SALVATORE ANTONUCCI

Sull'isomorfismo tra n-grafi e sulla loro caratteristica (*)

1. — Introduzione

In questa nota viene esaminato il problema dell'isomorfismo tra grafi a più dimensioni; in 2. si danno alcune definizioni essenziali e viene introdotta la nozione di grafo associato; in 3. si considerano applicazioni della nozione introdotta; in 4. viene esaminato il problema dell'isomorfismo tra n-grafi regolari.

2. — Definizioni essenziali

Adottiamo la seguente definizione di poligrafo di dimensione n o n-poligrafo:

Definizione 1 — Dicesi *poligrafo di dimensione n o n-poligrafo* una coppia (V, S), dove V è un insieme i cui elementi si diranno *vertici* ed S è una famiglia di $(n+1)$ ple non ordinate di elementi non necessariamente distinti di V; gli elementi di S si diranno *simplessi*.

Dato un simplesso $s_i = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}\}$ di un n-poligrafo, i vertici v_i si diranno *estremi* del simplesso; due simplessi distinti aventi gli stessi estremi si diranno *in parallelo*; se, poi, accade che qualche vertice figura più di una volta nella $(n+1)$ pla che definisce un simplesso, si dirà che quel vertice è un vertice *multiplo*; infine, un vertice si dirà *isolato* se non è estremo di alcun simplesso.

Diciamo *grado* di un vertice il numero dei simplessi di ognuno dei quali esso è almeno un estremo.

Un *n-grafo* è un n-poligrafo privo di simplessi in parallelo; un n-grafo si dirà *semplice* se è privo di vertici multipli o isolati.

Si osservi che, per $n = 1$, si ottengono gli ordinari poligrafi [1] e grafi.

Definizione 2 — Dato un n-poligrafo (V, S), si dirà *poligrafo associato a* (V, S) il poligrafo (X, U) ad una dimensione tale che $X = V \cup S$ ed U è l'insieme delle coppie (v, s) dove s è un simplesso e v è un vertice di s.

(*) Memoria presentata dall'Accademico Enrico Bompiani.

Il lavoro è stato eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. (Gruppo nazionale strutture algebriche e geometriche ed applicazioni) del Comitato per le Scienze Matematiche del C.N.R.

Un vertice di (X, U) si dirà un *v-vertice* se appartiene a V, un *s-vertice* se appartiene a S. Un s-vertice di (X, U) ha grado $n + 1$.

Si noterà che (X, U) è, in particolare, un grafo se (V, S) è privo di vertici multipli; inoltre, non esistono spigoli che hanno per estremi due v-vertici o due s-vertici. Esso è, dunque, bipartito [4].

Si noterà, pure, che se s_1 e s_2 sono due s-vertici e se esistono $n + 1$ cammini di lunghezza 2 aventi per estremi s_1 e s_2, i simplessi s_1 e s_2 di (V, S) sono in parallelo (e viceversa).

Un n-poligrafo si dice *connesso* se, presi comunque due vertici v e v', esiste una sequenza di simplessi $s_1, s_2, ..., s_l$ tali che v e v' siano estremi rispettivamente di s_1 e di s_l e, inoltre, ogni simplesso, escluso l'ultimo, abbia qualche estremo almeno in comune con il successivo.

Si noti che un n-poligrafo è connesso se lo è il poligrafo associato. Come esempio, consideriamo il poligrafo (X, U) associato al 2-poligrafo (V, S) che ha 6 vertici e per simplessi le terne:

$$s_1 = \{A, A, B\} \quad , \quad s_2 = \{B, C, D\} \quad , \quad s_3 = \{D, E, F\}$$

dove A, B, C, D, E, F sono i vertici di (V, S); i vertici di (X, U) sono allora A, B $C, D, E, F, s_1, s_2, s_3$ e gli spigoli sono le coppie:

$$\{A, s_1\} \ , \ \{A, s_1\} \ , \ \{B, s_1\} \ , \ \{B, s_2\} \ , \ \{C, s_2\} \ , \ \{D, s_2\} \ , \ \{D, s_3\} \ , \ \{E, s_3\} \ , \ \{F, s_3\} \, .$$

Notiamo, infine, che nel caso $n = 1$, il grafo associato è isomorfo a quello che si ottiene introducendo un vertice nuovo in ogni spigolo (con riferimento alla rappresentazione di un grafo su di un piano).

3. — Grafi associati ad n-grafi

Qui e nel seguito considereremo soltanto n-grafi semplici.

Ricordiamo, intanto, che:

Definizione 3 — Dati due n-grafi semplici (V, S) e (V', S'), si dice *isomorfismo* di (V, S) su (V', S') una biiezione di V su V' tale che ogni $(n + 1)$pla di elementi di V estremi di un simplesso ha per immagine una $(n + 1)$pla di elementi di V' estremi di un simplesso e, viceversa, ogni $(n + 1)$pla di elementi di V' estremi di un simplesso ha per controimmagine una $(n + 1)$pla di elementi di V estremi di un simplesso.

Orbene, il problema dell'isomorfismo tra n-grafi semplici può essere ricondotto a quello dell'isomorfismo tra grafi associati, mediante la seguente:

Proposizione 1 — Siano G_1 e G_2 due n-grafi semplici e siano G'_1 e G'_2 i grafi associati; allora, se G_1 e G_2 sono isomorfi, anche G'_1 e G'_2 lo sono e se, inoltre, G_1 e G_2 sono connessi e i loro vertici non hanno tutti grado $n + 1$, un isomorfismo di G'_1 su G'_2 induce un isomorfismo di G_1 su G_2.

Siano, invero, G_1 e G_2 due n-grafi semplici e isomorfi. Esiste, allora, una biiezione dell'insieme dei vertici di G_1 sull'insieme dei vertici di G_2 tale che ogni $(n+1)$ pla di vertici di G_1 estremi di un simplesso ha per immagine una $(n+1)$pla di vertici di G_2 estremi di un simplesso; una tale corrispondenza induce, allora, un isomorfismo di G'_1 su G'_2, se diciamo corrispondenti due simplessi di G_1 e di G_2 quando hanno per estremi $(n+1)$ple di vertici corrispondenti.

Supponiamo, viceversa, che G_1 e G_2 siano semplici e connessi e, inoltre, che non abbiano tutti i vertici di grado $n+1$; siano G'_1 e G'_2 isomorfi.

Cominciamo con il far vedere che il numero dei v-vertici di G'_1 coincide con il numero dei v-vertici di G'_2 (e che, pertanto, il numero degli s-vertici di G'_1 coincide con il numero degli s-vertici di G'_2). A tale scopo, mostriamo che l'isomorfismo di G'_1 su G'_2 non può far corrispondere a nessun s-vertice un v-vertice; difatti, se il v-vertice A di G'_1 avesse per immagine l's-vertice B di G'_2, considerato un cammino, esistente per la supposta connessione, con origine in A e che passi per tutti i vertici di G'_1, tale cammino incontrerebbe alternativamente s-vertici e v-vertici; questi siano:

$$A, L, M, N, \dots;$$

poiché L è un s-vertice (in quanto collegato con A) e la sua immagine T è un v-vertice (perché chiaramente collegato con B), si vede che l'isomorfismo, in tal caso, farebbe corrispondere ad ogni v-vertice un s-vertice e ciò implicherebbe, contro l'ipotesi, che tutti i vertici di G_1 e di G_2 avrebbero grado $n+1$; questo in quanto un isomorfismo conserva i gradi dei vertici.

L'isomorfismo fa pertanto corrispondere ad ogni s-vertice un s-vertice e ad ogni v-vertice un v-vertice; ne consegue che il numero dei vertici di G_1 coincide con il numero dei vertici di G_2 (così, pure, il numero dei simplessi di G_1 coincide con il numero dei simplessi di G_2); ne discende, pure, in modo ovvio, che l'isomorfismo di G'_1 su G'_2 induce un isomorfismo di G_1 su G_2.

Resta con ciò dimostrata la Proposizione 1.

Si osservi che un isomorfismo di G'_1 su G'_2, nel caso che tutti i vertici di G_1 e di G_2 abbiano grado $n+1$, non induce necessariamente un isomorfismo di G_1 su G_2, perché, in tal caso, l'isomorfismo potrebbe far corrispondere ad ogni v-vertice un s-vertice. D'altro canto, poiché, analogamente al caso 1-dimensionale, è immediato vedere che la somma dei gradi g_i dei vertici di un n-grafo semplice è dato dalla formula:

$$\Sigma g_i = (n+1)s, \tag{1}$$

dove s è il numero dei simplessi, si ha che se tutti i vertici di G_1 (e quindi di G_2) hanno grado $n+1$, essi sono in numero di s; se, quindi, esiste un automorfismo di G'_2 che ad ogni v-vertice fa corrispondere un s-vertice [1], il prodotto dell'automorfismo per l'isomorfismo è un isomorfismo di G'_1 su G'_2 che induce, anche in questo caso, un isomorfismo di G_1 su G_2.

[1] Per quanto non si sia indagato, si ha l'impressione che un tale automorfismo ci sia sempre; se ciò fosse, si potrebbe ovviamente lasciar cadere, nell'enunciato della Proposizione 1, l'ipotesi che tutti i vertici non abbiano grado $n+1$.

Nella sua Nota [2], A. M. Ghirlanda si è occupata delle caratteristiche dei grafi ed ha determinato i casi più semplici in cui la caratteristica di un grafo individua il grafo a meno di isomorfismi. Riprendiamo le considerazioni di A. M. Ghirlanda estendendole agli n-grafi.

Ricordiamo che:

Definizione 4 — Dato un n-grafo, si dice *caratteristica dei vertici* l'insieme dei gradi di essi; se vi sono k_1 vertici di grado g_1, k_2 vertici di grado g_2, ecc., la caratteristica sarà indicata con il simbolo:

$$((g_1)_{k_1}\ ,\ (g_2)_{k_2}\ ,\ \dots)\ .$$

Enunciamo, per completezza di discorso, la seguente proposizione, di cui ometteremo la dimostrazione perché banale.

Proposizione 2 — Se G è un n-grafo semplice con $n+1$ vertici, la caratteristica dei vertici di G è:

$$((1)_{n+1})\ ;$$

tale caratteristica determina il grafo, a meno di isomorfismi, fra i grafi semplici di dimensione n.

Dimostriamo, ora, la seguente

Proposizione 3 — Se G è un n-grafo semplice con $n+2$ vertici, la caratteristica dei vertici di G è:

$$((s-1)_s\ ,\ (s)_{n+2-s}) \tag{2}$$

se è s il numero dei simplessi. In ogni caso, tale caratteristica determina il grafo, a meno di isomorfismi, fra i grafi semplici di dimensione n.

Premettiamo, a tale scopo, la seguente:

Osservazione 1 — Se G è un n-grafo semplice con v vertici e s simplessi, detto m il numero dei vertici di grado massimo s, risulta:

$$s \leq \binom{v-m}{v-n-1}. \tag{3}$$

Difatti, se $A_1, A_2, \dots, A_m$ sono i vertici di grado massimo s, si avrà che un dato simplesso avrà per estremi, oltre $A_1, A_2, \dots, A_m$, $n+1-m$ tra i rimanenti vertici $A_{m+1}, A_{m+2}, \dots, A_v$, e pertanto il numero delle combinazioni di $A_{m+1}, A_{m+2}, \dots, A_v$ di classe $n+1-m$ risulterà maggiore o uguale al numero s dei simplessi. Quindi risulta:

$$\binom{v-m}{n+1-m} \geq s\ ,$$

da cui, subito, segue la (3).

Passiamo, quindi, a dimostrare la Proposizione 3.

Dalla (3), per $v = n + 2$, si ha, intanto:

$$m \leqslant n - s + 2 \ . \tag{4}$$

Mostriamo che è:

$$m = n - s + 2 \ . \tag{5}$$

In base alla (4), i vertici di grado s sono in numero $n + 2 - s - x$, con $x \geqslant 0$; in base alla (1), si ha:

$$\Sigma^* g_i = (n + 1)\, s - (n + 2 - s - x)\, s = (x + s - 1)\, s \tag{6}$$

dove $\Sigma^* g_i$ denota la somma dei vertici di grado diverso, e quindi minore, di s. Ma poiché il numero dei vertici di grado minore o uguale a $s - 1$ è

$$(n + 2) - (n + 2 - s - x) = s + x$$

risulta:

$$\Sigma^* g_i \leqslant (s + x)(s - 1) \tag{7}$$

e, pertanto, dalla (6) e dalla (7) segue:

$$(x + s - 1)\, s \leqslant (s + x)(s - 1)$$

cioè:

$$0 \leqslant -x \, .$$

Si ha, dunque, $x = 0$; ne consegue che i vertici di grado s sono $n + 2 - s$. Gli altri vertici, poiché sono in numero di s e risulta:

$$\Sigma^* g_i = (n + 1)\, s - (n + 2 - s)\, s = (s - 1)\, s$$

avranno tutti grado $s - 1$.

Per completare la dimostrazione, osserviamo che ogni simplesso di G ha per estremi $n + 2 - s$ vertici di grado massimo s, e siano: $A_1, A_2, \ldots, A_{n+2-s}$ e poi altri $(n + 1) - (n + 2 - s) = s - 1$ vertici tra i rimanenti vertici di grado $s - 1$; ma poiché i simplessi sono s ed il numero delle combinazioni di classe $s - 1$ degli s vertici di grado $s - 1$ è s, ogni simplesso ha per estremi i vertici $A_1, A_2, \ldots, A_{n+2-s}$ ed i vertici di una delle combinazioni di classe $s - 1$ dei rimanenti s vertici.

Dati, pertanto, *due n-grafi semplici con $n + 2$ vertici, siano (V, S) e (V', S'), ogni biiezione di V su V' che conserva i gradi è*, manifestatamente, *un isomorfismo di (V, S) su (V', S')*.

È utile per il seguito la seguente

Osservazione 2 — Se G è un n-grafo semplice con v vertici e s simplessi, risulta:

$$s \leqslant \binom{v}{n + 1} . \tag{8}$$

Difatti, il numero dei simplessi non può superare il numero delle combinazioni di classe $n+1$ dei v vertici, essendo un n-grafo semplice privo di simplessi in parallelo e di vertici multipli.

Dall'osservazione 2 si deduce pure che, *se è*:

$$s = \binom{v}{n+1}, \tag{9}$$

nel qual caso l'n-grafo semplice si dirà *completo, tutti i vertici hanno lo stesso grado g, e risulta*, in base alla (1) e alla (9):

$$g = \frac{n+1}{v}\binom{v}{n+1}$$

cioè:

$$g = \binom{v-1}{n}. \tag{10}$$

Utilizzando la nozione di grafo associato e la Proposizione 3 è possibile dedurre il seguente risultato che concerne i grafi:

Proposizione 4 — Sia G un grafo (1-*grafo*) *semplice i cui vertici siano $A_1, A_2, \dots, A_s, B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$; supponiamo che*:

a) *i vertici A_i abbiano tutti grado n e sia*:

$$s \leqslant n+1 \text{ (}^1\text{)};$$

b) *non esista alcuno spigolo che abbia per estremi due vertici A_i o due vertici B_i*;

c) *il numero dei cammini di lunghezza 2 i cui estremi siano due vertici A_i non superi mai n.*

In questa ipotesi si puo affermare che la caratteristica dei vertici G è sempre:

$$((s-1)_s\ ,\ (s)_{n+1-s}\ ,\ (n)_s)\ .$$

Per la dimostrazione basta osservare che il grafo G, per le ipotesi poste, risulta essere il grafo associato ad un $(n-1)$-grafo semplice con $n+1$ vertici, e invocare la Proposizione 3.

Dimostriamo, quindi, la seguente proposizione, che permette di individuare classi di n-grafi determinati dalla caratteristica dei vertici.

Proposizione 5 — Siano dati v numeri naturali $k_1, k_2, \dots, k_v$; supponiamo che vi sia, a meno di isomorfismi, un solo grafo, tra quelli di dimensione n e semplici, di caratteristica $(k_1, k_2, \dots, k_v)$. *Allora, detto s il numero dei simplessi di questo grafo, se non è $k_1 = k_2 = \dots = k_v = s = n + u + 1$, la caratteristica*:

$$(k_1\ ,\ k_2\ ,\ \dots\ ,\ k_v\ ,\ (s)_n) \tag{12}$$

---

[1] Questa ipotesi si rende necessaria per soddisfare la (8), nella quale si ponga, al posto di $n+1$, n e successivamente $v = n+1$.

dove u è un intero positivo qualunque, individua, a meno di isomorfismi tra i grafi semplici di dimensione $n + u$, un grafo (avente, in base alla (1), *sempre s simplessi).*

Consideriamo, difatti, due $(n + u)$-grafi semplici, siano G_1 e G_2, aventi per caratteristica la (12), e siano G e G' i grafi ad essi associati.

Consideriamo i sottografi S e S' rispettivamente di G e di G' che si ottengono da essi sopprimendo gli u vertici di grado s e gli spigoli che hanno un estremo in essi. S e S' hanno entrambi per caratteristica dei vertici:

$$((n+1)_r \,, \, k_1 \,, \, k_2 \,, \dots , \, k_r)$$

e pertanto sono i grafi associati di due n-grafi semplici aventi per caratteristica la (11); ma quest'ultimi sono isomorfi, e quindi, per la Proposizione 1, anche S e S' lo sono; facilmente segue l'isomorfismo di G su G' e quindi, riapplicando la Proposizione 1, l'isomorfismo di G_1 su G_2. È sottinteso che, nelle ipotesi poste, tutte le ipotesi della Proposizione 1 risultano verificate.

Utilizzando la Proposizione 5 e ricordando i risultati di A. M. Ghirlanda, è facile far vedere che le seguenti caratteristiche, per esempio, individuano, a meno di isomorfismi il grafo, fra quelli di dimensione n e semplici:

$$((1)_2 \,, \, (2)_3 \,, \, (4)_{n-1}) \,, \; (1, 2, 2, 3, 4, (6)_{n-1}) \,, \; ((4)_5 \,, \, (10)_{n-1}) \,.$$

4. — Isomorfismo tra n-grafi semplici e regolari

Definizione 5 — Un n-grafo si dice *regolare* se tutti i suoi vertici hanno lo stesso grado.

Cominciamo con l'osservare che dalla (1) si ha:

$$g\,v = (n+1)\,s \tag{13}$$

dove g è il grado dei vertici di un n-grafo semplice e regolare avente s simplessi. Dalla (13), posto:

$$m = M.C.D.\,(n+1, v)$$

e posto:

$$a = v/m \quad \text{e} \quad b = (n+1)/m$$

segue:

$$g = h\,b \quad \text{e} \quad s = h\,a$$

con h che è un valore intero compatibile con la (9), cioè:

$$1 \leqslant h \leqslant \binom{v}{n+1} \Big/ a \,.$$

Definizione 6 — Dato un n-grafo semplice (V, S), si dice *n-grafo parziale* di (V, S) un n-grafo (V, S') tale che $S' \subseteq S$. Se (V, S_1) e (V, S_2) sono due n-grafi parziali dell'n-grafo (V, S) completo e semplice (e perciò regolare) e se risulta:

$$S_1 \cup S_2 = S$$

$$S_1 \cap S_2 = \varnothing\,,$$

allora (V, S_1) e (V, S_2) si diranno *complementari*.

Ovviamente, se (V, S_1) è regolare, anche (V, S_2) lo è, e viceversa. Pure, se (V, S_1) è un n-grafo semplice e regolare, (V, S_1) potrà essere considerato, a meno di isomorfismi, come un n-grafo parziale dell'n-grafo semplice e completo (V, S) e in questo senso si parlerà del suo complementare. Ciò premesso, dimostriamo la seguente

Proposizione 6 — Fissati i numeri naturali g, v, n, se la caratteristica dei vertici:

$$(g)_v \tag{14}$$

determina, a meno di isomorfismi, un grafo, fra quelli di dimensione n e semplici, la caratteristica dei vertici:

$$\left(\binom{v-1}{n}-g\right)_v \tag{15}$$

determina, a meno di isomorfismi, un grafo, fra quelli di dimensione n e semplici.

Siano, difatti, $G_1 = (V_1, S_1)$ e $G_2 = (V_2, S_2)$ due n-grafi semplici aventi per caratteristica la (15); G_1 e G_2 potranno essere considerati come n-grafi parziali di due n-grafi semplici e completi $G = (V_1, S)$ e $G' = (V_2, S')$. Diciamo, poi, $G'_1 = (V_1, S'_1)$ e $G'_2 = (V_2, S'_2)$ i complementari di G_1 e di G_2 rispettivamente; ovviamente, G'_1 e G'_2 avranno per caratteristica la (14) e pertanto saranno isomorfi.

Esiste, quindi, una biiezione di V_1 su V_2 tale che ogni $(n+1)$pla di vertici di G'_1 estremi di un simplesso ha per immagine una $(n+1)$pla di vertici di G'_2 estremi di un simplesso; ma questa biiezione è certamente un isomorfismo di G su G', poiché, essendo G e G' completi, ogni biiezione di V_1 su V_2 è un isomorfismo. Ne discende, in modo ovvio, che tale biiezione è anche un isomorfismo di G_1 su G_2.

Resta con ciò dimostrata la tesi.

È, poi, ovvio che, se la (14) non individua il grafo, nemmeno la (15) lo individua, perché se, per assurdo, la (15) individuasse il grafo, anche la (14), applicando la stessa Proposizione 6, individuerebbe il grafo.

La Proposizione 6 mostra come, una volta individuato un n-grafo determinato dalla caratteristica, se ne possa determinare un altro, il suo complementare, che ha la stessa proprietà; la seguente, invece, individua una larga classe di n-grafi individuati dalla caratteristica.

Proposizione 7 — Per ogni l, *la caratteristica dei vertici:*

$$(g)_{(g+1)l} \tag{16}$$

determina, a meno di isomorfismi, un grafo, fra quelli di dimensione $gl-1$ e semplici.

Prima di passare alla dimostrazione, osserviamo che la classe considerata comprende tutti i grafi per i quali è:

$$s = g + 1 \tag{17}$$

dove s è il numero dei simplessi, qualunque ne sia la dimensione.

Sia (V, S) un n-grafo semplice e regolare con $(g + 1)$ l vertici, ognuno di grado g, e $g + 1$ simplessi $(n = g\,l - 1)$; cominciamo con il dimostrare che ogni simplesso di G ha per estremi i vertici dei raggruppamenti di una combinazione di classe g di raggruppamenti $c_1, c_2, \dots, c_{g+1}$, costituiti di l vertici ciascuno, tali che

$$\bigcup_{i=1}^{g+1} c_i = V \tag{18}$$

$$c_i \cap c_j = \varnothing \qquad \forall\,(i, j)$$

L'asserto verrà dimostrato, per $l = 1$, per induzione su g, e successivamente per induzione su l.

Per $l = 1$ e $g = 2$ (quindi: $v = 3$, $s = 3$, $n = 1$) la tesi è vera; i vertici, invero, siano A, B, C e i simplessi s_1, s_2, s_3; s_1 ha per estremi due vertici, siano A e B; il vertice C, essendo $g = 2$, sarà allora estremo di s_2 e di s_3 e questi ultimi avranno, poi, per estremi, oltre C, uno degli altri due vertici A e B; si ha pertanto:

$$s_1 = \{A, B\} \quad , \quad s_2 = \{B, C\} \quad , \quad s_3 = \{A, C\} \quad ,$$

ed è, in tal caso:

$$c_1 = \{A\} \quad , \quad c_2 = \{B\} \quad , \quad c_3 = \{C\} \quad .$$

Supposto, pertanto, la tesi vera per $l = 1$ e $g = h$, dimostriamola per $l = 1$ e $g = h + 1$. Precisamente, consideriamo un h-grafo N semplice e regolare con $h + 2$ vertici, di grado $h + 1$ ognuno, siano A_i, e $h + 2$ simplessi, siano s_i. Il simplesso s_{h+2} ha per estremi $h + 1$ vertici e siano $A_1, A_2, \dots, A_{h+1}$; di conseguenza il vertice A_{h+2}, essendo di grado $h + 1$, dovrà essere estremo di tutti i simplessi $s_1, s_2, \dots, s_{h+1}$; quindi i simplessi $s_1, s_2, \dots, s_{h+1}$ avranno per estremi, oltre ad A_{h+2}, altri h tra i vertici $A_1, A_2, \dots, A_{h+1}$ ed ognuno di questi ultimi dovrà essere estremo di h dei simplessi $s_1, s_2, \dots, s_{h+1}$.

Ne consegue che l'$(h - 1)$-grafo N', avente per vertici $A_1, A_2, \dots, A_{h+1}$ e per simplessi quelli che si ottengono da $s_1, s_2, \dots, s_{h+1}$ sopprimendo il vertice A_{h+2}, è regolare con i vertici di grado h e semplice; ne consegue, pure, che i simplessi $s_1, s_2, \dots, s_h$ avranno per estremi A_{h+2} ed una delle combinazioni di classe h dei vertici $A_1, A_2, \dots, A_{h+1}$; segue, facilmente, l'asserto.

Supponiamo, ora, che la tesi sia vera per $l = k$ e dimostriamo che essa è vera per $l = k + 1$. Consideriamo, a tale scopo, un $(g(k + 1) - 1)$-grafo M semplice e regolare con $(g + 1)(k + 1)$ vertici, ognuno di grado g, siano A_i e $g + 1$ simplessi, siano s_i. Il simplesso s_{g+1} ha per estremi $g(k + 1)$ vertici e siano $A_1, A_2, \dots, A_{g(k+1)}$; gli altri vertici $A_{g(k+1)+1}, A_{g(k+1)+2}, \dots, A_{(g+1)(k+1)}$, essendo di grado g, dovranno essere estremi di ognuno dei rimanenti simplessi $s_1, s_2, \dots, s_g$. Si deduce, come per l'asserto precedente, che il $(g\,k-1)$-grafo che ha per vertici $A_1, A_2, \dots, A_{g(k+1)}$ e per simplessi quelli che si ottengono da $s_1, s_2, \dots, s_g$ per soppressione dei vertici $A_{g(k+1)+1}$, $A_{g(k+1)+2}, \dots, A_{(g+1)(k+1)}$ è regolare e semplice. La tesi ne consegue riprendendo il ragionamento fatto per la dimostrazione del precedente asserto.

Ciò premesso, siano G_1 e G_2 due $(g\,l-1)$-grafi semplici aventi per caratteristica la (16); per quanto detto, i simplessi di G_1 e di G_2 hanno per estremi i vertici dei raggruppamenti delle combinazioni di classe g di raggruppamenti, costituiti da l vertici ciascuno, che verificano le (18). Siano $(c_1, c_2, \dots, c_{g+1})$ i raggruppamenti suddetti dei vertici di G_1 e siano $(c'_1, c'_2, \dots, c'_{g+1})$ i raggruppamenti dei vertici di G_2; è abbastanza evidente, allora, che qualunque biiezione dell'insieme dei vertici di G_1 sull'insieme dei vertici di G_2, che faccia corrispondere ad ogni l-upla di vertici di G_1 di c_i una l-upla di vertici di G_2 appartenenti a c'_i, è un isomorfismo di G_1 su G_2.

Resta con ciò dimostrata la Proposizione 7.

Dalla Proposizione 7 e dalla precedente è facile dedurre il seguente.

Corollario — Per ogni l, la caratteristica dei vertici:

$$\left(\binom{(g+1)\,l-1}{l}-g\right)_{(g+1)\,l} \tag{19}$$

determina, a meno di isomorfismi, un grafo, fra quelli di dimensione gl-1 e semplici

Prima di passare a considerare dei casi particolari e fare delle osservazioni conclusive, merita di essere segnalata la seguente, di ovvia dimostrazione,

Proposizione 8 — Fissati i numeri naturali v, n, s in modo che sia $v=(n+1)\,s$, la caratteristica dei vertici:

$$(1)_v \tag{20}$$

determina un grafo, fra quelli di dimensione n e semplici, con s simplessi.

Da essa è, poi, facile dedurre, invocando la Proposizione 6, il seguente enunciato, che concerne la caratteristica «complementare»:

fissati i numeri naturali v e n, con v multiplo di $n+1$, la caratteristica dei vertici:

$$\left(\binom{v-1}{n}-1\right)_v$$

determina un grafo, fra quelli di dimensione n e semplici.

Nella sua Nota [3], A. M. Ghirlanda si è anche occupata dei grafi (1-grafi) regolari e semplici con 6 vertici ed ha mostrato in quali casi la caratteristica determina il grafo. Alle stesse conclusioni si può pervenire osservando che, per $n=1$, $v=6$, $g=1$, $s=3$, la caratteristica determina il grafo e che lo stesso non accade per $n=1$, $v=6$, $g=2$, $s=6$ (1); se ne deduce (Proposizione 6) che, per $n=1$, $v=6$, $g=4$, $s=1$, la caratteristica determina il grafo e che lo stesso non accade per $n=1$, $v=6$, $g=3$, $s=9$.

(1) Difatti per $n=1$, $v=6$, $g=1$, $s=3$ esiste soltanto il grafo che ha per vertici A, B, C, D, E, F e per spigoli AB, CD, EF mentre per $n=1$, $v=6$, $g=2$, $s=6$ esistono i grafi: G, con vertici A, B, C, D, E, F e spigoli AB, BC, CD, DE, EF, AF e G', con vertici A, B, C, D, E, F e spigoli AB, BC, AC, ED, EF, DF.

Allo scopo di ottenere una certa visione di assieme degli n-grafi regolari, si è elaborato un programma, mediante un calcolatore elettronico, che consente di scrivere (per $n = 1, 2, \ldots, 9$ e per $v = n + 3, \ldots, n + 7$) dimensione, numero dei vertici, numero dei simplessi e grado di tutti gli n-grafi semplici e regolari. Il programma è il seguente (¹):

```
      DIMENSION MC (50)
      PRINT 1000
1000  FORMAT («1 DIM», 4X, «VERT», 10X, «SIMP», 10X, «GRAD», 10X,
      «KH»//)
      READ (5, 6) (MC (I), I = 1,50)
   6  FORMAT (25I2)
      J = 0
      IDIM = 0
   1  IDIM = IDIM + 1
      IVERT = IDIM + 2
   2  IVERT = IVERT + 1
      M = IVERT
      L = IVERT — IDIM
      N = IVERT
   7  N = N — 1
      M = M * N
      IF (N — L) 7, 3, 7
   3  IP = IDIM + 1
      K = IDIM + 1
  10  K = K — 1
      IP = IP * K
      IF (K — 2) 9, 10, 10
   9  KOMB = M/IP
      J = J + 1
      MCD = MC (J)
      IR = IVERT/MCD
      IT = (IDIM + 1)/MCD
      KH = 0
  20  KH = KH + 1
      ISIMP = IR * KH
      IF (ISIMP — KOMB) 21, 21, 12
  21  IGRAD = IT * KH
      WRITE (6, 50) IDIM, IVERT, ISIMP, IGRAD, KH
  50  FORMAT (3X, I2, 7X, I2, 5X, I10, 5X, I10, 7X, I15)
      GO TO 20
```

---

(1) Il programma è scritto in linguaggio FORTRAN IV ed è stato eseguito dal calcolatore IBM 360/44 del Centro di Calcolo Elettronico della Facoltà di Scienze di Napoli.

```
 12 IF (IVERT — IDIM — 7) 2, 60, 2
 60 IF (IDIM — 10) 1, 200, 1
200 STOP
    END
```

Dati in ingresso : 2, 1, 2, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 3, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 1, 1, 5, 1, 2, 3, 2, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 3, 2, 1, 2, 5, 2, 1, 1, 1, 1, 1.

Si sono, poi, esaminati alcuni casi particolari. Ad esempio, si è osservato che la *caratteristica* :

(21) $(3)_5$

determina, a meno di isomorfismi, fra i grafi semplici di dimensione 2, un grafo, mentre *esistono due 2-grafi non isomorfi e semplici che hanno per caratteristica la*

(22) $(3)_7$.

Dimostriamo queste ultime asserzioni.

Consideriamo un grafo semplice di dimensione 2 che ha per caratteristica la (21); diciamo A, B, C, D, E i suoi vertici e a, b, c, d, e i suoi simplessi, in numero di 5 in base alla (13). Il simplesso a ha per estremi tre vertici e siano A, B, C ; ciascuno dei vertici D e E, essendo di grado 3, deve essere estremo di tre dei rimanenti simplessi b, c, d, e ; ma essi non possono essere estremi di una stessa terna di simplessi, per es. b, c, d, perché in tal caso il simplesso e dovrebbe avere per estremi A, B, C e sarebbe in parallelo con a. Ne consegue che, essendo i vertici tutti di grado 3, devono esistere due simplessi che hanno per estremi sia D che E e altri due uno solo di essi; siano i primi b e c e gli altri due d e e ; quindi, il simplesso b ha per estremi D, E ed uno dei vertici A, B, C, e sia A, il simplesso c ha per estremi D, E ed uno dei vertici B, C, e sia B ; i simplessi d e e avranno, poi, per estremi il vertice C, uno il vertice D e l'altro il vertice E e quindi, ancora, uno il vertice A e uno il vertice B. Dal ragionamento fatto, si deduce che ogni altro 2-grafo semplice che ha per caratteristica la (21) differisce dal dato soltanto, eventualmente, per il nome dato ai vertici o ai simplessi e, quindi, è isomorfo al dato.

Consideriamo, invece, il 2-grafo G che ha per vertici A, B, C, D, E, F, G e per simplessi le terne :

$$\{A, B, C\} \ , \ \{D, E, A\} \ , \ \{D, E, B\} \ , \ \{D, E, C\} \ , \ \{F, G, A\} \ , \ \{F, G, B\} \ , \ \{F, G, C\}$$

e il 2-grafo G' che ha per vertici A', B', C', D', E', F', G' e per simplessi le terne :

$$\{A', B', C'\} \ , \ \{D', E', A'\} \ , \ \{D', E', B'\} \ , \ \{D', G', C'\} \ , \ \{F', G', A'\} \ , \ \{F', G', B'\} \ ,$$
$$\{F', E', C'\} \ ;$$

si osserva immediatamente che G e G', pur avendo entrambi per caratteristica la (22), non sono isomorfi perchè G' non ha coppie di vertici che sono estremi di più di due simplessi, mentre G' ne ha due (precisamente le coppie $\{D, E\}$ e $\{F, G\}$). Ne consegue (Proposizione 6) che *la caratteristica* (12), *non determina il grafo, fra quelli di dimensione 2 e semplici.*

Napoli - Istituto Matematico, Facoltà di Ingegneria dell'Università - Luglio 1972.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. Berge - Théorie del graphes et ses applications, Dunod, Paris, 1967.

[2] C. Berge - Graphes et ipergraphes, Dunod, Paris, 1970.

[3] A. M. Ghirlanda - Osservazioni sulle caratteristiche dei grafi o singrammi, Annali Univ. Ferrara, vol. 11, 62-65.

[4] O. Ore - Theory of graphs, Amer. Math. Soc. Col. Publ. Providence, 1962.

[5] F. Speranza - Sui singrammi privi di automorfismi non identici, Atti Soc. Peloritana Sc., 14, 1-31, 1968.