SALVATORE ANTONUCCI

Su gli automorfismi di *n-grafi* che si ottengono con speciali procedure da *n-grafi* con gruppo di automorfismi nullo (*)

Sommario: Si considerano grafi ottenuti con speciali procedure da grafi privi di automorfismi non identici e per essi si trova il gruppo degli automorfismi; per estendere il procedimento a grafi di dimensione qualunque si fa uso della nozione di grafo associato, introdotta in [1]. La nomenclatura riguardante i grafi è prevalentemente quella del Berge [2] o [3] o dell'Ore [4]; per le locuzioni che riguardano gli n-grafi si fa riferimento a [1].

Parte prima - Automorfismi di grafi

1. Ricordiamo alcune definizioni.

Un *n-grafo semplice* è una coppia (V, S), dove V è un insieme, i cui elementi si dicono *vertici* ed S è un insieme, ad elementi distinti, di $(n+1)$ple non ordinate di elementi distinti di V; gli elementi di S si dicono *simplessi*; inoltre, se $(v_1, v_2, \ldots, v_{n+1})$ è un simplesso, i vertici v_i si dicono *estremi* del simplesso, e si suppone che ogni vertice sia estremo di qualche simplesso almeno.

Per $n = 1$, si parla di *grafi semplici*, o brevemente di *grafi*, e, in luogo di simplessi, di *spigoli*.

Dato un n-grafo semplice (V, S), si dice [1] *grafo associato a* (V, S) il grafo (X, U), tale che $X = V \cup S$ ed U è l'insieme delle coppie (v, s), dove s è un simplesso e v è un estremo di s.

Un n-grafo semplice si dice *connesso* se, presi comunque due vertici v e v', esiste una sequenza di simplessi $s_1, s_2, \ldots, s_l$ tali che v e v' siano estremi rispettivamente di s_1 e di s_l e, inoltre, ogni simplesso (escluso l'ultimo) abbia qualche estremo almeno in comune con il successivo. Si noti che un n-grafo è connesso se e soltanto se lo è il grafo associato.

Sia (V, S) un n-grafo semplice e connesso, diremo *automorfismo* di (V, S) una applicazione binnivoca di V su V tale che ad ogni $(n+1)$ pla di elementi di V estremi

(*) Memoria presentata dall'Accademico Enrico Bompiani.

Il lavoro è stato eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. (Gruppo nazionale strutture algebriche e geometriche ed applicazioni) del comitato per le Scienze Matematiche del C.N.R.

di un simplesso fa corrispondere una $(n+1)$pla di elementi di V estremi di un simplesso.

Si verifica che l'insieme degli automorfismi di un n-grafo semplice costituisce un gruppo; si dice [6] che tale gruppo *si annulla* se esso è costituito soltanto dall'identità.

Dato un n-grafo semplice e connesso (V, S), un automorfismo di (V, S), se $v_1, v_2, ..., v_m$ sono i vertici di (V, S) e $v_{i_1}, v_{i_2}, ... v_{i_m}$ sono i loro corrispondenti, sarà indicato con il simbolo:

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_m \\ v_{i_1} & v_{i_2} & \dots & v_{i_m} \end{pmatrix};$$

in generale, poi, si ometteranno i vertici che corrispondono a se stessi. Per i grafi considerati nel seguito sarà sempre ipotizzata la connessione.

Sia, ora, G un grafo (1-grafo) e siano $V_1, V_2, ..., V_m$ i suoi vertici; consideriamo un vertice qualunque di G, sia, per semplicità, V_1, e siano $V_{i_1}, V_{i_2}, ..., V_{i_h}$ i vertici adiacenti ad esso.

Consideriamo, poi, il grafo, che indicheremo con il simbolo:

$$G + V_1^{(1)},$$

che ha per vertici i vertici di G più un nuovo vertice che diremo $V_1^{(1)}$, e per spigoli gli spigoli di G più gli spigoli:

$$(V_1^{(1)}, v_{i_j}) \qquad j = 1, 2, ...h.$$

Vogliamo dimostrare il seguente

Teorema 1 - Sia G un grafo con gruppo di automorfismi nullo e sia V_1 uno dei suoi vertici; allora, il gruppo degli automorfismi del grafo:

$$G + V_1^{(1)}$$

è costituito dall'identità ω_0 e dall'automorfismo:

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} V_1 & V_1^{(1)} \\ V_1^{(1)} & V_1 \end{pmatrix}.$$

Difatti, poiché è evidente che ω_0 e ω_1 sono automorfismi del grafo in questione, occorre far vedere che non vi sono altri automorfismi. A tale scopo, osserviamo che, se ω è un qualunque automorfismo del grafo

$$G + V_1^{(1)},$$

valgono le implicazioni:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \omega(V_1) = V_1 \quad &\Leftrightarrow \quad \omega(V_1^{(1)}) = V_1^{(1)} \\ \omega(V_1) = V_1^{(1)} \quad &\Leftrightarrow \quad \omega(V_1^{(1)}) = V_1 . \end{aligned}$$

Dimostriamo soltanto una delle implicazioni (1), la dimostrazione delle altre essendo analoga. Supponiamo precisamente che sia $\omega(V_1) = V_1$; detti $K_1, K_2, \ldots, K_s$ i vertici adiacenti a V_1, e quindi a $V_1^{(1)}$, si ha:

$$\omega(\{K_1, K_2, \ldots, K_s\}) = \{K_1, K_2, \ldots, K_s\} \tag{2}$$

e pertanto non è:

$$\omega(V_1^{(1)}) \neq (V_1^{(1)}) ,$$

perché, se così fosse, dovendo essere per la (2) $\omega(V_1^{(1)})$ adiacente ad ognuno dei vertici K_i, esisterebbe per G l'automorfismo non identico:

$$\begin{pmatrix} V_1 & \omega(V_1^{(1)}) \\ \omega(V_1^{(1)}) & V_1 \end{pmatrix},$$

contro l'ipotesi.

Ciò premesso, se ω è un automorfismo distinto da ω_0 e da ω_1, si può affermare che è:

$$\omega(V_1) \neq V_1 \ , \ \omega(V_1) \neq V_1^{(1)} \ , \ \omega(V_1^{(1)}) \neq V_1 \ , \ \omega(V_1^{(1)}) \neq V_1^{(1)} ;$$

invero, supposto che sia:

$$\omega(V_1) = V_1 \quad [\omega(V_1^{(1)}) = V_1^{(1)}] ,$$

per le (1) si avrebbe anche:

$$\omega(V_1^{(1)}) = V_1^{(1)} \quad [\omega(V_1) = V_1]$$

e pertanto la restrizione di ω all'insieme dei vertici di G sarebbe, essendo $\omega \neq \omega_0$, un automorfismo non identico di G; così se fosse:

$$\omega(V_1) = V_1^{(1)} \quad [\omega(V_1^{(1)}) = V_1] ,$$

sarebbe anche, per le (1),

$$\omega(V_1^{(1)}) = V_1 \quad [\omega(V_1) = V_1^{(1)}] ,$$

e quindi, essendo $\omega \neq \omega_0$ e $\omega \neq \omega_1$, si avrebbe che la restrizione dell'automorfismo $\omega_1 \circ \omega$ all'insieme dei vertici di G risulterebbe un automorfismo non identico di G. Posto, allora:

$$\omega(V_h) = V_1 \text{ e } \omega(V_k) = V_1^{(1)} ,$$

ogni elemento della coppia $\{V_h, V_k\}$ deve risultare distinto da ogni elemento della coppia $\{V_1, V_1^{(1)}\}$ e pertanto si avrebbe che la restrizione dell'automorfismo

$$\omega^{-1} \circ \omega_1 \circ \omega = \begin{pmatrix} V_h & V_k \\ V_k & V_h \end{pmatrix}$$

all'insieme dei vertici di G sarebbe un automorfismo non identico di G. Resta pertanto dimostrato il Teorema 1.

2 - Consideriamo, ora, un grafo G e siano $V_1, V_2, ..., V_k$ k qualunque dei suoi vertici; indichiamo con il simbolo:

$$G + V_1^{(1)} + V_2^{(1)} + ... + V_k^{(1)} = G + \sum_{i=1}^{k} V_i^{(1)}$$

il grafo che ha per vertici i vertici di G più k nuovi vertici che diremo:

$$V_1^{(1)}, V_2^{(1)}, ..., V_k^{(1)},$$

e per spigoli gli spigoli di G più gli spigoli:

$$\{ V_j^{(1)}, V_{r,j} \}$$

con $V_{r,j}$ adiacente a V_j, per $j = 1, 2, ..., k$.

Il Teorema 1 può essere generalizzato nel seguente

Teorema 2 - Sia G un grafo con gruppo di automorfismi nullo e siano $V_1, V_2, ... V_k$ k qualunque dei suoi vertici; allora il gruppo degli automorfismi del grafo:

$$G_{1,k} = G + \sum_{i=1}^{k} V_i^{(1)}$$

è generato dagli automorfismi:

$$\omega_i^{(1)} = \begin{pmatrix} V_i & V_i^{(1)} \\ V_i^{(1)} & V_i \end{pmatrix} \qquad (i = 1, 2, ..., k).$$

Il teorema è vero per $k = 1$ (teorema 1); supposto, pertanto, che esso sia vero per ogni intero minore di k, dimostriamo che esso è vero per l'intero k. Basta, a tale scopo, far vedere che non esistono automorfismi che non siano generati dagli automorfismi $\omega_i^{(1)}$.

Considerato, intanto, un automorfismo ω qualunque di $G_{1,k}$, si ha che, per motivi del tutto identici a quelli per cui valgono le (1), sussistono le implicazioni:

$$\text{(3)} \qquad \begin{array}{l} \omega(V_i) = V_i \iff \omega(V_i^{(1)}) = V_i^{(1)} \\ \omega(V_i) = V_i^{(1)} \iff \omega(V_i^{(1)}) = V_i \end{array} \qquad \text{per } i = 1, 2, ..., k.$$

In base alla (3) si può affermare che, se ω è un automorfismo di $G_{1,k}$ non generato dagli automorfismi $\omega_i^{(1)}$, non è $\omega(V_i) = V_i$, per ogni $i = 1, 2, ..., k$, perchè, se così fosse, sarebbe anche:

$$\omega(V_i^{(1)}) = V_i^{(1)} \qquad \text{per } i = 1, 2, ..., k$$

e pertanto la restrizione di ω all'insieme dei vertici del grafo:

$$\text{(4)} \qquad G + V_1^{(1)} + ... + V_{i-1}^{(1)} + V_{i+1}^{(1)} + ... + V_k^{(1)}$$

sarebbe un suo automorfismo, non generato dagli automorfismi $\omega_i^{(1)}$ (intesi quali automorfismi del grafo (4)); analogamente, se fosse:

$$\omega(V_1) = V_1^{(1)} ,$$

tenendo presente le (3), la restrizione dell'automorfismo $\omega_1^{(1)} \circ \omega$ allo insieme dei vertici del grafo (4) sarebbe un automorfismo del grafo (4), non generato dagli automorfismi $\omega_i^{(1)}$ (intesi sempre quali automorfismi del grafo (4)).

Possono, allora, darsi due possibilità:

a) l'automorfismo ω può far corrispondere ad ogni coppia del tipo $\{V_r, V_r^{(1)}\}$ una coppia del tipo $\{V_s, V_s^{(1)}\}$, con $r \neq s$; in tal caso, salvo a moltiplicare ω a sinistra per l'automorfismo $\omega_s^{(1)}$ nel caso in cui si abbia:

$$\left.\begin{aligned} \omega(V_r) &= V_s^{(1)} \\ \omega(V_r^{(1)}) &= V_s \end{aligned}\right. \qquad\qquad r \neq s$$

si può ritenere che ω faccia corrispondere a vertici del tipo V_r vertici del tipo V_s e a vertici del tipo $V_r^{(1)}$ vertici del tipo $V_s^{(1)}$. Da ciò discende che esisterebbe un automorfismo non identico di G, precisamente la restrizione all'insieme dei vertici di G dello automorfismo considerato.

b) esiste qualche coppia $\{V_t, V_t^{(1)}\}$ che non è la corrispondente di nessuna coppia del tipo $\{V_r, V_r^{(1)}\}$, cioè tale che:

$$\omega\{V_u, V_z\} = \{V_t, V_t^{(1)}\}$$

con $\{V_u, V_z\} \neq \{V_r, V_r^{(1)}\}$, per $r = 1, 2, \ldots, k$. Poiché, allora, ogni elemento della coppia $\{V_u, V_z\}$ è distinto da ogni elemento della coppia $\{V_t, V_t^{(1)}\}$, si avrebbe che l'automorfismo:

$$\omega^{-1} \circ \omega_t^{(1)} \circ \omega = \begin{pmatrix} V_u & V_z \\ V_z & V_u \end{pmatrix}, \tag{5}$$

ristretto all'insieme dei vertici del grafo (4), sarebbe un automorfismo di esso non generata dagli automorfismi $\omega_i^{(1)}$, considerati quali automorfismi di (4); difatti, l'automorfismo (5) potrebbe essere generato dagli automorfismi $\omega_i^{(1)}$, soltanto se si avesse:

$$\{V_u, V_z\} = \{V_r, V_r^{(1)}\}$$

per qualche indice r.

Il Teorema 2 è così dimostrato.

3. - Dato, ora, un grafo G, siano $V_1, V_2, \ldots, V_m$ m qualunque dei suoi vertici; detto $I(1)$ l'insieme $\{1, 2, \ldots, m\}$, consideriamo $n-1$ insiemi, che diremo $I(i)$, con $i = 2, \ldots, n$, tali che:

$$I(i) \subseteq I(i-1) \qquad \text{per } i = 2, \ldots, n;$$

aggiungiamo, poi, al grafo G i vertici:

$$V_i^{(h)} \qquad \text{con } h = 1, 2, \dots, n \quad \text{e} \quad i \in I(h)$$

e tutti gli spigoli del tipo:

$$\{V_i^{(h)}, V_{1,i}\} \qquad \text{con } h = 1, 2, \dots, n \quad \text{e} \quad i \in I(h)$$

se gli spigoli del tipo $\{V_1, V_{1,i}\}$ sono spigoli del grafo G.

È evidente che si ottiene lo stesso grafo comunque si cambi l'ordine secondo il quale si aggiungono i vertici $V_i^{(h)}$; il grafo ottenuto si indicherà con il simbolo:

$$G_{n,m} = G + \sum_{i \in I(h)} \sum_{h=1}^{n} V_i^{(h)}. \tag{6}$$

Dimostriamo, quindi, il

Teorema 3 - Se il gruppo degli automorfismi del grafo G è nullo, il gruppo degli automorfismi del grafo:

$$G_{n,1} = G + \sum_{h=1}^{n} V_1^{(h)} \qquad (I(1) = I(2) = \dots = I(n) = \{1\})$$

è generato dagli automorfismi:

$$\omega_1^{(h)} = \begin{pmatrix} V_1 & V_1^{(h)} \\ V_1^{(h)} & V_1 \end{pmatrix} \quad \text{per} \quad h = 1, 2, \dots, n$$

Cominciamo con il dimostrare che ogni automorfismo del tipo

$$\begin{pmatrix} V_1 & V_1^{(1)} & V_1^{(2)} & \dots\dots & V_1^{(n)} \\ V_1^{(i_1)} & V_1^{(i_2)} & V_1^{(i_3)} & \dots\dots & V_1^{(i_{n+1})} \end{pmatrix} \tag{7}$$

dove $(i_1, i_2, \dots, i_{(n+1)})$ rappresenta una permutazione dei numeri $(0, 1, \dots n)$ (avendo posto $V_1 = V_1^{(0)}$), è prodotto di automorfismi del tipo $\omega_1^{(h)}$. Difatti, la sostituzione (7) risulta il prodotto di una sostituzione circolare del tipo:

$$\begin{pmatrix} V_1 & V_1^{(j_1)} & V_1^{(j_2)} & \dots\dots\dots & V_1^{(j_k)} \\ V_1^{(j_1)} & V_1^{(j_2)} & V_1^{(j_3)} & \dots\dots\dots & V_1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

e di altre eventuali sostituzioni circolari del tipo:

$$\begin{pmatrix} V_1^{(r_1)} & V_1^{(r_2)} & V_1^{(r_3)} & \dots\dots\dots & V_1^{(r_t)} \\ V_1^{(r_2)} & V_1^{(r_3)} & V_1^{(r_4)} & \dots\dots\dots & V_1^{(r_1)} \end{pmatrix} \tag{9}$$

e, inoltre, la sostituzione (8) risulta essere il seguente prodotto di automorfismi:

$$\omega_1^{(j_k)} \circ \dots\dots \circ \omega_1^{(j_2)} \circ \omega_1^{(j_1)}$$

mentre ogni sostituzione (9) risulta essere il seguente prodotto di automorfismi:

$$\omega_1^{(r_t)} \circ \omega_1^{(r_{t-1})} \circ \ldots\ldots \circ \omega_1^{(r_2)} \circ \omega_1^{(r_1)}$$

Ciò premesso, si ha, intanto, che, se ω è un automorfismo di $G_{n,1}$ non generato dagli $\omega_1^{(h)}$, non può verificarsi nessuna delle seguenti uguaglianze:

$$\omega(V_1^{(h)}) = V_1^{(k)}\ ,\ \omega(V_1) = V_1^{(h)}\ ,\ \omega(V_1^{(h)}) = V_1\ ,$$

per $h, k = 1, 2, \ldots, n$. Difatti, in caso di validità di una di esse, per il modo con cui si sono aggiunti i vertici $V_1^{(h)}$, sarebbe anche:

$$\omega(\{V_1\} \cup \{V_1^{(1)}\} \cup \ldots\ldots \cup \{V_1^{(n)}\}) = \{V_1\} \cup \{V_1^{(1)}\} \cup \ldots\ldots \cup \{V_1^{(n)}\}\ ;$$

quindi, poiché l'automorfismo:

$$\omega' = \begin{pmatrix} V_1 & V_1^{(1)} & \ldots\ldots & V_1^{(n)} \\ \omega(V_1) & \omega(V_1^{(1)}) & \ldots\ldots & \omega(V_1^{(n)}) \end{pmatrix}$$

per quanto premesso è generato dagli automorfismi $\omega_1^{(h)}$, si avrebbe che la restrizione di $(\omega')^{-1} \circ \omega$ all'insieme dei vertici di G sarebbe un automorfismo non identico di G.

Supposto, pertanto, che sia:

$$\omega(V_1^{(h)}) = V_i\ ,\ \omega(V_i) = V_j\ ,\ \omega(V_l) = V_1^{(h)}\ ,\ \omega(V_m) = V_1$$

per un certo indice h, con i, j, l, m distinti da 1, l'automorfismo

$$\omega^{-1} \circ \omega_1^{(h)} \circ \omega = \begin{pmatrix} V_l & V_m \\ V_m & V_l \end{pmatrix}$$

sarebbe un automorfismo non identico di G, contro l'ipotesi. Ne discende il Teorema 3.

Dal Teorema 3 ora dimostrato si può dedurre il seguente Teorema 4, la cui dimostrazione segue la falsariga del Teorema 2.

Teorema 4 - Se il gruppo degli automorfismi del grafo G è nullo, il gruppo degli automorfismi del grafo:

$$G_{n,m} = G + \sum_{i \in I(h)} \sum_{h=1}^{n} V_i^{(h)}$$

con $I(1) = \{1, 2, \ldots, m\}$ e $I(i) \subseteq I(i-1)$ per $i = 2, 3, \ldots, n$, è generato dagli automorfismi:

$$\omega_i^{(h)} = \begin{pmatrix} V_i^{(h)} & V_i \\ V_i & V_i^{(h)} \end{pmatrix} \quad \text{per} \quad h = 1, 2, \ldots, n \quad \text{e} \quad i \in I(h).$$

Il teorema è vero per $m = 1$; supposto, pertanto, che esso sia vero per ogni intero minore di m, dimostriamo che esso è vero per l'intero m. Considerato un automorfismo di ω di $G_{n,m}$, non generato dagli automorfismi $\omega_i^{(h)}$, cominciamo con il far vedere che non è :

$$\omega\,(V_i^{(s)}) = V_i^{(t)}$$

per ogni coppia s, t di interi tali che i vertici $V_i^{(s)}$ e $V_i^{(t)}$ siano vertici del grafo $G_{n,m}$; infatti, in tal caso, si avrebbe :

$$\omega\,(\{V_i\} \cup \{V_i^{(1)}\} \cup \{V_i^{(2)}\} \cup \ldots \cup \{V_i^{(u)}\}) = \{V_i\} \cup \{V_i^{(1)}\} \cup \{V_i^{(2)}\} \cup \ldots \cup \{V_i^{(u)}\}$$

dove u è un intero tale che $i \in I\,(s)$, per $s \leqslant u$, e $i \notin I\,(s)$, per $s > u$; quindi considerato l'automorfismo, chiaramente generato dagli automorfismi $\omega_i^{(h)}$,

$$\omega' = \begin{pmatrix} V_i & V_i^{(1)} & \ldots\ldots & V_i^{(u)} \\ \omega\,(V_i) & \omega\,(V_i^{(1)}) & \ldots\ldots & \omega\,(V_i^{(u)}) \end{pmatrix},$$

si avrebbe che la restrizione dell'automorfismo $(\omega')^{-1} \circ \omega$ all'insieme dei vertici del grafo $G_{n,m-1}$, sottografo (1) di $G_{n,m}$ ottenuto da esso eliminando i vertici $V_i^{(h)}$ e gli spigoli che hanno un estremo in essi, sarebbe un automorfismo di $G_{n,m-1}$ non generato dagli automorfismi $\omega_i^{(h)}$ (considerati quali automorfismi di $G_{n,m-1}$).

Ciò premesso, possono darsi due possibilità :

a) l'automorfismo ω può far corrispondere ad ogni insieme di vertici del tipo :

$$\{V_i\} \cup \{V_i^{(s)}\}_s$$

un insieme di vertici del tipo :

$$\{V_j\} \cup \{V_j^{(t)}\}_t\,,$$

con i distinto da j; in tal caso, salvo a moltiplicare ω a sinistra per alcuni degli automorfismi $\omega_i^{(h)}$, si può ritenere che ω faccia corrispondere a vertici del tipo V_i vertici del tipo V_j e a vertici del tipo $V_i^{(h)}$ vertici del tipo $V_j^{(h)}$. Da ciò discende che esisterebbe un automorfismo non identico di G, precisamente la restrizione allo insieme dei vertici di G dell'automorfismo considerato.

b) esiste un insieme di vertici del tipo :

$$\{V_i\} \cup \{V_i^{(s)}\}_s$$

che non è il corrispondente di nessun insieme di vertici del tipo :

$$\{V_j\} \cup \{V_j^{(t)}\}_t\,,$$

cioè, tale che :

$$\omega\,(\{V_a\}_s) = \{V_i\} \cup \{V_i^{(s)}\}_s$$

(1) sottografo nell'accezione del Berge, cfr. (²).

con $\{V_x\}_x \neq \{V_i\} \cup \{V_j^{(i)}\}_t$, per tutti gli j per i quali $V_j^{(i)}$ è un vertice di $G_{n,m}$; detti, allora, V_α e V_β due elementi di $\{V_x\}_x$ tali che:

$$\omega(V_\alpha) = V_i \qquad \omega(V_\beta) = V_i^{(1)}$$

ne conseguirebbe che l'automorfismo $\omega^{-1} \circ \omega_i^{(1)} \circ \omega$, ristretto allo insieme dei vertici del grafo

$$G^*_{n,m-1} = G + \sum_{\substack{j \in I(h) \\ j \neq i}} \sum_{h=1}^{n} V_j^{(h)}$$

sarebbe un automorfismo di esso non generato dagli automorfismi $\omega_i^{(h)}$, considerati quali automorfismi di $G^*_{n,m-1}$, per motivi del tutto analoghi a quelli considerati nella dimostrazione del Teorema 2 e per la validità del teorema per ogni intero minore di m.

Resta con ciò dimostrato il Teorema 4.

4 - Diversamente, ora, consideriamo un grafo G, e sia V_1 uno dei suoi vertici; consideriamo, poi, dei cammini che hanno origine in V_1 e siano $V_2, V_3, \dots, V_k$ i vertici che sono estremi degli spigoli di questi cammini (ogni vertice V_i essendo preso una sola volta). Con il simbolo:

$$G + (V'_1 + V'_2 + \dots\dots + V'_k)$$

denoteremo il grafo che ha per vertici i vertici di G e in più k nuovi vertici che diremo:

$$V'_1, V'_2, \dots, V'_k$$

e per spigoli gli spigoli di G e in più gli spigoli del tipo:

$$\{V'_1, V_s\}$$

se $\{V_1, V_s\}$ è uno spigolo di G e $V'_s \notin \{V'_1, V'_2, \dots, V'_k\}$, nonché gli spigoli del tipo:

$$\{V'_1, V'_m\}$$

se $\{V_1, V_m\}$ è uno spigolo di G.

Analogo al Teorema 1 è il seguente

Teorema 5 - Se il gruppo degli automorfismi del grafo G è nullo, il gruppo degli automorfismi del grafo:

$$G_1 = G + (V'_1 + V'_2 + \dots + V'_k)$$

è costituito dall'automorfismo

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & \dots & V_k & V'_1 & V'_2 & \dots & V'_k \\ V'_1 & V'_2 & \dots & V'_k & V_1 & V_2 & \dots & V_k \end{pmatrix}$$

e dall'identità ω_0.

Difatti, è evidente che ω_0 e ω_1 sono automorfismi di G_1; occorre, pertanto, mostrare che non vi sono altri automorfismi. Intanto, si osservi che, detto ω un automorfismo qualunque di G_1, si hanno le doppie implicazioni:

$$(10) \qquad \begin{array}{l} \omega(V_i) = V_j \Leftrightarrow \omega(V'_i) = V'_j \\ \omega(V_i) = V'_j \Leftrightarrow \omega(V'_i) = V_j \end{array} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, k.$$

Supposto, poi, che si abbia:

$$(11) \quad \omega\{V_1, V_2, \ldots, V_k, V'_1, V'_2, \ldots, V'_k\} = \{V_1, V_2, \ldots, V_k, V'_1, V'_2, \ldots, V'_k\},$$

per la (10) deve necessariamente essere:

$$(12) \quad \omega\{V_1, V_2, \ldots, V_k\} = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\} \text{ e } \omega\{V'_1, V'_2, \ldots, V'_k\} = \{V'_1, V'_2, \ldots, V'_k\}$$

oppure:

$$(13) \quad \omega\{V_1, V_2, \ldots, V_k\} = \{V'_1, V'_2, \ldots, V'_k\} \text{ e } \omega\{V'_1, V'_2, \ldots, V'_k\} = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\};$$

infatti, se è per qualche coppia di indici i, j

$$\omega(V_i) = V'_j$$

detti $V_r, V_s, \ldots$ i vertici adiacenti a V_i, deve risultare:

$$\omega\{V_r, V_s, \ldots\} \subseteq \{V'_1, V'_2, \ldots, V'_k\},$$

dato che nessuno dei vertici V_i è collegato con qualcuno dei vertici V'_j; stessa circostanza deve verificarsi per i vertici adiacenti a V_r, V_s, ..., e quindi, proseguendo, data la connessione, per tutti i vertici V_i; vale, pertanto, la prima delle (13) e perciò anche la seconda delle (13). Stesso ragionamento si adopera per dedurre le (12) dalla (11). Detto, ora, ω un automorfismo di G_1 distinto da ω_0 e da ω_1, se valgono le (11), la restrizione di ω all'insieme dei vertici di G sarebbe un automorfismo non identico di G; se valgono le (12), lo stesso discorso varrebbe per l'automorfismo $\omega_1 \circ \omega$.

Supponiamo, pertanto, che non si verifichi la (11); d'altra parte, non può nemmeno accadere che ad alcuni vertici dell'insieme $\{V_1, \ldots, V_k, V'_1, \ldots, V'_k\}$ (e non a tutti) corrispondono vertici che non sono dell'insieme e che, conseguentemente, alcuni (e cioè non tutti) i vertici dell'insieme $\{V_1, \ldots, V_k, V'_1, \ldots, V'_k\}$ siano i corrispondenti di vertici che non sono dell'insieme; difatti, è facile verificare che, in tal caso, l'automorfismo $\omega^{-1} \circ \omega_1 \circ \omega$ verificherebbe la (11) senza verificare le (12) o le (13), in base alla (10).

Da quanto detto si deduce che dovrebbero esistere $2k$ vertici non appartenenti all'insieme $\{V_1, \ldots, V_k, V'_1, \ldots, V'_k\}$ che hanno per corrispondenti i vertici di esso; all'ora l'automorfismo $\omega^{-1} \circ \omega_1 \circ \omega$, ristretto all'insieme dei vertici di G, sarebbe un automorfismo non identico di G.

Resta, pertanto, dimostrato il Teorema 5.

5 - Più in generale, sia G un grafo e siano $V_{11}, V_{21}, \ldots, V_{k1}$ k vertici di esso, che indichiamo con il doppio indice per comodità di notazioni. Si considerino, per ognuno

dei vertici V_{i1}, dei cammini che hanno origine in V_{i1} e siano $V_{i1}, V_{i2}, \ldots V_{ii_i}$ gli estremi degli spigoli di questi cammini (ogni vertice essendo stato preso una sola volta); supponiamo che non si abbia:

$$\{V_{i1}, V_{i2}, \ldots\ldots, V_{ii_i}\} = \{V_{j1}, V_{j2}, \ldots\ldots, V_{ji_j}\}$$

per nessuna delle coppie di indici i, j.

Consideriamo, poi, k numeri $h_1, h_2, \ldots, h_k$, e prendiamo in considerazione il grafo, che indicheremo con il simbolo:

$$G + \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{l=1}^{h_i} \sum_{j=1}^{i_k} V_{ij}^{(l)} \right),$$

che ha per vertici i vertici di G, e in più i vertici:

$$V_{ij}^{(l)}$$

con $i = 1, 2, \ldots., k$, $j = 1, 2, \ldots i_i$, $l = 1, 2, \ldots, h_i$, e che ha per spigoli gli spigoli di G e in più gli spigoli del tipo:

$$\{V_{ij}^{(l)} \quad , \quad V_s\}$$

se $\{V_{ij}, V_s\}$ è uno spigolo di G e $V_s \notin \{V_{i1}^{(l)}, V_{i2}^{(l)}, \ldots, V_{ii_i}^{(l)}\}$ per qualche l (e quindi per tutti gli l), e inoltre gli spigoli del tipo:

$$\{V_{ij}^{(l)} \quad , \quad V_{is}^{(l)}\}$$

se $\{V_{ij}, V_{is}\}$ è uno spigolo di G.

Il Teorema che segue, alla cui dimostrazione, peraltro, rinunciamo, perché essa non differisce sostanzialmente da quelle dei teoremi 1, 2, 3, 4 e 5, costituisce una generalizzazione di questi ultimi teoremi.

Teorema 6 - Se il gruppo degli automorfismi del grafo G è nullo, il gruppo degli automorfismi del grafo:

$$G^* = G + \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{l=1}^{h_i} \sum_{j=1}^{i_k} V_{ij}^{(l)} \right)$$

è generato dagli automorfismi:

$$\omega_i^{(l)} = \begin{pmatrix} V_{i1} & V_{i2} & \ldots & V_{ii_i} & V_{i1}^{(l)} & V_{i2}^{(l)} & \ldots & V_{ii_i}^{(l)} \\ V_{i1}^{(l)} & V_{i2}^{(l)} & \ldots & V_{ii_i}^{(l)} & V_{i1} & V_{i2} & \ldots & V_{ii_i} \end{pmatrix}.$$

Diciamo soltanto che il Teorema 6 si dimostra considerando anzitutto il caso $h_i = 1$, per $i = 1, 2, \ldots, k$, e, in tal caso, il teorema generalizza il Teorema 2; per la dimostrazione del teorema in questo caso sono utili le considerazioni svolte nella dimostrazione dei Teoremi 2 e 5; successivamente, si considera il caso $k = 1$, che generalizza il Teorema 3, e per la dimostrazione sono utili le dimostrazioni dei Teoremi 3 e 5; infine, sulla base dei risultati ottenuti, si considera il caso generale. Si fa uso del principio di induzione matematica.

Parte seconda - Automorfismi di n-grafi

Consideriamo, ora, un n-grafo (semplice e connesso), sia G, e siano: V uno dei suoi vertici, $s_1, s_2, \ldots, s_h$ i simplessi dei quali V è un estremo e $V, V_{i_1}, \ldots, V_{i_n}$ gli estremi del simplesso s_i. Diciamo $G + V'$ l'n-grafo che ha per vertici i vertici di G e in più il vertice V' e per simplessi i simplessi di G e in più i simplessi $s'_1, s'_2, \ldots, s'_h$ con

$$s'_i = \{V', V_{i_1}, \ldots, V_{i_n}\} \quad \text{per } i = 1, 2, \ldots h.$$

Si può, allora, dimostrare il seguente teorema, che è la generalizzazione del Teorema 1 per il caso di un grafo di dimensione qualunque:

Teorema 7 - Se il gruppo degli automorfismi dell'n-grafo G è nullo, il gruppo degli automorfismi dell'n-grafo

$$G + V'$$

è costituito dall'identità e dall'automorfismo

$$\begin{pmatrix} V & V' \\ V' & V \end{pmatrix}.$$

Difatti, intanto si osservi che il grafo G^* associato a G è privo di automorfismi non identici (1); si osservi, inoltre, che il grafo $(G + V')^*$ associato a $G + V'$ è ottenuto da G^* aggiungendo i vertici $V', s'_1, s'_2, \ldots, s'_h$, con s'_i che risultano estremi di spigoli di cammini che hanno origine in V', e aggiungendo spigoli con le stesse modalità con cui si opera per costruire, dato un grafo (1-grafo) H e fissati k vertici $V_1, V_2, \ldots, V_k$ di esso, il grafo ad una dimensione $H + (V'_1 + V'_2 + \ldots + V'_k)$; si ha, allora, che il grafo $(G + V')^*$ (Teorema 5) ha per automorfismi soltanto la identità e l'automorfismo:

$$\begin{pmatrix} V & V' & s_1 & s_2 & \ldots & s_h & s'_1 & s'_2 & \ldots & s'_h \\ V' & V & s'_1 & s'_2 & \ldots & s'_h & s_1 & s_2 & \ldots & s_h \end{pmatrix}$$

e ne consegue, ancora per la proposizione richiamata in nota, la tesi.

Le considerazioni precedenti possono, poi, estendersi ad n-grafi che si costruiscono, a partire da un n-grafo G, con le stesse modalità con le quali, a partire da un grafo G (1-grafo) si sono costruiti i grafi (6) o i grafi G^*. Facendo uso della nozione di n-grafo associato e della proposizione richiamata in nota, nonché dei

(1) cfr. proposizione 1, (¹).

risultati del Teorema 6 (o di qualcuno dei precedenti), si possono enunciare e dimostrare per gli n-grafi dei teoremi del tutto analoghi ai Teoremi 2, 3, 4, 5 e 6.

Prima di concludere, osserviamo che *se il gruppo degli automorfismi del grafo G è nullo, il numero degli automorfismi del grafo* (1):

$$G^* = G + \sum_{i=1}^{k} \sum_{l=1}^{h_i} \sum_{j=1}^{i_k} V_{ij}^{(l)}$$

è dato da:

$$\prod_{i=1}^{k} (h_i + 1)\,! \,. \tag{14}$$

Difatti, si tenga presente che gli automorfismi $\omega_i^{(l)}$, con $l = 1, 2, \ldots, h_i$, generano $(h_i + 1)\,!$ automorfismi, essendo questi ultimi in numero coincidente con quello delle permutazioni di un insieme di $h_i + 1$ elementi. Allora, a partire da grafi il cui gruppo degli automorfismi si annulla, (questi si possono, tra l'altro, reperire tra quelli considerati in [4]), è possibile costruire grafi il cui gruppo degli automorfismi abbia un dato numero di elementi, purché questo numero sia uno di quelli forniti dalla (14).

È opportuno, infine, osservare, per ogni teorema dimostrato, che l'insieme dei generatori si modifica, se il gruppo degli automorfismi di G è non nullo.

Napoli - Istituto Matematico, Facoltà d'Ingegneria dell'Università - Luglio 1972.

---

(1) stesso discorso vale per gli n-grafi costruiti a partire da n-grafi.

BIBLIOGRAFIA

(1) S. Antonucci - Sull'isomorfismo tra n-grafi e sulla loro caratteristica - Rend. Acc. Naz. XL, Serie IV Vol. XXII, 1972.

(2) C. Berge - Théorie des graphes et ses applications, Dunod, Paris, 1967.

(3) C. Berge - Graphes et ipergraphes, Dunod, Paris, 1970.

(4) P. Erdös - On extremal problems on graphs and generalized graphs, Israel Journal Math. 2, 183-190, 1964.

(5) O. Ore - Theory of graphs, Amer. Math. Soc. Col. Publ. Providence, 1962.

(6) F. Speranza - Sui singrammi privi di automorfismi non identici, Atti Soc. Peloritana Sc., 14, 1-31, 1968.