MEHMET NAMIK OĞUZTÖRELI

Su un problema misto concernente un'equazione polivibrante d'ordine superiore di Mangeron (*)

Summary: In this paper we investigate a mixed problem for a high order polyvibrating equation of Mangeron, extending certain results of M. PICONE given in his comprehensive Memoires of 1911.

1. In ciò che segue ci occuperemo dello studio della soluzione dell'equazione polivibrante d'ordine superiore di Mangeron

$$\partial \theta u = \lambda c u + f, \tag{1}$$

sottoposta alle condizioni

$$\partial^{\vartheta} u \Big|_{x_\mu = 0} = 0 \ (\vartheta = 0, 1, \dots, n-2), \ \partial^{\vartheta n-1} u \Big|_{x_\mu = \alpha_\mu} = 0 \ (\mu = 1, 2, \dots, m), \tag{2}$$

ove ∂^{ϑ} denota la ϑ -ma «derivata totale» nel senso di M. Picone (***) $n \geqslant 2$, $m \geqslant 4$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m-1} = 0$, $\alpha_m = \alpha$ (cost.), λ è un parametro, $c = c(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ed $f = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ sono funzioni note, analitiche per ogni valore finito dei loro argomenti. Desideriamo trovare una funzione $u = u(x_1, x_2, \dots, x_m)$ di classe C^{mn} soddisfacente l'equazione (1) e le condizioni (2) (****).

(*) Memoria presentata dall'Accademico MAURO PICONE.

Il lavoro è stato in parte finanziato con il Grant NRC-A4345 del National Research Council of Canada tramite l'Università di Alberta.

(**) È degno di sottolineare l'interesse destato da vari risultati concernenti lo studio delle equazioni di Mangeron [1] tanto nel dominio dei sistemi astratti [2], quanto in quell'applicativo, come lo è, ad esempio, quello spettante alla costruzione automatica delle superficie di forma qualunque [3].

(***) $$\partial^{\vartheta}_{*} = \frac{\partial^{m\vartheta}}{\partial x_1^{\vartheta} \partial x_2^{\vartheta} \dots \partial x_m^{\vartheta}}.$$

(****) Avendo in vista che lo scopo di questa nota consiste nel dimostrare l'efficienza del problema misto formulato qui sopra, l'A. rinuncia appositamente alla trattazione di altri problemi misti che si presentano partendo da condizioni più complicate che le (2), sia dalla rinuncia alle supposizioni di analiticità, ecc.

È ben chiaro che il problema misto or ora formulato si riduce al problema di Goursat [2] per $\alpha = 0$. Facciamo pure presente che per semplificare l'esposizione si è posto $x_{i+m} = x_i$.

2. Allo scopo di risolvere il problema (1)-(2), integriamo successivamente la equazione (1). Si ottengono le seguenti relazioni:

$$\delta^{n-1} u = \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\cdots\int_0^{x_m} \Big\{ \lambda c(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)\, u(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) + f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \Big\}\, d\xi_1 \dots d\xi_m$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \Phi_{n-1,i}(x_i, x_{i+2}, \dots, x_{i+m-1}),$$

$$\dots$$

$$\delta^{n-r} u = \int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_m} \left(\prod_{k=1}^{m} \frac{(x_k - \xi_k)^{r-1}}{(r-1)!} \right) \Big\{ \lambda c(\xi_1, \dots, \xi_m)\, u(\xi_1, \dots, \xi_m) + f(\xi_1, \dots, \xi_m) \Big\}\, d\xi_1 \dots d\xi_m$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r-1} \int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_m} \left(\prod_{k=1}^{m} \frac{(x_k - \xi_k)^{r-j-1}}{(r-j-1)!} \right) \Phi_{n-j,i}(\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+m-1})\, d\xi_1 \dots d\xi_m$$

$$(3) \qquad + \sum_{i=1}^{m} \Phi_{n-r,i}(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}),$$

$$\dots$$

$$u = \int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_m} \left(\prod_{k=1}^{m} \frac{(x_k - \xi_k)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \Big\{ \lambda c(\xi_1, \dots, \xi_m)\, u(\xi_1, \dots, \xi_m) + f(\xi_1, \dots, \xi_m) \Big\}\, d\xi_1 \dots d\xi_m$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_m} \left(\prod_{k=1}^{m} \frac{(x_k - \xi_k)^{n-j-1}}{(n-j-1)!} \right) \Phi_{n-j,i}(\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+m-1})\, d\xi_1 \dots d\xi_m$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \Phi_{0,i}(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}),$$

ove $\Phi_{j,i}$ $(i = 1, \dots, m;\ j = 0, 1, \dots, n-1)$ sono certe funzioni sufficientemente nitide che si devono determinare.

Poniamo

$$(4) \qquad \Omega_j = \Omega_j(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} \Phi_{j,i}(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}).$$

Ne segue, in virtù delle equazioni (2), (3) e (4)

$$
(5)\quad \begin{cases} \Omega_j \Big|_{x_\mu = 0} = 0 \, (j = 0, 1, \dots, n-2 \; ; \; \mu = 1, \dots, m), \\[2ex] \Omega_{n-1} \Big|_{x_\mu = 0} = 0 \, (\mu = 1, \dots, m-1), \\[2ex] \Omega_{n-1} \Big|_{x_m = \alpha} = -\int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{m-1}} \int_0^{\alpha} \Big\{ \lambda c(\xi_1, \dots, \xi_m) u(\xi_1, \dots, \xi_m) + f(\xi_1, \dots, \xi_m) \Big\} d\xi_i \dots d\xi_m . \end{cases}
$$

Le (5) ci danno dunque mn equazioni con m n funzioni incognite $\Phi_{j,i}$.

È ben chiaro che tutte le funzioni $\Phi^{(1)}_{j,i}$ dipendono dalla variabile x_μ fuorché $\Phi_{j,\mu+1}(x_{\mu+1}, \dots, x_m, x_1, \dots, x_{\mu-1})$. Perciò, nella equazione $\Omega_j \big|_{x_\mu = 0} = 0$ vi sarà una sola funzione e precisamente la $\Omega_{j,\mu+1}$ che non sarà influenzata dal fatto di avervi posto $x_\mu = 0$. In altre parole, in questa equazione soltanto la $\Phi_{j,\mu+1}$ dipende effettivamente dalle $m-1$ variabili, mentre tutte le altre funzioni che ivi intervengono dipendono soltanto dalle $m-2$ variabili se vi si esclude x_μ. Sommando le equazioni $\Phi_j \big|_{x_\mu = 0} = 0$ $(\mu = 1, \dots, m)$ per j $(j = 0, 1, \dots, n-2)$ fissato si ottiene immediatamente

$$
(6)\qquad \Omega_j(x_1, \dots, x_m) \equiv \sum \Phi^{(1)}_{j, i_1, i_2, \dots, i_{m-2}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{m-2}}),
$$

ove la sommatoria si estende a tutti i $m-2$ arrangiamenti $(i_1, i_2, \dots, i_{m-2})$ dei numeri 1, 2, ..., m con $i_1 < i_2 < \dots < i_{m-2}$.

In virtù delle equazioni (5) si ottengono m equazioni tra le funzioni $\Phi^{(1)}_{j, i_1, i_2, \dots, i_{m-2}}$ e soltanto due di queste funzioni non sono interessate se vi si pone $x_\mu = 0$. Pertanto sommando queste equazioni, si trova

$$
(7)\qquad \Omega_j(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum \Phi^{(2)}_{j, i_1, i_2, \dots, i_{m-3}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{m-3}}),
$$

ove la sommatoria si estende a tutti gli $m-3$ arrangiamenti dei numeri 1, 2, ..., m essendovi $i_1 < i_2 < \dots < i_{m-3}$.

Proseguendo in modo simile n-2 volte, si ottiene

$$
(7)\qquad \Omega_j(x_1, \dots, x_m) \equiv \sum_{i=1}^{m} \Phi^{(n-2)}_i(x_i).
$$

In virtù delle equazioni (5) si ha

$$(9)\quad \begin{cases} \Phi_1^{(n-2)}(0)+\Phi_2^{(n-2)}(x_2)+\Phi_3^{(n-2)}(x_3)+\dots+\Phi_{m-1}^{(n-2)}(x_{m-1})+\Phi_m^{(n-2)}(x_m)=0\,,\\ \Phi_1^{(n-2)}(x_1)+\Phi_2^{(n-2)}(0)+\Phi_3^{(n-2)}(x_3)+\dots+\Phi_{m-1}^{(n-2)}(x_{m-1})+\Phi_m^{(n-2)}(x_m)=0\,,\\ \Phi_1^{(n-2)}(x_1)+\Phi_2^{(n-2)}(x_2)+\Phi_3^{(n-2)}(x_3)+\dots+\Phi_{m-1}^{(n-2)}(x_{m-1})+\Phi_m^{(n-2)}(0)=0\,,\end{cases}$$

donde si ottiene senza difficoltà che

$$(10)\qquad \Omega_j(x_1,\dots,x_m)=0 \quad (j=0,1,\dots,n-2)\,.$$

Esaminiamo ora la $\Omega_{n-1}(x_1,\dots,x_m)$. Dopo l'addizione membro a membro delle m equazioni trovantesi nella seconda e terza riga delle (5) si ottiene

$$\Omega_{n-1}(x_1,\dots,x_m)\equiv\Sigma\,\Phi^{(1)}_{n-1:i_1,i_2,\dots,i_{m-2}}(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_{m-2}})\,\cdot$$

$$(11)\quad -\int_0^{x_1}\!\!\dots\int_0^{x_{m-1}}\int_0^{x}\Big\{\lambda\, c(\xi_1,\dots,\xi_m)\,u(\xi_1\dots,\xi_m)+f(\xi_1,\dots,\xi_m)\Big\}\,d\xi_1\dots d\xi_m\,,$$

ove la sommatoria si estende in modo già indicato in relazione con (6). In virtù delle equazioni (5) e col ragionamento di cui sopra si dimostra che si ottiene

$$(12)\quad \begin{aligned}&\Omega_{n-1}(x_1,\dots,x_m)\equiv\Sigma\,\Phi^{(2)}_{n-1:i_1,\dots,i_{m-3}}(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_{m-3}})\\ &-\frac{1}{2!}\int_0^{x_1}\!\!\dots\int_0^{x_{m-1}}\int_0^{x}\Big\{\lambda\, c(\xi_1,\dots,\xi_m)\,u(\xi_1,\dots,\xi_m)+f(\xi_1,\dots,\xi_m)\Big\}\,d\xi_1\dots d\xi_m\end{aligned}$$

e ripetendo successivamente il medesimo algoritmo si trova pure, per $m \geq 4$,

$$(13)\quad \Omega_{n-1}(x_1,\dots,x_m)=-\frac{1}{(m-2)!}\int_0^{x_1}\!\!\dots\int_0^{x_{m-1}}\int_0^{x}\Big\{\lambda\, c(\xi_1,\dots,\xi_m)\,u(\xi_1,\dots,\xi_m)+ \\ +f(\xi_1,\dots,\xi_m)\Big\}\,d\xi_1,\dots,d\xi_m\,.$$

Donde, combinando le equazioni (3), (10) e (13), si ricava la seguente equazione integrale del tipo di Volterra

$$(14)\qquad u(x_1,\dots,x_m)=\lambda(\boldsymbol{a}\,u)(x_1,\dots,x_m)+F(x_1,\dots,x_m)\,,$$

ove

$$(15)\quad (\alpha\, u)(x_1, \dots, x_m) = \int_0^{x_1}\!\!\cdots\int_0^{x_m} \left(\prod_{k=1}^{m} \frac{(x_k - \xi_k)^{n-1}}{(n-1)!} \right) c(\xi_1, \dots, \xi_m)\, u(\xi_1, \dots, \xi_m)\, d\xi_1 \dots d\xi_m$$

e

$$-\frac{1}{(m-2)!}\int_0^{x_1}\!\!\cdots\int_0^{x_m} \left(\frac{(x_k - \xi_k)^{n-1}}{(n-2)!} \right) d\xi_1 \dots d\xi_m \int_0^{\xi_1}\!\!\cdots\int_0^{\xi_{m-1}}\int_0^{\alpha} c(\eta_1, \dots, \eta_m)\, u(\eta_1, \dots, \eta_m)\, d\eta_1 \dots d\eta_m) .$$

$$F(x_1, \dots, x_m) = \int_0^{x_1}\!\!\cdots\int_0^{x_m} \left(\prod_{k=1}^{m} \frac{(x_k - \xi_k)^{n-1}}{(n-1)!} \right) f(\xi_1, \dots, \xi_m)\, d\xi_1 \dots d\xi_m$$

(16)

$$-\frac{1}{(m-2)!}\int_0^{x_1}\!\!\cdots\int_0^{x_m} \left(\prod_{k=1}^{m} \frac{(x_k - \xi_k)^{n-1}}{(n-2)!} \right) d\xi_1 \dots d\xi_m \int_0^{\xi_1}\!\!\cdots\int_0^{\xi_{m-1}}\int_0^{\alpha} f(\eta_1, \dots, \eta_m)\, d\eta_1 \dots d\eta_m .$$

Si può dimostrare senza difficoltà, facendone uso dal metodo di approssimazioni successive, che l'equazione (14) ammette una soluzione unica $U = U(x_1, \dots, x_m; \lambda)$, di classe C^{mn} per ogni valore finito dei suoi argomenti, la dipendenza del parametro λ essendovi analitica. Si può pure verificare che questa soluzione è precisamente la soluzione cercata del problema misto (1)-(2).

È pure ben chiaro che, per $\alpha = 0$, l'equazione risulta essere l'equazione integrale di Volterra di seconda specie. Per $\alpha \neq 0$ l'equazione (14) può essere considerata come un'estensione delle equazioni integrali di Picone, stabilite nell'ambito dei risultati di vastissima portata pubblicati nelle sue Memorie inserite nei RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO negli anni 1910 [6] e 1911 [7] e ben utilmente riprodotte a Roma in fotocopie.

Edmonton (Canada) - Department of Mathematics, University of Alberta, June 1972.

BIBLIOGRAFIA

(1) D. Mangeron, E. Krivoshein, *Problemi concernenti varie equazioni integro-differenziali con derivate totali di Picone.* « Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. sci. fis. mat. nat. », (8), 31, 27-31 (1961) e « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », 33, 226-266 (1963); 34, 344-368 (1964), 35, 341-364 (1965).

(2) M. N. Oguztoreli, *A Goursat problem for a high order Mangeron equation.* « Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. sci. fis., mat. nat. », (8), 50, (1971) e *Sul problema di Goursat per un'equazione di Mangeron*, Ibidem (in stampa).

(3) D. Mangeron, *Sopra un problema al contorno per un'equazione alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie.* « Rend. Accad. Naz. Lincei, Cl. sci. fis. mat. e nat. », (6), 16, 305-310 (1932). Vedasi anche: « Rend. Accad. sci. fis mat. Napoli », (4), 2, 29-40 (1932), « C.r. Acad. Sci. Paris », 204, 94-96; 544-546; 1022-1024 (1937); 266A, 870-873; 976-979; 1050-1052; 1103-1106; 1121-1124 (1968); « J. Math. Anal.a.Appl. », 9, 141-146 (1964).

(4) Ju.M. Berezanski, *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators.* Amer. Math. Soc. transl. Monographs, Cap. IV, p. 756, 787, 1968.
b) S. Easwaran, *A study on certain higher order partial differential equations of Mangeron.* A doctoral Dissertation. Prof. M.N. Oguztoreli Sci. adv.. Department of Mathematics, University of Alberta, 1972.

(5) G. Birkhoff and W. Gordon, *On the draftsman's and related equations.* « Intern. J. Approx. Theory », 1, 199-208 (1968).

(6) M. Picone, *Sulle equazioni alle derivate parziali del second'ordine del tipo iperbolico in due variabili indipendenti.* « Rend. Circ. Mat. Palermo », t. XXX, 349-376 (1910).

(7) M. Picone, *Sopra un problema di valori al contorno nelle equazioni iperboliche alle derivate parziali del second'ordine e sopra una classe di equazioni integrali che a quello si riconnettono.* « Rend. Circ. Mat. Palermo », XXXI, 133-190 (1911).