AUREL BEJANCU *)

P—Variétés (**)

Résumé On généralise la méthode d'Elie Cartan à une classe de variétés modelées par des espaces de Banach. Ces variétés généralisent les groupes de Lie-Banach, les P-quasi-groupes et les pseudo-groupes de Lie qui opèrent simplement transitif sur une variété de dimension finie.

Introduction

La théorie des groupes de Lie-Banach a été généralisée dans diverses directions, parmi les quelles nous citons : les groupes topologiques, les pseudo-groupes de Lie infinis et les groupes de Lie-Banach. Nous avons élargi la méthode d'Elie Cartan aux groupes de Lie-Banach ([1], [2], [3]) et nous avons remarqué que l'existence des opérateurs globals (les translations à gauche ou à droite) implique les propriétés essentielles des groupes de Lie-Banach.

Dans cet article, nous allons introduire une classe de variétés modellées par des espaces de Banach, qui généralise les groupes de Lie-Banach, les **P**-quasi-groupes de Lie-Banach (définition 1.3.) et les pseudo-groupes de Lie qui opèrent simplement transitir sur une variété de dimension finie. Les opérateurs globals ont été remplacé ici par des opérateurs locals qui vérifient certaines conditions $((P_1\text{-}P_4)$. Nous avons utilisé dans l'étude des **P**-variétés les formes différentielles à valeurs dans un espace de Banach ([1], [7], [13]).

Le premier paragraphe est dédié à l'étude des propriétés essentielles des **P**-variétés. Dans le deuxième paragraphe, nous obtenons des équations de structure pour une **P**-variété (proposition 2.3. et l'algèbre de Lie-Banach d'une **P**-variété. On introduit une connexion naturelle sur toute **P**-variété et on démontre que chaque **P**-variété est un espace localement symétrique (théoréme 3.1.). La compatibilité d'une métrique riemannienne avec le parallélisme absolu d'une **P**-variété est étudiée dans le quatrième paragraphe. On obtient ici que la courbure sectionèlle d'une **P**-variété para-compacte, modelée par un espace de Hilbert séparable et munie d'une métrique riemannienne compatible avec son parallélisme absolu, est toujours non-négative. Dans le dernier paragraphe on étudie l'algèbre de déformation d'une **P**-variété.

(*) « AL.I.CUZA » Seminarul Matematic, Iasi, R.S. Romania.

(**) Memoria presentata dall'Accademico dei XL Enrico Bompiani il 23-1-1974.

Notations. — Soient **E** et **F** deux espaces de Banach, U un ouvert de **E** et f : U $\longrightarrow$ **F** une application de classe C^k ($k \geqslant 1$) sur U. Par $D f(x_0)$ on désigne la différentielle Fréchet de f en $x_0 \in U$. Si U , V sont deux ouverts de **E** et $f : U \times V \longrightarrow$ **F** est de classe C^k, alors $D^2 f(x_0, y_0)$ est la différentielle Fréchet de f par rapport à deuxième variable en $(x_0, y_0) \in U \times V$. Soit B variété différentiable de classe C^∞.

Nous allons utiliser les notations :

— $\mathcal{X}(B)$ — le module des champs de vecteurs de classe C^∞ sur B,

— C (B ; **E**) — le module des applications de classe C^∞ sur B à valeurs dans **E**.

Pour un fibré vectoriel $\pi : M \longrightarrow B$ on désigne par M_x le fibre type de π sur le point $x \in B$.

§ 1. — P-Variétés. Propriétés essentielles

Soient B une C^∞ — variété modelée par l'espace de Banach **E** et **P** une collection de C^∞ — difféomorphismes définis sur des ouverts de B et à valeurs dans B. Nous désignons par $\alpha(f)$ (resp. $\beta(f)$) l'ensemble de définition (resp. l'esemble des valeurs) pour tout $f \in$ **P**. Soit **a** un point fixé dans B. Pour deux cartes locales $(U, \varphi), (V, \psi)$, dans deux points $x, y \in B$ et pour $f \in$ **P** tel que $x \in \alpha(f)$, $y \in \beta(f)$, nous notons par $f|_U^V$ l'image locale de f dans ces cartes locales

$$f|_U^V : \varphi(\alpha(f) \cap U) \longrightarrow \psi(V \cap f(\alpha(f) \cap U)) ,$$
$$f|_U^V(x) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) \qquad \forall\, x \in \varphi(\alpha(f) \cap U) .$$

Nous supposons maintenant que la paire (B , **P**) vérifie les conditions

P_1. Si $f \in$ **P** et $U \subset \alpha(f)$ est un ouvert dans B, alors $f_{|U} \in$ **P** .

P_2. Pour tout $f, g \in$ **P** tels qu'il existe $f \circ g$, on a $f \circ g \in$ **P** .

P_3. Pour tout $x \in B$, il existe $f_x \in$ **P** tel que $f_x(x) =$ **a** et si $f \in$ **P**, $f(x) =$ **a**, alors $\alpha(f) \subset \alpha(f_x)$ et $f = f_{x\,|\,\alpha(f)}$.

P_4. Pour tout $x \in B$ et toute carte locale (U, φ) (resp. (V, ψ)) en x (resp. en **a**), l'application

$$h : \varphi(U) \longrightarrow G\,L(\mathbf{E}) ,\ h(z) = D\,(f_{\varphi^{-1}(z)}|_U^V)(z) ,$$

est de classe C^∞.

Definition 1.1. — La paire (B , **P**) qui satisfait les conditions P_1-P_4 s'appelle **P**-variété centrée dans le point $\mathbf{a} \in B$.

Proposition 1.1. — Sur chaque groupe de Lie-Banach G il y a deux structures de **P**-variété centrées dans l'élément unité de G.

Démonstration. — Soit π la loi de composition sur G. Dans ce cas **P** est l'esemble de toutes les restrictions des translations à gauche à chaque ouvert de G. Il est clair que les conditions P_1 et P_2 sont vérifiées. Pour tout $x \in G$ nous définissons $f_x = L_{x^{-1}}$ et cet opérateur satisfait à la condition P_3. L'application h est donnée par la formule

$$h(z) = (D^2 \pi|_{U \times U}^{V})(z^{-1}, z) \quad \forall z \in \varphi(U),$$

et il est aisé de voir qu'elle est de classe C^∞. Si nous considérons **P** comme l'esemble de toutes les restrictions des translations à droite à chaque ouvert de G, nous obtenons une autre structure de **P**-variété centrée dans l'élément unité. q.e.d.

Un quasi-groupe est un ensemble G muni d'une loi de composition π telle que les équations

$$\pi(x, a) = b, \qquad \pi(a, x) = b, \tag{1.1}$$

ont des solutions uniques. Si nous désignons par $x = \lambda(b, a)$ et $x = \mu(a, b)$, les solutions des équations (1.1), alors λ et μ sont aussi des lois de composition sur G.

Définition 1.2. — Un quasi-groupe G s'appèle quasi-groupe de Lie-Banach si G est une C^∞-variété modelée par un espace de Banach et les applications π, λ, μ sont de classe C^∞.

Nous allons noter par L_x^π, L_x^λ, L_x^μ les translations à gauche sur G définies par $x \in G$ et par les trois lois de composition π, λ, μ.

Définition 1.3. — Un **P**-quasi-groupe de Lie-Banach est un quasi-groupe de Lie-Banach tel que pour tous $x, y \in G$ il existe $z \in G$ qui vérifie

$$L_x^\pi \circ L_y^\pi = L_z^\pi.$$

Proposition 1.2. — Tout **P**-quasi-groupe de Lie-Banach G est une **P**-variété centrée dans un point fixé de G.

Démonstration. — Soient **a** un point fixé dans G et **P** l'esemble de toutes les restrictions de translations à gauche à chaque ouvert de G, déterminées par la loi de composition π. Il est aisé de voir qu'on a :

$$L_x^\pi \circ L_x^\mu = \mathrm{id}_G \quad ; \quad L_x^\mu \circ L_x^\pi = \mathrm{id}_G \qquad \forall x \in G. \tag{1.2}$$

Donc les éléments de **P** sont C^∞-difféomorphismes. Pour tout $x \in G$ nous considérons $f_x = L_{\lambda(a,x)}^\pi \in \mathbf{P}$ et il est clair que $L_{\lambda(a,x)}^\pi(x) = \mathbf{a}$. L'application h, dans ce cas, est donnée par la formule

$$h(z) = D^2 \pi|_{U \times U}^{V} (\lambda(a, \varphi^{-1}(z)), z), \tag{1.3}$$

et vérifie la condition P_4. q.e.d.

Remarque 1.1. — L'application h définie par la formule (1.3) est trés importante dans l'étude de **P**-quasi-groupes de Lie-Banach, mais elle a une forme très compliquée. Nous allons étudier un **P**-quasi-groupes de Lie-Banach comme une **P**-variété particulière, sans utiliser l'application h.

Pour la notion de pseudo-groupe de Lie infini nous utilisons la définition donnée en [15], et il est aisé de vérifiér que chaque pseudo-groupe de Lie qui opère simplement transitif sur une variété de dimension finie, est une **P**-variété.

Dans la suite, une **P**-variété B centrée en $\mathbf{a} \in B$ sera notée par $(B, \mathbf{P}, \mathbf{a})$.

Proposition 1.3. — Pour tout $(B, \mathbf{P}, \mathbf{a})$ il existe un voisinage V de $\mathbf{a} \in B$ tel que

$$f_{\mathbf{a}|V} = \mathrm{id}_{|V} \,. \tag{1.4}$$

Démonstration. — Pour tout $x \in B$ nous obtenons les relations:

$$(f_{\mathbf{a}} \circ f_x)(x) = f_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} = f_x(x) \,.$$

Mais $f_{\mathbf{a}} \circ f_x \in \mathbf{P}$ et donc la condition $\mathbf{P}_3$ implique

$$f_{\mathbf{a}} \circ f_x = f_x \,. \tag{1.5}$$

Nous considérons $V = \beta(f_x) \cap \alpha(f_{\mathbf{a}})$ et la relation (1.4) résulte de (1.5). q.e.d.

Soient $(B, \mathbf{P}, \mathbf{a})$ et $\mathbf{b} \in B$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{a}$.

Théorème 1.1. — $(B, \mathbf{P}, \mathbf{b})$ est une **P**-variété centrée en **b**, si et seulement si $(f_{\mathbf{b}})^{-1} \in \mathbf{P}$.

Démonstration. — Si $(B, \mathbf{P}, \mathbf{b})$ est une **P**-variété, nous désignons par $\widetilde{f}_x$ l'élément de **P** donné par la condition P_3. Alors on a:

$$(\widetilde{f}_{\mathbf{a}} \circ f_x)(x) = \widetilde{f}_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = \mathbf{b} = \widetilde{f}_x(x).$$

Mais $\widetilde{f}_{\mathbf{a}} \circ f_x \in \mathbf{P}$ et de P_3 il résulte

$$\widetilde{f}_{\mathbf{a}} \circ f_x = \widetilde{f}_x \qquad \forall\, x \in B \,. \tag{1.6}$$

Nous obtenons d'une manière analogue la relation

$$f_{\mathbf{b}} \circ f_x = f_x \qquad \forall\, x \in B \,. \tag{1.7}$$

En tenant compte de (1.6) et (1.7) il s'ensuite que

$$\widetilde{f}_{\mathbf{a}} \circ f_{\mathbf{b}} = \mathrm{id} \quad ; \quad f_{\mathbf{b}} \circ \widetilde{f}_{\mathbf{a}} = \mathrm{id} \,,$$

c'est-à-dire $\widetilde{f}_{\mathbf{a}} = (f_{\mathbf{b}})^{-1}$, donc $(f_{\mathbf{b}}^{-1}) \in \mathbf{P}$.

Réciproquement, si $(f_{\mathbf{b}})^{-1} \in \mathbf{P}$ il est clair que $(B, \mathbf{P}, \mathbf{b})$ vérifie les conditions P_1 et P_2. Nous définissons $\widetilde{f}_x = (f_{\mathbf{b}})^{-1} \circ f_x$. Pour tout $f \in \mathbf{P}$ tel que $f(x) = \mathbf{b}$ on a $|(f_{\mathbf{b}} \circ f)(x) = \mathbf{a}$ et de P_3 pour $(B, \mathbf{P}, \mathbf{a})$ il résulte $f_{\mathbf{b}} \circ f = f_{x|\alpha(f)}$, d'où nous obtenons P_3 pour $(B, \mathbf{P}, \mathbf{b})$. Vue la définition de $\widetilde{f}_x$ la condition P_4 est vérifiée. q.e.d.

§ 2. - Équations de structure pour une P-Variété

Pour toute **P**-variété $(B, \mathbf{P}, \mathbf{a})$ nous définissons

$$\omega : \mathcal{X}(B) \longrightarrow C(B ; T_{\mathbf{a}} B), \quad <\omega ; X>(x) = T_x f_x (X(x)) . \tag{2.1}$$

En vertu de la condition P_4, il résulte que ω est bien définie. L'application ω est une forme différentielle linéaire sur B à valeurs dans $T_{\mathbf{a}} B$ [1].

Proposition 2.1. — La forme linéaire ω est un isomorphisme entre les modules $\mathcal{X}(B)$ es $C(B ; T_{\mathbf{a}} B)$.

Démonstration. — Nous définissons

$$\omega^{-1} : C(B ; T_{\mathbf{a}} B) \longrightarrow \mathcal{X}(B) ; \quad \omega^{-1}(g)(x) = (T_{\mathbf{a}} f_x^{-1})(g(x)) . \tag{2.2}$$

Dans deux cartes locales il est claire que

$$D(f_{\varphi^{-1}(x)}) \big|_U^V (\psi(\mathbf{a})) = (D f_{\varphi^{-1}(z)} \big|_U^V (z)) \quad \forall z \in \varphi(U) \cap \alpha(f) .$$

On sait [12] que l'application $J : GL(\mathbf{E}) \longrightarrow GL(\mathbf{E}), J(x) = x^{-1}$ est de classe C^∞. Donc, en vertu de la condition P_4, l'application ω est bien définie. Il est aisé de vérifier les relations :

$$\omega^{-1} \circ \omega = \mathrm{id}_{\mathcal{X}(B)} \quad ; \quad \omega \circ \omega^{-1} = \mathrm{id}_{C(B : T_{\mathbf{a}} B)} ,$$

c'est-à-dire ω est un isomorphisme de ces deux modules. q.e.d.

Définition 2.1. — Une p-forme différentielle ω_p sur B à valeurs dans l'espace de Banach **F** s'appelle **P**-invariante, si et seulement si, est vérifiée la relation

$$<\omega_p(g(x)) \; ; \; T_x g(v_1), \ldots, T_p g(v_p)> = <\omega(x) \; ; \; v_1, \ldots, v_p>, \tag{2.3}$$

pour tout $g \in \mathbf{P}, x \in \alpha(g)$ et $v_i \in T_x B \; (1 \leq i \leq p)$.

Proposition 2.2. — La forme linéaire ω donnée par la relation (2.1) est **P** invariante.

Démonstration. Si l'on désigne $U = g^{-1}[\alpha(f_{g(x)}) \cap \alpha(g)]$, on a :

$$<\omega(g(x)) \; ; \; T_x g(v)> = T_x (f_{g(x)} g_U) \quad \forall g \in \mathbf{P}, x \in \alpha(g), v \in T_x B .$$

Mais $f_{g(x)} \circ g_{|U} \in \mathbf{P}$ et $(f_{g(x)} \circ g_U)(x) = \mathbf{a} = f_x(x)$. En vertu de la condition P_3 nous obtenons

$$f_{g(x)} \circ g_{|U} = f_{x|U}, \text{ donc}$$

$$<\omega(g(x)) \; ; \; T_x g(v)> = T_x(f_{x|U})(v) = <\omega(x) \; ; \; v> . \qquad \text{q.e.d.}$$

Pour tout $x \in B$ nous définissons

$$\omega^{-1}(x) : T_{\mathbf{a}} B \longrightarrow T_x B \; \omega^{-1}(x)(u) = (T_{\mathbf{a}} f_x^{-1})(u) \quad \forall u \in T_{\mathbf{a}} B . \tag{2.4}$$

A l'aide de cet opérateur, pour toute p-forme ω_p de classe C^∞ sur B à valeurs dans $T_a B$ nous considérons l'application

$$A_{\omega_p} : B \times T_a B \ldots T_a B \longrightarrow T_a B ,$$

(2.5) $$A_{\omega_p}(x\,;\,u_1,\ldots\ldots,u_p) = <\omega_p(x)\,;\,\omega^{-1}(x)(u_1),\ldots,\omega^{-1}(x)(u_p)> .$$

Il est aisé de voir que A_{ω_p} est de classe C^∞, p-linéaire et antisymétrique par rapport aux dernières p variables. De (2.5) on a

(2.6) $$A_{\omega_p}(x\,;\,<\omega(x)\,;\,v_1>,\ldots,<\omega(x)\,;\,v_p>) =$$

$$= <\omega_p(x)\,;\,v_1,\ldots,v_p> \quad \forall\, v_i \in T_x B .$$

Théorème 2.1. — La p-forme ω_p sur B à valeurs dans $T_a B$ est **P**-invariante sur B si et seulement si, l'application A_{ω_p} est indépendante de première variable.

Démonstration. — La condition est nécessaire. Nous allons montrer la relation

$$A_{\omega_p}(x\,;\,u_1,\ldots,u_p) = A_{\omega_p}(\mathbf{a}\,;\,u_1,\ldots,u_p) \quad \forall\, x \in B,\ u_i \in T_a B .$$

De proposition 1.3. et de (2.4) on déduite $\omega^{-1}(\mathbf{a}) = \mathrm{id}_{T_a B}$. Compte tenu de cette relation on a

$$A_{\omega_p}(\mathbf{a}\,;\,u_1,\ldots,u_p) = <\omega_p(\mathbf{a})\,;\,u_1,\ldots,u_p> =$$

$$= <\omega_p(f_x(x))\,;\,T_x f_x(\omega^{-1}(x)(u_1)),\ldots,T_x f_x(\omega^{-1}(x)(u_p))> .$$

Mais ω_p est **P**-invariante, donc

$$A_{\omega_p}(\mathbf{a}\,;\,u_1,\ldots,u_p) = <\omega_p(x)\,;\,\omega^{-1}(x)(u_1),\ldots,\omega^{-1}(x)(u_p)> = A_{\omega_p}(x\,;\,u_1,\ldots,u_p).$$

La condition est suffisante. En tenant compte que A_{ω_p} est indépendante de première variable et que ω est **P**-invariante, nous obtenons

$$<\omega_p(g(x))\,;\,T_x g(v_1),\ldots\ldots,T_x g(v_p)> =$$
$$= A_{\omega_p}(g(x)\,;\,<\omega(g(x))\,;\,T_x g(v_1)>,\ldots,<\omega(g(x))\,;\,T_x g(v_p)>) =$$
$$= <\omega_p(x)\,;\,v_1,\ldots,v_p> ,$$

pour tout $g \in \mathbf{P}$, $x \in \alpha(g)$ et $v_i \in T_x B\ (1 \leq i \leq p)$. q.e.d.

Pour tout $g \in \mathbf{P}$ on sait que l'opérateur de différentiation extérieure d pour les formes différentielles à valeurs dans un espace de Banach vérifie la relation $d \circ g^* = g^* \circ d$ [1]. Vu que $g^* \circ \omega = \omega$, on a $g^*(d\omega) = d\omega$. Donc $d\omega$ est **P**-invariante et l'application $A_{d\omega}$ ne dépende pas de première variable. Nous désignons $C = -A_{d\omega}$ et obtenons :

(2.7) $$C(u, v) = -<d\,\omega(x)\,;\,\omega^{-1}(x)(u),\,\omega^{-1}(x)(v)> \quad \forall\, x \in B,\ u, v \in T_a B .$$

Proposition 2.3. (*équations de structure*). — Pour toute **P**-variété (B , **P** , **a**) il existe une application bilinéaire, alternée,

$$[,] : C(B\ ;\ T_a B) \times C(B\ ;\ T_a B) \longrightarrow C(B\ ;\ T_a B)\ ,$$

telle qu'ils sont vérifiées les relations :

$$(2.8) \qquad < d\,\omega\ ; X, Y > = -[<\omega\ ; X>, <\omega\ ; Y>] \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(B)\ ,$$

$$(2.9) \qquad g^* \circ [,] = [,] \circ (g^* \times g^*) \quad \forall g \in \mathbf{P}\ .$$

Démonstration. — On définit l'application [,] par la relation

$$(2.10) \qquad [h, k](x) = C(h(x), k(x)) \quad \forall h, k \in C(B\ ;\ T_a B), x \in B\ .$$

Compte tenu de (2.6) et (2.10) on a

$$< d\,\omega\ ; X, Y > (x) = -C(<\omega\ ; X>(x), <\omega\ ; Y>(x)) =$$
$$= -[<\omega\ ; X>, <\omega\ ; Y>](x), \quad \forall x \in B,$$

c'est-à-dire (2.8) a lieu. Pour tout $f_1, f_2 \in C(B\ ;\ T_a B)$ on déduit

$$[g^* f_1, g^* f_2](x) = C(f_1(g(x)), f_2(g(x))) =$$
$$= [f_1, f_2](g(x)) = g^*([f_1, f_2])(x). \qquad \text{q.e.d.}$$

Nous considérons les éléments de $T_a B$ comme des applications constantes à valeurs dans $T_a B$. Soient $X_i = \omega^{-1}(u_i)$ où $u_i \in T_a B$ $(i = 1,2)$.
Il est aisé de voir que

$$< d\,\omega ; X_1, X_2 > = - < \omega\ ; [X_1, X_2] > .$$

De (2.7) il résulte

$$C(u_1, u_2) = - < d\,\omega(x)\ ;\ \omega^{-1}(x)(u_1), \omega^{-1}(x)(u_2) > =$$
$$= - < d\,\omega(x)\ ;\ \omega^{-1}(u_1)(x), \omega^{-1}(u_2)(x) > = - < d\,\omega(x)\ ;\ X_1, X_2 >\ ,$$

c'est-à-dire nous avons obtenu

$$(2.11) \qquad C(u_1, u_2) = < \omega\ ;\ [X_1, X_2] > .$$

Pour tout $X_i = \omega^{-1}(u_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ $u_i \in T_a B$, de (2.11) on a :

$$C(C(u_1, u_2), u_3) = < \omega\ ;\ [\omega^{-1}(C(u_1, u_2)), \omega^{-1}(u_3)] > = < \omega\ ;\ [[X_1, X_2], X_3] > .$$

En utilisant l'identité de Iacobi pour les champs de vecteurs et la proposition 2.1. on déduit

$$(2.12) \qquad \sum_{\text{cycl}}^{(U_1, U_2, U_3)} \{ C(C(u_1, u_2), u_3) \} = 0\ .$$

Définition 2.2. — Un champ de vecteurs $\mathbf{X}$ sur B s'appelle $\mathbf{P}$-invariant, si et seulement si,

$$\mathbf{X}(g(x)) = T_x g(\mathbf{X}(x)) \quad \forall g \in \mathbf{P}, x \in \alpha(g) . \tag{2.13}$$

Théorème 2.2. — Le champ de vecteurs $\mathbf{X}$ sur B est $\mathbf{P}$-invariant, si et seulement si, est vérifiée la relation

$$< \omega \, ; \mathbf{X} > = \text{const.} \tag{2.14}$$

Démonstration. — La condition est nécessarire. Pour tout $x \in B$ soit $f_x \in \mathbf{P}$ donné par la condition P_3. On a :

$$< \omega (f_x(y)) \, ; T_y f_x (\mathbf{X}(y)) > = < \omega (f_x(y)) \, ; \mathbf{X}(f_x(y)) > \quad \forall y \in \alpha(f_x) .$$

Mais ω est $\mathbf{P}$-invariante, donc :

$$< \omega \, ; \mathbf{X} > (f_x(y)) = < \omega \, ; \mathbf{X} > (y) \quad \forall y \in \alpha(f_x) .$$

Pour $y = x$ dans cette relation nous obtenons (2.14).
La condition est suffisante. De (2.14) on a :

$$< \omega \, ; \mathbf{X} > (g(x)) = < \omega \, ; \mathbf{X} > (x) \quad \forall g \in \mathbf{P}, x \in \alpha(g) ,$$

$$< \omega (g(x)) \, ; \mathbf{X}(g(x)) > = < \omega (g(x)) \, ; T_x g (\mathbf{X}(x)) > .$$

Mais $\omega(g(x))$ est un isomorphisme topologique linéaire de $T_{g(x)} B$ sur $T_a B$, donc :

$$\mathbf{X}(g(x)) = T_x g (\mathbf{X}(x)) \quad \forall g \in P, x \in \alpha(g) . \qquad \text{q.e.d.}$$

Nous désignons par $\mathbf{P}(B)$ l'esemble des tous les champs de vecteurs $\mathbf{P}$-invariants sur B et il est clair que pour tout $u \in T_a B$ on a $\omega^{-1}(u) \in \mathbf{P}(B)$. Pour tout $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{P}(B)$ soient $< \omega \, ; \mathbf{X} > = u$ et $< \omega \, ; \mathbf{Y} > = v$. Le crochet des champs de vecteurs $\mathbf{P}$-invariants est donné par la relation

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \omega^{-1}(C(u, v)) \in \mathbf{P}(B) .$$

Donc, il est un champ de vecteurs $\mathbf{P}$-invariant. Ainsi $\mathbf{P}(B)$ est une algèbre de Lie-Banach. Donc nous avons démontré la

Proposition 2.4. — L'esemble des difféomorphismes $\mathbf{P}$ qui vérifient les conditions P_1-P_4 induit sur B une structure de groupe de Lie-Banach local.

Remarque 2.1. — Ce dernier résultat n'est pas connu pour les $\mathbf{P}$-quasi-groupes de Lie-Banach et les pseudo-groupes de Lie simplement transitifs.

Remarque 2.2. — Un $\mathbf{P}$-quasi-groupe de Lie-Banach est un groupe de Lie-Banach local par rapport à la loi de composition

$$x * y = L^{\mu}_{\lambda(a, y)}(y) .$$

§ 3. - Connexions linéaires naturelles sur une P-Variété

Soit $\pi : M \longrightarrow B$ un fibré vectoriel dont la fibre type est un espace de Banach $\mathbf{M}$. On suppose que la varété B est modelée par l'espace de Banach $\mathbf{B}$.

Définition 3.1. — Une loi de dérivation covariante sur le fibré vectoriel M est une application

$$\nabla : \mathcal{X}(B) \times \mathcal{X}_M(B) \longrightarrow \mathcal{X}_M(B) ,$$

telle que pour toute trivialisation locale (U, Φ, φ) pour M, il existe une application $\Gamma_\varphi : \varphi(U) \longrightarrow L(\mathbf{B}, \mathbf{M}; \mathbf{M})$ de classe C^∞ qui vérifie

$$\nabla_X Y|_\varphi(\varphi(x)) = (D\, Y_\varphi)(\varphi(x))(X_{\varphi(x)}) + \Gamma_\varphi(\varphi(x))(X_{\varphi(x)}, Y_{\varphi(x)}) \tag{3.1}$$

On sait [10] que l'opérateur ∇ est $C(B; \mathbf{R})$-linéaire par rapport à la première variable, $\mathbf{R}$-linéaire par rapport à la deuxième variable et vérifie la relation

$$\nabla_X(f\,Y) = f \cdot \nabla_X Y + (X f) \cdot Y .$$

Dans le cas des variétés modelées par des espaces de Banach, ces dernières propriétés n'impliquent pas l'existence des applications Γ_φ.

Soient $(U, \Phi, \varphi), (V, \Psi, \psi)$ deux trivialisations locales sur M telles que $U \cap V \neq \varnothing$. A l'aide des applications trivialisantes [11] on définit l'application

$$T_{\varphi\psi} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow G\,L(\mathbf{M}) , \; T_{\varphi\psi}(x) = \Psi_{\varphi^{-1}(x)} \circ (\Phi_{\varphi^{-1}(x)})^{-1}$$

La liason entre les coefficients de connexion dans ces deux trivialisations locales est donnée par la relation

$$\Gamma_{\psi(x)} = T_{\varphi\psi}(\varphi(x))\,[(D\,T_{\psi\varphi})(\varphi(x)) + \Gamma_{\varphi(x)}(D(\varphi \circ \psi^{-1}))(\Psi(x)), T_{\psi\varphi}(\psi(x))] . \tag{3.2}$$

Si $M = T\,B$, la loi de dérivation covariante est une connexion linéaire sur B. La torsion et la courbure de ∇, dans ce cas, sont données par des formules globales bien connues pour une variété de dimension finie et dans une carte locale on a :

$$T(X, Y)|_{\varphi(x)} = \Gamma_{\varphi(x)}(X_{\varphi(x)}, Y_{\varphi(x)}) - \Gamma_{\varphi(x)}(Y_{\varphi(x)}, X_{\varphi(x)}) , \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} R(X, Y)(Z)|_{\varphi(x)} = {} & \left(\frac{\partial \Gamma_\varphi}{\partial x}\right)(\varphi(x); Y_{\varphi(x)}, Z_{\varphi(x)})(X_{\varphi(x)}) - \\ & - \left(\frac{\partial \Gamma_\varphi}{\partial x}\right)(\varphi(x); X_{\varphi(x)}, Z_{\varphi(x)})(Y_{\varphi(x)}) + \Gamma_{\varphi(x)} X_{\varphi(x)}, \Gamma_{\varphi(x)} Y_{\varphi(x)}, Z_{\varphi(x)}) - \\ & - \Gamma_{\varphi(x)}(Y_{\varphi(x)}, \Gamma_{\varphi(x)}(X_{\varphi(x)}, Z_{\varphi(x)})) . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pour démontrer que les opérateurs T et R sont des sections dans certains fibrés vectoriels, nous allons résoudre un problème plus général.

Soient $\pi_i : M_i \longrightarrow B\ (i = 1, \ldots, p)$, $\pi : N \longrightarrow B$ des fibrés vectoriels de classe C^∞ ayant les espaces de Banach $\mathbf{M}_i, \mathbf{N}$ comme fibres. On sait [4] que

$L(M_1, \ldots, M_p; N) = \bigcup_{x \in B} L(M_{1,x}, \ldots, M_{p,x}; N_x)$ est un fibré vectoriel sur B dont la fibré type est l'espace de Banach $L(\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_p; \mathbf{N})$. Nous considérons maintenant l'opérateur

$$\Omega : X_{M_1}(B) \times \ldots \times X_{M_p}(B) \longrightarrow X_N(B) .$$

Proposition 3.1. — Si B possède des C^∞-partitions de l'unité et si pour toute trivialisation locale (U, Φ^{M_i}, φ) pour le fibré vectoriel M_i $(i = 1, \ldots, p)$ il existe l'application $\xi_\varphi : \varphi(U) \longrightarrow L(\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_p; \mathbf{N})$ de classe C^∞ telle que

$$(3.5) \qquad \Omega(s_1, \ldots, s_p)|_\varphi(\varphi(x)) = \xi_\varphi(\varphi(x))(s_{1\varphi}(\varphi(x)), \ldots, s_{p\varphi}(\varphi(x))) ,$$

alors $L(M_1, \ldots, M_p; N)$ possède une C^∞-section globale ω qui vérifie la relation

$$(3.6) \qquad \omega(x)(s_1(x), \ldots, s_p(x)) = \Omega(s_1, \ldots, s_p)(x) \quad \forall s_i \in X_{M_i}(B) .$$

Démonstration. — Pour toute trivialisation locale (U, Φ, φ) de N nous définissons la C^∞-section $\eta : U \longrightarrow L(M_1, \ldots, M_p; N)$

$$\eta_\varphi(x) = (\Phi_x)^{-1} \circ \xi_\varphi(\varphi(x)) \circ (\Phi_x^{M_1} \times \ldots \times \Phi_x^{M_p}) .$$

Soient $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un recouvrement ouvert localement fini plus fin que le recouvrement des domaines des cartes locales pour B et $\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha \in I}$ la C^∞-partition de l'unité subordonnée à $\{V_\alpha\}$. Il est clair que l'application

$$\omega(x) = \sum_{\alpha \in I} \varepsilon_\alpha(x) \cdot \eta_{\varphi_\alpha}(x) \quad \forall x \in B ,$$

est une C^∞-section globale de $L(M_1, \ldots, M_p; N)$. En utilisant cette expression pour ω nous obtenons

$$\begin{aligned} &\omega(x)(s_1(x), \ldots, s_p(x)) = \\ &= \sum_{\alpha \in I} \varepsilon_\alpha(x) \cdot [(\Phi_{\alpha x})^{-1}(\xi_{\varphi_\alpha}(\varphi_\alpha(x)))(\Phi_{\alpha x}^{M_1}(s_1(x)), \ldots, \Phi_{\alpha x}^{M_p}(s_p(x)))] = \\ &= \sum_{\alpha \in I} \varepsilon_\alpha(x) \cdot [(\Phi_{\alpha x})^{-1}(\Omega(s_1, \ldots, s_p)_{\varphi_\alpha}(\varphi_\alpha(x)))] = \\ &= \sum_{\alpha \in I} \varepsilon_\alpha(x) \cdot \Omega(s_1, \ldots, s_p)(x) = \Omega(s_1, \ldots, s_p)(x) . \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

De cette proposition on déduit une méthode pour démontrer q'un opérateur Ω définit une C^∞-section en $L(M_1, \ldots, M_p; N)$. On calcule la partie principale $\Omega(s_1, \ldots, s_p)|_\varphi$ et si l'on trouve ξ_φ qui vérifie (3.5) alors Ω est une notion utilisable dans la géométrie différentielle des variétés de dimension infinie. Les opérateurs T et R vérifient (3.3) et (3.4), donc ils sont des sections dans certains fibrés vectoriels.

Proposition 3.2. — Sur toute **P**-variété B il existe une connexion linéaire plate $(R = 0)$, ayant la torsion donnée par la formule

$$(3.7) \qquad T = \omega^{-1} \circ d\omega .$$

Démonstration. — Nous définissons

$$(3.8) \qquad \nabla_X Y = \omega^{-1}(X < \omega \,;\, Y >) \qquad \forall\, X, Y \in \mathcal{X}(B)\,,$$

et dans carte locale (U, φ) nous obtenon

$$\nabla_X Y_{\varphi(x)} = (D\, Y_\varphi)(\varphi(x))(X_{\varphi(x)}) + \omega^{-1}_{\varphi(x)}\left(\left(\frac{\partial\, \omega_\varphi}{\partial\, x}\right)(\varphi(x)\,;\, Y_{\varphi(x)})(X_{\varphi(x)})\right).$$

L'application Γ_φ est donnée par la formule

$$\Gamma_{\varphi(x)}(u, v) = \omega^{-1}_{\varphi(x)}\left(\left(\frac{\partial\, \omega_\varphi}{\partial\, x}\right)(\varphi(x)\,;\, v)(u)\right) \qquad \forall\, u, v \in B\,,$$

et alors la relation (3.1) est vérifiée. De (3.8) on a

$$T(X, Y) = \omega^{-1}(X < \omega\,;\, Y >) - \omega^{-1}(Y < \omega\,;\, X >) - [X, Y] = \omega^{-1}(< d\,\omega\,;\, X, Y >).$$

Par des calculs directs il résulte $R = 0$. q.e.d.

Dans la suite nous désignons par T la torsion de la connexion ∇ et par R la courbure de la connexion moyenne $\overset{(o)}{\nabla}$, donnée par la relation

$$(3.9) \qquad \overset{(o)}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}\, T(X, Y) \qquad \forall\,, Y \in \mathcal{X}(B)\,.$$

Pour tout $X, Y\, Z \in \mathbf{P}(B)$ nous obtenons

$$(3.10) \qquad \overset{(o)}{\nabla}_X Y = -\frac{1}{2}\, T(X, Y) = \frac{1}{2}\,[X, Y]\,,$$

$$(3.11) \qquad R(X, Y)(Z) = \frac{1}{4}\,[Z, [X, Y]]\,.$$

De (3.11) il résulte

$$(3.12) \qquad \nabla_X R = 0\,, \quad \forall\, X \in \mathcal{X}(B)\,,$$

c'est-à-dire nous avons obtenu le

Théorème 3.1. — Chaque **P**-variété est un espace localement symétrique.

§ 4. - Métriques riemanniennes sur P-Variétés

Dans ce paragraphe nous supposons que B est une variété para-compacte, modelée par un espace de Hilbert séparable. Soient Φ un parallélisme absolu et g une métrique riemannienne sur B. Pour deux points $x, y \in B$ on désigne par $\Phi_{xy} : T_x B \longrightarrow T_y B$ l'isomorphisme topologique donnée par le parallélisme absolu Φ.

Définition 4.1. — Φ et g sont compatibles, si et seulement si, ils sont vérifiées les conditions :

Φ_1. g est Φ-invariante, c'est-à-dire :

$$g(y\,;\Phi_{yx}(X_x)\,,\Phi_{yx}(Y_x)) = g(x\,;X_x\,,Y_x) \quad \forall\, x\,,y \in B\,. \tag{4.1}$$

Φ_2. Pour tout $X\,,Y\,Z \in \mathcal{X}(B)$ on a :

$$g(T(X\,,Z)\,,Y) + g(T(Y\,,Z)\,,X) = 0. \tag{4.2}$$

Toute **P**-variété est une variété parallélisable parce que ω est une section globale dans le fibré principal des corepères sur B. Le parallélisme absolu Φ induit sur B la connexion linéaire plate ∇ donnée par (3.8) et appelée la connexion naturelle sur une **P**-variété.

Une métrique riemannienne g sur une **P**-variété B est Φ-invariante, si et seulement si,

$$g(X\,,Y) = \text{const.} \qquad \forall\, X\,,Y \in \mathbf{P}(B)\,. \tag{4.3}$$

Théorème 4.1. — Une métrique riemannienne g sur une **P**-variété connexe est Φ-invariante, si et seulement si, la connexion naturelle est riemannienne.

Démonstration. — Il est suffisant de montrer la relation

$$(\nabla_X g)(Y\,,Z) = 0\,, \qquad \forall\, X\,,Y\,,Z \in \mathbf{P}(B)\,. \tag{4.4}$$

Il est aisé de voir que sur une **P**-variété connexe un champ de vecteurs Y est **P**-invariant, si et seulement si, $\nabla_X Y = 0$ pour tout $X \in \mathcal{X}(B)$. En tenant compte de ce résultat et de (4.3) on obtient (4.4).

Réciproquement, si l'on suppose que la connexion naturelle est riemannienne, on déduit la relation

$$X(g(Y\,,Z)) = 0 \qquad \forall\, X \in \mathcal{X}(B)\,,\,Y\,,Z \in \mathbf{P}(B).$$

Pour tout $v \in T_x B$ il existe un C^∞-champ de vecteurs X sur B tel que $X(x) = v$. En effet, il est donné par la formule

$$X(y) = \Phi_{yx}(v) \qquad \forall\, y \in B\,.$$

Donc :

$$T_x[g(Y\,,Z)](v) = 0 \qquad \forall\, x \in B\,,$$

c'est-à-dire $g(Y\,,Z)$ est localement constante. Mais B est connexe, donc $g(Y\,,Z)$ est une application constante sur B. q.e.d.

Remarque 4.1. — Nous avons utilisé le fait que B est connexe dans la deuxième partie de la démonstration. Donc, si g est Φ-invariante, alors la connexion naturelle est riemannienne.

Théorème 4.2. — Si g est Φ-invariante, alors g et Φ sont compatibles, si et seulement si, la connexion de Levi-Civita coincide avec la connexion moyenne de la connexion naturelle sur B.

Démonstration. — Si l'on suppose que g et Φ sont compatibles et si l'on utilise (4.2) et la relation $\nabla_X g = 0$, on déduit

$$(4.5) \qquad (\overset{(o)}{\nabla}_X g)(Y, Z) = [X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)] + \\ + [g(T(X, Y), Z) + g(T(X, Z), Y)] = 0.$$

Compte tenu de cette relation et du fait que la connexion moyenne est sans torsion, nous obtenons que $\overset{(o)}{\nabla}$ est la connexion de Levi-Civita. La démonstration de la réciproque de ce théoreme résulte de (4.5). q.e.d.

De (3.11) nous obtenons

$$(4.6) \qquad R(X, Y)(Z) = \frac{1}{4} T(Z, T(X, Y)) \qquad \forall X, Y, Z \in \mathbf{P}(B).$$

Si l'on suppose que g et Φ sont compatibles, alors pour tout $X, Y \in \mathcal{X}(B)$ nous obtenons que la courbure sectionelle $K_{(X, Y)}$ est donnée par les relations

$$K_{(X,Y)} = \frac{1}{4} \frac{g(T(Y, T(X, Y)), X)}{\| X \vee Y \|^2} = -\frac{1}{4} \frac{g(T(T(X, Y), Y), X)}{\| X \vee Y \|^2} = \\ = \frac{1}{4} \frac{g(T(X, Y), T(X, Y))}{\| X \vee Y \|^2} \geq 0 .$$

Donc nous avons obtenu le

Théorème 4.3. — La courbure sectionèlle d'une **P**-variété munie d'une métrique riemannienne compatible avec son parallélisme absolu est toujours non-négative.

Nous désignons par $< , >$ le produit intérieur sur $T_e G$ et nous définissons

$$< , > : C(B; T_e B) \times G(B; T_e B) \longrightarrow C(B; T_e B),$$

$$(4.7) \qquad <f, g>(x) = <f(x), g(x)> \qquad \forall x \in B, f, g \in C(B; T_e B).$$

L'application $< , >$ induit une métrique riemannienne g donnée par la formule

$$(4.8) \qquad g(X, Y) = <\omega(X), \omega(Y)> \qquad \forall X, Y \in X(B).$$

Compte tenu de théorème 2.2. et de (4.8) nous obtenons que $g(X, Y) = \text{const.}$ pour tout $X, Y \in \mathbf{P}(B)$, c'est-à-dire g est Φ-invariante. Si la forme différentielle naturelle ω est fermée ($d\omega = 0$) il s'ensuit que $T = 0$. Donc la condition Φ_2 est aussi vérifiée. Ainsi la métrique riemannienne (4.8) est compatible dans ce cas avec le parallélisme absolu naturel donnée par ω. La courbure sectionèlle est nulle.

Réciproquement, on suppose que B est une **P**-variété connexe, ayant la métrique riemannienne compatible avec le parallélisme absolu et $K_{(X, Y)} = 0$ pour tout

$X, Y \in \mathcal{X}(B)$. Donc $T(X, Y) = 0$ et de (3.7) on a $< d\omega ; X, Y > = 0$. En utilisant l'expression de l'opérateur de différentiation extérieure pour les formes différentielles à valeurs dans un espace de Banach [1], nous obtenons

$$[X, Y] = 0 \quad \forall X, Y \in \mathbf{P}(B).$$

Donc nous avons démontré le

Théorème 4.4. — L'algèbre de Lie-Banach d'une **P**-variété connexe est commutative, si et seulement si, la métrique riemannienne est compatible avec le parallélisme absolu et la courbure sectionèlle est nulle.

Soit B une variété riemannienne, complète, simplement connexe, modelée par un espace de Hilbert séparable **H**. On sait [9] que, si la courbure sectionèlle de B est nulle, alors B est isométrique avec **H**. En utilisant le théorème 4.4. nous avons obtenu ainsi le

Théorème 4.5. — Chaque **P**-variété, paracompacte, simplement connexe, complète, modelée par un espace de Hilbert séparable, ayant l'algèbre de Lie-Banach **P** (B) commutative, est isométrique avec son modèle.

La connexion naturelle ∇ donnée par (3.8) est la $(+)$ — connexion d'Elie Cartan dans le cas particulier où B est un groupe de Lie. Cette connexion détermine complétement l'algèbre de Lie-Banach d'une **P**-variété connexe par la formule

$$\mathbf{P}(B) = \bigcap_{X \in \mathcal{X}(B)} \operatorname{Ker} \nabla_X . \tag{4.9}$$

En effet, si $Y \in \mathbf{P}(B)$ alors $< \omega ; Y > = \text{const}$, donc $\nabla_X Y = 0$.

Réciproquement, si $\nabla_X Y = 0$ pour tout $X \in \mathcal{X}(B)$, alors $< \omega ; Y >$ est localement constante. Mais la variété est connexe, donc $< \omega ; Y >$ est constante, c'est-à-dire Y est **P**-invariant.

§ 5. - L'algèbre de déformation d'une **P**-Variété

Soit $\pi : M \longrightarrow B$ un fibré vectoriel dont la fibré type est l'espace de Banach **M** et soient $\overset{(1)}{\nabla}, \overset{(2)}{\nabla}$ deux lois de dérivation covariante sur M.

Définition 5.1. — L'opérateur de la courbure mixte de la paire $(\overset{(1)}{\nabla}, \overset{(2)}{\nabla})$ est l'opérateur

$$\rho : \mathcal{X}(B) \times \mathcal{X}(B) \times \mathcal{X}_M(B) \longrightarrow \mathcal{X}_M(B) ,$$

$$\rho(X, Y)(u) = \frac{1}{2} \{ [\overset{(1)}{\nabla}_X, \overset{(2)}{\nabla}_Y](u) + [\overset{(2)}{\nabla}_X, \overset{(1)}{\nabla}_Y](u) - \overset{(1)}{\nabla}_{[X, Y]}(u) - \overset{(2)}{\nabla}_{[X,Y]}(u) \} . \tag{5.1}$$

Dans une trivialisation locale (U, Φ, φ) nous obtenons

$$\rho(X, Y)(u)|_{\varphi(x)} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \overset{(1)}{\Gamma}_\varphi}{\partial x}\right)(\varphi(x); Y_{\varphi(x)}, u_{\varphi(x)})(X_{\varphi(x)}) + \right.$$

$$+\left(\frac{\partial \overset{(2)}{\Gamma}_\varphi}{\partial x}\right)(\varphi(x); Y_{\varphi(x)}, u_{\varphi(x)})(X_{\varphi(x)}) - \left(\frac{\partial \overset{(1)}{\Gamma}_\varphi}{\partial x}\right)(\varphi(x); X_{\varphi(x)}, u_{\varphi(x)})(Y_{\varphi(x)}) -$$

$$-\left(\frac{\partial \overset{(2)}{\Gamma}_\varphi}{\partial x}\right)(\varphi(x); X_{\varphi(x)}, u_{\varphi(x)})(Y_{\varphi(x)}) + \overset{(1)}{\Gamma}_{\varphi(x)}(X_{\varphi(x)}, \overset{(2)}{\Gamma}_{\varphi(x)}(Y_{\varphi(x)}, u_{\varphi(x)}) +$$

$$+ \overset{(2)}{\Gamma}_{\varphi(x)}(X_{\varphi(x)}, \overset{(1)}{\Gamma}_{\varphi(x)}(Y_{\varphi(x)}, u_{\varphi(x)})) - \overset{(1)}{\Gamma}_{\varphi(x)}(Y_{\varphi(x)}, \overset{(2)}{\Gamma}_{\varphi(x)}(X_{\varphi(x)}, u_{\varphi(x)})) - .$$

$$\left. - \overset{(2)}{\Gamma}_{\varphi(x)}(Y_{\varphi(x)}, \overset{(1)}{\Gamma}_{\varphi(x)}(X_{\varphi(x)}, u_{\varphi(x)}))\right\} .$$

Donc, en vertu de la proposition 3.1. il résulte que ρ définit une section dans le fibré vectoriel $A_2(T B ; L(M ; M))$. A l'aide des applications $\overset{(1)}{\Gamma}_\varphi$ et $\overset{(2)}{\Gamma}_\varphi$ nous définissons

(5.2) $$\overset{(o)}{\Gamma}_\varphi = \frac{1}{2}(\overset{(1)}{\Gamma}_\varphi + \overset{(2)}{\Gamma}_\varphi) .$$

Il est aisé de voir que Γ_φ vérifie la relation (3.2), donc il existe une loi de dérivation covariante sur M notée par $\overset{(o)}{\nabla}$ et applée la loi de dérivation covariante moyenne des lois de derivation covariante $\overset{(1)}{\nabla}$ et $\overset{(2)}{\nabla}$. Par des calculs directs nous obtenons

(5.3) $$\rho = 2\overset{(o)}{R} - \frac{1}{2}(\overset{(1)}{R} + \overset{(2)}{R})$$

où $\overset{(o)}{R}$ est la courbure de $\overset{(o)}{\nabla}$.

L'opérateur $S_X : \mathcal{X}_M(B) \longrightarrow \mathcal{X}_M(B), X \in \mathcal{X}(B)$

(5.4) $$S_X u = \overset{(2)}{\nabla}_X u - \overset{(1)}{\nabla}_X u ,$$

définit une section dans le fibré $L(M ; M)$ appelée le tenseur de déformation de la paire de lois de dérivation covariante $(\overset{(1)}{\nabla}, \overset{(2)}{\nabla})$. Nous introduissons aussi la courbure de déformation de la paire $(\overset{(1)}{\nabla}, \overset{(2)}{\nabla})$

$$K : \mathcal{X}(B) \times \mathcal{X}(B) \times \mathcal{X}_M(B) \longrightarrow \mathcal{X}_M(B) ,$$

(5.5) $$K(X, Y) = \frac{1}{4}[S_X, S_Y] \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}(B) .$$

En utilisant (5.3), (5.4) et (5.5) on obtient

(5.6) $$2\rho + 4K = \overset{(1)}{R} + \overset{(2)}{R} ; \rho + K = \overset{(o)}{R} .$$

Ces relations nous démontret que la courbure de déformation définit une section dans le fibré vectoriel $A_2(TB ; L(M ; M))$.

Si $M = TB$, nous définissons dans $X(B)$ la loi de composition $X * Y = S_X Y$. Il est aisé de voir que $X(B)$ est une algèbre nommée l'algèbre de déformation de la paire de connexions $(\overset{(1)}{\nabla}, \overset{(2)}{\nabla})$ et notée par $X(B ; \overset{(1)}{\nabla}, \overset{(2)}{\nabla})$.

Théorème 5.1. — $X(B ; \overset{(1)}{\nabla}, \overset{(2)}{\nabla})$ est une algèbre de Lie, si et seulement si, ils sont vérifiées les conditions :

1. $\overset{(1)}{\nabla}$ et $\overset{(2)}{\nabla}$ ont la meme partie symétrique.

2. $$\sum_{\text{cycl}}^{(X, Y, Z)} \{\overset{(0)}{R}(X, Y)(Z) - \rho(X, Y)(Z)\} = 0 .$$

La démonstration résulte par des calculs directs.

Pour une **P**-variété B le tenseur de déformation de la paire de connexions ∇ (3.8) et $\overset{(0)}{\nabla}$ (5.2) est donné par la relation

$$S_X Y = -\frac{1}{2} T(X, Y) \qquad \forall X, Y \in X(B) .$$

En tenant compte des relations (5.1), (5.3), (5.5) nous obtenons

$$\rho\Big(X, Y)(Z) = -4 K(X, Y)(Z) = \frac{1}{4} T(Z, T(X, Y)\Big) ,$$

$$R(X, Y)(Z) = 3 T(Z, T(X, Y)) .$$

De ces relations et du théorème 5.1. on a le

Théorème 5.2. — L'algèbre de déformation de la paire de connexions naturelles sur une **P**-variété est une algèbre de Lie.

Pour tout $X, Y \in \mathbf{P}(B)$ on déduit $T(X, Y) = -[X, Y] \in \mathbf{P}(B)$, donc on a le

Théorème 5.3. — L'algèbre de Lie-Banach d'une **P**-variété est une sous-algébre de déformation de la paire de connexions naturelles sur cette **P**-variété.

Remarque. — Les résultats de ce paragraphe sont nouveaux meme pour les groupes de Lie de dimension finie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bejancu A., « Formes différentielles et groupes de Lie-Banach » An. st. Univ. Lasi XVIII (1972) p. 125-137.

[2] Bejancu A., « Sur l'existence d'une structure de groupe de Lie-Banach local » C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. 273 (1973) p. 61-64.

[3] Bejancu A., « Groupes de Lie-Banach » (thèse) Iasi, 1973.

[4] Bourbaki N., « Variétés différentielles et analytiques », Fascicule de résultats (paragraphes 1 à 7), Hermann, Paris, 1967.

[5] Bourbaki N., « Variétés différentielles et analytiques », Fascicule de résultats (paragraphes 8 15) ». Hermann, Paris, 1971.

[6] Cartan H., « Calcul différentiel » Hermann, Paris 1967.

[7] Cartan H., « Formes différentielles » Hermann, Paris 1967.

[8] Gheorghiev Gh., « Sur les groupes de Lie-Banach » Rev. Roum. de Math. pures et appl. 10 (1970) p. 1611-1623.

[9] Pierre De La Harpe « Classical Banach-Lie algebras and Banach-Lie groups of operators in Hilbert space ». Lecture Notes in Math. 285, Springer, 1972.

[10] Klingenberg W. et Flaschel P., Riemannsche Hilbert-mannigfaltigkeiten. Periodische Geodatische » Lecture Notes in Math. 282, Springer 1972.

[11] Lang S., « Introduction aux variétés différentiables » Dunod, Paris 1967.

[12] Maissen B., « Lie-Gruppen mit Banachräumen als Parameterräume Acta Math. 108 (1962) 229-269.

[13] Michal A. D., « Differental properties of abstract transformations Groups with abstract parameters ». Am. J. Math. 59 (1937) p. 129-143.

[14] Palais R., « Lectures on the differential topology of infinite dimensional manifolds » Mimeo Notes at Brandeis Univ. by S. Greenfield 1964-1965.

[15] Slebodzinski W., « Formes extérieures et leurs applications » II, Warszawa 1963.

[16] Vaisman Izu, « Sur quelques formules du calcul de Ricci global » Comm. Math. Helvetici 41. fasc. 2. 1966-1967, p. 73-87.