elle n'appartient pas au normalisateur N de **s** dans O (Q) comme on le voit à l'aide de la matrice obtenue au (I, prop. 2). Or le lemme 3 et la démonstration du lemme 2, assurent que $\sigma$ devrait faire partie de N : il y a donc contradiction.

Finalement on voir que $F' \cap F_1 = F' \cap \bar{F}'$, dans les deux cas ; on sait (I, lemme 3) qu'il existe $\gamma \in \exp(\Lambda^2 F')$ qui applique $\bar{F}'$ sur $F_1$ et on retrouve les résultats antérieurs.

*Remarques* : a) Si on se place dans Pin Q′, on peut toujours associer à une base de Witt $\{x_i, y_i\}$ la base obtenue en échangeant $x_i$ et $y_i$ pour tout $i = 1 \dots r$.

On ne met pas en jeu nécessairement une isométrie de O (Q). Mais on peut alors raisonner comme dans le cas elliptique en toute signature, Cli (V, Q′) est la somme directe de $2^r$ fibrés Pin Q′-spinoriels.

b) Lorsque $k = r$ il n'est pas nécessaire de considérer les complexifications pour introduire les spineurs. Ce cas, qui semble très intéressant, ne sera pas abordé dans cet article.

2°) Les twisteurs isotropes de R. Penrose

R. Penrose considère dans [8] l'espace de Minkowski et envisage essentiellement des twisteurs d'ordre 2 ; ses considérations sont purement algébriques. Nous nous proposons de retrouver l'essentiel de ses résultats et de les généraliser.

Nous avons établi dans [3, c] que l'on peut construire une «forme» hermitienne ou du moins une «forme-densité», fondamentale $\boldsymbol{H}$ dans l'espace des spineurs, en posant :

$$\beta(\overline{\mathrm{u\,f}})\,\mathrm{v\,f} = \mathrm{a}\,\boldsymbol{H}(\mathrm{u\,f}, \mathrm{v\,f})\,\gamma\,\mathrm{f}\,;$$

a est une constante scalaire, $\beta$ l'antiautomorphisme principal, uf et vf des éléments de $C(Q')\,f$, la barre désignant la conjugaison complexe et $\gamma\,f$ un spineur pur convenablement choisi déterminé par cette conjugaison [3, c].

*Sur une variété munie d'une structure $G_n$-spinorielle il existe un champ de formes hermitiennes fondamentales* [3, c], *ce qui fait que les considérations algébriques ci-dessous s'étendront à une telle variété.*

Revenons à $E_n$, espace de dimension n sur R, muni de la forme quadratique Q.

Un twisteur de valence $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ est un élément cliffordien de la forme :

$u\,f + u'\,f'$, où f et f' sont deux r-vecteurs isotropes qui déterminent des idéaux minimaux à gauche distincts.

Un twisteur de valence $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ serait défini de manière analogue à l'aide des cospineurs, c'est-à-dire à l'aide l'idéaux minimaux à droite, il s'écrirait : $f\,u + f'\,u'$.

Introduisons sur les spineurs la structure hermitienne donnée par $\boldsymbol{H}$, on peut former [3, c] :

$$\begin{aligned}\beta(\overline{\mathrm{u\,f} + \mathrm{u'\,f'}})(\mathrm{v\,f} + \mathrm{v'\,f'}) &= \mathrm{a}\,\boldsymbol{H}(\mathrm{u\,f}, \mathrm{v\,f})\,\gamma\,\mathrm{f} + \mathrm{a'}\,\boldsymbol{H}'(\mathrm{u'\,f'}, \mathrm{v'\,f'})\,\gamma'\,\mathrm{f'}\\ &+ \mathrm{a}_1\,\boldsymbol{H}_1(\mathrm{u'\,f'}, \mathrm{v\,f})\,\gamma_1\,\mathrm{f} + \mathrm{a'}_1\,\boldsymbol{H}'_1(\mathrm{u\,f}, \mathrm{v'\,f'})\,\gamma'_1\,\mathrm{f'}\,;\end{aligned}$$

$a, a', a_1, a'_1$ sont des scalaires constants, $\gamma\,f, \gamma'\,f', \gamma_1\,f, \gamma'_1\,f'$ sont les spineurs purs déterminés respectivement par $(f, \bar{f}), (f', \bar{f'}), (f, \bar{f'}), (f', \bar{f})$, (on a : $\bar{f} = \gamma\,f\,\gamma^{-1}$ etc...), $N(\gamma) = N(\gamma_1) = N(\gamma'_1) = N(\gamma') = 1$.

Formant $\beta(\overline{\mathrm{v\,f} + \mathrm{v'\,f'}})(\mathrm{u\,f} + \mathrm{u'\,f'})$ et appliquant $\beta$ et la conjugaison complexe, on voit que l'on peut choisir les scalaires $a, a', a_1, a'_1$ de manière que pour tous les éléments concernés :

$$\boldsymbol{H}(\mathrm{u\,f}, \mathrm{v\,f}) = \overline{\boldsymbol{H}(\mathrm{v\,f}, \mathrm{u\,f})}$$

$$\boldsymbol{H}'(\mathrm{u'\,f'}, \mathrm{v'\,f'}) = \overline{\boldsymbol{H}'(\mathrm{v'\,f'}, \mathrm{u'\,f'})}$$

$$\boldsymbol{H}'_1(\mathrm{v\,f}, \mathrm{u'\,f'}) = \overline{\boldsymbol{H}_1(\mathrm{u'\,f'}, \mathrm{v\,f})}$$

Se reportant à [3, c], page 195, on montre aisément que $a = a'$ avec $a^2 = \varepsilon\,\varepsilon'$, $\varepsilon = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}$, $\varepsilon' = (-1)^{\frac{(k-r)(k-r-1)}{2}}$ et $a'_1 = \bar{a}_1$ permet de réaliser ce programme.

Si $\varepsilon \varepsilon' = 1$, on peut choisir : $a = a' = a_1 = a'_1 = 1$ et écrire avec un léger abus :

$$\beta\,(\overline{u\,f + u'\,f'})\,(v\,f + v'\,f')$$
$$= \boldsymbol{H}\,(u\,,v)\,\gamma\,f + \boldsymbol{H}'\,(u'\,,v')\,\gamma'\,f' + \boldsymbol{H}_1\,(u'\,,v)\,\gamma_1\,f + \overline{\boldsymbol{H}_1\,(v'\,,u)}\,\gamma'_1\,f' \qquad (1)$$

Si $\varepsilon \varepsilon' = -1$, on peut choisir $a = a' = i\,, a_1 = i\,, a'_1 = -i$ et :

$$\frac{1}{i}\,\beta\,(\overline{u\,f + u'\,f'}\,, v\,f + v'\,f')$$
$$= \boldsymbol{H}\,(u\,,v)\,\gamma\,f + \boldsymbol{H}'\,(u'\,,v')\,\gamma'\,f' + \boldsymbol{H}_1\,(u'\,,v)\,\gamma_1\,f - \overline{\boldsymbol{H}_1\,(v'\,,u)}\,\gamma'_1\,f' \qquad (2)$$

Si nous supposons que les s.t.i.m de f et f′ sont distincts, alors f′ et f ne sont pas colinéaires et les idéaux à gauche qu'ils déterminent sont d'intersection nulle.

De même $\gamma_1\,f$ et $\gamma\,f$ sont linéairement indépendants, car $\gamma_1\,f = k\,\gamma\,f\,, k \in \boldsymbol{C}^*$, implique :

$$f\,\gamma_1^{-1} = k\,f\,\gamma^{-1}, \quad \text{d'où : } \gamma_1\,f\,\gamma_1^{-1} = \lambda^2\,\gamma\,f\,\gamma^{-1}$$
$$\overline{f'} = \lambda^2\,\overline{f}, \text{ ce qui est impossible.}$$

Dans les décompositions (1) et (2) ci-dessus, $\gamma\,, \gamma'\,, \gamma_1\,, \gamma'_1$, étant fixés, les coefficients numériques sont bien déterminés de manière unique.

Ainsi :

P r o p o s i t i o n 4 : *Il existe sur l'espace des twisteurs de valence* $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, *une forme hermitienne, extension naturelle des formes hermitiennes spinorielles*

$$< u\,f + u'\,f' \mid v\,f + v'\,f' > = \boldsymbol{H}\,(u\,,v) + \boldsymbol{H}'\,(u'\,,v') + \boldsymbol{H}_1\,(u'\,,v) + \overline{\boldsymbol{H}_1\,(v'\,,u)}.$$

Penrose considère dans [8] des éléments u , u′ , v , v′ appartenant à E, espace de Minkowski, et qui sont réels et isotropes pour la métrique. Ici ,sans nous limiter à un espace particulier, considérons encore des éléments u , u′ , v , v′ isotropes pour la métrique introduite :

$$< u\,f + u'\,f' \mid u\,f + u'\,f' > = 2\,R_e\,\boldsymbol{H}_1\,(u'\,,u)$$

et on peut convenir d'appeler « *twisteur isotrope* » de valence $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ un twisteur tel que :

$$< u\,f + u'\,f' \mid u\,f + u'\,f' > = 0$$

Dans un contexte bien différent, et dans un cas particulier, c'est au fond ce que semble faire Penrose [8].

Dans l'espace de Minkowski les éléments isotropes réels dépendent de trois paramètres réels, l'ensemble des « twisteurs isotropes » est donc une variété réelle de dimension 5. Remplaçant la dimension 4 par $n = 2r$, cette dimension serait $2n - 3$.

Nous n'insistons pas au sujet de généralisations possibles.

Revenons à l'espace de Minkowski, avec les notations de [3, c] (page 199) et la signature $(+ - - -)$ soit $f = y_1 y_2$, $f' = x_1 y_2$, alors $\gamma = i e_2$, $\gamma' = i e_2$, $\gamma_1 = e_1 e_3$, $\gamma'_1 = e_1 e_3$. Cherchons le stablisateur par l'action de Pin Q d'un élément, par exemple $x_1 y_1 y_2 = x_1 f$, qui est un twisteur isotrope. Il revient au même de considérer $e_1 y_1 y_2$.

Si $\gamma_0 e_1 y_1 y_2 \gamma_0^{-1} = \gamma_0 e_1 \gamma_0^{-1} \gamma_0 f \gamma_0^{-1} = e_1 f$, nécessairement $p(\gamma_0)$ appartient à un sous-groupe de spinorialité élargi de O (Q) et d'après l'étude faite au (I, 2°), dans la base $y_1, y_2, x_1, x_2$, sa matrice a la forme donnée dans l'énoncé de la proposition (2), multipliée par diag $(1, \exp(-i\theta), 1, \exp(i\theta)\ i\ 1)$, avec :

$$\alpha \text{ réel},\ \beta\bar{\beta} = 1,\ \rho = \frac{1}{\alpha},\ \lambda \text{ réel},\ \nu = -\beta\mu\rho,\ \rho\lambda = \nu\bar{\nu}$$

$$\gamma_0 x_1 \gamma_0^{-1} = \lambda y_1 + \nu y_2 + \rho x_1 - \bar{\nu} x_2$$

$$\gamma_0 y_1 \gamma_0^{-1} = \alpha y_1$$

$$\gamma_0 y_2 \gamma_0^{-1} = -\bar{\mu} y_1 + \beta' y_2\ ,\ \beta' = \beta \exp(-i\theta),$$

$$\alpha(\lambda y_1 + \nu y_2 + \rho x_1 - \bar{\nu} x_2) y_1 (-\bar{\mu} y_1 + \beta' y_2) = x_1 y_1 y_2$$

$$\beta' \alpha (\nu y_2 + \rho x_1 - \bar{\nu} x_2) y_1 y_2 \qquad = x_1 y_1 y_2$$

$$\alpha \beta' (\rho x_1 - \bar{\nu} x_2) y_1 y_2 \qquad = x_1 y_1 y_2$$

$$\alpha\beta'\rho = 1, \qquad \alpha\beta'\bar{\nu} = 0.$$

Finalement : $\nu = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$,

$\alpha$ est réel arbitraire, $\beta = e^{i\theta}$, $\theta$ réel arbitraire. Donc :

Proposition 5 : *Dans l'espace de Minkowski, le stabilisateur d'un twisteur isotrope est un groupe à deux paramètres, commutatif.*

Se référant à [3, b] et [4 bis], on a, du moins en ce qui concerne les composantes connexes de l'identité :

*Corollaire.*

***Le stabilisateur d'un twisteur isotrope, un groupe de spinorialité sont isomorphes.***

La proposition 5 avait été signalée par Michel Cahen.

Notons que sur une variété espace-temps à structure Pin Q-spinorielle, à toute fibration est associée canoniquement une fibration en twisteurs d'ordre 2 d'après la proposition 2.

### 3°) Identification des twisteurs d'ordre pair a des spineurs.

L'espace des twisteurs d'ordre 2, $C(Q')f \oplus C(Q')f'$, de dimension $2^{r+1}$, peut être considéré comme espace d'une représentation irréductible pour une algèbre de Clifford complexifiée construite sur $E_{n+2}$, de dimension $(n+2)$ sur $R$, muni d'une « métrique » quelconque $(n = 2r)$.

Il semble particulièrement intéressant de considérer un espace $E_n$ de métrique $Q_n$ avec signature $(p, q)$ et un espace $E_{n+2}$ de métrique $Q_{n+2}$ avec signature $(p+1, q+1)$ en raison du résultat connu :

*L'algèbre de Clifford $C(Q_{n+2})$, notée $C_{p+1, q+1}$, est isomorphe au produit tensoriel des algèbres $C_{p, q}$, et $C_{1, 1}$ :*

$$C_{p+1, q+1} \simeq C_{p, q} \otimes C_{1, 1}$$

Nous en donnons une démonstration rapide :

Identifions $E_n$ à un sous-espace de son complexifié $E'_n$, muni de sa structure réelle. $\{x_i, y_i\}$ est une base de Witt « réelle » de $E'_n$ et $(x_1, \ldots, x_r, x, y_1, \ldots, y_r, y)$ une base de Witt « réelle de $E'_{n+2}$ ; on a choisi $(x, y)$, base de Witt « réelle » de $E_2$, avec une « métrique » $Q_2$ de signature $(1, 1)$. Les vecteurs réels sont caractérisés par certaines relations entre leurs composantes que nous n'écrirons pas. Soit $(e_\alpha, e_\beta)$ dans l'espace $(x, y)$ avec $Q_2(e_\alpha) = 1$, $Q_2(e_\beta) = -1$, $e_\alpha$, $e_\beta$ réels, $e_\alpha$ orthogonal à $e_\beta$.

Nous associons à $x_k$, $y_k$, $x$, $y$, respectivement $x_k \otimes e_\alpha e_\beta$, $y_k \otimes e_\alpha e_\beta$, $x \otimes e_\alpha e_\beta$, $y \otimes, e_\alpha e_\beta$, ce qui permet de définir (après identifications évidentes) une application linéaire $\psi$ de $E_{n+2}$ dans $C_{p, q} \otimes C_{1, 1}$ muni du produit d'algèbres $Z_2$-graduées :

$$(a_1 \otimes a_2)(b_1 \otimes b_2) = (-1)^{p_2 q_1}(a_1 b_1 \otimes a_2 b_2)$$

$$p_2 = \text{degré de } a_2, \; q_1 = \text{degré de } b_1.$$

On a $(\psi(X))^2 = Q_{n+2}(X)$, donc $\psi$ s'étend à un isomorphisme de $C_{p+1, q+1}$ sur $C_{p,q} \otimes C_{1, 1}$, en raison des dimensions.

*Ainsi l'espace des twisteurs d'ordre 2 construits sur l'espace $E_n$, muni de la métrique $Q_n$ de signature $(p, q)$, est naturellement un espace de spineurs pour l'algèbre* *de Clifford* $C_{p+1,q+1}$ *de l'espace* $E_{n+2}$, *métrique de signature* $p+1, q+1$ (**).

De manière plus générale, en itérant :

P r o p o s i t i o n  6 : *Tout twisteur d'ordre* $2\,l$ *construit sur* $E_{2r}$ *avec métrique de signature* $(p, q)$ *est un spineur pour* $E_{2(r+l)}$ *avec métrique de signature* $(p+l, q+l)$.

*En particulier :*

*Les spineurs construits sur l'espace de Minkowski sont des twisteurs d'ordre 2 construits sur* $R^2$ *muni d'une forme quadratique définie négative, (avec nos conventions).*

### 4°) Le rôle du groupe conforme.

P r o p o s i t i o n  7 : *Le groupe conforme de* $E_n$, *muni d'une « métrique » de signature* $(p, q)$ *est isomorphe localement au groupe de isométries de* $E_{n+2}$, *muni d'une « métrique » de signature* $(p+1, q+1)$ (propriété valable pour toute parité de $n$, $n > 2$).

On peut obtenir l'algèbre de Lie du groupe conforme en considérant les $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ champs de vecteurs, où les notations, sans rapport avec celles qui précèdent sont évidentes :

$$E_{jk} = x_j\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) - x_k\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

$$E_k = \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$

$$E_o = x_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

$$F_k = \frac{1}{2}\, x_j x^j \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) - x_k x^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \quad \text{(cf. [1 bis] et [4 bis]).}$$

Des calculs, sans difficulté autre que leur longueur, montrent que :

$$[E_{sr}, E_{jk}] = E_{sk}\, g_{jr} + E_{rj}\, g_{sk} + E_{kr}\, g_{js} + E_{js}\, g_{kr} \quad \text{(table de l'algèbre de Lie des isométries de } E_n\text{).}$$

$$[E_l, F_k] = g_{lk}\, E_o + E_{lk}$$

(**) On peut trouver une représentation de $C_{p+1,q+1}$ dans $C(Q')f \oplus C(Q')f'$ des twisteurs d'ordre 2, de manière que $C(Q')f$ et $C(Q')f'$ soient les semi-spineurs pairs et impairs, respectivement, pour $C_{p+1,q+1}$.

$$[E_k, E_l] = [F_l, F_k] = 0$$
$$[E_k, E_o] = E_k$$
$$[F_k, E_o] = -F_k$$
$$[E_{jk}, E_l] = -g_{lj} E_k + g_{lk} E_j$$
$$[E_{jk}, E_o] = 0$$
$$[E_{jk}, F_*] = F_j g_{k*} - F_k g_{j*}.$$

On introduit un espace de dimension 2, $E_2$, sur R et $E_n \oplus E_2 = E_{n+2}$ muni d'une « métrique » :

$g_{l\alpha} = 0$, $g_{lj}$, $g_{\alpha\beta} = -1$, $g_{\alpha\alpha} = g_{\beta\beta} = 0$, les indices $\alpha$ et $\beta$ sont relatifs à $E_2$, et fixés.

On pose : $E_l = E_{l\alpha}$, $F_k = F_{k\beta}$, $E_o = E_{\alpha\beta}$,

$$E_{l\alpha} = -E_{\alpha l}, \; E_{k\beta} = -E_{\beta k}, \; E_{\alpha\beta} = -E_{\beta\alpha}.$$

On vérifie alors sans difficulté que la table de l'algèbre de Lie du groupe des isométries de $E_n \oplus E_2$ s'identifie à celle du groupe conforme.

La « métrique » de $E_n \oplus E_2$ est de signature $(p+1, q+1)$ si celle de $E_n$ est de signature $(p, q)$.

Tenant compte des propositions 6 et 7 :

Grosso modo, on peut donc dire que *les twisteurs d'ordre 2, sont au groupe conforme de $E_n$, $Q_n(p, q)$, ce que sont les spineurs relativement au groupe des isométries de $E_{n+2}\, Q_{n+2}(p+1, q+1)$*, et ce résultat se transporte, non sans précautions, aux fibrations sur les variétés.

## ADDENDA

Cet article était rédigé quand nous avons pris connaissance d'un texte de conférence de B. Kostant (Roma, 1973) qui développe la notion de spineurs symplectiques. Sa proposition 3-3-1 peut être facilement obtenue en affinant la démonstration de notre proposition 4, 6°, 1.ere partie. La proposition de B. Kostant revient à dire avec nos notations :

Si le fibré complexe de rang 1, défini par le cocycle $g_{\alpha\beta}$ est le carré tensoriel d'un fibré complexe de rang 1 la variété presque complexe V admet une Spin Q-structure et réciproquement.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] Atiyah, Bott et Shapiro, Clifford Modules-Topology, Vol. 3, Suppl. 1, 1964, p. 3-38.
[1 bis] Ch. Barbance, Thèse, Paris (1969).
[2] C. Chevalley, The algebraic theory of spinors, Columbia University Press, New-York, 1954.
[3] A. Crumeyrolle, *a*) Structures spinorielles, Ann. Inst. Poincaré, vol. XI, n. 1, 1969, p. 19-55.
*b*) Groupes de spinorialité, Ibid, vol. XIV, n. 4, 1971, p. 309-323.
*c*) Dérivations, formes et opérateurs usuels sur les champs spinoriels de variété différentiables de dimension paire, Ibid, vol. XVI, n. 3, 1972, p. 171-201.
[4] Y. Choquet-Bruhat, Géométrie différentielle et systèmes extérieurs, Dunod-Paris.
[4 bis] Hermann, Vector Bundles in math. Phys., Benjamin, Volume 1.
[5] Y. Kosmann, Dérivée de Lie des Spineurs, Thèse Paris 1970, Annali di Matematica pura ed applicata, 1972, IV, Vol. XCI, pp. 317-395.
[6] A. Lichnerowicz, *a*) Bulletin de la Société Mathématique de France, T. 92, 1964, Fasc. 1.
*b*) Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, Cremonese, Rome 1955.
[7] R. Palais, Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, Princeton, U.P. 1965, Chapitre IV, Differential operators on vector bundles.
[8] R. Penrose, Journal of mathematical physics, Vol. 8 n° 2, 1967.
[9] Steenrod, The topology of fibre bundles, Princeton U.P., 1951.