PIETRO BENVENUTI (1), LEONIDA EUGENIO KRIVOSHEIN (2),
DEMETRIO MANGERON (3), (4), MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELI (5), (6)
e FRANCESCO SAVERIO ROSSI (7)

Analisi matematica

Sistemi differenziali con struttura composita. Nuovo problema dei valori integro-differenziali non lineari al contorno concernente una classe di equazioni integro-differenziali non lineari alle derivate parziali (*)

Dedichiamo questo lavoro col devoto omaggio all'Illustre Accademico Linceo MAURO PICONE, *geniale creatore e promotore della ricerca polivalente, nella soglia del Suo 90° compleanno*

Riassunto: I potentissimi metodi escogitati più di sessant'anni fa dall'Illustre Accademico Mauro Picone nell'ambito dei problemi dei valori al contorno per le equazioni ellittiche e paraboliche hanno costituito e ne costituiscono tutt'ora un'indelebile sorgente di pregevolissime idee applicate con successo dagli AA. in tutt'una serie dei loro studi concernenti sistemi differenziali con struttura composita.

In ciò che segue gli AA., incoraggiati dal fatto che svariati fenomeni fisici, biologici ecc. risultano modellati oggigiorno dagli autori stessi e da altri numerosi scienziati dai sistemi differenziali con struttura composita ed anzitutto dai sistemi integro-differenziali non lineari, espongono lo studio di un nuovo problema dei valori integro-differenziali non lineari al contorno per una classe di equazioni integro-differenziali non li-

---

(1) Istituto di Matematica dell'Università di Perugia.

(2) Kirgizian State University, Frunze, KirgSSR, U.R.S.S.

(3) Polytechnic Institute of Jassy, Socialist Republic of Romania. *In presente*: Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

(4) The author wishes to express his sincere thanks to the University of Alberta and to Sir George Williams University of Montreal for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the departments of Mathematics and of Computer Science of these universities.

(5) Department of Mathematics, University of Alberta.

(6) The research reported in this paper was supported in part by the National Research Council of Canada NRC-A4345 through the University of Alberta.

(7) Ministero di Pubblica Istruzione, Roma.

(*) Presentata dall'Accademico M. PICONE il 16-8-1974.

neari alle derivate parziali del primo ordine e ne dimostrano, nell'ambito di certe ipotesi, i teoremi di esistenza, di unicità, di costruzione effettiva delle soluzioni approssimanti e di valutazione dell'errore commesso. In seguito dell'utilizzazione dei metodi adatti si stabiliscono infine i teoremi di cui sotto corrispondenti ai casi in cui il problema considerato è parzialmente oppure totalmente linearizzato rispetto alla funzione incognita. La stabilità rispetto a certe perturbazioni dei coefficienti è pure studiata.

Summary: The powerful method of solution due to M. Picone given almost sixty years ago in some lincean Notes devoted to the *Theory of Second Order Linear Partial Differential Equations of the Elliptic-Parabolic Type* is a continuous source of inspiration to the authors. In the present work a new nonlinear integrodifferential boundary value problem for a class of nonlinear first order integro-partial differential equations is considered. The existence and uniqueness of the solutions are discussed, approximate solutions and associated error analysis are presented. The effects of partial and total linearizations are analysed. A stability problems is discussed.

1. — I potentissimi metodi d'investigazione scientifica escogitati più di sessant'anni fa dall'Illustre Accademico Linceo Mauro Picone nell'ambito dei problemi dei valori al contorno per le equazioni ellittiche-paraboliche [1] hanno costituito e ne costituiscono tutt'ora un'indelebile sorgente di pregevolissime idee applicate con successo dagli AA. in tutt'una serie di loro studi concernenti sistemi differenziali con struttura composita [2].

In ciò che segue gli AA., incoraggiati dal fatto che svariati fenomeni fisici, biologici ecc. risultano modellati oggigiorno dagli AA. stessi come pure da altri numerosi scienziati dai sistemi differenziali di struttura composita vieppiù complicati [3] (*), espongono lo studio di un nuovo problema non lineare dei valori integro-differenziali al contorno concernente una classe di equazioni integro-differenziali non lineari alle derivate parziali del primo ordine e ne dimostrano nell'ambito di certe ipotesi i teoremi di esistenza, di unicità, di costruzione effettiva delle so-

---

(*) Vedansi, ad esempio, gli studi — tra i più recenti — degli AA. concernenti certe attività elettriche nelle reti neuronali [4], lo studio di F. Burkhart concernente la modellazione matematica del problema di interazione tra un cospicuo numero di cellule neuronali [5], la Nota di N. A. Britov sul modello matematico del campo termico in un cilindro finito provvisto dalle sorgenti caloriche [6], la Memoria di C. V. Pao riferentesi allo studio dell'equazione di trasporto non lineare dipendente dal tempo e di parecchie velocità [7], la Nota di M. L. Thiebaux sull'equazione integro-differenziale della diffusione nei campi non uniformi delle velocità aleatorie [8], lo studio di A. N. Chekalin e V. A. Shevchenko concernente un problema di filtrazione di un fluido bifasico [9], la ricerca di R. W. Dickey riferentesi alla stabilità dinamica dello stato di equilibrio di una trave estensibile [10], l'importante serie di lavori dovuti a R. Bellman e la sua Scuola nell'ambito della dosimetria delle radiazioni [11], la Nota di F. B. Hanson, A. Klimas, G. V. Ramanathan e G. Sandri sul modello matematico del trasporto delle particolari cariche in un campo magnetico del plasma turbolente [12] ed altri ancora, [13], tutti quanti scelti appositamente all'uopo di illustrare l'*importanza odierna vieppiù crescente dei modelli matematici cristallizzati nei sistemi integro-differenziali*.

In un'altra serie di nostre note dedicate ad alcuni nuovi problemi concernenti sistemi differenziali con struttura composita portanti tra l'altro sugli *operatori policibranti*, chiamati assai spesso dagli AA. «derivate totali» nel senso di Picone [14], indicheremo pure l'apporto corrispondente dovuto oggidì nel campo delle applicazioni ad altri scienziati [15].

luzioni approssimanti e di valutazione degli errori commessi. In seguito all'utilizzazione dei metodi adatti si stabiliscono in fine i teoremi di cui sopra corrispondenti ai casi in cui il problema considerato è parzialmente o totalmente linearizzato rispetto alla funzione incognita.

2. — Si consideri il seguente nuovo problema non lineare dei valori integro-differenziali al contorno

$$u'_x(x, \alpha) = \varphi\left[x, u(x, \alpha), \int_a^x M(x, \xi, u(\xi, \alpha))\, d\xi\right] \tag{1}$$

e

$$u(a, \alpha) = u_0 \tag{2}$$

concernente l'equazione integro-differenziale non lineare alle derivate parziali

$$u'_t(x, t) =$$

$$f\left[x, t, u(x, \alpha), u(x, t), \int_a^{r[x, u(x, \alpha)]} K(x, t, \xi, u(\xi, \alpha), u(\xi, t))\, d\xi\right] = G[x, t, u(x, t)]\,, \tag{3}$$

il cui studio presenta in virtù dell'argomentazione (*) di cui sopra un notevole interesse, ove u_0 è un numero noto, le funzioni $\varphi(x, v_1, v_2), M(x, \xi, v_3), f(x, t, v_1, v_4, v_5), K(x, t, \xi, v_6, v_7), r(x, v_1)$ sono definite, continue rispetto ai suoi argomenti ed in più lipschitziane nel dominio

$$D = \{a \leqslant x, \xi, r(x, v_1) \leqslant b, \alpha \leqslant t \leqslant \gamma, 0 \leqslant |v_i| \leqslant r_i = \text{const}, i = \overline{1,7}\}$$

in rapporto alle variabili v_i $(i = \overline{1,7} <)$. Siano $L_{i\varphi}(x)$ $(i = 1,2)$, $L_M(x, \xi)$, $L_{if}(x, t)$ $(i = 1, 2, 3)$, $L_{ik}(x, t, \xi)$ $(i = 1, 2)$, $L_r(x)$, nel D, i coefficienti continui e non negativi di Lipschitz corrispondenti e si supponga inoltre che la funzione $f(x, t, v_1, v_4, v_5)$ possiede, nel D, per $t = \alpha$, le derivate $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial v_i$ $(i = 1, 2, 3)$ continue.

Stabiliamo anzitutto condizioni di esistenza della funzione iniziale $u(x, \alpha) \equiv y(x)$. Tenendo conto del fatto che il problema (1), (2) si trasforma nell'equazione integrale equivalente

$$y(x) = u_0 + \int_a^x \varphi\left[\eta, y(\eta), \int_a^\eta M(\eta, \xi, y(\xi))\, d\xi\right] d\eta \equiv A[y] \tag{4}$$

e costatando che l'operatore non lineare $A[\cdot]$ conduce all'ineguaglianza

$$\| A[\overline{y}_2] - A[\overline{y}_1] \| \leqslant$$

$$\left\| \int_a^x \left[L_{1\varphi}(\eta) + L_{2\varphi}(\eta) \int_a^\eta L_M(\eta, \xi)\, d \right] d\eta \right\| \cdot \| \overline{y}_2 - \overline{y}_1 \| = k_1 \| \overline{y}_2 - \overline{y}_1 \|\,, \tag{5}$$

non appena si scelgono due funzioni arbitrarie $\bar{y}_1(x)$ e $\bar{y}_2(x)$ continue nel dominio D e si prende per la definizione di norma la seguente

$$\| \cdot \| = \max_D | \cdot | ,$$

si perviene al seguente

TEOREMA 1. — *L'ineguaglianza* $k_1 < 1$ *è sufficiente affinché sia soddisfatto per l'operatore monlineare* $A[\cdot]$ *il principio di Banach della condensazione delle rappresentazioni e pertanto, nelle ipotesi di cui sopra, esiste una soluzione iniziale ed una sola* $u(x, \alpha) = y(x)$, *continuamente differenziabile rispetto alla variabile* x *nel dominio* D *e tale funzione* $y(x)$ *può essere effettivamente costruita tramite l'applicazione del metodo delle approssimazioni successive*

$$y_n(x) = A[y_{n-1}] , n = 1, 2, \dots , \tag{6}$$

essendovi l'errore commesso, se ci si ferma all'n-mo passo, espresso dall'ineguaglianza

$$\| y_n(x) - y(x) \| \leqslant k_1^n \| y_0(x) - A[y_0] \| : (1 - k_1) \equiv R_n^1 . \tag{7}$$

Passiamo ora ad esaminare, nell'ipotesi che una tale funzione iniziale $y(x)$ era già stata costruita, il problema della risolubilità del sistema integro-differenziale non lineare (3) e

$$u(x, \alpha) = y(x) . \tag{8}$$

Poiché il detto sistema si riduce all'equazione integro-differenziale equivalente

$$u(x, t) = y(x) + \int_\alpha^t G[x, \theta, u(x, \theta)] \, d\theta \equiv B[u] , \tag{9}$$

proponiamoci di studiare il comportamento dell'operatore non lineare $B[\cdot]$. Tenendo conto della validità dell'ineguaglianza

$$\| B[\bar{u}_2] - B[\bar{u}_1] \| \leqslant$$

$$\| \int_\alpha [L_{2t}(x, \theta) + L_{3t}(x, \theta) \int_a^{r[x, y(x)]} L_k(x, \theta, \xi) \, d\xi] \, d\theta \| \cdot \| \bar{u}_2 - \bar{u}_1 \| \equiv k_2 \| \bar{u}_2 - \bar{u}_1 \| , \tag{10}$$

ove $\bar{u}_1(x, t)$ e $\bar{u}_2(x, t)$ sono due funzioni continue qualsivoglia appartenenti al dominio D, se ne deduce, attenendosi sempre al principio del punto fisso di Banach, oramai di classica applicazione, il seguente

TEOREMA 2. — *L'equazione integrale non lineare* (9) *possiede, nel dominio* D, *per* $k_2 < 1$, *una soluzione ed una sola continua e continuamente differenziabile rispetto alla variabile* t *e tale soluzione può essere costruita effettivamente tramite la successione ricorrente*

$$u_m(x, t) = B[u_{m-1}] , m = 1, 2, \dots , \tag{11}$$

essendovi pure

$$\lim_{m \to \infty} u_m(x, t) = u(x, t), \forall (x, t) \in D$$

e

$$\| u_m(x, t) - u(x, t) \| \leq k_2^m \| u_0(x, t) - B[u_0] \| : (1 - k_2) \equiv R_m^2, \tag{12}$$

mentre l'errore commesso se ci si ferma alla m — *ma funzione approssimante* $u_m(x, t)$ *rimane inferiore ad un numero positivo* ε *dinnanzi fissato non appena si abbia*

$$m > \ln[\varepsilon(1 - k_2) : \| u_0(x, t) - B[u_0] \| : \ln k_2 .$$

3. — Si consideri adesso il caso in cui l'esistenza della soluzione esatta del problema (1), (2) è stata assicurata ma non si è pervenuto alla determinazione di essa. Sia $y(x)$ l'n — ma funzione approssimante la soluzione esatta $y(x)$. Il problema integro-differenziale non lineare

$$w(x, \alpha) = y_n(x), \tag{13}$$

$$w_t'(x, t) = f\left[x, t, y_n(x), w(x, t), \int_a^{r[x, y_m(x)]} K(x, t, \xi, y_n(\xi), w(\xi, t))\, d\xi\right] \equiv S[x, t, w] \tag{14}$$

ci conduce allo studio dell'equazione integrale non lineare equivalente

$$w(x, t) = y_n(x) + \int_\alpha^t S[x, \theta, w(x, \theta)]\, d\theta \equiv H[w]. \tag{15}$$

Donde il seguente

TEOREMA 3. — *L'equazione integrale non lineare* (15) *possiede nel dominio D una soluzione ed un sola continua e continuamente differenziabile non appena è soddisfatta l'ineguaglianza*

$$k_3 = \left\| \int_\alpha^t [L_{2f}(x, \tau) + L_{3f}(x, \tau) \int_a^{r[x, y_n(x)]} L_k(x, \tau, \xi)\, d\xi]\, d\tau \right\| < 1,$$

mentre l'ordine di grandezza della vicinanza tra le funzioni $u(x, t)$ *e* $w(x, t)\ \forall (x, t) \in D$ *si esprime mediante le ineguaglianze*

$$\| u(x, t) - w(x, t) \| =$$

$$\Big\| \int_\alpha^t \{ f[x, \tau, y(x), u(x, \tau), \int_a^{r[x, y(x)]} K(x, \tau, \xi, y(\xi), u(\xi, \tau))\, d\xi] -$$

$$f[x, \tau, y_n(x), w(x, \tau), \int_a^{r[x, y_n(x)]} K(x, \tau, \xi, y_n(\xi), w(\xi, \tau))\, d\xi] \}\, d\tau \Big\| \leq$$

$$(16)\quad \left\| \int_{\alpha}^{t} \{ L_{1t}(x,\tau) \, | \, y(\tau) - y_n(\tau) \, | + L_{2t} \, | \, u(x,\tau) - w(x,\tau) \, | + L_{3t}(x,\tau) \times \right.$$

$$\left| \int_{a}^{r[x,y(x)]} K(x,\tau,\xi,y(\xi),u(\xi,\tau)) \, d\xi - \int_{a}^{r[x,y_n(x)]} K(x,\tau,\xi,y_n(\xi),w(\xi,\tau)) \, d\xi \, | \} \, d\tau \right\| \leqslant$$

$$\left\| \int_{\alpha}^{t} [L_{1t}(x,\tau) + L_{3t}(x,\tau) \, L_r(x) \| K(x,\tau,\xi,v_1,v_4) \|] \, d\tau \right\| \cdot \| y(x) - y_n(x) \| +$$

$$\left\| \int_{\alpha}^{t} [L_{2t}(x,\tau) + L_{3t}(x,\tau) \int_{a}^{r[x,y_n(x)]} L_k(x,\tau,\xi) \, d\xi] \, d\tau \right\| \cdot \| u(x,t) - w(x,t) \| =$$

$$1 \cdot \| y(x) - y_n(x) \| + k_3 \| u(x,t) - w(x,t) \| ,$$

d'onde risulta

$$(17)\quad \| u(x,t) - w(x,t) \| \leqslant l \| y(x) - y_n(x) \| : (1 - k_3) \leqslant l \, R_n^1 : (1 - k_3) = R_n^2 .$$

4\. — Nell'ipotesi in cui si è accertata l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema integro-differenziale non lineare (13), (14), ma tale soluzione è rimasta sconosciuta, si costruiscono, avendo sempre in vista l'ineguaglianza $k_3 < 1$, le soluzioni approssimanti la soluzione del detto problema tramite la successione ricorrente

$$(18)\qquad w_k(x,t) = H[w_{k-1}] , \; k = 1, 2, \ldots$$

e pertanto, in corrispondenza al k — mo passo, la valutazione della norma $\| w(x,t) - w_k(x,t) \|$ è data dall'ineguaglianza

$$\| w(x,t) - w_k(x,t) \| \leqslant$$

$$(19)\quad k_3^k \| w(x,t) - w_0(x,t) \| \leqslant k_3^k \| w_0(x,t) - H[w_0] \| : (1 - k_3) = R_k^3 ,$$

mentre di quest'altra $\| w_k(x,t) - u(x,t) \|$, ove $w_k(x,t)$ è la k — ma soluzione approssimante del problema (3), (13), è data dall'ineguaglianza

$$\| w_k(x,t) - u(x,t) \| \leqslant$$

$$(20)\quad \| u(x,t) - w(x,t) \| + \| w(x,t) - w_k(x,t) \| \leqslant R_n^2 + R_k^3 \xrightarrow[n,k \to \infty]{} 0 .$$

Osservazioni. — 1°. Si può eseguire la determinazione con approssimazione della funzione iniziale $u(x,\alpha) = y(x)$ facendone uso di tutt'altri metodi che quello di cui sopra. Ad esempio, si può all'uopo seguire il metodo di quasi-linearizzazione di R. Bellman [16], secondo cui le funzioni approssimanti la funzione $y(x)$ si costruiscono tramite le formule

$$(21)\qquad y_n(x) = A[y_{n-1}] + \int_{a}^{x} R(x,\eta) \, [y_n(\eta) - y_{n-1}(\eta)] \, d\eta ,$$

ove $R(x, \eta)$ è una funzione continua e definita nel dominio D avente ivi per funzione risolvente $T(x, \eta)$ che si suppone ad essere nota. Introducendo per brevità le notazioni

$$\delta_n(x) \equiv y(x) - y_{n-1}(x), \varepsilon_k(x) \equiv A[y_k] - y_k(x),$$

dalle (21) si deduce

$$\delta_n(x) = \varepsilon_{n-1}(x) + \int_a^x T(x, \eta)\, \varepsilon_{n-1}(\eta)\, d\eta$$

e si perviene pertanto alla valutazione della norma $\| \delta_n(x) \|$:

$$\| \delta_n(x) \| \leqslant [1 + \| \int_a^x T(x, \eta) \mid d\eta \|] \cdot \| \varepsilon_{n-1}(x) \| \leqslant$$

$$[1 + \| \int_a^x \mid T(x, \eta) \mid d\eta \|] \cdot \| \int_a^x [L_{1\varphi}(\eta) + L_{2\varphi}(\eta) \int_a^\eta L_{3\xi}(\eta, \xi)\, d\xi]\, d\eta \| \times \tag{22}$$

$$\| \delta_{n-1}(x) \| \equiv k_4 \| \delta_{n-1}(x) \| \leqslant k_4^{n-1} \| \delta_1(x) \| .$$

Donde il seguente

Teorema 4. — *Il processo di quasi-linearizzazione di Bellman* (21) *converge assolutamente e uniformemente nel caso del problema or ora considerato verso la funzione* $y(x)$ *non appena è soddisfatta l'ineguaglianza* $k_4 < 1$.

2°. Nel caso in cui l'equazione (1) è lineare rispetto alla funzione iniziale $u(x, \alpha) \equiv y(x)$, si abbia cioè

$$y'(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)\, y(x) + \int_a^x N(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi , \tag{23}$$

ove $\varphi_i(x)\ (i = 1, 2)$ e $N(x, \xi)$ sono funzioni note e continue nel D e si consideri inoltre

$$y(a) = u_0 , \tag{24}$$

l'applicazione del metodo della variazione delle costanti arbitrarie trasforma il sistema (23), (24) nell'equazione integrale lineare equivalente

$$y(x) = \varphi_3(x) + \int_a^x M_2(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi , \tag{25}$$

essendovi $\varphi_3(x)$ e $M_2(x, \xi)$ funzioni definite e continue nel D. Donde il seguente

Teorema 5. — *Nelle ipotesi di cui sopra l'equazione integrale lineare* (25) *possiede una soluzione ed una sola continua e continuamente differenziabile* $u(x, \alpha) \equiv y(x), x \in [a, b]$.

3°. Se la funzione iniziale $u(x, \alpha) \equiv y(x)$ risulta ad essere soluzione dell'equazione (23) avente tutte le funzioni note continue e la condizione iniziale prende la forma $y(c) = u_0$, $a < c$, sono possibili i seguenti casi:

a) la determinazione della funzione $y(x)$ è univoca;

b) non esiste alcuna funzione $y(x)$ nella classe funzionale $C^1[a, b]$;

c) la determinazione della funzione $y(x)$ non è più univoca nella classe di funzioni $C^1[a, b]$.

4°. Supponiamo ora che l'equazione integro-differenziale (3) è lineare rispetto alla funzione ricercata $u(x, t)$ essendovi tutte le altre funzioni note e continue nel *D*. Sia cioè

$$u'_t(x, t) = f_1(x, t) + f_2(x, t)\, y(x) + f_3(x, t)\, u(x, t) + \tag{26}$$
$$\int_a^{r[x, y(x)]} [K_1(x, t, \xi)\, y(\xi) + K_2(x, t, \xi)\, u(\xi, t)]\, d\xi$$

tale equazione. Supponendo inoltre che la funzione iniziale $y(x)$ è una funzione liscia $\forall\, x \in [a, b]$, l'applicazione del metodo della variazione dei parametri riduce il problema (8), (26) allo studio dell'equazione integrale lineare

$$u(x, t) = F(x, t) + \int_\alpha^t \int_a^{V(x)} K_3(x, t, \xi, \tau)\, u(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau \equiv T^*[u], \tag{27}$$

ove si è posto $V(x) \equiv r[x, y(x)]$ ed ove inoltre $F(x, t)$ e $K_3(x, t, \xi, \tau)$ sono funzioni note continue e liscie nel dominio *D* considerato. Poiché l'equazione (27) è sempre risolubile nella classe delle funzioni $C[a, b] \times [\alpha, \gamma)$, si conclude, ove si tenga conto del fatto che le funzioni F e K_3 sono liscie rispetto alle variabili x e t, che *il problema* (8), (26) *possiede sempre una soluzione ed una sola nella classe* $C[a, b] \times [\alpha, \gamma]$ *e soluzioni approssimanti spettanti all'equazione* (27) *possono essere costruite tramite l'applicazione del metodo delle approssimazioni successive*

$$u_n(x, t) = T^*[u_{n-1}],\ n = 1, 2, \ldots,$$

oppure mediante l'uso del metodo dei funzionali additivi

$$u_n(x, t) = T^*[u_{n-1} + \beta_n],\ n = 1, 2, \ldots$$

ed altri ancora. In particolare, i funzionali β_n possono essere determinati in seguito all'applicazione del metodo di Yu. D. Sokolov, del metodo di collocazione ecc.

5°. — Il presente lavoro si riconnette alle nostre Note [17], [2] e [18] e ne costituisce in un certo qual senso una notevole estensione dei risultati colà stabiliti.

4\. — Si consideri ora il caso in cui la funzione $M(x, \xi, v_3)$ è sottoposta, nel dominio *D*, a certe perturbazioni, tali che si abbia

$$| M(x, \xi, v_3) - M_1(x, \xi, \overline{v}_3) | \leq \sigma(x, \xi) + g(x, \xi) | v_3 - \overline{v}_3 | ,$$

ove σ e g sono funzioni definite e continue. L'equazione (1) diventa adesso

$$z'(x) = \varphi[x, z(x), \int_a^x M_1(x, \xi, z(\xi))\, d\xi] \tag{28}$$

si ha inoltre

$$z(a) = u_0 , \tag{29}$$

ove si è posto $z(x) \equiv \overline{w}(x, \alpha)$, mentre l'equazione (3) prende la forma

$$\overline{w}'(x,t) = f[x, t, z(x), \overline{w}(x,t), \int_a^{r[x, z(x)]} K(x, t, \xi, z(\xi), \overline{w}(\xi, t))\, d\xi], \overline{w}(x, \alpha) = z(x). \tag{30}$$

Valutiamo le differenze $y(x) - z(x)$ e $u(x, t) - \overline{w}(x, t)$.
Poiché

$$z(x) = u_0 + \int_a^x \varphi[\eta, z(\eta), \int_a^\eta M_1(\eta, \xi, z(\xi))\, d\xi]\, d\eta ,$$

risulta

$$\| z(x) - y(x) \| \leq \| \int_a^x L_{2\varphi}(\eta) \int_a^\eta \sigma(\eta, \xi)\, d\xi\, d\eta \| : l_1 \equiv \lambda ,$$

ove si è posto

$$l_1 = 1 - \| \int_a^x [L_{1\varphi}(\eta) + L_{2\varphi}(\eta) \cdot \int_a^\eta g(\eta, \xi)\, d\xi]\, d\eta \| > 0 .$$

Si ha poi

$$\| u(x, t) - \overline{w}(x, t) \| \leq \| y(x) - z(x) \| + \| \int_\alpha^t \{ L_{1f}(x, \tau) | y(x) - z(x) | +$$

$$L_{2f}(x, \tau) | u(x, \tau) - \overline{w}(x, \tau) | + L_{3f}(x, \tau) [\int_a^{r[x, z(x)]} \{ L_{1k}(x, \tau, \xi) | y(\xi) - z(\xi) | +$$

$$L_{2k}(x, \tau, \xi) | u(\xi, \tau) - \overline{w}(\xi, \tau) | \}\, d\xi + L_r(x) | y(x) - z(x) | \cdot \| K(x, \tau, \xi, y(\xi),$$

$$u(\xi, t)) \| \}\, d\tau \| \leq [1 + \| \int_\alpha^t \{ L_{1f}(x, \tau) + L_{3f}(x, \tau) \int_a^{r[x, z(x)]} L_{1k}(x, \tau, \xi)\, d\xi +$$

$$L_r(x) \| K(x, \tau, \xi, y(\xi), u(\xi, \tau)) \| \}\, d\tau \cdot \| y(x) - z(x) \| +$$

$$\left\| \int_x^t \left\{ L_{2t}(x, t) + L_{3t}(x, \tau) \int_a^{r[x, z(x)]} L_{2k}(x, \tau, \xi)\, d\xi \right\} d\tau \right\| \cdot \| u(x, t) - \overline{w}(x, t) \| \equiv$$

$$m_1 \| y(x) - z(x) \| + m_2 \| u(x, t) - \overline{w}(x, t) \|$$

e pertanto, nell'ipotesi della validità dell'ineguaglianza $m_2 < 1$, si ha

$$\| u(x, t) - \overline{w}(x, t) \| \leqslant m_1 \lambda : (1 - m_2). \tag{31}$$

In uno dei nostri lavori da inserirsi nel *Bollettino dell'Istituto Politecnico di Iasi* saranno esposti oltre alla serie di dettagli algoritmici alcune estensioni dei problemi recentemente esposti nelle nostre Note dedicate all'Illustre Accademico Linceo Mauro Picone ed additati i campi odierni di applicazioni [19], [20].

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Picone, *Some forgotten almost sixty years old Lincean Notes on the Theory of Second Order Linear Partial Differential Equations of the Elliptic-Parabolic Type*. Accademia Nazionale dei Lincei, Rend., Cl. Sci fis., mat e nat., (8), 1968.

[2] L. E. Krivochéine, D. J. Mangeron, T. Musuraliev, M. N. Oguztoreli, *Systèmes différentiels possédant la structure complexe. Problèmes non linéaires de valeurs initiales concernant une classe d'équations intégrodifférentielles non linéaires aux dérivées partielles*. C.r. Acad. Sci., Paris (in stampa).

[3] K. V. Leung, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, R. B. Stein, *On the stability of the steady-state solutions of two neural models*. Bull. Polytech. Inst. Jassy, XX (XXIV), 1-2, 1974, 79-90.

[4] K. V. Leung, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, R. B. Stein, *Analysis of neuronal models in the time and frequency domains* (in stampa).

[5] F. Burkhart, *A neuron field theory: mathematical approaches to the problem of large numbers on interacting nerve cells*. Bull. Math. Biol., 1973, 35, N. 3, 345-357.

[6] N. A. Britov, *Ob odnoi modeli temperaturnogo polia v konechnom tsilindre s raspredelennymi stokami tepla*. Mat. fizika. Resp. mezhved. sb., 1974, vyp. 15, 21-25.

[7] C. V. Pao, *On nonlinear time dependent multivelocity transport equation*. J. Math. Anal. and Appl., 1973, 44, N. 3, 725-744.

[8] M. L. Thiébaux, *Integrodifferential equations for passive scalar diffusion in nonuniform random velocity fields*. Phys. Fluids, 1973, 16, N. 9, 1935-1402.

[9] A. N. Chekalin, V. A. Shevchenko, *Reshenie odnoi zadachi filtratsii dvukhfaznoi zhidkosti*. Nel volume «Chislennye metody i programmirovanie», Kazan, Kazan. un-t, 1973, 17-25.

[10] R. W. Dickey, *Dynamic stability of equilibrium states of the extensible beam*. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, 41, N. 1, 94-102.

[11] R. Bellman, S. Ueno, R. Vasudevan, *Invariant imbedding and radiation dosimetry*. VII. *Finite order scattering and transmission functions of the two radiation approximations in a target slab*. Math. Biosci., 1973, 18, N. 3-4, 255-268.

[12] F. B. Hanson, A. Klimas, G. V. Ramanathan, G. Sandri, *Analysis of a model for transport of charged particles in a random magnetic field* J. Math. Anal. and Appl., 1973, 44, N. 3, 786-798.

[13] D. Fischer, W. Oberndorfer, *Die Stabilität von Stahlbetonstützen* Österr. Ing.-Z., 1974, 17, N. 1, 9-19.

[14] a) D. Mangeron, L. E. Krivoshein, *Problemi concernenti varie equazioni integrodifferenziali non lineari con derivate totali di Picone*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 33, 226-266, 1963; 34, 344-368, 1964; 35, 341-364, 1965;
b) D. J. Mangeron, M. N. Oguztoreli, F. S. Rossi, *Solutions polynomia.es d'une classe d'équations polyvibrantes*. Bull. Cl. Sci. Acad. roy. Belg., (5), LVIII, 1973-8, 991-995.

[15] Kawahara Takuji, *The derivative-expansion method and nonlinear dispersive waves*. J. Phys. Soc. Japan, 1973, 35, N. 5, 1537-1544.

[16] R. Bellman, *An approximate procedure in Control Theory based on Quasilinearization*. Bull Polytechn. Inst. Jassy, X (XIV), fasc. 3-4, 5-10, 1964.

[17] L. E. Krivochèine, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, G. Stroe, *Systèmes mathématiques possédant la structure complexe*. II. *Problèmes généralisés de valeurs initiales pour une classe d'équations intégrodifférentielles aux dérivées partielles du premier ordre* (in stampa).

[18] L. E. Krivochèine, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, G. Silas, *Etudes des systèmes mathématiques aux opérateurs non linéaires*. I. *Problème généralisé de valeurs initiales pour une nouvelle classe d'équations intégrodifférentielles aux opérateurs non linéaires et aux dérivées partielles du premier ordre*. Bull. Cl. Sci. Acad. roy. Belg., (5) LX, 1974, 387-395.

[19] M. Picone, *Presentazione di pubblicazioni riguardanti l'attività dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, dal 1927, anno della sua fondazione, al 1960, in cui fu sottratto alla direzione del suo ideatore*. Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat., (8), XLIV, fasc. 4, 1968.

[20] P. Benvenuti, L. E. Krivoshein, D. Mangeron, M. N. Oguztoreli, *Sistemi differenziali con struttura composita. Problemi non lineari di valori integrodifferenziali al contorno concernenti una classe di equazioni integrodifferenziali con operatori parabolici* (in stampa).