

## Modelli bidimensionali di campo magnetico (\*)

**Riassunto:** Si studia il problema di determinare i possibili campi magnetici bidimensionali in equilibrio statico, le cui linee di forza sieno curve di equazione:  $a x^4 + b y^4 + 2 c x^2 y^2 + 2 d x^2 + 2 e y^2 = \text{costante}$ . Si ottengono vari tipi di soluzioni e si studiano le proprietà di ciascuna di esse, con speciale riguardo ai punti neutri. Le varie soluzioni sono poi rappresentate in una serie di grafici.

**Summary:** The A. tries to find possible two-dimensional magnetic fields in static equilibrium, whose lines of force derive from an equation of the kind:  $a x^4 + b y^4 + 2 c x^2 y^2 + 2 d x^2 + 2 e y^2 = \text{constant}$ . Several solutions are obtained and their properties studied, particularly caring for the neutral points. They are then represented on a series of graphs.

Questa nota ha avuto origine dalla lettura della «Cosmic Electrodynamics» di J. W. DUNGEY (1). Per dare alla sua trattazione la maggiore generalità ed eleganza, l'Autore fa in questa opera una esposizione della magnetoidrodinamica notevolmente astratta. Certamente questa è l'unica via per ottenere il maggior rigore possibile in una materia che presenta ancora molte incertezze. Ma questo non toglie che nel lettore non sorga spesso il desiderio di vedere tradotto in esempi concreti ciò che nel testo del DUNGEY è spesso trattato solo qualitativamente. In questo lavoro ci proponiamo appunto di realizzare alcuni esempi di campo magnetico bidimensionale, rivolgendo soprattutto l'attenzione ai punti neutri, i quali, in seguito alla teoria proposta da GIOVANNELLI per spiegare i brillamenti solari, presentano un notevole interesse in Astrofisica. Naturalmente questo lavoro rimane nei limiti di una pura trattazione teorica, senza nessuna pretesa di risolvere problemi pratici.

Se

$$(1) \quad A(x, y) = C$$

è la equazione delle linee di forza di un campo magnetico, si ha lungo tali linee:

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial A}{\partial x}}{\frac{\partial A}{\partial y}}$$

(\*) Memoria presentata dall'Accademico Guglielmo Righini.

D'altra parte per la definizione di linea di forza, si ha anche :

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{H_y}{H_x}.$$

Si può quindi senz'altro prendere per le componenti del campo  $H_x$  ed  $H_y$  le espressioni :

$$(4) \quad H_x = \frac{\partial A}{\partial y} \quad H_y = -\frac{\partial A}{\partial x}.$$

Il significato di  $A$  è subito trovato :

$$(5) \quad \mathbf{H} = H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} = \frac{\partial A}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial A}{\partial x} \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix} = \text{rot } A,$$

cioè lo scalare  $A(x, y)$  è la componente  $z$  del vettore  $A$ , le cui componenti  $x$  ed  $y$  sono nulle e che rappresenta il potenziale vettoriale del campo considerato.

La condizione che il campo magnetico sia solenooidale è verificata automaticamente, mentre per la densità di corrente  $\mathbf{j}$ , trascurando come è d'uso in magnetoidrodinamica le correnti di spostamento, si ha l'espressione :

$$(6) \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{H} = k \Delta_x A \frac{c}{4\pi};$$

la corrente fluisce quindi in direzione  $z$ .

Supposto che le forze presenti derivino da un potenziale  $V$ , la equazione dell'equilibrio è :

$$(7) \quad \frac{1}{c} \mathbf{j} \wedge \mathbf{H} + \text{grad } V = 0$$

e questa esige che sia :

$$(8) \quad [\text{rot } \mathbf{j} \wedge \mathbf{H} = 0 \text{ ossia rot } [(\text{rot } \mathbf{H}) \wedge \mathbf{H}] = 0.$$

Risolta questa equazione in  $\mathbf{H}$ , risultano determinate le forze, che, per la (7) saranno contenute nel piano  $xy$ .

Si trova subito :

$$(9) \quad (\text{rot } \mathbf{H}) \wedge \mathbf{H} = (\mathbf{H} \times \text{grad}) \mathbf{H} - \text{grad } H^2$$

e quindi :

$$(10) \quad \text{rot } [(\text{rot } \mathbf{H}) \wedge \mathbf{H}] = \text{rot } [(\mathbf{H} \times \text{grad}) \mathbf{H}] = k \left\{ \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial \Delta_x A}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial \Delta_x A}{\partial x} \right\}.$$

Tenendo conto della (2), la condizione (8) può quindi scriversi:

$$(11) \quad \frac{\partial \Delta_2 A}{\partial x} dx + \frac{\partial \Delta_2 A}{\partial y} dy = 0$$

dove  $dx$  e  $dy$  non sono indipendenti, ma tali da determinare uno spostamento lungo una linea di forza. La (11) esprime quindi la condizione che  $\Delta_2 A$  deve essere costante lungo una linea di forza e cioè:

$$(12) \quad \Delta_2 A = \Phi(A)$$

perfettamente equivalente all'altra:

$$(13) \quad \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial \Delta_2 A}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial \Delta_2 A}{\partial y} = 0.$$

\*\*\*

Una equazione del tipo (12) o (13) si presenta anche in idrodinamica, ma non è stata studiata a fondo né sistematicamente, perché l'interesse che essa presenta è molto minore in idrodinamica che in magnetoidrodinamica. L'unica soluzione generale a cui accennano DUNGEY (1) e LAMB (2) è \*:

$$\Lambda(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

soluzione che dà come linee di forza delle coniche coassiali e che in generale non si comporta in modo soddisfacente quando la distanza tende all'infinito. Le coniche posseggono un punto doppio solo se degenerano in due rette e i punti neutri di tipo X sono, per questa soluzione, rappresentati come intersezione di due rette.

In questo lavoro vogliamo esaminare soluzioni di quarto grado, possedenti la simmetria massima e cioè la forma:

$$(14) \quad \Lambda(x, y) = ax^4 + by^4 + 2c x^2 y^2 + 2d x^2 + 2e y^2.$$

Con questa espressione per  $\Lambda$ , la (13) assume la forma:

$$(15) \quad x^2 y [a(3b + c) - c(3a + c)] + y^2 x [c(3b + c) - b(3a + c)] + xy [d(3b + c) - e(3a + c)] = 0.$$

Deve quindi essere:

$$(16) \quad \begin{aligned} a(3b + c) - c(3a + c) &= 0 \\ c(3b + c) - b(3a + c) &= 0 \\ d(3b + c) - e(3a + c) &= 0. \end{aligned}$$

\* DUNGEY a pag. 49; LAMB al § 165; LAMB accenna anche ad un altro caso particolare.

Questo sistema ha le soluzioni:

- I)  $a = c = 0$ ;  $b$  ed  $e$  qualsiasi;  $A = b y^4 + e y^2$ .  
 II)  $a$  e  $d$  qualsiasi;  $b = e = 0$ ;  $A = a x^4 + d x^2$ .  
 III)  $a = b = c = e = d$ ;  $A = a[(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2)]$ .  
 IV)  $a = b = -c/3$ ;  $e$  e  $d$  qualsiasi;  $A = a(x^4 + y^4 - 6x^2 y^2) + 2d x^2 + 2e y^2$ .

\*\*\*

Le soluzioni I) II) III) non dicono niente di particolare né di nuovo. I) e II) rappresentano rette parallele agli assi  $e$ , se  $b$  ed  $e$  (o  $a$  e  $d$ ) sono di segno contrario, tre linee neutre sono possibili, altrimenti una sola. La soluzione III) dà come linee di forza delle circonferenze col centro nell'origine, che è un punto neutro, l'unico, di tipo O.

Le soluzioni I) II) III) godono di questa notevole proprietà, che qualunque funzione (derivabile) di  $A$  soddisfa alla (12), come si vede immediatamente ricordando che:

$$(17) \quad \Delta_1 F(A) = \frac{dF(A)}{dA} \Delta_1 A + \frac{d^2 F(A)}{dA^2} (\text{grad } A)^2$$

ed osservando che:

$$(\text{grad } A)^2 = 4 y^2 (2 b y^2 + e)^2; \quad y^2 = \frac{-e \pm \sqrt{e^2 + 4 b A}}{2 b}$$

nel caso I).

$$(\text{grad } A)^2 = 4 x^2 (2 a x^2 + d)^2; \quad x^2 = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 + 4 a A}}{2 a}$$

nel caso II).

$$(\text{grad } A)^2 = 16 a^2 (x^2 + y^2 + 1)^2 (x + y)^2; \quad x^2 + y^2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + a A}}{a}$$

nel caso III).

Questa proprietà ha un'importanza notevole perché permette di ottenere soluzioni soddisfacenti a particolari condizioni e soprattutto tendenti all'infinito in una determinata maniera, pur mantenendo la forma geometrica relativa alle soluzioni I) II) III).

Una notevole proprietà dei punti neutri è che se essi sono di tipo O, vale la legge di Lenz, mentre tale legge non vale per i punti neutri di tipo X.

Questa proprietà può facilmente verificarsi per la soluzione III). Le equazioni che determinano la maniera di variare rispetto al tempo delle derivate parziali del campo magnetico e delle velocità, sono :

$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{\partial H_{xx}}{\partial t} &= u_{xy} H_{yx} - u_{yx} H_{xy} - H_{xx} (u_{xx} + u_{yy}) \\ \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} &= u_{xy} (H_{yy} - H_{xx}) - 2 u_{yy} H_{xy} \\ \frac{\partial H_{yx}}{\partial t} &= u_{yx} (H_{xx} - H_{yy}) - 2 H_{yx} u_{xx} \\ \frac{\partial H_{yy}}{\partial t} &= H_{xy} u_{yx} - H_{yx} u_{xy} - H_{yy} (u_{xx} + u_{yy}) \end{aligned}$$

$$(19) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_{xx}}{\partial t} &= -u_{xx}^2 - u_{xy} u_{yx} + (H_{xy} - H_{yx}) H_{yx} / 4 \pi \mu \\ \frac{\partial u_{xy}}{\partial t} &= -u_{xy} (u_{xx} + u_{yy}) + (H_{xy} - H_{yx}) H_{yy} / 4 \pi \mu \\ \frac{\partial u_{yx}}{\partial t} &= -u_{yx} (u_{xx} + u_{yy}) + (H_{yx} - H_{xy}) H_{xx} / 4 \pi \mu \\ \frac{\partial u_{yy}}{\partial t} &= -u_{xy} u_{yx} - u_{yy}^2 + (H_{yx} - H_{xy}) H_{xy} / 4 \pi \mu \end{aligned}$$

$$(20) \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} = -\mu (u_{xx} + u_{yy})$$

in cui  $u$  è la velocità e  $\mu$  la densità; ed inoltre è:

$$H_{xy} = \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad \text{etc.} \quad u_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad \text{etc.}$$

intendendo che le derivate sono calcolate nel punto neutro. Nel caso III) essendo :

$$(21) \quad \begin{aligned} H_x &= 4 a y + 4 a y x^2 + 4 a y^3 \\ H_y &= -4 a x - 4 a x^3 - 4 a x y^2 \end{aligned}$$

avremo che

$$(22) \quad H_{xy} = -H_{yx} = 4 a \quad ; \quad H_{xx} = H_{yy} = 0.$$

Supponendo inoltre che inizialmente sia  $u_{xy} = u_{yx} = u_{xx} = u_{yy} = 0$ , si vede che  $H_{xx}$ ,  $H_{yy}$ ,  $u_{xy}$ ,  $u_{yx}$ , annullandosi per  $t = 0$ , rimangono sempre nulle. Variano invece col tempo  $H_{xy}$ ,  $H_{yx}$ ,  $u_{xx}$  ed  $u_{yy}$  e le equazioni da considerare sono le seguenti :

$$(23) \quad \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} = -2 u_{yy} H_{xy} \quad ; \quad \frac{\partial H_{yx}}{\partial t} = -2 H_{yx} u_{xx}.$$

$$\frac{\partial u_{xx}}{\partial t} = -u_{xx}^2 + \frac{(H_{yy} - H_{zz}) H_{yz}}{4\pi\mu} ; \quad \frac{\partial u_{yy}}{\partial t} = -u_{yy}^2 + \frac{(H_{yz} - H_{zz}) H_{xy}}{4\pi\mu}$$

$$(24) \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} = -\mu (u_{xx} + u_{yy}).$$

Data la simmetria delle equazioni e delle condizioni iniziali il sistema si riduce in realtà a sole tre equazioni. Si vede immediatamente che le  $u_{xx}$  ed  $u_{yy}$ , avendo derivate negative e valore iniziale nullo, si mantengono sempre negative. Inoltre, sottraendo la seconda delle (23) dalla prima, si ottiene:

$$(25) \quad \frac{\partial}{\partial t} (H_{yx} - H_{zy}) = -2 u_{xx} H_{yz} + 2 u_{yy} H_{xy},$$

la quale ci dice che la funzione  $H_{yx} - H_{zy} = 4 j_z$  è decrescente col tempo e cioè che vale la legge di Lenz.

Tenuto poi conto di quello che abbiamo detto sul comportamento di  $u_{xx}$  ed  $u_{yy}$ , la (24) dimostra che la densità in prossimità del punto neutro cresce.

\*\*\*

Le linee di forza relative alla soluzione IV) sono delle quartiche. Per le componenti del campo si hanno le espressioni:

$$(26) \quad H_x = \frac{\partial A}{\partial y} = 4y (ay^2 - 3ax^2 + e)$$

$$H_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = -4x (ax^2 - 3ay^2 + d)$$

che uguagliate a zero ci forniscono le coordinate dei punti neutri.

Le soluzioni del sistema:

$$(27) \quad 4y (ay^2 - 3ax^2 + d) = 0$$

$$-4x (ax^2 - 3ay^2 + d) = 0$$

sono (formalmente):

$$(28) \quad x = 0 \quad y = 0 ; \quad x = 0 \quad y = \pm \sqrt{-e/a} ; \quad x = \pm \sqrt{-d/a} \quad y = 0 ;$$

$$x = \pm \sqrt{(3e+d)/8a} \quad y = \pm \sqrt{(3d+e)/8a}.$$

Non tutte queste soluzioni sono reali ed il loro numero, e quindi quello dei punti neutri, dipende dai valori dei parametri  $a$ ,  $d$ ,  $e$ . I risultati della analisi relativa, che è piuttosto prolissa, possono essere riassunti nel seguente grafico, in cui ogni determinato campo che, come si vede subito, può caratterizzarsi mediante i rapporti  $d/a$  ed  $e/a$ , corrisponde ad un punto del piano.

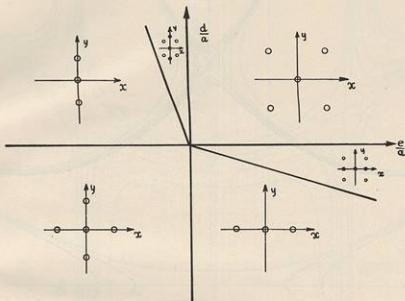


Fig. 1

Per tutti i campi corrispondenti a punti del primo e del terzo quadrante, nei quali  $e/a$  e  $d/a$  sono dello stesso segno, si hanno cinque punti neutri, di cui uno nell'origine e gli altri distribuiti simmetricamente rispetto agli assi  $x$  ed  $y$ .

Nei quadranti secondo e quarto bisogna invece distinguere a seconda che entrambe le espressioni  $3d + e$  e  $3e + d$  sono positive, oppure una di esse almeno è negativa.

La condizione

$$(29) \quad 3d/a + e/a > 0 \quad ; \quad d/a + 3e/a > 0,$$

porta

$$(30) \quad d/a > -3e/a \quad ; \quad d/a > -e/3a.$$

Queste due condizioni sono verificate per  $e/a > 0$ , se  $d/a > -e/3a$ , e per  $e/a > 0$ , se  $d/a > -3e/a$ . Il secondo quadrante viene quindi diviso in due parti 1 e 2 dalla retta  $d/a = -3e/a$ . In 1 si hanno sette punti neutri distribuiti come in figura. In 2 si hanno invece tre punti neutri sull'asse  $y$ . Analogamente il quarto

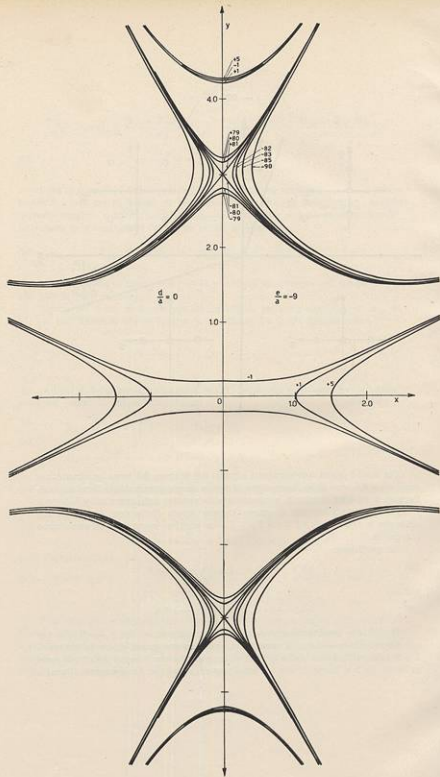


Fig. 2



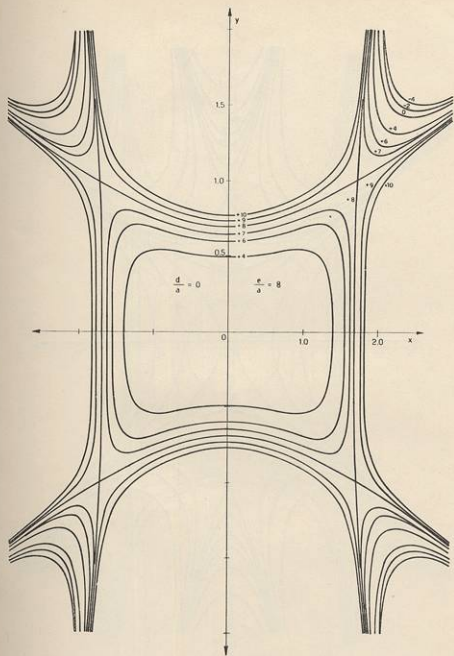


Fig. 3

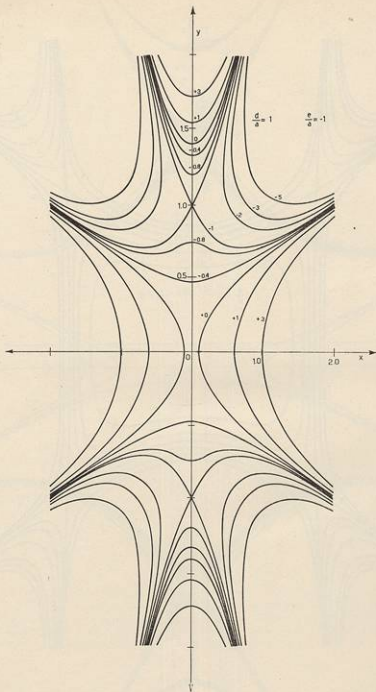


Fig. 4

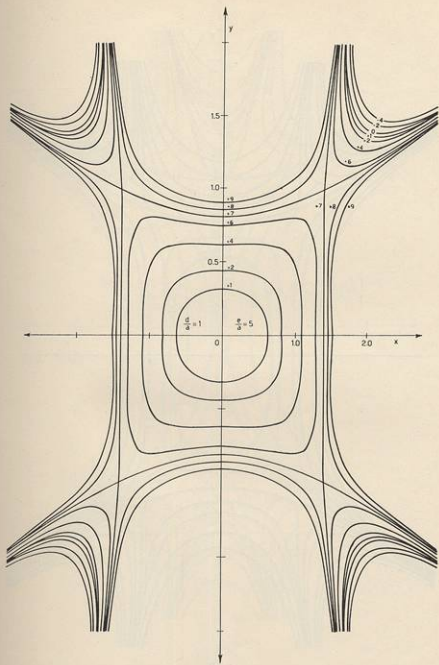


Fig. 5

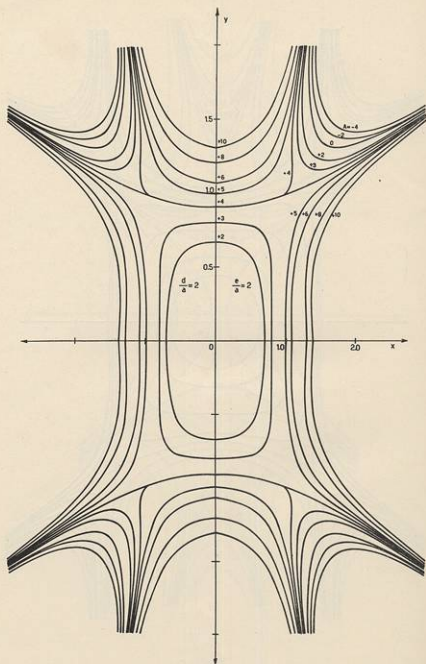


Fig. 6

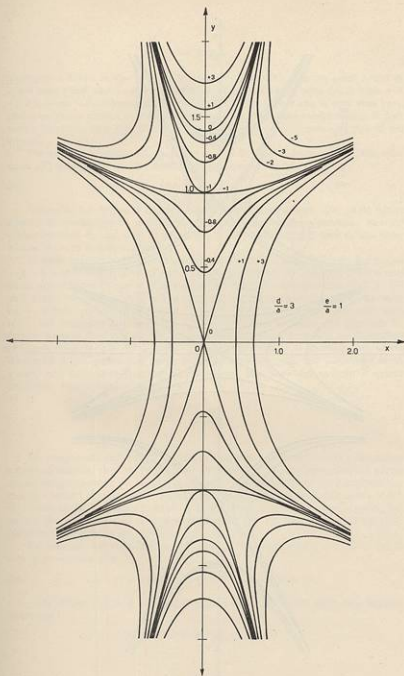


Fig. 7

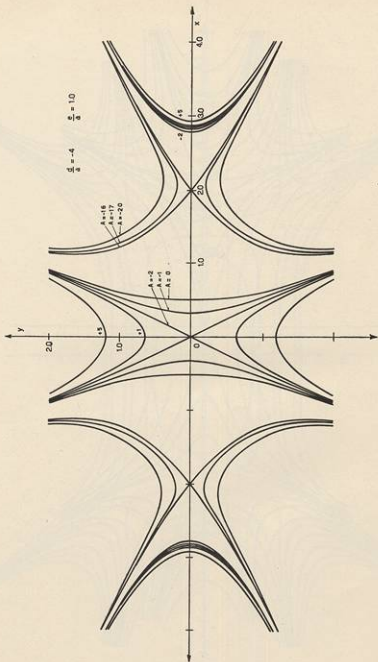


Fig. 8

quadrante è diviso in due parti dalla retta  $d/a = -e/3a$ , con tre punti neutri in una e sette punti neutri nell'altra. Sugli assi  $d/a$  e  $e/a$  e sulle rette  $d/a + 3e/a = 0$  e  $3d/a + e/a = 0$ , si hanno configurazioni limiti. Da notare che in ogni caso l'origine è un punto neutro, e, come subito risulta da elementari considerazioni di geometria algebrica, esso sarà di tipo O nel primo e terzo quadrante e di tipo X nel secondo e quarto.

Per qualunque valore dei parametri  $a, e, d$  le linee di forza relative alla soluzione IV) posseggono quattro asintoti di equazioni complessive:

$$(31) \quad y^2 = (3 \pm \sqrt{8}) x^2.$$

Un'analisi topologica ci darebbe informazioni sul tipo degli altri punti neutri distinti da quello situato nell'origine. Ma più semplicemente possiamo ricavare questo risultato da una serie di grafici (fig. 2 a 8) costruiti sulla base di una voluminosa mole di calcoli numerici.

In tutte le curve si nota il comportamento asintotico previsto sopra. Per  $d/a = 2, e/a = 2$  si hanno, oltre al punto neutro nell'origine, altri quattro punti neutri di un tipo diverso da quello generalmente considerato e che potrebbe dirsi Y. Gli altri grafici confermano anch'essi, com'è naturale, la configurazione prevista nella fig. 1. Taluni casi corrispondono a campi, i cui punti rappresentativi sono sulle rette (assi compresi) tracciate nella figura 1, rette che separano due zone con un diverso numero di punti neutri. Il numero di tali punti in queste configurazioni ( $d/a = 0, e/a = 8$ ) ( $d/a = 3, e/a = -1$ ) ( $d/a = 0, e/a = -9$ ) è ovviamente per la continuità il più piccolo fra quelli delle due zone separate. Per particolari circostanze, non sono stati eseguiti calcoli relativi alle zone del secondo e quarto quadrante, con sette punti neutri.

\*\*\*

Le componenti del campo magnetico relativo alla soluzione IV) divergono infinite all'infinito. Sebbene nello stesso DUNGEY (1) siano indicate soluzioni aventi questo comportamento (v. pag. 49), si tratta indubbiamente di un inconveniente. Queste soluzioni rappresentano qualche cosa di analogo alle serie divergenti, usate da POINCARÉ in Meccanica Celeste, e non possono essere usate senza particolari cautele. Si può tentare di raccorderle con continuità ad altre funzioni il cui comportamento all'infinito sia regolare.

Per esempio, nel caso di  $e = -d$ , caso in cui per la (6) è  $j = 0$ , si ha per le  $A(x, y)$  la espressione:

$$(32) \quad A(x, y) = a [(x^2 + y^2)^2 - 8x^2y^2] + 2d(x^2 - y^2),$$

e si vede subito che  $A$  è una combinazione delle parti reali delle due funzioni armoniche:

$$(x + iy)^4 = r^4 (\cos 4\theta + i \sin 4\theta)$$

e

$$(x + i y)^2 = r^2 (\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta).$$

Qualunque funzione armonica è evidentemente soluzione della (12) e si sarebbero quindi potute scegliere per costruire la  $\Lambda$  anche le parti reali delle funzioni pure armoniche:

$$(x + i y)^4 = \frac{\cos 4\theta - i \operatorname{sen} 4\theta}{r^4}$$

$$(x + i y)^2 = \frac{\cos 2\theta - i \operatorname{sen} 2\theta}{r^2}$$

Poniamo allora:

$$\text{per } r < r_0: \Lambda(r, \theta) = a(r^4 \cos 4\theta) + 2d(r^2 \cos 2\theta)$$

(che coincide colla espressione usata finora, perché in coordinate cartesiane le condizioni scritte sopra si esprimono:

$$\text{per } \sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{x_0^2 + y_0^2}: \Lambda(x, y) = a(x^2 + y^2)^2 - 8x^2 y^2 + 2d(x^2 - y^2);$$

$$(33) \quad \text{per } r > r_0: \Lambda(r, \theta) \rightarrow a r_0^4 \frac{\cos 4\theta}{r^4} + 2d r_0^2 \frac{\cos 2\theta}{r^2} = B(r, \theta).$$

Il campo così determinato tende a zero per  $r$  tendente a infinito ed assai rapidamente. Per  $r = r_0$  si ha:

$$(34) \quad \Lambda(r_0, \theta) = B(r_0, \theta).$$

Inoltre essendo

$$(35) \quad H_r = H_x \cos \theta + H_y \sin \theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta}$$

si ha per  $r = r_0$ :

$$(36) \quad \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} (r, \theta) \right)_{r=r_0} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \theta} (r, \theta) \right)_{r=r_0}$$

e la componente del campo normale al cilindro di raggio  $r_0$  è continua, mentre è discontinua la componente tangenziale

$$H_\theta = \frac{\partial \Lambda}{\partial r}$$

che cambia di segno. Questa discontinuità è ammessa in idrodinamica, e del resto rapidissime variazioni di  $H$  sono in accordo colle osservazioni; notiamo inoltre che rimangono continue, per  $r = r_0$ , la densità di corrente e la forza magnetica, en-



trambe nulle, nonché la intensità del campo  $H$ . Del resto il problema di porre certe condizioni deve essere risolto caso per caso, e, come dice il citato DUNGEY, si deve talvolta rinunciare ad un eccessivo rigore.

\*\*\*

Nel caso in cui sia  $d \cdot e > 0$  il punto neutro nell'origine è di tipo  $X$  e per esso non vale la legge di LENZ. La dimostrazione può condursi sul tipo di quella fatta sopra per dimostrare la proprietà opposta dei punti di tipo  $O$ . Per semplificare le cose conviene passare ad assi cartesiani obliqui, coincidenti colle tangenti ai due rami di curva passanti per il punto neutro. Non ci sembra opportuno ripetere tale calcolo e vogliamo piuttosto occuparci di un'altra questione.

È noto che considerazioni di carattere generale portano alla conclusione che in un punto neutro di tipo  $X$  la configurazione disegnata in fig. 9 *a* non è stabile, ma evolve verso quella di fig. 9 *b*, se la energia del campo magnetico all'interno della regione limitata dalla linea di forza passante per il punto neutro prevale su quella all'esterno. Nel caso contrario, si passa da fig. 9 *a* a fig. 9 *c*. Le linee disegnate in figura corrispondono a casi limiti ed in pratica si possono avere configurazioni intermedie, ma sempre tali, che i due rami di curva passanti per il punto neutro abbiano una unica tangente comune.

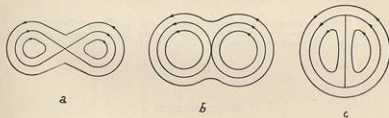


Fig. 9

Per il campo da noi considerato colla soluzione IV) le linee di forza si estendono all'infinito e non si può parlare di regione « interna » od « esterna ». Le considerazioni possono però ripetersi facendo il confronto fra le energie magnetiche nell'una o nell'altra delle coppie di zone « opposte al vertice », per così dire, in cui la linea di forza per il punto neutro divide il piano.

Geometricamente il risultato trovato significa che uno dei coefficienti,  $e$  o  $d$ , deve essere uguale a zero nella configurazione di equilibrio, e può sembrare una contraddizione il fatto che noi abbiamo trovato soluzioni della equazione (12) con punti neutri a tangenti distinte.

Una giustificazione di questo risultato si può però trovare in quella stessa proprietà dei punti neutri (di tipo  $X$ ), per cui in essi possono prodursi elevate scariche

elettriche, e cioè nella constatazione che la equazione (8) è identicamente soddisfatta in un punto neutro e che quindi nell'immediato intorno di esso le condizioni non sono determinate e possono variare col tempo. Queste considerazioni permetterebbero la ragionevole supposizione che le soluzioni  $H_{23}$  ed  $H_{24}$  del sistema (18) e (19), considerate come funzioni del tempo, evolvano verso la configurazione di equilibrio, e sarebbe interessante un'analisi quantitativa e numerica della questione. Una trattazione del genere però renderebbe eccessiva la mole di questo lavoro e sarà fatta, se mai, in uno successivo.

L'A. ringrazia il prof. RIGHINI, Direttore dell'Osservatorio Astrofisico di Arcetri, per il continuo interessamento e per i numerosi consigli, il Centro di Calcolo della Divisione Commerciale Elettronica « Olivetti » per l'esecuzione dei calcoli e i Signori LEPI e MICCINZI per la preparazione dei disegni e dei grafici.

Firenze — Osservatorio Astrofisico di Arcetri.

#### O P E R E C I T A T E

- (1) J. W. DUNGEY - « *Cosmic Electrodynamics* », Cambridge, At the University Press, 1958.
- (2) H. LAMB - « *Hydrodynamics* », Cambridge, At the University Press - ed anche: Dover Publications, Inc. 180 Varick Street, New York 14, N. Y.

#### ERRATA-CORRIGE :

Nella figura 7 alla pag. 13 è scritto  $\frac{e}{a} = 1$ ; deve invece leggersi  $\frac{e}{a} = -1$ .