DAN I. PAPUC et I. P. POPESCU

Sur les connexions infinitésimales d'un raffinement d'un espace fibré principal (*)

Summary — Let $\xi = (E, B, p, G ; A)$ be a differentiable, principal fibre bundle and H a subgroup of G. The fibre bundles ξ, ξ_0, ξ_1, where $\xi_0 = (E/H, B, P_0, G/H ; A_0)$, $\xi_1 = (E, E/H, p_1, H ; A_1)$, constitued the « refinement of ξ defined by H ». The object of our research is the connections of ξ and ξ_1.

The Note is divided in five paragraphs. In the first we expose all definitions and notations (they are the same as in [3]) and we establish some properties of fundamental vector fields and vertical distributions of ξ and ξ_1. In the second paragraph we studied the connections of ξ. We obtained some 1 : 1 correspondences between the set connections of ξ and the sets of homomorphisms of certain vectorial fibre bundle. In the third paragraph we considered the distributions of E/H and their relations with the connections of ξ. The fibre bundle ξ_1 is principal. Its connections are studied in the fourth paragraph. The last paragraph contains the study of certain special mappings of the set of connections of ξ into the set of connections of ξ_1.

Soit $\xi (E, B, p, G ; A)$ un espace fibré principal différentiable dont l'espace total est E, l'espace base - B, la projection - p, le groupe structurel - G et l'atlas maximal de trivialisation - A.

Soit H un sous-groupe fermé de G. À l'aide de ξ et de H on peut définir de manière unique les espaces fibrés différentiables $\xi_0 = (E/H, B, p_0, G/H, G/N ; A_0)$ et $\xi_1 = (E, E/H, p_1, H ; A_1)$, où N est le plus grand diviseur normal de G contenu dans H, ([1], p. 57 ou [3], p. 2). Le terne $(\xi ; \xi_0, \xi_1)$ sera appelé *le raffinement de ξ défini par H*.

Dans cette Note nous considérerons le raffinement de ξ défini à l'aide d'un sous-group H donné, et nous étudierons spécialement les ensembles de connexions infinitésimales qu'on peut associer à cette structure. Par les résultats obtenus, cette Note, tout en restant indépendante, est une continuation de [3].

1. Quelques propriétés d'un raffinement $(\xi_{0q} ; \xi_{0j}, \xi_{jq})$.

Soit $\xi = (E, B, p, G ; A)$ un espace fibré principal différentiable et N une suite de sous-groupes fermés de G,

$$N = (G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_{q-1} \supset H_q = \{e\}). \tag{1}$$

(*) Memoria presentata dall'Accademico Enrico Bompiani.

Nous utiliserons les notations de [3]:

(2) $$E_j = E/H_j \quad , \quad j = 0, 1, \ldots, q.$$

E/H_j est l'espace quotient obtenu de E à l'aide du groupe de transformations H_j de E. Evidemment $E_q = E$, $E_o = B$.

(3) $$H^j_k = H_j/H_k \quad , \quad 0 \leqslant j < k \leqslant q \; ;$$

(4) $$G^j_k = H_j/N_{jk} \quad , \quad 0 \leqslant j < k \leqslant q \; .$$

H_j/H_k est l'espace quotient de H_j par le sous-groupe H_k. N_{jk} est le plus grand diviseur normal de H_j, contenu dans le sous-groupe H_k. H_j/N_{jk} est le groupe facteur respectif.

(5) $$p_{jk} : \alpha H_k \in E_k \longrightarrow \alpha H_j \in E_j \; , \quad 0 \leqslant j < k \leqslant q \; ;$$

(6) $$p_{c;jk} : a H_k \in H^c_k \longrightarrow a H_j \in H^c_j \; , \quad 0 \leqslant c < j < k \leqslant q$$

p_{jk} et $p_{c;jk}$ sont les applications canoniques. Evidemment $p_{oq} = p$ et

(7) $$0 \leqslant h < j < k \leqslant q \qquad p_{hk} = p_{hj} \circ p_{jk} \; .$$

Les algèbres de Lie des groupes H_j, N_{jk}, G^j_k sont notées respectivement par g_j, g_{jk}, g^j_k.

Dans ce qui suit nous supposerons partout que tous les éléments considérés: variétés différentiables, champs vectoriels, distributions, applications, homomorphismes, etc. sont différentiables de classe C^∞.

Dans [3] on a démontré (*Théorème* 1.*p*.8.) que pour une paire d'entiers j, k, $0 \leqslant j < k \leqslant q$, l'ensemble des éléments $(E_k, E_j, p_{jk}, H^j_k, G^j_k)$ constituent un espace fibré différentiable, noté par ξ_{jk}, doté d'un atlas de trivialisation A_{jk}, determiné de manière unique par l'atlas maximal de trivialisation A de $\xi = \xi_{oq}$ et par l'atlas de trivialisation $\alpha_{o,jk}$ de l'espace fibré $\omega_{o;jk}$ $(H^o_k, H^o_j, p_{o;jk}, H^j_k, G^j_k;\ \alpha_{o,jk})$, (voir les relations (19), (20) de [3]).

L'ensemble $\{ \xi_{jk} \,|\, 0 \leqslant j < k \leqslant q \}$ a été appelé *le tissu associé à la structure* (ξ, N) et le terne $(\xi_{oq}; \xi_{oj}, \xi_{jq})$ - *le raffinement de* $\xi = \xi_{oq}$ *défini par le sous-groupe* H.

Dans ce paragraphe nous établirons quelques propriétés immédiates concernant les éléments du raffinement $(\xi_{oq}, \xi_{oj}, \xi_{jq})$.

Considérons les groupes Lie $H_o \supset H_j \supset N_{oj}$, G^o_j et leurs algèbres Lie g_o, g_j, g_{oj}, g^o_j. Nous choisirons une base (e_{a_1}, e_{a_2}, e_s) de g_o telle que (e_{a_1}) soit la base de g_{oj} et (e_{a_1}, e_{a_2}) la base de g_j. Il s'ensuit que $a_1 = 1, \ldots, n_1$ ($n_1 = \dim. N_{oj}$), $a_2 = n_1 + 1, \ldots, r_j$, ($r_j = \dim H_j$), $s = r_j + 1, \ldots, r_o$, ($r_o = \dim. H_o$).

Pour l'algèbre g^o_j nous utiliserons la base $(\bar{e}_{a_2}, \bar{e}_s)$, déterminée par la base (e_{a_1}, e_{a_2}, e_s) à l'aide de l'homomorphisme canonique $d\,p_{o;jq} : g_o \longrightarrow g^o_j$. La base $(\bar{e}_{a_2}, \bar{e}_s)$ est définie par les relations

(8) $$d\,p_{o;jq}(e_{a_2}) = \bar{e}_{a_2} \; , \; d\,p_{o;jq}(e_s) = \bar{e}_s$$

Evidemment $d\,p_{o;jq}(e_{a_1}) = 0$.

Dans ce qui suit la transformation de g_o, adj/a^{-1}, définie par un élément $a \in H_o$, sera représentée par

$$\begin{aligned}
&\mathrm{adj}\, a^{-1}(e_{a_1}) = k_{a_1}^{b_1}(a)\, e_{b_1}\,, \\
(9) \qquad &\mathrm{adj}\, a^{-1}(e_{a_2}) = k_{a_2}^{b_1}(a)\, e_{b_1} + k_{a_2}^{b_2}(a)\, e_{b_2} + k_{a_2}^{s}(a)\, e_s\,, \\
&\mathrm{adj}\, a^{-1}(e_s) = k_s^{b_1}(a)\, e_{b_1} + k_s^{b_2}(a)\, e_{b_2} + k_s^{t}(a)\, e_t\,,
\end{aligned}$$

$a_1, b_1 = 1, 2, \ldots, n_1$; $a_2, b_2 = n_1 + 1, \ldots, r_j$; $s, t = r_j + 1, \ldots, r_o$.

Remarque 1.

$$(10) \qquad \forall\, a \in H_j \quad | \quad k_{a_2}^{s} = 0.$$

Remarque 2. Si j_a est l'automorphisme intérieur de H_o défini par l'élément $a \in H_o$ et $j_{p_{o;jq}}(a)$ est l'automorphisme intérieur correspondant de G_j^o, alors nous avons

$$(11) \qquad \forall\, a \in H_o \quad | \quad p_{o;jq} \circ j a^{-1} = j_{p_{o;jq}}(a^{-1}) \circ p_{o;jq}\,,$$

$$(12) \qquad \forall\, a \in H_o \quad | \quad d\, p_{o;jq} \circ \mathrm{adj}\, a^{-1} = \mathrm{adj}\, p_{o;jq}(a^{-1}) \circ d\, p_{o;jq}$$

Remarque 3. La transformation $\mathrm{adj}\, p_{o;jq}(a^{-1})$ de g_j^o définie par l'élément $a \in H_o$ est donnée par les relations

$$(13) \qquad \begin{aligned}
&\mathrm{adj}\, p_{o;jq}(a^{-1})(\bar{e}_{a_2}) = k_{a_2}^{b_2}\, \bar{e}_{b_2} + k_{a_2}^{s}\, \bar{e}_s\,, \\
&\mathrm{adj}\, p_{o;jq}(a^{-1})(\bar{e}_s) = k_s^{b_2}\, \bar{e}_{b_2} + k_s^{t}\, \bar{e}_t\,.
\end{aligned}$$

Remarque 4. Si $a \in N_{oj}$, alors

$$(14) \qquad \begin{aligned}
&k_{a_2}^{b_2} = \delta_{a_2}^{b_2} \quad , \quad k_{a_2}^{s} = 0\,; \\
&k_s^{b_2} = 0 \quad , \quad k_s^{t} = \delta_s^{t}\,.
\end{aligned}$$

Le raffinement $(\xi_{oq}\,;\, \xi_{oj}\,,\, \xi_{jq})$ définira sur E_q les distributions involutives $\triangle_{oq}^{v} \supset \triangle_{jq}^{v}$ et sur E_j la distribution involutive $\triangle_{oj}^{v}$. Ces distributions sont respectivement les distributions verticales des espaces fibrés ξ_{oq}, ξ_{jq} et ξ_{oj}. En tenant compte du fait que N_{oj} est un groupe de transformations de E_q, nous noterons par $\triangle_{oj}^{VN}$ la distribution involutive définie sur E_q par les orbites de N_{oj}. Evidemment $\triangle_{oj}^{VN} \subset \triangle_{jq}^{V}$.

À la base (e_{a_1}, e_{a_2}, e_s) de g_o correspondront par l'homomorphisme $\sigma : g_o \longrightarrow X(E_q)$, ([1], p. 51), les champs fondamentaux $(e^*_{a_1}, e^*_{a_2}, e^*_s)$ de E_q qui constituent une base de la distribution $\triangle_{oq}^{V}$. $(e^*_{a_1})$ constituent une base de la distribution $\triangle_{oj}^{VN}$ et $(e^*_{a_1}, e^*_{a_2})$ une base de la distribution $\triangle_{jq}^{V}$.

En tenant compte du fait que pour un champ vectoriel fondamental $v^* = \sigma(v)$, $(v \varepsilon g_0)$, de E_q on a : $\forall a \varepsilon H_0 \mid R'_a v^* = \sigma(\mathrm{adj}\, a^{-1} v)$, ([1], p. 51, Proposition 5.1) il résulte alors de (9) :

$$
(15) \qquad \begin{aligned} & R'_a e^*_{a_1} = k^{b_1}_{a_1}(a)\, e^*_{b_1} , \\ a \varepsilon H_0 \ ; \ & R'_a e^*_{a_2} = k^{b_1}_{a_2}(a)\, e^*_{b_1} + k^{b_2}_{a_2}(a)\, e^*_{b_2} + k^{s}_{a_2}(a)\, e^*_{s} , \\ & R'_a e^*_{s} = k^{b_1}_{s}(a)\, e^*_{b_1} + k^{b_2}_{s}(a)\, e^*_{b_2} + k^{t}_{s}(a)\, e^*_{t} . \end{aligned}
$$

Proposition 1. La distribution $\triangle^{VN}_{oj}$ a la propriété

$$
(16) \qquad \forall a \varepsilon H_0 \quad \mid \quad R'_a \triangle^{VN}_{oj} = \triangle^{VN}_{oj} .
$$

Cette distribution contient toute autre distribution qui satisfait à la propriété (16) et qui est contenue dans $\triangle^{V}_{jq}$.

Démonstration. On voit que les orbites de N_{oj} sur E_q sont invariantes aux translations à droite définies par les éléments de H_o. Plus précisément

$$
\forall \alpha_q \varepsilon E_q \ , \ a \varepsilon H_0 \quad \mid \quad R'_a(\alpha_q N_{oj}) = (\alpha_q a) N_{oj} .
$$

Cette relation implique la relation (16).

Supposons qu'il existe une distribution $\triangle_1$ de E_q satisfaisant aux conditions

$$
\triangle_1 \subset \triangle^{V}_{jq} \ ; \ \forall a \varepsilon H_0 \quad \mid \quad R'_a \triangle_1 = \triangle_1 .
$$

Nous démontrerons que, obligatoirement, $\triangle_1 \subset \triangle^{VN}_{oj}$.

Soit $\alpha_q \varepsilon E_q$ et $\beta_q = \alpha_q a$. Dans la fibre locale de ξ_{jq}, $\alpha_q H_j$, il existe une sous-variété différentiable qui, par R_a, sera portée dans $\beta_q H_j$. Cette variété a la forme $\alpha_q M^a_{x_q}$, où $M^a_{x_q} = \{c \mid c \varepsilon H_j , a^{-1} c a \varepsilon H_j\}$. $\alpha_q M^a_{x_q}$ est l'image en $R_{a^{-1}}$ de la sous-variété $R_a(\alpha_q H_j) \cap (\beta_q H_j)$. $\triangle_1(\alpha_q)$ sera obligatoirement un sous-espace de l'espace tangent à la sous-variété $\alpha_q M^a_{x_q}$, pour n'importe quel a de H_o.

Considérons les ensembles $\alpha_q M^a_{x_q}$, quel que soit $a \varepsilon H_o$. On peut prouver que $\bigcap_{a \in H_0} (\alpha_q M^a_{x_q}) = \alpha_q N_{oj}$, où $\alpha_q N_{oj}$ est elle même une variété différentiable.

Dans le point α_q nous aurons les relations $\triangle_1(\alpha_q) \subset \triangle_2(\alpha_q)$ où $\triangle_2(\alpha_q) = \bigcap_{a \in H_0} T_{\alpha_q}(\alpha_q M^a_{x_q})$. $\triangle_2$ est une distribution involutive, donc la variété intégrale maximale qui passe par α_q sera contenue dans $(\bigcap_{a \in H_0} \alpha_q M^a_{x_q}) = \alpha_q N_{oj}$. Il en résulte $\triangle_1(\alpha_q) \subset \triangle^{VN}_{j}(\alpha_q)$.

Q.E.D.

Proposition 2. En notant

$$
(17) \qquad p'_{jq}(e^*_s)_{x_q} = (\bar{e}^*_s)_{x_j} ,
$$

où $\alpha_j = p_{jq}(\alpha_q)$, alors

$$
(18) \qquad \forall a \varepsilon H_j \quad \mid \quad p'_{jq}(e^*_s)_{x_q a} = \bar{k}^t_s(a)\,(\bar{e}^*_t)_{x_j} ,
$$

où $\| \bar{k}^t_s(a) \|$ est la matrice inverse de la matrice $\| k^t_s(a) \|$ de (9).

Démonstration. La relation $\forall a \in H_j \mid p_{jq} \cdot R_a = p_{jq}$, et le fait que $(\bar{e}^{*}_s)_{x_j}$ constituent une base de $\triangle^{V}_{oj}(\alpha_j)$, impliquent que $\forall a \in H_j \mid p'_{jq}(e^{*}_s)_{x_q a} = c^t_s (\bar{e}^{*}_t)_{x_j}$ et que $p'_{j_q} \cdot R'_a (e^{*}_s)_{x_q} = (\bar{e}^{*}_s)_{x_j}$. Mais

$$R'_a (e^{*}_s)_{x_q} = k^{b_1}_s (e^{*}_{b_1})_{x_q a} + k^{b_2}_s (e^{*}_{b_2})_{x_q a} + k^t_s (e^{*}_t)_{x_q a},$$

et par p'_{jq} on obtient $(\bar{e}^{*}_s)_{x_j} = k^t_s c^u_t (\bar{e}^{*}_u)_{x_j}$. Il en résulte $c^u_t = \bar{k}^u_t$.

Q.E.D.

2. Propriétés de l'ensemble des connexions de ξ_{oq}.

Considérons le raffinement $(\xi_{oq}; \xi_{oj}, \xi_{jq})$ et l'ensemble $\gamma_{oq} = \{\Gamma_{oq}\}$ des connexions infinitésimales de ξ_{oq}.

Soit $\triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}$ la distribution horizontale d'une connexion Γ_{oq}, $FV(E_q, \triangle^{H}_{\Gamma_{oq}})$ et $FV(E_q, \triangle^{V}_{oq})$ seront les fibrés vectoriels de base E_q, définis par les distributions $\nabla^{H}_{\Gamma_{oq}}$ et $\triangle^{V}_{oq}$. Nous avons le

Théorème 1. Soit une connexion infinitésimale Γ_{oq} de ξ_{oq} dont la distribution horizontale est $\triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}$. Alors il existe une bijection $\varphi_{\Gamma_{oq}}$ entre l'ensemble γ_{oq} et l'ensemble $\{T\}$ des homomorphismes des espaces fibrés vectoriels $T : FV(E_q, \triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}) \to FV(E_q, \triangle^{V}_{oq})$, homomorphismes qui satisfont à la condition

$$\forall a \in H_o \mid R'_a \circ T = T \circ R'_a. \tag{19}$$

Démonstration. Soit $\Gamma'_{oq} \in \gamma_{oq}$. L'homomorphisme $\varphi_{\Gamma_{oq}}(\Gamma'_{oq})$ sera défini de la manière suivante :

$$\forall X_{x_q} \in \triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}(\alpha_q) \mid \varphi_{\Gamma_{oq}}(\Gamma'_{oq}) : X_{x_q} \longrightarrow Y_{x_q} \in \triangle^{V}_{oq}(\alpha_q),$$

où

$$\varphi_{\Gamma_{oq}}(\Gamma'_{oq}) : X_{x_q} \in \triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}(\alpha_q) \xrightarrow{p'_{oq}} p'_{oq}(X_{x_q}) \in T_{p_{oq}}(\alpha_q)(E_o) \longrightarrow$$
$$\xrightarrow{\text{lift}\ \Gamma'_{oq}} X'_{x_q} \in \triangle^{H}_{\Gamma'_{oq}}(\alpha_q) \longrightarrow Y_{x_q} = X'_{x_q} - X_{x_q} \in \triangle^{V}_{oq}(\alpha_q).$$

Evidemment $\varphi_{\Gamma_{oq}}(\Gamma'_{oq}) \in \{T\}$.

L'application $\varphi_{\Gamma_{oq}} : \gamma_{oq} \to T$ est injective. Si pour deux connexions $\Gamma'_{oq}, \Gamma''_{oq} \in \gamma_{oq}$ nous avons $\varphi_{\Gamma_{oq}}(\Gamma'_{oq}) = \varphi_{\Gamma_{oq}}(\Gamma''_{oq})$, alors $\triangle^{H}_{\Gamma'_{oq}} = \triangle^{H}_{\Gamma''_{oq}}$ car $\forall X_{x_q} \in \triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}(\alpha_q)$, $X'_{x_q} - X_{x_q} = X''_{x_q} - X_{x_q}$ donc $X'_{x_q} = X''_{x_q}$. Il en résulte $\Gamma'_{oq} = \Gamma''_{oq}$.

L'application $\varphi_{\Gamma_{oq}} : \gamma_{oq} \longrightarrow T$ est surjective : soit un homomorphisme $T : FV(E_q, \triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}) \longrightarrow FV(E_q, \triangle^{V}_{oq})$. Nous allons montrer qu'il existe une connexion $\Gamma'_{oq} \in \gamma_{oq}$, telle que $\varphi_{\Gamma_{oq}}(\Gamma'_{oq}) = T$. La distribution horizontale de Γ'_{oq} sera définie par la relation

$$\triangle^{H}_{\Gamma'_{oq}} = \{X'_{x_q} \mid \forall \alpha_q \in E_q, \forall X_{x_q} \in \triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}(\alpha_q) : X'_{x_q} = X_{x_q} + T(X_{x_q})\}.$$

Nous avons $\forall \alpha_q \in E_q \mid T_{x_q}(E_q) = \triangle^{H}_{\Gamma'_{oq}}(\alpha_q) \oplus \triangle^{V}_{oq}(\alpha_q)$. La condition (19) impliquera la relation $\forall a \in H_o \mid R'_a(\triangle^{H}_{\Gamma'_{oq}}) = \triangle^{H}_{\Gamma'_{oq}}$, donc la distribution $\triangle^{H}_{\Gamma'_{oq}}$ définira une connexion infinitésimale $\Gamma'_{oq} \in \gamma_{oq}$ telle que $\varphi_{\Gamma_{oq}}(\Gamma'_{oq}) = T$. Q.E.D.

Soit $\mathcal{D} = \{U, V, \dots\}$ un recouvrement ouvert de E_o tel que chaque élément est une zone de trivialisation de ξ_{oq} et une zone d'une carte locale admissible de la structure différentielle de E_o. Sur chaque ouvert $p_{oq}^{-1}(U)$, $U \in \mathcal{D}$ on considérera la base locale $\left(e^{\bullet}_{a_1}, e^{\bullet}_{a_2}, e^{\bullet}_{s}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ de l'algèbre des champs des vecteurs $\mathcal{X}(p_{oq}^{-1}(U))$. Nous avons la conséquence suivante du *Théorème 1*:

Proposition 3. Etant donné une connexion $\Gamma_{oq} \in \gamma_{oq}$, il existe une bijection $\tilde{\varphi}_{\Gamma_{oq}}$ entre l'ensemble γ_{oq} et l'ensemble des systèmes des fonctions $\{(\underset{U}{T}{}^{a_1}_i, \underset{U}{T}{}^{a_2}_i, \underset{U}{T}{}^{s}_i) \mid U \in \mathcal{D};$ $\underset{U}{T}{}^{a_1}_i, \underset{U}{T}{}^{a_2}_i, \underset{U}{T}{}^{s}_i : p_{oq}^{-1}(U) \longrightarrow R\}$ liées par les relations

$$\forall \alpha_q \in p_{oq}^{-1}(U) \cap p_{oq}^{-1}(V) \mid \underset{V}{T}{}^{a_1}_i(\alpha_q) = \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\right)_{\alpha_q} \underset{U}{T}{}^{a_1}_j(\alpha_q) ,$$

$$\underset{V}{T}{}^{a_2}_i(\alpha_q) = \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\right)_{\alpha_q} \underset{U}{T}{}^{a_2}_j(\alpha_q) , \quad \underset{V}{T}{}^{s}_i(\alpha_q) = \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\right)_{\alpha_q} \underset{U}{T}{}^{s}_j(\alpha_q) . \tag{20}$$

et satisfaisant aux conditions :

$$\forall a \in H_o , \ \alpha_q \in p_{oq}^{-1}(U) \mid$$

$$\begin{aligned} &\underset{U}{T}{}^{a_1}_i(\alpha_q a) = \underset{U}{T}{}^{b_1}_i(\alpha_q)\, k^{a_1}_{b_1}(a) , \\ &\underset{U}{T}{}^{a_2}_i(\alpha_q a) = \underset{U}{T}{}^{b_1}_i(\alpha_q)\, k^{a_2}_{b_1}(a) + \underset{U}{T}{}^{b_2}_i(\alpha_q)\, k^{a_2}_{b_2}(a) + \underset{U}{T}{}^{s}_i(\alpha_q)\, k^{a_2}_{s}(a) , \\ &\underset{U}{T}{}^{s}_i(\alpha_q a) = \underset{U}{T}{}^{b_1}_i(\alpha_q)\, k^{s}_{b_1}(a) + \underset{U}{T}{}^{b_2}_i(\alpha_q)\, k^{s}_{b_2}(a) + \underset{U}{T}{}^{t}_i(\alpha_q)\, k^{s}_{t}(a) , \end{aligned} \tag{21}$$

où les coefficients k de (21) sont donnés par (9).

Démonstration. À l'aide de la distribution $\triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}$ nous avons défini la bijection $\varphi_{\Gamma_{oq}}$: $\gamma_{oq} \longrightarrow \{T\}$. A présent nous allons montrer qu'il existe une bijection entre l'ensemble des homomorphismes $\{T \mid T : FV(E_q, \triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}) \longrightarrow FV(E_q, \triangle^{V}_{oq})\}$ qui satisfont aux conditions (19) et l'ensemble des systèmes des fonctions $\left\{(\underset{U}{T}{}^{a_1}_i, \underset{U}{T}{}^{a_2}_i, \underset{U}{T}{}^{s}_i)\right\}$ qui satisfont aux conditions (20) et (21).

Considerons un ouvert $U \in \mathcal{D}$. Sur $p_{oq}^{-1}(U)$ les distributions $\triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}$ et $\triangle^{V}_{oq}$ auront les bases locales respectives $\left(Z_i = \text{lift}\, \Gamma_{oq}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right.$ et $(e^{\bullet}_{a_1}, e^{\bullet}_{a_2}, e^{\bullet}_{s})$. Un homomorphisme T sera défini sur $p_{oq}^{-1}(U)$ par les relations

$$T(Z_i)_{\alpha_q} = \underset{U}{T}{}^{a_1}_i(\alpha_q)\,(e^{\bullet}_{a_1})_{\alpha_q} + \underset{U}{T}{}^{a_2}_i(\alpha_q)\,(e^{\bullet}_{a_2})_{\alpha_q} + \underset{U}{T}{}^{s}_i(\alpha_q)\,(e^{\bullet}_{s})_{\alpha_q} \tag{22}$$

De cette manière chaque homomorphisme $T : FV(E_q, \triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}) \longrightarrow FV(E_q, \triangle^{V}_{oq})$ qui satisfait aux conditions (19) définira de manière unique un système de fonctions $\left\{(\underset{U}{T}{}^{a_1}_i, \underset{U}{T}{}^{a_2}_i, \underset{U}{T}{}^{s}_i) \mid U \in \mathcal{D}\right\}$ satisfaisant aux conditions (20) et (21).

Réciproquement, étant donné un système de fonctions $\left\{(\underset{U}{T}{}^{a_1}_i, \underset{U}{T}{}^{a_2}_i, \underset{U}{T}{}^{s}_i) \mid U \in \mathcal{D}\right\}$ satisfaisant aux conditions (20) et (21), il définira à l'aide des relations (22), un homomorphisme unique $T : FV(E_q, \triangle^H_{\Gamma_{oq}}) \longrightarrow FV(E_q, \triangle^V_{oq})$, satisfaisant aux conditions (19). Q.E.D.

Remarque 5. On sait que, s'il est donné une connexion $\Gamma_{oq} \in \gamma_{oq}$ à l'aide de sa 1-forme fondamentale $\omega_{\Gamma_{oq}}$, alors il existe une bijection $\varphi^{*}_{\Gamma_{oq}}$ entre l'ensemble γ_{oq} et l'ensemble $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_{oq}\}$ des 1-formes différentiables définies sur $\mathcal{X}(E_q)$, à valeurs dans g_o, tensorielles et de type adjoint [2]. Cette bijection est définie de la manière suivante : pour une connexion $\Gamma'_{oq} \in \gamma_{oq}$ donnée par la 1-forme fondamentale $\omega_{\Gamma'_{oq}}$, la 1-forme tensorielle correspondante est : $\varphi^{*}_{\Gamma_{oq}}(\Gamma'_{oq}) = \omega_{\Gamma'_{oq}} - \omega_{\Gamma_{oq}}$. Si $\varphi_{\Gamma_{oq}}(\Gamma'_{oq}) = \left\{ (\underset{U}{T}{}^{a_1}_i, \underset{U}{T}{}^{a_2}_i, \underset{U}{T}{}^{s}_i) \mid \forall U \in \mathcal{D} \right\}$ alors pour la 1-forme $\varphi^{*}_{\Gamma_{oq}}(\Gamma'_{oq})$ nous avons :

$$\varphi^{*}_{\Gamma_{oq}}(\Gamma'_{oq}) = -(\underset{U}{T}{}^{a_1}_i e_{a_1} + \underset{U}{T}{}^{a_2}_i e_{a_2} + \underset{U}{T}{}^{s}_i e_s)\, d x^i . \tag{23}$$

À chaque connexion $\Gamma_{oq} \in \gamma_{oq}$ on associera la distribution de E_j

$$p'_{jq}(\triangle^H_{\Gamma_{oq}}) = \triangle^{*}_{\Gamma_{oq}} \tag{24}$$

Nous considérons de nouveau la relation d'équivalence définie sur γ_{oq} par la *Définition 4.* [3] : deux connexions arbitraires $\Gamma_{oq}, \Gamma'_{oq} \in \gamma_{oq}$ sont équivalentes si $\triangle^{*}_{\Gamma_{oq}} = \triangle^{*}_{\Gamma'_{oq}}$. La classe d'équivalence définie par Γ_{oq} sera notée par Γ^{*}_{oq}. Nous étudierons à présent l'ensemble Γ^{*}_{oq}.

Soit $FV(E_q, \triangle^H_{\Gamma_{oq}})$, $FV(E_q, \triangle^{VN}_{oj})$ les espaces fibrés vectoriels définis sur E_q par les distributions $\triangle^H_{\Gamma_{oq}}$ et $\triangle^{VN}_{oj}$. Le *Théorème 5* de [3] peut être énoncé comme suit, sous une forme améliorée :

Théorème 2. L'ensemble Γ^{*}_{oq} peut être mis en bijection avec l'ensemble $\{T\}$ des homomorphismes $T : FV(E_q, \triangle^H_{\Gamma_{oq}}) \longrightarrow FV(E_q, \triangle^{VN}_{oj})$ qui satisfont à la condition

$$\forall a \in H_o \mid R'_a \circ T = T \circ R'_a \tag{25}$$

La démonstration reste la même.

Remarque 6. Si $N_{oj} = H_q = \{e\}$ il en résulte que Γ^{*}_{oq} contient un seul élément.

Remarque 7. En tenant compte du fait que l'ensemble des homomorphismes $\{T \mid T : FV(E_q, \triangle^H_{\Gamma_{oq}}) \longrightarrow FV(E_q, \triangle^V_{oq})\}$ qui satisfont à la relation (25) est un espace linéaire sur le corps des réels, la bijection du *Théorèm 2* induira sur Γ^{*}_{oq} une structure d'espace linéaire.

En considérant le recouvrement $\mathcal{D}$ utilisé dans la *Proposition 3*, on a une autre conséquence du *Théorème 2* :

Proposition 4. L'ensemble Γ^{*}_{oq} peut être mis en bijection avec l'ensemble des fonctions $\left\{ \underset{U}{T}{}^{a_1}_i \mid U \in \mathcal{D} ;\ \underset{U}{T}{}^{a_1}_i : p^{-1}_{oq}(U) \longrightarrow R \right\}$ satisfaisant aux conditions :

$$\forall a \in H_o\ ,\ \alpha_q \in p^{-1}_{oq}(U) \mid \underset{U}{T}{}^{a_1}_i(\alpha_q)\, k^{b_1}_{a_1}(a) = \underset{U}{T}{}^{b_1}_i(\alpha_q\, a)\ ; \tag{26}$$

$$(a_1\, b_1 = 1, 2, \ldots, n_j)\ ;$$

$$(27)\qquad \forall\, \alpha_q \in p_{oq}^{-1}(U) \cap p_{oq}^{-1}(V) \mid \underset{V}{T_j^{a_1}}(\alpha_q) \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_{p_{oq}(\alpha_q)} = \underset{U}{T_i^{a_1}}(\alpha_q)\,,$$

où $k_{a_1}^{b_1}(a)$ sont données par (9).

Démonstration. Considérons un élément arbitrair $\Gamma'_{oq} \in \Gamma^*_{oq}$ et T, l'homomorphisme de $FV(E_q, \triangle^H_{\Gamma_{oq}})$ en $FV(E_q, \triangle^{VN}_{oj})$ qui correspond à Γ'_{oq} dans la bijection définie par le *Théorème 2*. Si $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ est la base locale naturelle de $\mathcal{X}(U)$ définie par une carte $(U, \mathfrak{X})$, alors la distribution horizontale $\triangle^H_{\Gamma_{oq}}$ aura la base locale

$$Z_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + P_i^{a_1} e^*_{a_1} + P_i^{a_2} e^*_{a_2} + P_i^{s} e^*_{s}\,,$$

(Z_i est le lift de $\frac{\partial}{\partial x^i}$ par rapport à Γ_{oq}). L'image de Z_i par T sera

$$(28)\qquad \forall\, \alpha_q \in p_{oq}^{-1}(U) \mid T(Z_i)_{\alpha_q} = T_i^{a_1}(\alpha_q)\,(e^*_{a_1})_{\alpha_q}\,.$$

Les conditions (25) impliquent (26).

En tenant compte du fait que $\frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial x^i}$ et que Z_j est le lift de $\frac{\partial}{\partial y^j}$ par rapport à Γ_{oq}, les conditions (27) se trouvent vérifiées.

On peut voir que la correspondance $T \longrightarrow (T_i^{a_1})$ est une bijection.

Q.E.D.

3. Distributions spéciales de E_j.

Une distribution de E_j est dite « spéciale » si elle est l'image dans la projection p'_{jq} (24) d'une distribution horizontale d'une connexion $\Gamma_{oq} \in \gamma_{oq}$. Dans ce paragraphe nous établirons quelques conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une distribution de E_j soit spéciale Nous avons :

Théorème 3. Soit une distribution $\triangle$ de E_j. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette distribution soit la projection par p'_{jq} d'une distribution horizontale $\triangle^H_{\Gamma_{oq}}$ sont

$$(29)\qquad \forall\, \alpha_j \in E_j \mid T_{\alpha_j}(E_j) = \triangle(\alpha_j) \oplus \triangle^V_{oj}(\alpha_j)\,;$$

$\forall\, \alpha_q \in E_q$, en notant $\alpha_j = p_{jq}(\alpha_q)$, il doit exister une application linéaire injective

$$i_{\alpha_q \alpha_j} : \triangle(\alpha_j) \longrightarrow T_{\alpha_q}(E_q)\,,$$

telle que l'ensemble d'espaces linéaires $\forall\, \alpha_q \in E_q \mid i_{\alpha_q \alpha_j} \triangle(\alpha_j)$ constituent une distribution différentiable de classe C^∞ de E_q et que les deux relations suivantes soient vérifiées

$$(30)\qquad p'_{jq}(\alpha_q) \circ i_{\alpha_q \alpha_j} = 1_{\triangle(\alpha_j)}\,;$$

$\forall\, a \in H_o$, en notant $\beta_q = \alpha_q a$, $\beta_j = p_{jq}(\beta_q)$ et par $T_{\beta_j \alpha_j}$ l'application linéaire

$$T_{\beta_j \alpha_j} : X_{\alpha_j} \in \triangle(\alpha_j) \longrightarrow X_{\beta_j} \in \triangle(\beta_j)$$

où X_{β_j} est déterminé par les relations

$$X_{\beta_j} \in \triangle(\beta_j)\ ,\ p'_{oj}(X_{\beta_j}) = p'_{oj}(X_{\alpha_j})\ ,$$

alors il doit exister

(31) $$R'_a \circ i_{\alpha_q \alpha_j} = i_{\beta_q \alpha_j} \circ T_{\beta_j \alpha_j}\ .$$

Démonstration. Nous allons démontrer la nécessité des conditions énoncées. Supposons qu'il existe une distribution $\triangle^H_{\Gamma_{oq}}$ telle que $p'_{jq}(\triangle^H_{\Gamma_{oq}}) = \dot{\triangle}_{jq}$. La relation

$$p'_{oq}(\triangle^H_{\Gamma_{oq}}) = p'_{oj}(p'_{jq}(\triangle^H_{\Gamma_{oq}})) = p'_{oj}(\dot{\triangle}_{jq})$$

implique la relation (29).

Nous définirons l'application $i_{\alpha_q \alpha_j}$ par la relation

$$i_{\alpha_q \alpha_j} = \text{lift}\ \Gamma_{oq} \circ (p'_{oj} \mid \dot{\triangle}_{jq}(\alpha_j)).$$

Pour verifier la relation (30) nous écrirons :

$$\forall X_{\alpha_j} \in \triangle(\alpha_j) \mid (p'_{jq} \circ i_{\alpha_q \alpha_j})(X_{\alpha_j}) = p'_{jq}(\text{lift}\Gamma_{oq}(p'_{oj}(X_{\alpha_j}))) = Y_{\alpha_j} \in \triangle(\alpha_j)\ .$$

Mais, par p'_{oj}, nous aurons

$$p_{oj}(Y_{\alpha_q}) = p'_{oj}(p'_{jq}\ \text{lift}\Gamma_{oq}(p'_{oj}(X_{\alpha_j})))) = p'_{oq}(\text{lift}\Gamma_{oq}(p'_{oj}(X_{\alpha_j}))) = p''_{oj}(X_{\alpha_j})\ ,$$

ce qui signifie que $Y_{\alpha_j} = X_{\alpha_j}$.

La relation (31) sera vérifiée si

$$\forall X_{\alpha_j} \in \triangle(\alpha_j)\ ;\ \forall a \in H_o \mid R'_a \circ i_{\alpha_q \alpha_j}(X_{\alpha_j}) = i_{\beta_q \alpha_j} \circ T_{\beta_j \alpha_j}(X_{\alpha_j})\ .$$

Pour le membre gauche de cette relation nous avons

$$R'_a \circ i_{\alpha_q \alpha_j}(X_{\alpha_j}) = R'_a(\text{lift}\Gamma_{oq}(p'_{oj}(X_{\alpha_j})))_{\alpha_q} = (\text{lift}\Gamma_{oq}(p'_{oj}(X_{\alpha_j})))_{\beta_q}\ .$$

Pour le membre droit nous avons

$$i_{\beta_q \beta_j} \circ T_{\beta_j \alpha_j}(X_{\alpha_j}) = i_{\beta_q \beta_j}(X_{\beta_j}) = \text{lift}\ \Gamma_{oq}(p'_{oj}(X_{\beta_j})))_{\beta_q} = (\text{lift}\Gamma_{oq}(p'_{oj}(X_{\alpha_j})))\ \beta_q\ .$$

La relation (31) est donc vérifiée.

Nous établirons que les conditions du *Théorème 3* sont suffisantes.

Soit une distribution $\triangle$ satisfaisant aux conditions (29), (30), (31) du *Théorème 3*. Nous établirons qu'il existe une connexion infinitésimale Γ_{oq} de ξ_{oq} dont la distribution horizontale $\triangle^H_{\Gamma_{oq}}$ satisfait à la relation $p'_{jq}(\triangle^H_{\Gamma_{oq}}) = \triangle$.

La distribution $\triangle^H_{\Gamma_{oq}}$ sera définie par la relation

$$\forall \alpha_q \in E_q \mid \triangle^H_{\Gamma_{oq}}(\alpha_q) = i_{\alpha_q \alpha_j}(\triangle(\alpha_j)).$$

Nous vérifierons que la distribution définie de cette manière est la distribution horizontale d'une connexion infinitésimale de ξ_{oq} est que sa projection par p'_{jq} est $\triangle$.

Les relations (29) et (30) impliquent la relation

$$\forall\, \alpha_q \in E_q \mid T_{\alpha_q}(E_q) = \triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}(\alpha_q) \oplus \triangle^{V}_{oq}(\alpha_q).$$

La relation (31) nous montre que la distribution $\triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}$ est invariante aux translations à droite définies par les éléments de H_o. En efft :

$$\forall\, X_{\alpha_q} \in \triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}(\alpha_q) \ ; \ \forall\, a \in H_o \mid R'_a(X_{\alpha_q}) = R'_a(i_{\alpha_q \alpha_j}(X_{\alpha_j})) =$$
$$= i_{\beta_q \beta_j}(T_{\beta_j \alpha_j}(X_{\alpha_j})) = i_{\beta_q \beta_j}(X_{\beta_j}) \in \triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}(\beta_q).$$

En conséquence, $\triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}$ est la distribution horizontale d'une connexion infinitésimale de ξ_{oq}. La condition (30) implique que $p'_{jq}(\triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}) = \triangle^{\bullet}_{jq}$. Q.E.D.

Soit une distribution $\triangle$ de E_j. Nous allons établire d'autres conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une connexion infinitésimale Γ_{oq} de ξ_{oq}, dont la distribution horizontale $\triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}$ satisfasse à la relation $p'_{jq}(\triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}) = \triangle$. Dans ce but nous devons considérer les éléments suivants :

— Un recouvrement ouvert $\mathcal{D} = \{U, V, ...\}$ de E_o dont les éléments $U, V, ...$ sont des zones de trivialisation de ξ_{oq} et des zones géometriques des cartes locales de la structure différentielle de E_o.

— À chaque élément $U, V, ... \in \mathcal{D}$ nous associerons un ensemble $M_U = \{U_{jq}, U'_{jq}, ...\}$, $M_V = \{V_{jq}, V'_{jq}, ...\}$, ... où $M_U, M_V, ...$, est un recouvrement ouvert respectivement de $p^{-1}_{oj}(U)$, $p^{-1}_{oj}(V)$, ..., et $U_{jq}, V_{jq}, ...$ sont des zones de trivialisation de ξ_{jq} et des zones géométriques des cartes locales de la structure différentielle de E_j ;

— À chaque $U_{jq}, U'_{jq}, ..., V_{jq}, V'_{jq}, ...,$ on associera une section locale σ^{u}_{qj}, $\sigma^{u'}_{qj}, ..., \sigma^{v}_{qj}, \sigma^{v'}_{qj}, ...,$

— L'algèbre $X(U_{jq})$ aura une base locale $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \underset{u}{\bar{e}_s}\right)$, où $(e_s)_{\alpha_j} = p'_{jq}(e^{\bullet}_s)\sigma^{u}_{qj}(\alpha_j)$

Si $\alpha_j \in U_{jq} \cap V_{jq}$, alors les bases locales seront liées par

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j},$$

$$\underset{u}{\bar{e}_s} = k^t_s(a)\, \bar{e}_t \ ; \ \sigma^{v}_{jq}(\alpha_j) = \sigma^{u}_{jq}(\alpha_j)\, a \ ; \ a \in H_j .$$

— Pour l'algèbre $X(p^{-1}_{oq}(U))$ nous avons la base locale $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, e^{\bullet}_{a_1}, e^{\bullet}_{a_2}, e^{\bullet}_s\right)$ et nous noterons

$$a \in H_o,\ \alpha_q \in p^{-1}_{oq}(U) \mid R'_a\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha_q a} + A^{a_1}_i(\alpha_q, a)(e^{\bullet}_{a_1})_{\alpha_q a} +$$

(33)

$$+ \underset{U}{A^{a_2}_i}(\alpha_q, a)(e^{\bullet}_{a_2})_{\alpha_q a} + \underset{U}{A^{a_2}_i}(\alpha_q, a)(e^{\bullet}_s)_{\alpha_q a}$$

On établira le

Théorème 4. Soit une distribution $\triangle$ de E_j telle que pour chaque U_{jq} cette distribution a une base locale donnée par les champs vectoriels

$$\underset{u}{Y}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \underset{u}{P}{}^s_i \, \underset{u}{\bar{e}}_s, \; i = 1, \dots, n \; . \tag{34}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la distribution $\triangle$ soit l'image en p'_{jq} de la distribution horizontale $\triangle^H_{\Gamma_{oq}}$ d'une connexion Γ_{oq} de ξ_{oq} est que pour chaque $U \in \mathcal{D}$, il existe un système de fonctions $\left(\underset{U}{\bar{P}}{}^{a_1}_i , \underset{U}{\bar{P}}{}^{a_2}_i\right)$ définies sur $p^{-1}_{oq}(U)$, à valeurs réelles, satisfaisant aux conditions :

$$\forall \alpha_q \in p^{-1}_{oq}(U) \cap p^{-1}_{oq}(V) \;, \; \forall a \in H_o \mid$$

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \underset{V}{\bar{P}}{}^{a_1}_j (\beta_q) = \underset{U}{A}{}^{a_1}_i (\alpha_q, a) + \underset{U}{\bar{P}}{}^{b_1}_i (\alpha_q) \, k^{a_1}_{b_1}(a) + \underset{U}{\bar{P}}{}^{b_2}_i (\alpha_q) \, k^{a_1}_{b_2}(a) +$$
$$+ \underset{U}{P}{}^t_i (\alpha_j) \, k^s_t (a_o) \cdot k^{a_1}_s (a) \; ;$$

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \underset{V}{\bar{P}}{}^{a_2}_j (\beta_q) = \underset{U}{A}{}^{a_2}_i (\alpha^s_q) + \underset{U}{\bar{P}}{}^{b_2}_i (\alpha_q) \, k^{a_2}_{b_2}(a) + \underset{u}{P}{}^t_i (\alpha_j) \, k^s_t (a_o) \, k^{a_2}_s (a) \; ;$$

(35)

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \underset{v}{P}{}^t_j (\beta_j) \, k^s_t (b_o) = \underset{U}{A}{}^s_i (\alpha_q, a) + \underset{U}{\bar{P}}{}^{b_2}_i (\alpha_q) \, k^s_{b_2}(a) + \underset{u}{P}{}^t_i (\alpha_j) \, k^r_t (a_o) \, k^{a_2}(a) \; ;$$

$$\text{où } \beta_q = \alpha_q \cdot a \;, \; p_{jq}(\alpha_q) = \alpha_j \in U_{jq} \;, \; p_{jq}(\beta_q) = \beta_j \in V_{jq} \;,$$

$$\alpha_q = \sigma^u_{qj}(\alpha_j) \cdot a_o \;, \; \beta_q = \sigma^v_{qj}(\beta_j) \, . \, b_o \, ; \; a_o \;, \; b_o \in H_j \; .$$

Démonstration. En tenant compte du fait que la distribution $\triangle$ est définie sur U_{jq} par les champs $\underset{u}{Y}_j$, (34), la condition (29) est satisfaite.

Si $\alpha_j \in U_{jq} \cap V_{jq}$ et si $\sigma^v_{qj}(\alpha_j) = \sigma^u_q(\alpha_j) \, . \, b$, $(b \in H_j)$, alors pour les coefficients $\underset{u}{P}{}^s_i(\alpha_j)$ et $\underset{v}{P}{}^s_i(\alpha_j)$ des champs $\underset{u}{Y}_i$ et $\underset{v}{Y}_i$ nous avons la relation

$$\underset{v}{P}{}^s_i (\alpha_j) = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \underset{u}{P}{}^s_j (\alpha_j) \, k^s_t (b) \; . \tag{36}$$

Nous considérons une distribution $\widetilde{\triangle}$ définie sur l'ensemble $p^{-1}_{oq}(U)$ de E_q par les champs

$$\underset{U}{\bar{Y}}_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + \underset{U}{\bar{P}}{}^{a_1}_i e^*_{a_1} + \underset{U}{\bar{P}}{}^{a_2}_i e^*_{a_2} + \underset{U}{P}{}^s_i e^*_s \; . \tag{37}$$

Si $\alpha_q \in p^{-1}_{oq}(U) \cap p^{-1}_{oq}(V)$, les champs $\underset{V}{\bar{Y}}_i$ et $\underset{U}{\bar{Y}}_i$ sont liés par les relations

$$\underset{V}{Y}_i = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \underset{U}{\bar{Y}}_j \; . \tag{38}$$

Nous chercherons les conditions nécessaires pour que $\widetilde{\Delta}$ soit la distribution horizontale d'une connexion Γ_{oq} et que $p'_{jq}(\widetilde{\triangle}) = \triangle$.

Evidemment $\forall\, \alpha_q \in E_q \mid T_{\alpha_q}(E_q) = \triangle^{v}_{q}(\alpha_q) \oplus \widetilde{\triangle}(\alpha_q)$.

Pour que $\widetilde{\triangle}$ soit invariante aux translations à droite il est nécessaire et suffisant que

$$\forall\, a \in H_o,\ \alpha_q \in p^{-1}_{oq}(U) \mid R'_a \underset{U}{(Y_i)}_{\alpha_q} = \underset{U}{(Y_i)}_{\alpha_q \cdot a} \cdot$$

Ces relations nous donneront : $\forall\, a \in H_o$, $\alpha_q \in p^{-1}_{oq}(U) \mid$

$$\underset{U}{\overline{P}}{}^{a_1}_i(\beta_q) = \underset{U}{A}{}^{a_1}_i(\alpha_q, a) + \underset{U}{\overline{P}}{}^{b_1}_i(\alpha_q)\, k^{a_1}_{b_1}(a) + \underset{U}{\overline{P}}{}^{b_2}_i(\alpha_q)\, k^{a_1}_{b_2}(a) + \underset{U}{\overline{P}}{}^{s}_i(\alpha_q)\, k^{a_1}_{s}(a)\ ;$$

$$(39) \qquad \underset{U}{\overline{P}}{}^{a_2}_i(\beta_q) = \underset{U}{A}{}^{a_2}_i(\alpha_q, a) + \cdot + \underset{U}{\overline{P}}{}^{b_2}_i(\alpha_q)\, k^{a_2}_{b_2}(a) + \underset{U}{\overline{P}}{}^{s}_i(\alpha_q)\, k^{a_2}_{s}(a)\ ;$$

$$\underset{U}{\overline{P}}{}^{s}_i(\alpha_q) = \underset{U}{A}{}^{s}_i(\alpha_q, a) + \cdot + \underset{U}{P}{}^{b_2}_i(\alpha_q)\, k^{s}_{b_2}(a) + \underset{U}{\overline{P}}{}^{t}_i(\alpha_q)\, k^{s}_{t}(a).$$

La condition $p'_{jq}(\widetilde{\triangle}) = \triangle$ se traduit par les relations

$$(40) \qquad \forall\, \alpha_q \in p^{-1}_{oq}(U) \mid p_{jq}(\alpha_q) = \alpha_j \in U_{jq} \ \Rightarrow\ \underset{U}{\overline{P}}{}^{s}_i(\alpha_q) = \underset{U}{P}{}^{t}_i(\alpha_j)\, k^{s}_{t}(a_o)\ ,$$

où $\sigma^{u}_{qj}(\alpha_j).a_o = \alpha_q$, $(a_o \in H_j)$. (En vertu de la relation (28) $\underset{u}{P}{}^{t}_i(\alpha_j)\, k^{s}_{t}(a_o) = \underset{u}{P}{}^{t}_i(\alpha_j)\, k^{s}_{t}(a'_o)$ où $\sigma^{u'}_{qj}(\alpha_j) \cdot a'_o = \alpha_q$).

Les relations (38), (39), (40) sont équivalentes aux relations (35).

Proposition 5. S'il existe une solution $(\underset{U}{\overline{P}}{}^{a_1}_i, \underset{U}{\overline{P}}{}^{a_2}_i)$ du système (35) alors toute autre solution $(\underset{U}{\overline{\overline{P}}}{}^{a_1}_i, \underset{U}{\overline{\overline{P}}}{}^{a_2}_i)$ sera donnée par les relations

$$(41) \qquad \underset{U}{\overline{\overline{P}}}{}^{a_1}_i = \underset{U}{\overline{P}}{}^{a_1}_i + \underset{U}{T}{}^{a_1}_i\ ,\ \underset{U}{\overline{\overline{P}}}{}^{a_2}_i = \underset{U}{\overline{P}}{}^{a_2}_i\ ,$$

où les fonctions $\underset{U}{T}{}^{a_1}_i$ sont données par la relation (28) et satisfont aux conditions (26, (27).

Démonstration. Soit deux solutions, $\left(\underset{U}{\overline{P}}{}^{a_1}_i\ ,\ \underset{U}{\overline{P}}{}^{a_2}_i\right)$ et $\left(\underset{U}{\overline{\overline{P}}}{}^{a_1}_i\ ,\ \underset{U}{\overline{\overline{P}}}{}^{a_2}_i\right)$, du système (35). De (35) nous obtiendros immédiatement, par soustraction, les relations :

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\left(\underset{V}{\overline{\overline{P}}}{}^{a_1}_j(\beta_q) - \overline{P}{}^{a}_j(\beta_q)\right) = \left(\underset{U}{\overline{\overline{P}}}{}^{b_1}_i(\alpha_q) - \underset{U}{\overline{P}}{}^{b_1}_i(\alpha_q)\right) k^{a_1}_{b_1}(a) + \left(\underset{U}{\overline{\overline{P}}}{}^{b_2}_i(\alpha_q) - \underset{U}{\overline{P}}{}^{b_2}_i(\alpha_q)\right) k^{a_1}_{b_2}\ ;$$

$$(42)$$

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\left(\underset{V}{\overline{\overline{P}}}{}^{a_2}_j(\beta_q) - \underset{V}{\overline{P}}{}^{a_2}_j(\beta^a)\right) = \left(\underset{U}{\overline{\overline{P}}}{}^{b_2}_i(\alpha_q) - \underset{U}{\overline{P}}{}^{b_2}_i(\alpha_q)\right) k^{a_2}_{b_2}(a)\ ;$$

$$0 = \left(\underset{U}{\overline{\overline{P}}}{}^{b_2}_i(\alpha_q) - \underset{U}{\overline{P}}{}^{b_2}_i(\alpha_q)\right) k^{s}_{b_2}(a)\ ;$$

$$\forall \alpha_q \in p_{oq}^{-1}(U) \cap p_{oq}^{-1}(V)\ ,\ \forall a \in H_o\ ;\ \beta_q = \alpha_q \cdot a\ ;\ p_{jq}(\alpha_q) = \alpha_j \in U_{jq}\ ,\ p_{jq}(\beta_q) =$$
$$= \beta_j \in V_{jq}\ ,\ \alpha_q = \sigma_{qj}^{u}(\alpha_j) \cdot a_o\ ;\ \beta_q = \sigma_{qj}^{v}(\beta_j) \cdot b_o\ .$$

Considérons les champs vectoriels définis sur $p_{oq}^{-1}(U)$

$$V_i^U = \Big(\underset{U}{\overline{P}_i^{a_1}} - \underset{U}{P_i^{a_1}}\Big) e^{\bullet}_{a_1} + \Big(\underset{U}{\overline{P}_i^{a_2}} - \underset{U}{P_i^{a_2}}\Big) e^{\bullet}_{a_2}\ .$$

Evidemment $\forall \alpha_q \in p_{oq}^{-1}(U) \mid V_i^U(\alpha_q) \in \triangle_{jq}^{V}(\alpha_q)$. En raison des relations (42) $\forall a \in H_o$ $\mathrm{adj}\,.\,a^{-1}\,V_i^U = V_i^U$, équivalent à $R_a'\,V_i^U = V_i^U$, donc $V_i^U \in \triangle_{oj}^{VN}$, ce qui implique $\underset{U}{\overline{P}_i^{a_2}} = \underset{U}{P_i^{a_2}}$. Si nous écrirons $\underset{U}{\overline{P}_i^{a_1}} - \underset{U}{P_i^{a_1}} = \underset{U}{T_i^{a_1}}$, alors les fonctions $\underset{U}{T_i^{a_1}}$ satisfont aux conditions (26), (27) et en tenant compte des expression (37) pour les vecteurs $\overline{Y}_i^U$, Y_i^U, elles sont données par (28).

Remarque 8. Les fonctions $\underset{U}{T_i^{a_1}}$ définies par (41) détermineront, en raison de (28), l'homomorphisme $T : F\,V\,(E_q, \triangle_{\Gamma_{oq}}^{H}) \longrightarrow F\,V\,(E_q, \triangle_{oj}^{VN})$, où $\triangle_{\Gamma_{oq}}^{H}$ est la distribution horizontale de la connexion infinitésimale de ξ_{oq} déterminée par la solution $\Big(\underset{U}{P_i^{a_1}}\,,\,\underset{U}{P_i^{a_2}}\Big)$ de (35). L'homomorphisme T est le correspondant, dans la bijection définie dans la *Proposition 4*, de la connexion infinitésimale de ξ_{oq} déterminée par la solution $\Big(\underset{U}{\overline{P}_i^{a_1}}\,,\,\underset{U}{\overline{P}_i^{a_2}}\Big)$ de (35).

Remarque 9. Dans le cas $N_{oj} = \{e\}$ le système (35) se réduit à

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\,\underset{V}{\overline{P}_j^{a_2}}(\beta_q) = \underset{U}{A_i^{a_2}}(\alpha_q, a) + . + \underset{U}{\overline{P}_i^{b_2}}(\alpha_q)\,k_{b_2}^{a_2}(a) + \underset{u}{P_i^{t}}(\alpha_j)\,k_t^{s}(a_o)\,k_s^{a_2}(a)\ ;$$

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\,\underset{V}{P_j^{t}}(\beta_j)\,k_t^{s}(b_o) = \underset{U}{A_i^{s}}(\alpha_q, a) + . + \underset{U}{\overline{P}_i^{b_2}}(\alpha_q)\,k_{b_2}^{s} + \underset{u}{P_i^{t}}(\alpha_j)\,k_t^{r}(a_o)\,k_r^{s}(a)\ .$$

S'il existe une solution de ce système elle est unique, (Consequénce aussi du *Théorème 2.*).

Remarque 10. Dans le cas $N_{oj} = H_j$, le système (35) se réduit à

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\,\underset{V}{P_j^{a_1}}(\beta_q) = A_i^{a_1}(\alpha_j, a) + \underset{U}{\overline{P}_i^{b_1}}(\alpha_q)\,k_{b_1}^{a_1}(a) + \underset{u}{P_i^{t}}(\alpha_j)\,k_t^{s}(a_o)\,k_s^{a_1}(a)\ ;$$

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\,\underset{V}{P_j^{t}}(\beta_j)\,k_t^{s}(b_o) = A_i^{s}(\alpha_q, a) + \underset{u}{P_i^{t}}(\alpha_j)\,k_t^{r}(a_o)\,k_r^{s}(a)\ .$$

La seconde relation est la condition nécessaire et suffisante pour que $\triangle$ soit la distribution horizontale d'une connexion infinitésimale de ξ_{oj} (dans ce cas espace fibré principal).

4. Propriétés de l'ensemble des connexions de ξ_{jq}.

Nous considérons l'ensemble $\gamma_{jq} = \{ \Gamma_{jq} \}$ des connexions infinitesimales de ξ_{jq}. Si la connexion infinitésimale $\Gamma_{jq} \in \gamma_{jq}$ a comme distribution horizontale la distribution $\triangle^{H}_{\Gamma_{jq}}$ de E_q, alors on peut associer à Γ_{jq} la distribution $\bar{\triangle}_{\Gamma_{jq}} = \triangle^{H}_{\Gamma_{jq}} \cap \triangle^{V}_{oq}$ de E_q. Dans ([3], p. 17), par la *Définition 3*, on a introduit la relation d'équivalence : deux connexions arbitraires $\Gamma_{jq}, \Gamma'_{jq} \in \gamma_{jq}$ sont équivalentes si $\bar{\triangle}_{\Gamma_{jq}} = \bar{\triangle}_{\Gamma'_{jq}}$. La classe d'équivalence définie par Γ_{jq} sera notée par $\bar{\Gamma}_{jq}$.

Soit $F\,V\,(E_q, \triangle^{H}_{\Gamma_{jq}})$, $F\,V\,(E_q, \triangle^{V}_{jq})$ les espaces fibrés vectoriels définis sur E_q par les distributions $\triangle^{H}_{\Gamma_{jq}}, \triangle^{V}_{jq}$.

Dans le *Théorème 1*, en remplacant l'espace fibré ξ_{oq} par ξ_{jq} et les connexions $\{ \Gamma_{oq} \}$ par les connexions $\{ \Gamma_{jq} \}$, il en résulte que, s'il est donné une connexion Γ_{jq}, il existe une bijection $\varphi_{\Gamma_{jq}} : \gamma_{jq} = \{ \Gamma_{jq} \} \longrightarrow \{ T \}$, où $\{ T \}$ sont les homomorphismes entre $F\,V\,(E_q, \triangle^{H}_{\Gamma_{jq}})$ et $F\,V\,(E_q, \triangle^{V}_{jq})$.

Nous étudierons specialment la classe $\bar{\Gamma}_{jq}$.

Théorème 5. Il existe une bijection $\bar{\varphi}_{\Gamma_{jq}}$ entre l'ensemble Γ_{jq} et l'ensemble $\{ T \}$ des homomorphismes $T : F\,V\,(E_q, \triangle^{H}_{\Gamma_{jq}}) \longrightarrow F\,V\,(E_q, \triangle^{V}_{jq})$ qui satisfont aux conditions :

$$\text{Ker. } T \supset F\,V\,(E_q, \bar{\triangle}_{\Gamma_{jq}}) \,, \tag{43}$$

$$\forall a \in H_j \mid R'_a \circ T = T \circ R'_a \,. \tag{44}$$

Démonstration. La bijection $\bar{\varphi}_{\Gamma_{jq}} : \Gamma_{jq} \longrightarrow \{T\}$ sra donnée par la restriction $\bar{\varphi}_{\Gamma_{jq}} = \varphi_{\Gamma_{jq}} | \bar{\Gamma}_{jq}$. Il faut montrer que pour chaque $T = \bar{\varphi}_{\Gamma_{jq}}(\Gamma'_{jq})$, $\Gamma'_{jq} \in \bar{\Gamma}_{jq}$, la relation (44) est satisfaite.

En effet

$\forall X_x \in \bar{\triangle}_{\Gamma_{jq}}(\alpha_q)$, $T\,(X_{x_q}) = X'_{x_q} - X_{x_q}$, où $X'_{x_q} = \mathrm{lift}_{\Gamma'_{jq}}(p'\,(X_{x_q}))$. En tenant compte du fait que $\bar{\triangle}_{\Gamma_{jq}} \subset \triangle^{H}_{\Gamma_{jq}} \cap \triangle^{H}_{\Gamma'_{jq}}$, il en résulte que $T\,(X_{x_q}) = 0$.

Réciproqument, si $T : F\,V\,(E_q, \triangle^{H}_{\Gamma_{jq}}) \longrightarrow F\,V\,(E_q, \triangle^{V}_{jq})$ satisfait aux conditions (43) et (44), il existe une connexion Γ'_{jq} telle que $\varphi_{\Gamma_{jq}}(\Gamma'_{jq}) = T$ et $\Gamma'_{jq} \in \bar{\Gamma}_{jq}$, donc $\bar{\varphi}_{\Gamma_{jq}}(\Gamma'_{jq}) = T$.

Q.E.D.

Remarque 11. En tenant compte du fait que l'ensemble T des homomorphismes $T : F\,V\,(E_q, \triangle^{H}_{\Gamma_{jq}}) \longrightarrow F\,V\,(E_q, \triangle^{V}_{jq})$ qui satisfont aux conditions (43) et (44) est un espace linéaire sur le corp des réels il en résulte que sur $\bar{\Gamma}_{jq}$ sera induite par $\bar{\varphi}_{\Gamma_{jq}}$ une structure d'espace linéaire.

Remarque 12. Soit $\omega_{\Gamma_{jq}}$ la 1-forme fondamentale de la connexion Γ_{jq}. Nous allons considérer les fonctions $(f^{a_1}_{\alpha}, f^{a_2}_{\alpha})$ définies par la relation

$$\omega_{\Gamma_{jq}}(e^{*}_{\alpha}) = f^{a_1}_{\alpha}\, e_{a_1} + f^{a_2}_{\alpha}\, e_{a_2} \,. \tag{45}$$

Ces fonctions satisfont aux relations (27), [3]:

$$\forall\, a \in H_j\ ,\ \alpha_q \in E_q \mid f_s^{a_1}(\alpha_q, a) = \bar{k}_s^t\,[f_t^{b_1}(\alpha_q)\, k_{b_1}^{a_1} + f_t^{b_2}(\alpha_q)\, k_{b_2}^{a_1} - k_t^{a_1}]\ ;$$

(46)
$$f_s^{a_2}(\alpha_q, a) = \bar{k}_s^t\,[f_t^{b_2}(\alpha_q)\, k_{b_2}^{a_2} - k_t^{a_2}]$$

À l'aide des fonctions $(f_s^{a_1}, f_s^{a_2})$ nous définirons les champs vectoriels

(47)
$$v_s^{\bullet} = - f_s^{a_1}\, e_{a_1}^{\bullet} - f_s^{a_2}\, e_{a_2}^{\bullet} + e_s^{\bullet}\ ,$$

qui constituent une base de $\bar{\triangle}_{\Gamma_{jq}}$. Nous avons

(48)
$$\forall\, a \in H_j\ ,\ \alpha_q \in E_q \mid R_a^{\cdot}\,(v_s^{\bullet})_{\alpha_q} = k_s^t(a)\,(v_t^{\bullet})_{\alpha_q a}$$

Proposition 6. Soit $\mathcal{D} = \{U, V, \ldots\}$ un recouvrement ouvert de E_o tel que chacun de ses éléments est la zone géométrique d'un carte locale d'un atlas $A = \{(U, \chi)\}$ de la structure différentielle de E est aussi une zone de trivialisation de ξ_{oq}. L'ensemble $\bar{\Gamma}_{jq}$ peut être mis en bijection avec les systèmes des fonctions $\left\{ \left(\underset{U}{S_i^{a_1}}, \underset{U}{S_i^{a_2}}\right) \mid \forall\, U \in \mathcal{D}\ ;\ \underset{U}{S_i^{a_1}}, \underset{U}{S_i^{a_2}} : p_{oq}^{-1}(U) \longrightarrow R \right\}$ satisfaisant aux conditions

$$\forall\, \alpha_q \in E_q\ ,\ a \in H_j \left|\ \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\, \underset{V}{S_j^{a_1}}(\alpha_q\, a) = \underset{U}{S_i^{b_1}}(\alpha_q)\, k_{b_1}^{a_1}(a) + \underset{U}{S_i^{b_2}}(\alpha_q)\, k_{b_2}^{a_1}(a)\ ;\right.$$

(49)
$$\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\, \underset{V}{S_j^{a_2}}(\alpha_q\, a) = \quad .\quad + \underset{U}{S_i^{b_2}}(\alpha_q)\, k_{b_2}^{a_2}(a).$$

Démonstration. Considérons un élément arbitraire $\Gamma_{jq}^{\cdot} \in \bar{\Gamma}_{jq}$ et l'homomorphisme $T : F\,V\,(E_q, \triangle_{\Gamma_{jq}}^{H}) \longrightarrow F\,V\,(E_q, \triangle_{jq}^{V})$ qui correspond à Γ_{jq} dans la bijection $\bar{\varphi}_{\Gamma_{jq}}$ définie dans le *Théorème 5.* Soit $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)^{*}$ le lift du champ $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ de E_j, champ défini sur $p_{oq}^{-1}(U)$. Les champs $\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)^{*}, v_s^{\bullet}\right)$ constituent une base locale de la distribution $\triangle_{\Gamma_{jq}}^{H}$. L'homomorphisme T sera déterminé si nous connaissons les images de $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)^{*}$ et $v_s^{\bullet}$ dans T. En vertu de la relation (44) nous avons $T\,(v_s^{\bullet}) = 0$. Nous noterons

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^{*} = \underset{U}{S_i^{a_1}}\, e_{a_1}^{\bullet} + \underset{U}{S_i^{a_2}}\, e_{a_2}^{\bullet}$$

T étant défini de manière unique par le système des fonctions $\left\{ \left(\underset{U}{S_i^{a_1}}, \underset{U}{S_i^{a_2}}\right)\ ;\ \forall\, (U, \chi) \in A \right\}$ et réciproquement. En raison des conditions (43), les relations (49) sont vérifiées. Q.E.D.

Remarque 13. Evidemment, le cardinal de l'ensemble $\{\bar{\Gamma}_{jq}\}$ des classes de γ_{jq} est le même que le cardinal de l'ensemble des distributions $\{\bar{\triangle}\}$ de E_q qui satisfont aux relations

(50)
$$\bar{\triangle} \oplus \triangle_{jq}^{V} = \triangle_{oq}^{V}\ ,$$
$$\forall\, a \in H_j \mid R_a^{\cdot}\, \bar{\triangle} = \bar{\triangle}$$

Entre ces deux ensembles nous avons une bijection, la distribution $\bar{\triangle}$ correspondant à la classe Γ_{jq} étant $\bar{\triangle} = \triangle^{V}_{oq} \cap \triangle^{H}_{\Gamma_{jq}}$.

Remarque 14. Si $\bar{\triangle}$ est une distribution qui satisfait aux relations (50) alors elle aura une base globale donnée par les champs vectoriels (47), où les fonctions $f^{a_1}_{s}$, $f^{a_2}_{s}$ satisfont aux relations (46).

Pour l'ensemble $\{\bar{\triangle}\}$ nous avons le

Théorème 6. Il existe une bijection $\varphi_{\bar{\Delta}}$ entre l'ensemble des distributions $\{\bar{\triangle}\}$ de E_q qui satisfont aux conditions (50) et l'ensemble $\{T\}$ des homomorphismes T: $FV(E_q, \bar{\triangle}) \longrightarrow FV(E_q, \triangle^{V}_{jq})$ satisfaisant à la condition

$$\forall a \in H_j \mid R'_a \circ T = T \circ R'_a \tag{51}$$

Démonstration. Considérons l'ensemble $\{\bar{\triangle}\}$ des distributions qui satifont aux conditions (50). À l'aide d'une distribution $\bar{\triangle} \in \{\bar{\triangle}\}$, en répétant pas à pas la demonstration du *Théorème 1* nous définiron la bijection $\varphi_{\bar{\Delta}} : \{\bar{\triangle}\} \longrightarrow \{T\}$. Dans ce but nous allons seulement observer que, pour une distribution arbitraire $\bar{\triangle}' \in \{\bar{\triangle}\}$, la projection p'_{jq} est une injection sur $\triangle^{V}_{oj}$. On utilise cette remarque dans la demonstration. Q.E.D.

Proposition 7. Il existe une bijection $\psi_{\bar{\Delta}}$ entre l'ensemble $\{\bar{\triangle}\}$ de distributions qui satisfont aux conditions (50) et l'ensemble de systèmes des fonctions $\{(Q^{a_1}_{s}, Q^{a_2}_{s});\ Q^{ai}_{s} : E_q \longrightarrow R\ ;\ i = 1, 2\}$, satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} \forall a \in H_j\ ,\ \alpha_q \in E \mid Q^{a_1}_{t}(\alpha_q a) = \\ = \bar{k}^{s}_{t}(a)\,[Q^{b_1}_{s}(\alpha_q)\,k^{a_1}_{b_1}(a) + Q^{b_2}_{s}(\alpha_q)\,k^{a_1}_{b_2}(a)] \\ Q^{a_2}_{t}(\alpha_q a) = \bar{k}^{s}_{t}(a)\,Q^{b_2}_{s}(\alpha_q)\,k^{a_2}_{b_2}(a)\,. \end{aligned} \tag{52}$$

Démonstration. Considérons la bijection $\varphi_{\bar{\Delta}} : \{\bar{\Delta}\} \longrightarrow \{T\}$. À l'aide de la base (v^{*}_{s}) de $\bar{\triangle}$, nous ferons correspondre à chaque T le système $(Q^{a_1}_{s}, Q^{a_2}_{s})$ défini par la relation $T(v^{*}_{s}) = Q^{a_1}_{s} e^{*}_{a_1} + Q^{a_2}_{s} e^{*}_{a_2}$. En tenant compte des relations (51) et (48), les relations (52) sont satisfaits.

La correspondance $\psi_{\bar{\Delta}} : T \in \{T\} \longrightarrow \psi_{\bar{\Delta}}(T) = (Q^{a_1}_{s}, Q^{a_2}_{s}) \in \{(Q^{a_1}_{s}, Q^{a_2}_{s}) \mid Q^{ai}_{s} : E_q \longrightarrow R : i = 1, 2\}$ est évidemment une bijection. Q.E.D.

5. Les applications $h_{\bar{\Delta}} : \gamma_{oq} \longrightarrow \gamma_{jq}$.

Nous considérons les ensembles γ_{oq} et γ_{jq}. Nous définirons une correspondance entre γ_{oq} et γ_{jq} de la manière suivante : à chaque $\Gamma_{oq} \in \gamma_{oq}$ correspondront toutes les connexions $\Gamma_{jq} \in \gamma_{jq}$ dont les distributions horizontales contiennent la distribution horizontale de Γ_{oq}. Si on a choisi une connexion Γ_{oq}, l'ensemble des connexions Γ_{jq} qui correspondront à cette connexion peut être mis en bijection avec l'ensemble $\{\bar{\triangle}\}$ des distributions de E_q qui satisfont aux relations (50).

Si on a choisi une distribution $\bar{\triangle} \in \{\bar{\triangle}\}$ de E_q, distributions qui satisfont aux relations (50), nous avons une application $h_{\bar{\Delta}}$, [3], de γ_{oq} dans γ_{jq}.

Si la distribution $\overline{\triangle}$ est déterminée à l'aide de la base globale $v^{*}_{s} = - f^{a_1}_{s} e^{*}_{a_1} - f^{a_2}_{s} e^{*}_{a_2} + e^{*}_{s}$, $s = r_j + 1, \ldots, r_o$, (voir la Remarque 12) alors l'application $h_{\overline{\Delta}}$: $\gamma_{oq} \longrightarrow \gamma_{jq}$ sera définie de la manière suivante : si une connexion $\Gamma_{oq} \in \gamma_{oq}$ est donnée par la 1-forme fondamentale $\omega_{\Gamma_{oq}} = \omega^{a_1}_{\Gamma_{oq}} e_{a_1} + \omega^{a_2}_{\Gamma_{oq}} e_{a_2} + \omega^{s}_{\Gamma_{oq}} e_s$, alors la connexion $h_{\overline{\Delta}}(\Gamma_{oq}) \in \gamma_{jq}$ sera donnée par la 1-forme fondamentale,

$$\omega_{\Gamma_{jq}} = (\omega^{a_1}_{\Gamma_{oq}} + f^{a_1}_{s}\, \omega^{s}_{\Gamma_{oq}})\, e_{a_1} + (\omega^{a_2}_{\Gamma_{oq}} + f^{a_2}_{s}\, \omega^{s}_{\Gamma_{oq}})\, e_{a_2} \,. \tag{53}$$

Le problème que nous allons étudier est le suivant : qu'est-ce qu'on peut dire de l'ensemble des connexions Γ_{oq} qui ont la même image dans une application $h_{\overline{\Delta}}$ donnée.

Nous noterons par $\overline{\triangle}_1$, la distribution de E_q qui satisfait aux conditions suivantes:

$$\overline{\triangle}_1 \subset \overline{\triangle} \ ; \ \forall\, a \in H_o \ \mid \ R'_a \overline{\triangle}_1 = \overline{\triangle}_1 \ , \tag{54}$$

étant la distribution maximale qui a ces propriétés. Par $F\,V\,(E_q, \overline{\triangle}_1)$ nous noterons le fibré vectoriel défini sur E_q par $\overline{\triangle}_1$. Nous avons :

Théorème 7. Soit une connexion $\Gamma_{oq} \in \gamma_{oq}$ et son image en $h_{\overline{\Delta}}$, $\Gamma_{jq} = h_{\overline{\Delta}}(\Gamma_{oq})$. Il existe une bijection $\theta_{\overline{\Delta}}$ entre l'ensemble des connexions $\{\Gamma_{oq}\} = h^{-1}_{\overline{\Delta}}(\Gamma_{jq})$ et l'ensemble $\{T\}$ des homomorphismes $T : F\,V\,(E_q, \triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}) \longrightarrow F\,V\,(E_q, \overline{\triangle})$ satisfaisant à la condition

$$\forall\, a \in H_o \ \mid \ R'_a \circ T = T \circ R'_a \tag{55}$$

Démonstration. Considérons une connexion $\Gamma'_{oq} \in h^{-1}_{\overline{\Delta}}(\Gamma_{jq})$. En tenant compte de la relation $\triangle^{H}_{\Gamma_{oq}} = \triangle^{H}_{\Gamma_{oq}} \oplus \overline{\triangle}$, l'homomorphisme $T' = \theta_{\overline{\Delta}}(\Gamma'_{oq})$ est défini de la manière suivante :

$$\forall\, X_{x_q} \in \triangle^{H}_{\Gamma_{oq}}(x_q) \ \mid \ T'(X_{x_q}) = X'_{x_q} - X_{x_q}$$

où $X'_{x_q} \in \triangle^{H'}_{\Gamma_{oq}}(x_q)$ et $p'_{oq}(X'_{x_q}) = p'_{oq}(X_{x_q})$. Evidemment $X'_{x_q} - X_{x_q} \in \overline{\triangle}(x_q)$. Pour le reste la démonstration coincide avec la démonstration du *Théorème 1.*

Q.E.D.

Remarque 15. Le théorème précédent implique que l'ensemble $h^{-1}_{\overline{\Delta}}(\Gamma_{jq})$ peut être structuré comme un espace linéaire sur le corps des réels. On obtient cette structure en utilisant la bijection $\theta_{\overline{\Delta}}$ et la structure linéaire de $\{T\}$.

Remarque 16. En tenant compte de la relation (53), si une distribution $\overline{\triangle}$ est donnée, à l'aide des champs v^{*}_{s}, les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux connexions Γ_{oq} et Γ'_{oq} aient la même image dans $h_{\overline{\Delta}}$ sont que les 1-formes fondamentales de ces connexions satisfassent aux conditions

$$\begin{aligned} &\omega^{a_1}_{\Gamma'_{oq}} - \omega^{a_1}_{\Gamma_{oq}} + f^{a_1}_{s}(\omega^{s}_{\Gamma'_{oq}} - \omega^{s}_{\Gamma_{oq}}) = 0 \ , \\ &\omega^{a_2}_{\Gamma'_{oq}} - \omega^{a_2}_{\Gamma_{oq}} + f^{a_2}_{s}(\omega^{s}_{\Gamma'_{oq}} - \omega^{s}_{\Gamma_{oq}}) = 0 \ . \end{aligned} \tag{56}$$

Nous considérons le problème suivant : étant donnée une connexion $\Gamma_{jq} \in \gamma_{jq}$, existe - t - il des connexions $\Gamma_{oq} \in \gamma_{oq}$ dont les distributions horizontales soient contenues dans la distribution horizontale de Γ_{jq}? En tenant compte du fait que la connexion donnée Γ_{jq} définira de manière unique une distribution $\overline{\triangle}$ par la relation $\overline{\triangle} = \triangle^{H}_{\Gamma_{jq}} \cap \triangle^{V}_{oq}$, alors le problème énoncé ci-dessus devient : Existe - t - il une connexion Γ_{oq} telle que $h_{\overline{\Delta}}(\Gamma_{oq}) = \Gamma_{jq}$?

Supposons que la connexion Γ_{jq} soit donnée à l'aide de sa 1-forme fondamentale

$$\omega_{\Gamma_{jq}} = \omega^{a_1}_{\Gamma_{jq}} e_{a_1} + \omega^{a_2}_{\Gamma_{jq}} e_{a_2} . \tag{57}$$

La distribution $\overline{\triangle} = \triangle^{H}_{\Gamma_{oq}} \cap \triangle^{V}_{oq}$ sera définie à l'aide des champs vectoriels $v^{*}_{s} = -f^{a_1}_{s} e^{*}_{a_1} - f^{a_2}_{s} e^{*}_{a_2} + e^{*}_{s}$, où $\omega^{a_1}_{\Gamma_{jq}}(e^{*}_{s}) = f^{a_1}_{s}$, $\omega^{a_2}_{\Gamma_{jq}}(e^{*}_{s}) = f^{a_2}_{s}$. Si U est la zone géométrique d'une carte de trivialization de ξ_{oq} et d'une carte de l'atlas $A = \{(U, \chi)\}$ de la structure différentielle de E_o, alors sur $p^{-1}_{oq}(U)$ on peut considérer la base locale $\left(e^{*}_{a_1}, e^{*}_{a_2}, e^{*}_{s}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ de l'algèbre $\mathcal{X}(p^{-1}_{oq}(U))$. Nous noterons : $\omega^{a_1}_{\Gamma_{jq}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \underset{U}{M^{a_1}_i}$, $\omega^{a_2}_{\Gamma_{jq}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \underset{U}{M^{a_2}_i}$ et $\forall\, a \in H_o \mid R^{*}_{a}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i} + \underset{U}{A^{a_1}_i} e^{*}_{a_1} + \underset{U}{A^{a_2}_i} e^{*}_{a_2} + \underset{U}{A^{s}_i} e^{*}_{s}$. A l'aide de ces notations on est conduit à énoncer

Théorème 8. S'il est donné une connexion Γ_{jq} par la 1-forme (57), alors pour chaque système de fonctions $\left\{ \underset{U}{C^s_i} \mid \forall\, (U, \chi) \in A \,,\ \underset{U}{C^s_i} : p^{-1}_{oq}(U) \longrightarrow R \right\}$ liées par les relations

$$\forall\, \alpha_q \in p^{-1}_{oq}(U) \cap p^{-1}_{oq}(V) \mid \underset{U}{C^s_i}(\alpha_q) = \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\right) \underset{U}{C^s_j}(\alpha_q), \tag{58}$$

$$\begin{aligned} \forall\, \alpha_q \in p^{-1}_{oq}(U),\ a \in H_o \mid \underset{U}{C^s_i}(\alpha_q a) &= \underset{U}{A^s_i}(\alpha_q, a) + \\ &+ \underset{U}{M^{b_2}_i}(\alpha_q)\, k^s_{b_2}(a) + [k^s_t(a) - f^{b_2}_t(\alpha_q)\, k^s_{b_2}]\, \underset{U}{C^t_i}(\alpha_q), \end{aligned} \tag{59}$$

et satisfaisant aux conditions

$$\forall\, \alpha_q \in p^{-1}_{oq}(U) \,,\ a \in H_o \mid$$

$$\begin{aligned} &\underset{U}{M^{a_1}_i}(\alpha_q a) - f^{a_1}_s(\alpha_q a)\, \underset{U}{C^s_i}(\alpha_q a) = \underset{U}{A^{a_1}_i}(\alpha_q, a) + \underset{U}{M^{b_1}_i}(\alpha_q)\, k^{a_1}_{b_1}(a) + \\ &+ \underset{U}{M^{b_2}_i}(\alpha_q)\, k^{a_1}_{b_2}(a) + \left[- f^{b_1}_s(\alpha_q)\, k^{a_1}_{b_1}(a) - f^{b_2}_s(\alpha_q)\, k^{a_1}_{b_2}(a) + k^{a_1}_s(a)\right] \underset{U}{C^s_i}(\alpha_q) \,; \\ &\underset{U}{M^{a_2}_i}(\alpha_q a) - f^{a_2}_s(\alpha_q a)\, \underset{U}{C^s_i}(\alpha_q a) = \underset{U}{A^{a_2}_i}(\alpha_q, a) + \underset{U}{M^{b_2}_i}(\alpha_q)\, k^{a_2}_{b_2}(a) + \\ &+ \left[- f^{b_2}_s(\alpha_q)\, k^{a_2}_{b_2}(a) + k^{a_2}_s(a)\right] \underset{U}{C^s_i}(\alpha_q) \,; \end{aligned} \tag{60}$$

il existe una connexion Γ_{oq} unique telle que $h_{\overline{\Delta}}(\Gamma_{oq}) = \Gamma_{jq}$. La 1-forme de Γ_{oq} est donnée par les relations

$$\omega_{\Gamma_{oq}} = \omega_{\Gamma_{jq}} + (-f^{a_1}_s e_{a_1} - f^{a_2}_s e_{a_2} + e_s)\, \omega^s \,, \tag{61}$$

où

$$\omega^s\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \underset{U}{C_i^s}\ ,\ \omega^s(e^*_{a_1}) = 0\ ,\ \omega^s(e^*_{a_2}) = 0\ ,\ \omega^s(e^*_i) = \delta_i^s\ . \tag{62}$$

Réciproquement, pour chaque Γ_{oq} satisfaisant à la condition $h_{\bar{\Delta}}(\Gamma_{oq}) = \Gamma_{jq}$ il existe un système unique de fonctions $\left\{\underset{U}{C_i^s} \mid \underset{U}{C_i^s} : p_{oq}^{-1}(U) \longrightarrow R\right\}$ liées par les relation (58), (59) et satisfaisant aux conditions (60).

Démonstration. Considérons un système de fonctions $\left\{\underset{U}{C_i^s} \mid \forall (U, \chi) \in A\ ;\ \underset{U}{C_i^s} : p_{op}^{-1}(U) \longrightarrow R\right\}$ liées par les relations (58), (59), satisfaisant aux conditions (60). Nous construirons les 1-formes différentielles $\underset{U}{\omega^s}$, définies sur $X\,(p_{oq}^{-1}(U))$, à valeurs réelles, déterminées par les relations (62). En tenant compte des relations (58) nous avons $\forall\, \alpha_q \in p_{oq}^{-1}(U) \cap p_{oq}^{-1}(V) \mid \underset{U}{\omega^s}(\alpha_q) = \underset{V}{\omega^s}(\alpha_q)$, donc on peut parler de la 1-forme ω^s, définie sur $X(E_q)$, à valeurs réelles. À l'aide de cette 1-forme nous construirons la 1-forme ω (61) définie sur $X(E_q)$, à valeurs dans g_0, satisfaisant aux conditions $\omega(e^*_{a_1}) = e_{a_1}\ ,\ \omega(e^*_{a_2}) = e_{\rho_2}\ ,\ \omega(e^*_i) = e_i$. De plus, en raison des relations (59), (60) nous avons $\forall\, a \in H_0 \mid R^*_a\,\omega = \mathrm{adj}\, a^{-1}\,\omega$. Cette forme définira une connexion infinitésimale Γ_{oq} sur ξ_{oq}, pour la quelle $h_{\bar{\Delta}}(\Gamma_{oq}) = \Gamma_{jq}$.

Réciproquement, si l'on a une connexion infinitésimale Γ_{oq} telle que $h_{\bar{\Delta}}(\Gamma_{oq}) = \Gamma_{jq}$, alors le système de fonctions $\omega^s\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right) = \underset{U}{C_i^s}$, $(\forall\, (U, \chi) \in A)$, constituera un système de fonctions liées par (58), (59) et satisfaisant aux conditions (60).

Q.E.D.

Remarque 17. Soit une distribution $\bar{\triangle}$ de E_q satisfaisant aux conditions (50). Elle définira une injection de l'ensemble $\{\Gamma_{oq}\} = \gamma_{oq}$ dans l'ensemble des paires $\{(\triangle, \Gamma_{jq})\}$, où $\triangle$ est une distribution de E_j satisfaisant à la condition

$$\forall\, \alpha_j \in E_j \mid T_{\alpha j}(E_j) = \triangle(\alpha_j) \oplus \triangle_{oj}^{V}(\alpha_j)$$

La paire qui correspondra à une connexion donnée Γ_{oq} sera définie par les relations : $\triangle = p'_{jq}(\triangle^H_{\Gamma_{oq}})$ et Γ_{jq} est la connexion infinitésimale de ξ_{jq} dont la distribution horizontale contient $\triangle$ et $\triangle^H_{\Gamma_{oq}}$.

BIBLIOGRAPHIE

(¹) Kobayashi S. and Nomizu K. - Foundations of differential geometry. Interscience publihers, 1963.

(²) Lichnerowicz André - Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie. Edition russe, Moscou 1960.

(³) Papuc I. Dan - Sur les raffinements d'un espace fibré, principal, différentiable. Ann. St. Univ. Al. I. Cuza, Iasi (Serie noua) Sect I. Mat. Tom. XVIII, Fasc. 2., 1972.