PAOLO SANTORO

Sul problema di Darboux per l'equazione $s = f(x, y, z, p, q)$ e il fenomeno di Peano [*]

Riassunto: Per il problema di DARBOUX relativo all'equazione $s = f(x, y, z, p, q)$ con $f(x, y, z, p, q)$ definita in $\Sigma : 0 \leqslant x \leqslant a\,;\ 0 \leqslant y \leqslant b\,;\ |z|, |p|, |q| < \infty$ e ivi continua e limitata ed $|f(x, y, z, p', q') - f(x, y, z, p'', q'')| < L\,|p' - p''| + (|q' - q''|)$, (L. cost.) si dimostra che per le soluzioni che soddisfano le condizioni al contorno $z(x, 0) = z(0, y) = 0$ vale il fenomeno di PEANO.

1. INTRODUZIONE

Sia $R : 0 \leqslant x \leqslant a\,;\ 0 \leqslant y \leqslant b$ un rettangolo del piano (x, y). Diremo che una funzione $f(x, y, z, p, q)$ definita nello strato

$$\Sigma : (x, y) \in R \quad , \quad |z|, |p|, |q| < +\infty ,$$

soddisfa le ipotesi PH. HARTMAN - A. WINTNER [1] se

α) essa è continua e limitata in Σ

$$|f(x, y, z, p, q)| \leqslant M \quad , \quad (M \text{ cost} \geqslant 0) , \tag{1}$$

β) esiste una costante $L \geqslant 0$ tale che

$$|f(x, y, z, p', q') - f(x, y, z, p'', q'')| \leqslant L\,(|p' - p''| + |q' - q''|) \tag{2}$$

per ogni coppia (x, y, z, p', q') , (x, y, z, p'', q'') di punti di Σ.

(*) Memoria presentata dall'Accademico Giovanni Sansone.

(1) Cfr. PH. HARTMAN - A. WINTNER, *On hyperbolic partial equations*, Am. Jour. Math., vol. 74, (1952), pp. 834-874.

I due autori citati dimostrano [2] che in tali ipotesi il problema (di DARBOUX) di determinare una funzione $z(x, y)$ che soddisfa le condizioni

$$z_{xy} = f(x, y, z, z_x, z_y) \quad , \quad z(x, o) = z(o, y) = 0, \tag{3}$$

ammette *almeno* una soluzione $z(x, y)$ in R ivi continua con le derivate z_x, z_y (e quindi z_{xy}) ossia esiste almeno una $z(x, y)$ in R tale che soddisfa ovunque l'equazione integrale

$$z(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(u, v, z(u, v), z_x(u, v), z_y(u, v))\, d\,u\, d\,v. \tag{3'}$$

Tale soluzione *non* è, in generale, unica, come dimostrano semplici esempi [3] già nel caso di f indipendente da z_x e z_y $(L = o)$; vale a dire possono esistere più soluzioni dell'equazione

$$z(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(u, v, z(u, v)\, d\,u\, d\,v \tag{3_0}$$

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial_x \partial_y} = f(x, y, z)\, , \, z(x, o) = z(o, y) = o\right]$$

essendo

α') $f(x, y, z)$ continua e limitata in $S : (x, y) \in R\, , |z| < +\infty$.

Le numerose analogie che il problema presenta con il problema iniziale per una equazione differenziale ordinaria $dz/dx = f(x, z)$ suggeriscono di indagare se per esso sussiste un « fenomeno di PEANO ». Più precisamente supposto che per $f(x, y, z, p, q)$ del sistema (3) siano soddisfatte le ricordate ipotesi α) e β) si presentano le questioni:

A) per ogni $(x, y) \in R$, detto $G(x, y)$ l'estremo superiore ($\leq M a b$) dei numeri z, tali che (x, y, z) appartiene ad una soluzione di (3) si può affermare che la $G(x, y)$ stessa è una soluzione (continua con le sue derivate G_x, G_y) del problema (3)? Analogamente per l'estremo inferiore.

B) Se (x^*, y^*, z^*) è un punto qualunque tale che $(x^*, y^*) \in R$, $g(x^*, y^*) \leq$ $\leq z^* \leq G(x^*, y^*)$ esiste una soluzione $z(x, y)$ di (3) tale che $z(x^*, y^*) = z^*$?

Alla prima questione ha risposto affermativamente T. SATŌ [4] in ipotesi diverse da quelle di HARTMAN-WINTNER supponendo tra l'altro $f(x, y, z, p, q)$

(2) Cfr. *loc. cit.* in (1). Il problema considerato da HARTMAN e WINTNER è $z_{xy} = f(x, y, z(x,y), z_x(x,y), z_y(x,y))$; $z(x,o) = \sigma(x)$, $z(o,y) = \tau(y)$ con $\sigma(x)$ e $\tau(y)$ continue insieme alle loro derivate $\sigma'(x)$, $\tau'(y)$ in $[o, a]$, $[o, b]$ rispettivamente e con $\sigma(o) = \tau(o)$. Tuttavia se si effettua la trasformazione $s = z - \sigma(x) - \tau(y) + \sigma(o)$, $\pi = p - \sigma'(x)$, $\chi = q - r'(y)$ la $f(x, y, z, p, q)$ diventa $f(x, y, s + \sigma(x) + \tau(y) - \sigma(o), \pi + \sigma'(x), \chi + \tau'(y)) = F(x, y, s, \pi, \chi)$ e questa soddisfa ancora in Σ le ipotesi di HARTMAN e WINTNER. Perciò possiamo limitarci a considerare il caso $\sigma(x) = \tau(y) = o$.

(3) Cfr. ad es. P. MONTEL, *Sur le suites infinies de fonctions*; An. Sc. Ec. Nor. Sup. 24, (1907), (pp. 233-334) p. 278, con la sola ipotesi di continuità.

(4) T. SATŌ, a) *Sur l'equation aux derivées partielles hyperbolique* $s = f(x, y, z, p, q)$. I. Mem. Fac. Sc. Kyûsyû Imp. Univ., Series A., vol. 2, (1942), pp. 107-123 ; b) *Sulle equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico*, Rep. Fac. Sc. Kyûsyû Imp. Univ., 1 (1945) pp. 203-249 (giapponese).

funzione non decrescente rispetto a ciascuna delle variabili z, p, q. Successivamente G. Zwirner adattando un procedimento di F. Cafiero [5] per l'equazione ordinaria $\frac{dz}{dx} = f(x, z)$, ha dato risposta affermativa alla questione (A) limitatamente al caso $L = 0$, cioè a quello dell'equazione (3_0) con la $f(x, y, z)$ soddisfacente la condizione α').

Faremo vedere in questa nota che *nelle ipotesi di* Hartman - Wintner *la risposta alle due questioni (A), (B) è affermativa, cioè, nelle ipotesi di* Hartman - Wintner *il problema di* Darboux *presenta sempre il fenomeno di* Peano (quindi anche nel caso di $L > 0$).

Per provare che $G(x, y)$ è una soluzione del problema (3) (questione (A)) premetteremo nel n. 2 un procedimento esistenziale ottenuto dalla fusione di quello già ricordato di G. Zwirner con un recente procedimento di J. B. Diaz [6].

2. Esistenza di almeno una soluzione del problema di Darboux.

a) Diviso l'intervallo $[0, a]$ in n parti uguali mediante i punti $x_h = \frac{ha}{n}$ $(h = 0, 1, \ldots n)$ e l'intervallo $[0, b]$ in n parti uguali mediante i punti $y_k = \frac{kb}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ e posto $z_r = r\frac{8Mab}{n}$ $(r = 0, \pm 1, \ldots, \pm n)$, suddividiamo lo stıato S $(x, y) \varepsilon R$, $|z| < +\infty$ in parallelepipedi mediante i piani di equazione $x = x_h$ $(h = 0, 1, \ldots, n)$; $y = y_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$; $z = z_r$ $(r = 0, \pm 1, \ldots, \pm n)$. Diciamo D_n tale suddivisione di S e indichiamo con $T^n_{h,k,r}$ quel parallelepipedo (chiuso) della divisione D_n che ha vertici opposti (x_n, y_k, z_r), $(x_{h+1}, y_{h+1}, z_{r+1})$, mentre con R^n_{hk} indichiamo il rettangolo contenuto in R di vertici opposti $(x_h\, y_k)$, (x_{h+1}, y_{k+1}). Fissati la divisione D_n e il punto $P \equiv (x_n, y_k, \bar{z}_{h,k})$ e determinato l'intero r in guisa che

$$z_r \leqslant \bar{z}_{h,k} \leqslant z_{r+1}, \tag{4}$$

diremo *parallelepipedo associato* al punto $P \equiv (x_h, y_k, \bar{z}_{h,k})$ il parallelepipedo (chiuso)

$$S^n_{hkr} = T^n_{h,k,r-1} + T^n_{h,k,r} + T^n_{h,k,r+1}.$$

[5] G. Zwirner, *Sull'approssimazione degli integrali del sistema differenziale* $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y, z)$, $z(x_0\, y) = \psi(y)$, $z(x, y_0) = \varphi(x)$. Atti Ist. Veneto Sc. Lett. Arti, vol. 119, (1950-51, Cl. Sc. Mat. e Nat., pp. 219-231. F. Cafiero, *Sull'approssimazione mediante poligonali degli integrali del sistema differenziale* $y' = F(x, y)$; $y(x_0) = y_0$. Gior. di Mat. di Battaglini (4), 77, (1947-48), pp. 28-36.

[6] J. B. Diaz, *On anologue of the Euler-Cauchy polygon method for the numerical solution of* $u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$ Navord Rep. 4451 U.S. Naval Ord. Laboratory (1957) (pubblicato a stampa sotto lo stesso titolo in Archive For Rat. Mech. and Anal. vol. I (1958), pp. 000. La trattazione del problema col metodo delle differenze è stata ripresa da B. M. Budak e A. C. Gorbunov, *Il metodo delle differenze per la soluzione di un problema non lineare di* Goursat, Dokladi Akad. Nauk, vol. 117 (1957), pp. 559-563, (russo).

Se $A \equiv (x_h, y_k, z_{h,k})$; $B \equiv (x_{h+1}, y_k, z_{h+1,k})$; $C \equiv (x_h, y_{k+1}, z_{h,k+1}$ sono tre punti di $T_{h,k,r}$ il paraboloide iperbolico

$$(5) \quad z - \bar{z}_{h,k} = \lambda (x - x_h)(y - y_k) + \frac{\bar{z}_{h+1,k} - \bar{z}_{h,k}}{x_{h+1} - x_h}(x - x_h) + \frac{\bar{z}_{h,k+1} - \bar{z}_{h,k}}{y_{k+1} - y_k}(y - y_k)$$

si dirà paraboloide iperbolico passante per A, B, C, a coefficiente λ e associato al rettangolo R^n_{hk}. Fissato $\bar{z}_{h,k}$, e perciò r, con la (4) si consideri un qualunque $z_{h,k}$ soddisfacente la limitazione

$$(6') \qquad z_{r-1} \leqslant z_{h,k} \leqslant z_{r+2}$$

Poniamo

$$(6'') \qquad p_h = \frac{\bar{z}_{h+1,k} - \bar{z}_{h,k}}{x_{h+1} - x_h} \quad ; \quad q_k = \frac{\bar{z}_{h,k+1} - \bar{z}_{h,k}}{y_{k+1} - y_h}$$

Fissati A, B, C, ossia i due indici h e k e numeri $\bar{z}_{h,k}$, $\bar{z}_{h+1,k}$, $\bar{z}_{h,k+1}$ e in conseguenza della (4) l'indice r, e posto nella (5)

$$(7) \qquad \lambda = f(x_h, y_k, z_{h,k}, p_k, q_h) = f^n_{hk}$$

abbiamo definito in un insieme di paraboloidi iperbolici passanti per i punti A, B, C, che ci occorrerà tra poco.

b) Converremo prendere

$$(8) \qquad \begin{cases} \bar{z}_{1,0} = \bar{z}_{2,0} = \ldots = \bar{z}_{n,0} = 0 \\ \bar{z}_{0,1} = \bar{z}_{0,2} = \ldots = \bar{z}_{0,n} = 0 \end{cases}$$

In corrispondenza della divisione D_n costruiamo un paraboloide passante per i punti (o, o, o) ; (x_1, o, o) ; (o, y_1, o) (corrispondentemente h = o, k = o) e di coefficiente $f^n_{00} = f(o, o, z_{00}, o, o)$ $(z_{-1} \leqslant z_{00} \leqslant z_2)$ e quindi di equazione

$$(9_{00}) \qquad z = f^n_{00}\, x\, y$$

e sia $(x_1, y_1, \bar{z}_{1,1})$ il punto intersezione [7] tra questa superficie con la retta $x = x_1$, $y = y_1$. Costruiamo poi un secondo paraboloide passante per i punti (x_1, o, o) ; (x_2, o, o) ; $(x_1, y_1, \bar{z}_{1,1})$ (in corrispondenza h = 1, k = o) e coefficiente $f^n_{10} = (x_1, o, z_{1,0}, o, q_0)$ con $z_{-1} \leqslant z_{1,0} \leqslant z_2$ e con $q_0 = \dfrac{\bar{z}_{11}}{y_1}$

$$(9_{01}) \qquad z = f^n_{10}(x - x_1)\, y + \frac{\bar{z}_{11}}{y_y}\, y$$

ovvero tenuto conto che per (9_{00}) è $\bar{z}_{11} = f^n_{00}\, x_1\, y_1$ si ha

$$(9'_{10}) \qquad z = f^n_{10}(x - x_1)\, y + f^n_{00}\, x_1\, y$$

[7] Qui e nel seguito si intende che il punto intersezione sia a distanza finita.

e diciamo $(x_2, y_1, \bar{z}_{2,1})$ il punto intersezione di questa superficie con la retta $x = x_2, y = y_1$.

Costruiamo di volta in volta per $s = 1, 2, \ldots\ldots, n-1$, il paraboloide passante per i punti $(x_s, o, o), (x_{s+1}, o, o), (x_{s,1}, y_1, \bar{z}_{s,1})$ e coefficiente $f^n_{s,0} = f(x_s, y_1, z_{s,0}, o, q_s)$ ove con $\bar{z}_{s,1}$ si è indicato la intersezione del paraboloide passante per i punti (x_{s-1}, o, o) ; (x_s, o, o) ; $(x_{s-1}, y_1, \bar{z}_{s-1,1})$ con la retta $x = x_s, y = y_1$, dove $z_{-1} \leqslant z_{s,0} \leqslant z_2$, $q_s = \dfrac{\bar{z}_{s-1,1}}{y_{s+1} - y_s}$.

Si costruirà in modo analogo il paraboloide passante per i punti (o, y_1, o) ; (o, y_2, o) ; $(x_1, y_1, \bar{z}_{11})$ e coefficiente $f^n_{0,1} = f(o, y_1, z_{0,1}, p_0, o)$ con $z_{-1} \leqslant z_{0,1} \leqslant z_2$; $p_0 = \dfrac{\bar{z}_{11}}{x_1}$

$$(9_{01}) \qquad z = f^n_{0,1}(x - x_1)\, y + \frac{\bar{z}_{1,1}}{x_1}\, x \quad .$$

o anche

$$(9'_{01}) \qquad z = f^n_{0,1}(x - x_1)\, y + f^n_{0,0}\, x\, y_1$$

e sia $(x_1, y_2, \bar{z}_{1,2})$ il punto intersezione tra questa superficie e la retta $x = x_1$, $y = y_2$.

Si costruisce, di volta in volta, per $t = 1, 2, \ldots, n-1$, il paraboloide passante per i punti (o, y_t, o) (o, y_{t+1}, o) $(x_1, y_t, z_{1,t})$.

Con i punti $(x_1, y_1, \bar{z}_{1,1})$ $(x_2, y_1, \bar{z}_{2,1})$ $(x_1, y_2, \bar{z}_{1,2})$ e coefficiente $f^n_{11}(x_1, y_1, z_{1,1}, p_1, q_1)$ con $z_{1,1}$ soddisfacente la (6′) (r tale che $z_{r-1} < \bar{z}_{1,1} < z_r$) si costruirà il paraboloide

$$(9_{1,1}) \qquad z - z_{1,1} = f^n_{1,1}(x - x_1)(y - y_1) + \frac{\bar{z}_{2,1} - \bar{z}_{1,1}}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \frac{\bar{z}_{1,2} - \bar{z}_{1,1}}{y_2 - y_1}(y - y_1)$$

ovvero tenuto conto delle $(9'_{00})$, $(9'_{0,1})$, $(9'_{1,0})$ si ha

$$(9'_{1,1}) \qquad z = f^n_{1,1}(x - x_1)(y - y_1) + f^n_{1,0}\, y_1 (x - x_1) + f^n_{0,1}\, x_1 (y - y_1) + f^n_{0,0}\, x_1 y_1$$

Supponiamo di aver costruito un paraboloide associato al rettangolo $R^n_{h\,k}$; in conseguenza determiniamo l'intersezione $\bar{z}_{h+1,k+1}$ e allora potremo costruire due paraboloidi associati rispettivamente a $R^n_{h+1,k}$ e $R^n_{h,k+1}$ e continuando da sinistra verso destra e dal basso verso l'alto arriveremo a costruire l'ultimo paraboloide iperbolico passante per i punti $(x_{n-1}, y_n, \bar{z}_{n-1,n-1})$ $(x_n, y_{n-1}, \bar{z}_{n,n-1})$ $(x_{n-1}, y_n, \bar{z}_{n-1,n})$ e coefficiente $f^n_{n-1,n} = f(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1,n-1}, p_{n-1}, q_{n-1})$.

Il procedimento descritto permette quindi dai valori (8) di trovare successivamente i valori

$$\bar{z}_{1,1} \begin{cases} \bar{z}_{1,2}, \cdots, \bar{z}_{1,n-1} \\ \bar{z}_{2,1}, \cdots, \bar{z}_{n-1,1} \end{cases}$$

$$\bar{z}_{2,2} \begin{cases} \bar{z}_{2,3}, \cdots, \bar{z}_{2,n-1} \\ \bar{z}_{3,2}, \cdots, \bar{z}_{n-1,2} \end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\bar{z}_{n-1,n-1} \begin{cases} \bar{z}_{n-1,n} \\ \bar{z}_{n,n-1} \end{cases}$$

$$\bar{z}_{n,n}$$

c) Di ciascun paraboloide si terrà solo quella parte di superficie che si proietta ortogonalmente sul rettangolo $R^n_{h,k}$ che è servito a definirlo e sia

$$z = \varphi^n(x, y)$$

l'equazione della superficie formata da questi pezzi di paraboloide. Si verifica con procedimento di induzione, che per $(x, y) \varepsilon R^n_{hk}$ è

$$(9'_{hk}) \qquad \varphi^n(x, y) = f^n_{h,k}(x - x_h)(y - y_k) + (x - x_h)\sum_1^k{}_j f_{h,j-1}(y - y_{j-1}) + \\ + (y - y_k)\sum_1^h{}_j (x_i - x_{i-1}) + \sum_1^h{}_i \sum_1^k{}_j f^n_{i-1,j-1}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Da questa segue

$$(10) \qquad |\varphi^n(x, y)| \leqslant \frac{M\,a\,b}{n^2}[1 + h + k + h\,k] \leqslant M\,a\,b\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < 4\,M\,a\,b\,,$$

cosicché le $\varphi^n(x, y)$ sono equilimitate in R.

d) Passiamo ora a considerare le derivate parziali prime di $z = \varphi^n(x, y)$ per $(x, y) \varepsilon R^n_{hk}$. Per la $(9'_{h,k})$ se $(x, y) \varepsilon R^n_{h,k}$ è

$$(11_1) \qquad \varphi^n_x(x, y) = f^n_{h,k}(y - y_h) + \sum_1^k{}_j f^n_{h,j-1}(y_j - y_{j-1}). \qquad \left[\varphi^n_x = \frac{\partial \varphi^n}{\partial x}\right]$$

$$(11_2) \qquad \varphi^n_y(x, y) = f^n_{h,k}(x - x_h) + \sum_1^h{}_i f^n_{j-1,k}(x_i - x_{i-1}), \qquad \left[\varphi^n_y = \frac{\partial \varphi^n}{\partial y}\right]$$

e quindi queste espressioni valgono anche sul contorno di $R^n_{h,k}$, limitandoci alla $\varphi^n(x, y)$ definita nello stesso $R^n_{h,k}$. Avremo eventuali salti per i valori di queste derivate nel passaggio da un rettangolo $R^n_{h,k}$ ad uno contiguo. In generale in $R^n_{h,k}$ è

$$(12_1) \qquad |\varphi^n_x(x, y)| < M\,b + \frac{M\,b\,k}{n} \leqslant 2\,M\,b\,,$$

$$(12_2) \qquad |\varphi^n_y(x, y)| \leqslant 2\,M\,a\,.$$

Poiché la $\varphi^n(x, y)$ taglia i piani $x = x_h$ oppure $y = y_k$ secondo rette, gli n^2 pezzi di paraboloidi che definiscono la $\varphi^n(x, y)$ sono tali che ognuno di questi si attacca ai contigui, la $\varphi^n(x, y)$ è quindi continua in R e per la (12_1) e la (12_2) la successione $\{\varphi^n(x, y)\}$ è costituita da funzioni equicontinue.

e) Sia $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto di $R^n_{h,k}$ ed (x, y) un qualsiasi altro punto appartenente anche esso ad $R^n_{h,k}$; applicando il teorema del valor medio si ha

$$\varphi^n(\bar{x}, \bar{y}) - \varphi^n(x, y) = \varphi^n(\bar{x}, \bar{y}) - \varphi^n(x, \bar{y}) - \varphi^n(x, \bar{y}) - \varphi^n(x, y) =$$

$$= \varphi^n_x\left(x + \vartheta_1\frac{a}{n}, \bar{y}\right)(\bar{x} - x) + \varphi^n_y\left(x, y + \vartheta_2\frac{b}{n}\right)(y - \bar{y}),\ (0 < \vartheta_1 < 1\,;\ 0 < \vartheta_2 < 1),$$

e per le (12) segue

$$(13) \qquad |\varphi^n(\bar{x}, \bar{y}) - \varphi^n(x, y)| \leqslant \frac{4\,M\,a\,b}{n}.$$

Poiché due piani consecutivi z_r distano fra loro $\frac{8\,M\,a\,b}{n}$ segue che il parallelepipedo $S^n_{h,k,r}$ associato a $P \equiv (x_h,\ y_k,\ \varphi^n(\bar{x},\bar{y}))$ (ove r è determinato in modo che $z_r \leqslant \varphi(\bar{x},\bar{y}) \leqslant z_{r+1}$) contiene il pezzo di paraboloide $\varphi^n(x,y)$ che si proietta ortogonalmente su $R^n_{h,k}$.

f) Sia $y_k \leqslant y \leqslant y_{k+1}$ e indichiamo con $\varphi^n_x(x_n + o, y)$ $[\varphi^n_x(x_{h+1} - o, y)]$ la derivata destra [sinistra] rispetto ad x di $\varphi^n(x,y)$ nel punto (x_h, y) $[(x_{h+1}, y)]$ sia cioè

$$(14)\qquad \varphi^n_x(x_h + o, y) = \lim_{x \to x_h + 0} \frac{\varphi^n(x,y) - \varphi^n(x_h, y)}{x - x_h}$$

$$\left[\varphi^n_x(x_{h+1} - o, y) = \lim_{x \to x_{h+1} - 0} \frac{\varphi^n(x,y) - \varphi^n(x_{h+1}, y)}{x - x_{h+1}}\right]$$

Dalle (11_1) risulta che se x è tale che $x_h < x < x_{h+1}$, $(y_k \leqslant y \leqslant y_{k+1})$ si ha

$$(15_1)\qquad \varphi^n_x(x_h + o, y) = \varphi^n_x(x, y) = \varphi^n_x(x_{h+1} - o, y)$$

analogamente per $x_h \leqslant x \leqslant x_{h+1}$, $y_k < y < y_{k+1}$ si ha

$$(15)\qquad \varphi^n_y(x, y_k + o) = \varphi^n_y(x, y) = \varphi^n_y(x, y_{k+1} - o)$$

g) Consideriamo due punti (x,y) e $(\bar{x},y)$ con $x_h < x < x_{h+1}$; $x_{\bar{h}} < \bar{x} < x_{\bar{h}+1}$; $y_k \leqslant y \leqslant y_{k+1}$ e supponiamo $h \leqslant \bar{h}$ si ha dalla (11_1)

$$|\varphi^n_x(x,y) - \varphi^n_x(\bar{x},y)| \leqslant |\varphi^n_x(x_h + o, y) - \varphi^n_x(x_{\bar{h}} + o, y)| \leqslant$$

$$\leqslant |f^n_{h,k} - f^n_{\bar{h},k}|(y - y_k) + \sum_1^k{}_j |f^n_{h,j-1} - f^n_{\bar{h},j-1}|(y_j - y_{j-1}),$$

ovvero per la (7)

$$|\varphi^n_x(x,y) - \varphi^n_x(\bar{x},y)| \leqslant |f^n_{h,k} - f^n_{\bar{h},k}|(y - y_k) + \sum_1^k{}_j \left| f\left(x_h, y_k, z_{h,j-1}, \frac{\bar{z}_{h+1,j-1} - \bar{z}_{h,j-1}}{x_{h+1} - x_h},\right.\right.$$
$$\left.\frac{\bar{z}_{h,j} - \bar{z}_{h,j-1}}{y_j - y_{j-1}}\right) - f\left(x_{\bar{h}}, y_k, z_{\bar{h},j-1}, \frac{\bar{z}_{\bar{h}+1,j-1} - \bar{z}_{\bar{h},j-1}}{x_{\bar{h}+1} - x_{\bar{h}}}, \left.\frac{\bar{z}_{\bar{h},j} - \bar{z}_{\bar{h},j-1}}{y_j - y_{j-1}}\right)\right| (y_j - y_{j-1}).$$

Sommando e sottraendo $f\left(x_h, y_k, z_{h,j-1}, \frac{\bar{z}_{\bar{h}+1,j-1} - \bar{z}_{h,j-1}}{x_{\bar{h}+1} - x_{\bar{h}}}, \frac{\bar{z}_{\bar{h},j} - \bar{z}_{\bar{h}j-1}}{y_j - y_{j-1}}\right)$ si ottiene, tenuto conto delle (2)

$$(16)\qquad |\varphi^n_x(x,y) - \varphi^n_x(\bar{x},y)| \leqslant |f^n_{h,k} - f^n_{\bar{h},k}|(y - y_k) + L\sum_1^k{}_j \left|\frac{z_{h+1,j} - z_{h,j}}{x_{h+1} - x_h} -\right.$$
$$\left.- \frac{z_{\bar{h}+1,j} - \bar{z}_{\bar{h},j}}{x_{\bar{h}+1} - x_{\bar{h}}}\right|(y_j - y_{j-1}) + L\sum_1^k{}_j \left|\frac{\bar{z}_{h,j+1} - \bar{z}_{h,j}}{y_{j+1} - y_j} - \frac{\bar{z}_{\bar{h},j+1} - \bar{z}_{\bar{h},j}}{y_{j+1} - y_j}\right|(y_j - y_{j-1}) +$$
$$+ \sum_1^k{}_j \left| f\left(x_h\, y_k, z_{h,j}, \frac{\bar{z}_{\bar{h}+1,j} - \bar{z}_{\bar{h},j}}{x_{h+1} - x_h}, \frac{z_{\bar{h},j+1} - z_{\bar{h},j}}{y_{j+1} - y_j}\right) - f\left(x_{\bar{h}}\, y_k, z_{\bar{h},j-1},\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{z_{\bar{h}+1,j} - z_{\bar{h},j}}{x_{h+1} - x_h}, \frac{z_{\bar{h},j} - z_{\bar{h},j-1}}{y_{k+1} - y_k}\right)\right|(y_j - y_{j-1}).$$

Tenuto conto d'altra parte delle (5) e (7), si ha

$$z_x = \varphi_x^n(x,y) = f_{h,k}^n (y - y_k) + \frac{\bar{z}_{h+1,k} - \bar{z}_{h,k}}{x_{h+1} - x_h} \,;$$

$$z_y = f_{h,k}^n (x - x_h) + \frac{\bar{z}_{h,k+1} - \bar{z}_{h,k}}{y_{k+1} - y_k} = \varphi_y^n (x, y) \,;$$

quindi

$$\frac{\bar{z}_{h+1,k} - \bar{z}_{h,k}}{x_{h+1} - x_h} = \varphi_x^n (x, y) - f_{hk}^n (y - y_k) \,, \qquad (x, y) \varepsilon R_{hk}^n \,,$$

$$\frac{\bar{z}_{\bar{h}+1,k} - \bar{z}_{\bar{h},k}}{x_{\bar{h}+1} - x_{\bar{h}}} = \varphi_x^n (\bar{x}, y) - f_{\bar{h}k}^n (y - y_k) \,, \qquad (\bar{x}, y) \varepsilon R_{\bar{h}k}^n \,,$$

e sottraendo

$$\left| \frac{\bar{z}_{h+1,k} - \bar{z}_{h,k}}{x_{h+1} - x_h} - \frac{\bar{z}_{\bar{h}+1,\bar{k}} - \bar{z}_{\bar{h},k}}{x_{\bar{h}+1} - x_{\bar{h}}} \right| \leqslant \left| \varphi_x^n (x, y) - \varphi_x^n (\bar{x}, y) + \delta_p \right| . \quad \text{con} \quad o < \delta_p \leqslant \frac{2\,M\,b}{n}$$

Si ha analogamente

$$\frac{\bar{z}_{h,k+1} - \bar{z}_{h,k}}{y_{k+1} - y_k} - \frac{\bar{z}_{\bar{h},k+1} - \bar{z}_{\bar{h},k}}{y_{k+1} - y_k} \leqslant [\varphi_y^n (x, y) - \varphi_y^n (\bar{x}, y)] - (f_{hk}^n - f_{\bar{h}k}^n)(x - x_h)$$

e tenuto conto della (11_2)

$$\left| \frac{\bar{z}_{h,k+1} - \bar{z}_{h,k}}{y_{k+1} - y_k} - \frac{\bar{z}_{\bar{h},k+1} - \bar{z}_{\bar{h},k}}{y_{k+1} - y_k} \right| \leqslant \sum_{h}^{\bar{h}}{}_i \left| f_{i-1,k}^n \right| (x_i - x_{i-1}) .$$

Scelto un ε, d'altra parte, si può determinare n_ε e δ_ε tali che per $y_{k+1} - y_k < \delta_\varepsilon$; $x_{\bar{h}} - x_h < \delta_\varepsilon$; $n > n_\varepsilon$ risulti $[y_k \leqslant y \leqslant y_{k+1}]$

$$\left| f_{h,k}^n - f_{\bar{h},k}^n \right| (y - y_k) < \frac{\varepsilon}{4} \;;\; \delta_p\, L \sum_{1}^{k}{}_j \sum_{h}^{h}{}_i \left| f_{i-1,k}^n \right| (y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{4} ;$$

$$\frac{M\,a\,L\,(x_i - x_{i-1})}{n} < \frac{\varepsilon}{4} .$$

Si ha poi che ciascuna differenza

$$\left(f\left(x_n, y_j, z_{h,j} \frac{\bar{z}_{\bar{h}+1,j} - \bar{z}_{\bar{h},j}}{x_{\bar{h}+1} - x_n}, \frac{z_{\bar{h},j} - z_{\bar{h},j-1}}{y_j - y_{j-1}} \right) - f\left(x_{\bar{h}}\, y_j\, z_{\bar{h}j} \frac{z_{\bar{h}+1,j} - z_{h,j}}{x_{h+1} - x_n}, \frac{\bar{z}_{\bar{h},j} - \bar{z}_{\bar{h}\,j-1}}{y_j - y_{j-1}} \right) \right.$$

avendo presente che

$$z_{hk} - z_{\bar{h}k} = \varphi_x^n (x_n\, y_k) - \varphi_x^n (x_n\, y_k) + \{ z_{h,k} - \varphi_x^n (x_n\, y_k) \} - \{ z_{\bar{h},k} - \varphi^n (x_{\bar{n}}\, y_k) \} ,$$

si può rendere minore di una quantità prefissata per la eguale continuità delle $\{\varphi^n\}$ e per essere ciascuna differenza in $\{\quad\}$ non superiore a $\dfrac{24\,M\,a}{n}$; segue che per $x_{\bar h} - x_{\bar h} < \delta_\varepsilon$, $n > n_\varepsilon$,

$$\sum_{1}^{k}{}_j \left| f\left(x_n\, y_h\, z_{hj}\, \frac{\bar z_{\bar h+1,j} - \bar z_{\bar h,j}}{x_{h+1} - x_{\bar h}}, \frac{\bar z_{\bar h,j} - \bar z_{\bar h,j-1}}{y_k - y_{j-1}}\right) - \right.$$
$$\left. - f\left(x_{\bar h}\, y_k, z_{\bar h j}\, \frac{\bar z_{\bar h+1,j} - \bar z_{\bar h,j}}{x_{\bar h+1} - x_{\bar h}}, \frac{z_{\bar h\, j} - z_{\bar h,j-1}}{y_j - y_{j-1}}\right) \right| (y_j - y_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{4}$$

onde dalle (16) segue

$$\left| \varphi_x^n(x, y) - \varphi_x^n(\bar x, y) \right| \leqslant \varepsilon + L \sum_{1}^{k}{}_j \left| \varphi_x^n(x_h\, y_{j-1}) - \varphi_x^n(x_n y_{j-1}) \right| (y_j - y_{j-1}).$$

Si ha per un lemma dovuto a J. B. Diaz [8], tenuto conto delle (14)

$$\left| \varphi_x^n(x, y) - \varphi_x^n(x, y) \right| \leqslant e^{Lb} (\varepsilon + L\, g_0\, y_k),$$

ove

$$g_0 = \left| \varphi_x^n(x_h, o) - \varphi_x^n(x_{\bar h} + o, o) \right| = o,$$

e quindi in definitiva

$$(17) \qquad \left| \varphi_x^n(x_h + 0, y) - \varphi_x^n(x_{\bar h} + 0, y) \right| \leqslant e^{Lb} \varepsilon,$$

Costruiamo ora la funzione $p^n(x, y)$ con la seguente legge

$$p^n(x, y) = \begin{cases} = \varphi_x^n(x, y) & \text{quando} \quad x_h < x < x_{h+1} \; ; \; h = 0, 1, \ldots, n-1, \\ = \varphi_x^n(x + o, y) & \quad \text{»} \qquad x = x_n \qquad ; \; h = 0, 1, \ldots, n-1, \\ = \varphi_x^n(x - o, y) & \quad \text{»} \qquad x = x_n, \end{cases}$$

e consideriamo la successione $\{\varphi_x^n(x, y)\}$.

Questa per la (11_1) è equilimitata, essa è inoltre equioscillante a meno di ε nel senso di Arzelà. Infatti siano (x, y) ed $(\bar x, \bar y)$ due punti di R e supponiamo che sia

$$x_{\bar h} \leqslant \bar x \leqslant x_{\bar h+1} \; ; \; x_h \leqslant x \leqslant x_{h+1} \; ; \; y_{\bar k} \leqslant \bar y \leqslant y_{\bar k+1} \; ; \; y_k \leqslant y \leqslant y_{k+1} \; ; \; \bar h \leqslant h \; ; \; k \leqslant k$$

si ha

$$\left| p^n(\bar x, \bar y) - p^n(x, y) \right| \leqslant \left| p^n(\bar y, \bar x) - p^n(\bar x, y) \right| + \left| p^n(\bar x, y) - p^n(x, y) \right|.$$

[8] Cfr. J. B. Diaz, *l. c.* in [4]. Il citato lemma si enuncia: *Se* t *è un numero intero positivo e* $g_0, g_1, \ldots, g_t$ *sono* $t+1$ *numeri reali non negativi e se* $z_j - z_{j-1} > o$ $(j = 1, 2, \ldots t)$ *e se scegliamo* ε *ed* L *in modo che* α): $g_l \leq \varepsilon + L \sum_1^l{}_j\, g_{j-1}(z_j - z_{j-1})$ *si ha* β): $g_l \leq \left\{ \prod_{j=1}^{t} e^{L(z_j - z_{j-1})} \right\} \left\{ \varepsilon + L\, g_0 (z_l - z_0) \right\}$. Infatti da α) si ha con un procedimento di induzione completa che γ): $g_l \leq \left\{ \prod_{j=1}^{t} [1 + L(z_j - z_{j-1})] \right\} \left\{ \varepsilon + L\, g_0 (z_l - z_0) \right\}$. Dalla γ) segue β).

Da detto lemma segue che se dividiamo l'intervallo $[z_0, z_0 + a]$ in t parti mediante la successione di punti $z_0 \equiv z_{0,t} \leqslant \ldots z_{t,t} \equiv z_0 + a$ e sostituiamo in α) a g_l i valori di una funzione $g(z)$ non negativa nell'intervallo $[z_0, z_0 + a]$, si ottiene $f(z_{l,t}) \leqslant e^{La} \{\varepsilon + g(z_0)\, L\, (z_{l,t} - z_{0,t})\}$ e al limite, nel caso continuo si ottiene il lemma di Gronwall (per detto lemma cfr. G. Sansone, *Equazioni differenziali in campo reale*, vol. I (1948), p. 30).

Per la prima differenza a secondo membro risulta per la (11_2)

$$p^n(\bar{x},\bar{y})-p^n(x,y)=\varphi^n_x(\bar{x},\bar{y})-\varphi^x_n(\bar{x},y)=\sum_{k}^{\bar{k}} f^n_{n,j-1}(y-y_{j-1})+(f^n_{h\bar{k}}-f^n_{hk})\,y-f^n_{h\bar{k}}\,y_{\bar{k}}+f^n_{hk}\,y_k$$

e tenuto conto per la seconda delle (17) si ha allora che fissato ε_1 si può trovare un δ_{ε_1} ed un indice n_{ε_1} tali che per $|\bar{x}-x|\leqslant\delta_{\varepsilon_1}$, $|\bar{y}-y|\leqslant\delta_{\varepsilon_1}$, $n_s>n_{\varepsilon_1}$ risulti $|p^{n_s}(\bar{x},\bar{y})-p^{n_s}(x,y)|<\varepsilon_1$.

Lo stesso ragionamento si può condurre per la successione $\{\varphi^n_y(x,y)\}$ ricavando che la successione $\{q^{n_s}(x,y)\}$ è equilimitata ed equioscillante. Allora da ciascuna successione $\{\varphi^{n_s}(x,y)\}$, $\{p^{n_s}(x,y)\}$, $\{q^{n_s}(x,y)\}$ si può estrarre una successione di indici $n_1, n_2, \dots, n_r, \dots, (n_r\leqslant n_{r+1})$ tale che

$$\lim_{n_r\to\infty}\varphi^{n_r}(x,y)=\varphi(x,y)\,;\quad \lim_{n_r\to\infty}q^{n_r}(x,y)=p(x,y)\,;\quad \lim_{n_r\to\infty}q^{n_r}(x,y)=q(x,y)\,;$$

uniformemente per $(x,y)\in R$ e per la continuità di $f(x,y,z,p,q)$:

$$\lim_{n_r\to\infty} f(x,y,\varphi^{n_r}(x,y),p^{n_r}(x,y),q^{n_r}(x,y))=f(x,y,\varphi(x,y),p(x,y),q(x,y))$$

ed hanno senso gli integrali (nel senso di RIEMANN)

$$\int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta,\varphi(\xi,\eta)\,p(\xi,\eta)\,q(\xi,\eta))\,d\xi d\eta\,;\quad \int_0^y f(x,\eta,\varphi(x,\eta),p(x,\eta),q(x,\eta))\,d\eta\,;$$

$$\int_0^x f(\xi,y,\varphi(\xi,y),p(\xi,y)\,q(\xi,y))\,d\xi\,.$$

h) Fissato $\varepsilon>0$ si può fissare un indice n_{r_ε} tale che per $n_r<n_{r_\varepsilon}$ risulterà

$$|\varphi^{n_r}(x,y)-\int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta,\varphi(\xi,\eta),p(\xi,\eta),q(\xi,\eta))\,d\xi\,d\eta\,|<\varepsilon\,,$$

$$|p^{n_r}(x,y)-\int_0^x f(\xi,y,\varphi(\xi,y),p(\xi,y),q(\xi,y))\,d\xi\,|<\varepsilon\,,$$

$$|q^{n_r}(x,y)-\int_n^y f(x,\eta,\varphi(x,\eta),p(x,\eta),q(x,\eta))\,d\eta\,|<\varepsilon\,,$$

e quindi la funzione $\varphi(x,y)$ è una soluzione del sistema (3).

Possiamo riassumere quanto si è visto finora dicendo che col metodo impiegato si è ritrovato il teorema di esistenza dato da HARTMAN *e* WINTNER *per il sistema* (3).

3. APPROSSIMAZIONE DI QUALUNQUE SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI DARBOUX COL PROCEDIMENTO DEL N. 2.

Dimostriamo ora che: *ogni soluzione è approssimabile col nostro procedimento.*

Infatti fissato la suddivisione D_n, sia $z=\Phi(k,y)$ una soluzione del sistema (3) in R, ossia

$$\Phi(x,y)=\int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta,\Phi,\Phi_x,\Phi_y)\,d\xi\,d\eta,$$

e consideriamo il pezzo di superficie che si proietta ortogonalmente su R^n_{hk}. Se (x, y) , $(\bar{x}, \bar{y})$ sono due punti di R^n_{hk} è

$$|\Phi(x, y) - \Phi(\bar{x}, \bar{y})| \leqslant |\Phi(\bar{x}, \bar{y}) - \Phi(x, \bar{y})| + |\Phi(x, \bar{y}) - \Phi(x, y)|,$$

e per il teorema del valor medio

$$\Phi(\bar{x}, \bar{y}) - \Phi(x, y) \leq \left| \int_0^{y} f\left(x^*, \eta, \Phi^*(x^*, \eta), \Phi_x(x^*, \eta), \Phi_y(x^*, \eta)\right) d\eta \right| \cdot$$
$$(\bar{x} - x) + \left| \int_0^{x} f\left(\xi\, y^*, \Phi(\xi, y^*)\, \Phi(\xi, y^*)\, \Phi_y(\xi, y^*)\right) d\xi \right| |\bar{y} - y| \leqslant \frac{2\, M a b}{n},$$

con $x^* \varepsilon [x, \bar{x}]$, $y^* \varepsilon [y, \bar{y}]$. Da questa disuguaglianza si ricava che il pezzo di superficie considerato sta tutto in *un* parallelepipedo associato al punto $P \equiv \left(x_h, y_k, \Phi(x_h\, y_k)\right)$. Consideriamo poi il paraboloide di coefficiente λ e passante per i punti $\left(x_h, y_k\, \Phi(x_h\, y_k)\right)$; $\left(x_{h+1}, y_k, \Phi(x_{h+1}, y_k)\right)$; $\left(x_h, y_{k+1}\, \Phi(x_h, y_{k+1})\right)$.

Esso avrà l'equazione

$$z(x, y) - \Phi(x_h, y_k) = \lambda (x - x_h)(y - y_k) +$$
$$+ \frac{\Phi(x_{h+1}, y_k) - \Phi(x_h, y_k)}{x_{h+1} - x_h}(x - x_h) + \frac{\Phi(x_h, y_{k+1}) - \Phi(x_h\, y_k)}{y_{k+1} - y_k}(y - y_k).$$

Perché il paraboloide passi per il punto $(x_{h+1}, y_{k+1}, \Phi(x_{h+1}, y_{k+1}))$ si dovrà prendere

$$\lambda = \frac{\Phi(x_{h+1}, y_{k+1}) - \Phi(x_{h+1}, y_k) - \Phi(x_h, y_{k+1}) + \Phi(x_h, y_k)}{(x_{h+1} - x_n)(y_{k+1} - y_k)}$$

e per il teorema di LAGRANGE (⁹)

$$\lambda = \Phi_{xy}\left(x_h + \vartheta_1 \frac{a}{n}, y_k + \vartheta_2 \frac{b}{n}\right) \qquad (o < \vartheta_1 < 1, o < \vartheta_2 < 1)$$

e sarà

$$\Phi_{xy}\left(x_h + \vartheta_1 \frac{a}{n}, y_k + \vartheta_2 \frac{b}{n}\right) = f\left(x_h + \vartheta_1 \frac{a}{n}, y_k + \vartheta_2 \frac{b}{n}, z\left(x_h + \vartheta_1 \frac{a}{n}, y_k + \vartheta_2 \frac{b}{n}\right),\right.$$
$$\left.\varphi\left(x_h + \vartheta_1 \frac{a}{n}, y_k + \vartheta_2 \frac{b}{n}\right), \varphi\left(x_h + \vartheta_1 \frac{a}{n}, y_k + \vartheta_2 \frac{b}{n}\right)\right)$$

Segue allora che se nel procedimento indicato al n. 2 per ogni D_n scegliamo λ dato dalla (18); paraboloidi così costruiti approssimano proprio la data superficie $z = \Phi(x, y)$.

(⁹) Cfr. ad es. M. PICONE, *Lezioni di Analisi Infinitesimale*, vol. I, Catania (1923), p. 205.

4. Integrale massimo e integrale minimo.

a) Fissato D_n notiamo che dalla (7) e dalla condizione (6) si ha che per ogni coppia (x_h, y_k) (con $h\,k \neq 0$) e per ogni p_x e q_h fissati, i coefficienti $\lambda = f^n_{hk}$ risultano funzioni continue della variabile $z_{h,k}$ e quindi al variare di $z_{h,k}$ nell'intervallo $[z_{r-1}, z_{r-2}]$, esiste il *massimo* di $f(x_h, y_k, z_{h,k}, p_k\, q_h)$ preso in un punto $z = \Theta_{hk}$, nell'intervallo considerato, che indicheremo con $\bar{f}^n_{hk} = f(x_h\, y_k\, \Theta_{hk}\, p_k\, q_h)$.
Risulta:

$$\bar{f}^n_{hk} \geqslant f^n_{hk} \tag{19}$$

Se poi $h\,k = 0$, porremo $\bar{f}^n_{hk}$ coincidente col valore f^n_{hk} considerato al n. 2.

Ripetiamo il processo costruttivo illustrato al n. 2 e indichiamo con $z = \psi(x, y)$ la superficie che costruiremo scegliendo ogni volta per coefficiente λ i valori $\bar{f}^n_{hk}$. Per i valori scelti sul contorno e per quanto è stato ora detto si ha che per $(x, y) \in R_{i,o}$ $[(x, y) \in R_{o,j}]$ $(i = 0, 1, \dots n-1)$ $[j = 0, 1, \dots, n-1]$ è $\psi(x, y) = \varphi^n(k, y)$, ove $z = \varphi^n(x, y)$ è una superficie qualunque data dal procedimento del n. 2.

Se con $\bar{\Theta}_{hk}$ indichiamo i punti intersezione fra la $z = \psi(x, y)$ e la retta $x = x_h$, $y = y_k$; $(h, k = 0, 1, \dots, n-1)$ si ha che i valori

$$\bar{\Theta}_{hk} \begin{cases} \bar{\Theta}_{12}, \dots, \bar{\Theta}_{1,n-1}, \\ \bar{\Theta}_{21}, \dots, \bar{\Theta}_{n-1,1}, \end{cases}$$

coincidono con i valori $\bar{z}_{1,j}$ e $\bar{z}_{j,1}$ analoghi per la superficie $z = \varphi^n(x, y)$. Sia $(x, y) \in R^n_{1,1}$; sarà in conformità alle $(9'_{1,1})$

$$\psi(x, y) = \bar{f}^n_{11}(x - x_1) + f^n_{1,0}\,\varphi_1(x - x_1) + f^n_{1,0}\, x_1 (y - y_1) + f^n_{0,0}\, x_1 y_1 \tag{20_{11}}$$

con $\bar{f}^n_{11} = f\left(x_1, y_1, \Theta_{11}, \dfrac{\bar{z}_{21} - \bar{z}_{11}}{x_2 - x_1}, \dfrac{\bar{z}_{12} - \bar{z}_{11}}{y_2 - y_1}\right)$ e con Θ_{11} $(z_{r-1} \leq \Theta_{11} \leq z_{r-2}$ essendo r determinato da $z_r \leqslant \bar{z}_{11} \leqslant z_{r+1})$ tale che $\bar{f}^n_{11} \geqslant f^n_{11}$; abbiamo quindi che per $(x, y) \in R^n_{11}$

$$\psi(x, y) \geqslant \varphi^n(x, y).$$

In genere operando per $(x, y) \in R^n_{h1}$ $[(x, y) \in R^n_{1k}]$ dalla $(9'_{hk})$ si ha

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = {} & \bar{f}^n_{h1}(x - x_n)(y - y_k) + (x - x_h)\, f^n_{ho}\, y_1 + \\ & + (y - y_k) \sum_1^h{}_j f^n_{i-1,0}(x_i - x_{i-1}) + \sum_1^h{}_i f_{i-1,0}(x_i - x_{i-1})\, y_1, \end{aligned} \tag{$20_{h,1}$}$$

e si ottengono così i valori

$$\bar{\Theta}_{22} \begin{cases} \bar{\Theta}_{2,3}, \dots, \bar{\Theta}_{2,n-1}, \\ \bar{\Theta}_{3,2}, \dots, \bar{\Theta}^n_{n-1,2}, \end{cases}$$

e per essi risulta

$$\Theta_{h2} \geqslant z_{h,2} \qquad [\Theta_{2k} \geqslant z_{2,k}]$$

Conviene a tal punto notare che è per le (13)

$$\bar{\Theta}_{h1} - 4\,\mathrm{Mab}/n \leqslant \bar{\Theta}_{h+1,2} \leqslant \Theta_{h,1} + 4\,\mathrm{Mab}/n \; ; \; \bar{z}_{h,1} - 4\,\mathrm{Mab}/n \leqslant \bar{z}_{h+1,2} \leqslant \bar{z}_{h+1} + 4\,\mathrm{Mab}/n$$

ed essendo $\bar{\Theta}_{h1} = \bar{z}_{h1}$ si ha che $\bar{\Theta}_{h+1,2}$ $[\bar{\Theta}_{2,k+1}]$ giace sullo spigolo del parallelepipedo associato al punto $(x_h, y_1, \bar{z}_{h1})$ $[(x_1, y_k, \bar{z}_{1k})]$.

b) Possiamo operare come in *a*) successivamente su R^n_{hk} per $h = 2$ oppure $k = 2$; $h = 3$, oppure $k = 3, \dots$ $h = n-1$; $k = n-1$, scegliendo ogni volta i massimi di f^n_{hk}; si otterrà così il quadro di valori

$$\bar{\Theta}_{00} \begin{cases} \bar{\Theta}_{0,1}, \dots, \bar{\Theta}_{0,n-1}, \\ \bar{\Theta}_{1,0}, \dots, \bar{\Theta}_{n-1,0}, \end{cases}$$

. . . .

$$\Theta_{ss} \begin{cases} \bar{\Theta}_{s,s+1}, \dots, \bar{\Theta}_{s,n-1}, \\ \bar{\Theta}_{s+1,s}, \dots, \Theta_{n-1,s}, \end{cases}$$

. . . .

$$\bar{\Theta}_{n-1,n-1} \begin{cases} \bar{\Theta}_{n-1,n}, \\ \bar{\Theta}_{n,n-1}, \end{cases}$$

$$\Theta_{n,n},$$

e dimostriamo che $0 \leqslant \bar{\Theta}_{hk} - \bar{z}_{hk} \leqslant 8\,M\,a\,b/n$.

Questa limitazione è stata provata per $h = 0,1$ $[k = 0,1]$; procederemo per induzione: supponiamo di avere dimostrato che per $(x, y) \in R^n_{s-1,t-1}$, $t = s, s+1, \dots, n-1$, oppure $s = t, t+1, \dots, n-1$ sia $0 \leqslant \bar{\Theta}_{st} - \bar{z}_{st} \leqslant 8\,\mathrm{Mab}/n$, (ciò implica che $\bar{\Theta}_{st}$ sia sullo spigolo del parallelepipedo associato al punto $(x_{s-1}, y_{t-1}, \bar{z}_{s-1,t-1})$ e dimostriamo allora che è anche

$$0 \leqslant \bar{\Theta}_{s-1,t+1} - \bar{z}_{s+1,t+1} \leqslant 8\,M\,a\,b/n$$
$$(t = s, s+1, \dots, n-1 \; ; \; s = t, t+1, \dots, n-1).$$

Infatti per la $(9_{h,k})$ è

$$\bar{\Theta}_{s+1,t+1} - \bar{z}_{s+1,t+1} = (\bar{f}^n_{st} - f^n_{st})(x_{s+1} - x_s)(y_{t+1} - y_t) + (x_{s+1} - x_s) \sum_{1}^{t}{}_j (\bar{f}^n_{s,j-1} -$$
$$- f^n_{s,j-1})(y_j - y_{j-1}) + (y_{t+1} - y_t) \sum_{1}^{s}{}_i (\bar{f}^n_{i-1,t} - f^n_{i-1,t})(x_i - x_{i-1})$$

e poiché nei secondi membri le differenze $\bar{f}_{ij} - f_{ij}$ sono $\leqslant 0$ in virtù della (19) giacché si riferiscono a valori Θ_{hk}, z_{hk} contenuti nello stesso intervallo $[z_{r-1}, z_{r+2}]$ risulta

(21) $$\bar{\Theta}_{s+1,t+1} - \bar{z}_{s+1,t+1} \geqslant 0.$$

È poi per le (13) per $(x, y) \varepsilon R^n_{j,t}$

$$\left|\overline{\Theta}_{s+1,t+1} - \overline{\Theta}_{s,t}\right| \leqslant 4\,M\,a\,b/n\,;\,\left|\overline{z}_{s+1,t+1} - \overline{z}_{st}\right| \leqslant 4\,M\,a\,b/n\ ,$$

onde

$$\left|\overline{\Theta}_{s+1,t+1} - \overline{z}_{s+1,t+1}\right| \leqslant 8\,M\,a\,b/n\ ,$$

e per la (21)

$$0 \leqslant \overline{\Theta}_{s+1,t+1} - \overline{z}_{s+1,t+1} \leqslant 8\,Mab/n\ ,$$

c) Fissato D_n indichiamo con $z = G^n(x, y)$ l'equazione della superficie formata con i pezzi di paraboloidi $z = \psi(x, y)$ e sia $z = \varphi(x,y)$ una *qualunque* soluzione del problema di Darboux. Approssimando questa mediante una successiva $\{\varphi^n(x, y)\}$ nel modo detto al n. 3 avremo

$$G^n(x, y) \geqslant \varphi^n(x, y)\,. \tag{22}$$

Dalle successioni $\{G^n(x, y)\}\,;\,\{\varphi^n(x, y)\}$ per i ragionamenti descritti nel n. 2 si possono estrarre due successioni di uguali indici che convergono uniformemente a $G(x, y)$ e a $\varphi(x, y)$ e si avrà

$$G(x, y) \geqslant \varphi(x, y)\,.$$

Anche la $G(x, y)$, come la $\varphi(x, y)$, è soluzione del sistema (3).

Se poi dalla successione $\{G^n(x, y)\}$ si estrae un'altra sottosuccessione convergente a $\overline{G}(x, y)$ soluzione della (3), e nella (22) poniamo una volta $\varphi^n(x, y) = G^n(x, y)$ ed un seconda volta $\varphi^n(x, y) = \overline{G}(x, y)$ risulterà $\overline{G}(x, y) \geqslant G(x, y)$ e contemporaneamente $G(x, y) \leqslant \overline{G}(x, y)$ e quindi

$$G(x, y) = \overline{G}(x, y)$$

d) Operando come in *a*) salvo prendere per $f(x_h, y_k, z_{hk}, p_k, q_h)$ i *minimi* si dimostra che esiste (ed è unica) la funzione $g(x,y)$ soddisfacente il sistema (3) e tale che se $\varphi(x, y)$ è una qualsiasi altra soluzione si ha

$$g(x, y) \leqslant \varphi(x, y)\,.$$

Possiamo ora concludere che *la questione* (*A*) *posta nel n.* 1 *è completamente risolta nel senso che nelle ipotesi di* Hartmann *e* Wintner *l'estremo superiore e quello inferiore delle soluzioni del problema* (3) *sono anche loro soluzioni del problema dato.*

5. Il continuo delle superficie integrali del sistema (3).

Fissato un punto (x^*, y^*, z^*) di S con $g(x^*, y^*) < z^* < G(x^*, y^*)$ e data una divisione D_n sia $R^n_{h,k}$ il rettangolo, con gli indici h e k massimi, cui appartiene (x^*, y^*). Da quanto è stato detto nei numeri precedenti si sa che le funzioni $\varphi^n(x, y)$, per la (9_{hk}) dipendono con continuità dai parametri f_{hk} e che detti parametri sono $h\,k\ (\leqslant n^2)$, inoltre se è $f^n_{hk} = f^n_{hk}$ per la uniforme convergenza delle $\{G^n(x, y)\}$ possiamo trovare un indice n_τ in corrispondenza di un prefissato τ tale che, supposto di avere preso $n > n_\tau$, risulti

$$| G^n(x^*, y^*) - G(x^*, y^*) | < \tau$$

e se $f^n_{hk} > f^n_{hk}$ (con f^n_{hk} minimo di f^n_{hk} per $z \varepsilon\ [z_{\tau-1}, z_{\tau+2}]$) è

$$| g^n(x^*, y^*) - g(x^*, y^*) | < \tau$$

e allora fissato τ possiamo trovare un valore n'_τ tale che, supposto anche $n > n'_\tau\ (\geqslant n_\tau)$ risulti

$$g^n(x^*, y^*) \leqslant g(x^*, y^*) + \tau < z^* < G(x^*, y^*) - \tau < G^n(x^*, y^*) .$$

La funzione $\varphi^n(x^*, y^*) = \varphi^n(x^*, y^*, f^{*n}_{hk})$ continua in f^{*n}_{hk} deve assumere tutti i valori compresi tra il massimo $G^n(x^*, y^*)$ ed il minimo $g^n(x^*\ y^*)$ onde vi sarà almeno un f^{*n}_{hk} tale che

$$\varphi^n(x^*, y^*) = \varphi^n(x^*, y^*, f^{*n}_{hk}) = z^*$$

Ripetendo questo ragionamento per tutti gli $n\ (> n'_\tau)$ si trova una successione $\{\varphi^\nu(x, y)\}$ dalla quale si può estrarre una sottosuccessione che converge uniformemente ad una soluzione $\varphi^*(x, y)$ del problema (3), la quale, essendo per ogni $\varphi^\nu(x, y)\,|_{x^*, y^*} = z^*$, è tale che $\varphi^*(x^*, y^*) = z^*$.

Possiamo allora concludere che dato un qualunque punto $(x^*, y^*) \varepsilon R$, esiste una soluzione del sistema (3) tale che $z\ (x^*, y^*) = z^*$ con $g\,(x^*, y^*) \leqslant z^* \leqslant G\,(x^*, y^*)$ e con ciò viene risolta anche la questione (B) nelle ipotesi di Hartmann *e* Wintner (¹).

Firenze - Istituto Matematico « Ulisse Dini » dell'Università.

(¹) Si noti che se invece del problema (3) si fosse considerato il sistema di nota (²) si sarebbe potuti ancora giungere alle stesse conseguenze. Infatti avremmo ottenuto in questo caso invece che la (9) la seguente $\mathfrak{z}^n(x, y) = \sigma(x_n) + \tau(y_k) - \sigma(o) + \frac{\sigma(x_{n+1}) - \sigma(x_n)}{x_{n+1} - x_n}(x - x_n) + \frac{\tau(y_{k+1}) - \tau(y_k)}{y_{k+1} - y_k} \cdot (y - y_k) + \varphi(x, y_n)$ con $\varphi_n(x, y)$ data dalla (9_{nk}). Per questa $\mathfrak{z}^n(x, y)$ valgono tutte le proprietà date nei n. 2, 3, 4, per la funzione $\varphi^n(x, y)$ in quanto si ha $\mathfrak{z}^n(\overline{x}, \overline{y}) - \mathfrak{z}^n(x, y) = \varphi^n(\overline{x}, \overline{y}) - \varphi^n(x, y)$; con (x, y) ed $(\overline{x}, \overline{y})$ appartenenti ad R^n_{hk} e il lemma di J. B. Diaz usato nel n. 2 g) può ancora applicarsi in questo caso.