MARIA SCAFATI

Indice di allacciamento di più cicli e intersezioni di varietà analitiche complesse (*)

INTRODUZIONE

I. - La nozione di indice di allacciamento è definita nel modo ben noto (cfr., ad es., B. Segre [11] (**), n. 74) per due cicli continui γ^p, γ^{n-p-1} a coefficienti interi, omologhi a zero con divisione su una data varietà orientabile M^n (realizzabile, cioè mediante un complesso euclideo, cfr. [11], pag. 176), ed aventi come sostegni $|\gamma^p|$, $|\gamma^{n-p-1}|$ due sottoinsiemi disgiunti di M^n. Precisamente, indicando con $\}\gamma^p, \gamma^{n-p-1}\{$ il relativo indice di allacciamento, si pone:

$$\}\gamma^p , \gamma^{n-p-1}\{ = {}^1/_t \, [\gamma^p , C^{n-p}] ,$$

ove a secondo membro figura l'indice di Kronecker (cfr. [11], pag. 148) della 0-catena $\gamma^p \circ C^{n-p}$, intersezione di γ^p e di una catena C^{n-p}, la cui frontiera, $f\,C^{n-p}$, sia un multiplo intero, $t\,\gamma^p$, di γ^p. Si dimostra inoltre (cfr. [11], pag. 194-195) che se t' e C'^{n-p} sono un altro intero ed un'altra catena, tali che si abbia $t'\,\gamma^{n-p-1} = f\,C'^{n-p}$, risulta:

$${}^1/_t \, [\gamma^p , C^{n-p}] = {}^1/_{t'} \, [\gamma^p , C'^{n-p}]$$

e che

$$\}\gamma^p , \gamma^{n-p-1}\{ = (-1)^{n(p+1)} \, \}\gamma^{n-p-1} , \gamma_p\{ .$$

Nel presente lavoro *estendiamo anzitutto la nozione richiamata poc'anzi al caso di $m \geqslant 3$ cicli* continui, omologhi a zero con divisione, nell'omologia a coefficienti interi, su M^n. Più specificatamente, diamo dapprima una definizione che sviluppa e precisa un accenno del Lefschetz in tal senso (cfr. [6], pag. 209), assumendo per quel numero l'indice di allacciamento ordinario dell'intersezione dei primi h cicli con quella dei restanti $m-h$, ove h denoti uno qualunque fissato dei numeri

(*) Memoria presentata dall'Accademico Francesco Severi.

(**) Le parentesi quadre rinviano alla bibliografia posta alla fine del presente lavoro.

1, 2,..., m-1. Dimostriamo poi l'indipendenza dall'intero h di tale indice di allacciamento, ciò che rende lecita la suddetta definizione.

Mutando l'ordine degli m cicli, l'indice di allacciamento così introdotto si altera, al più, per il segno, secondo quanto viene specificato più oltre nel n. 3.

Nel n. 4 dimostriamo quindi che, sotto opportune condizioni per i cicli dati, detta T' l'intersezione degli ultimi m-k cicli ($2 \leq k \leq m$), l'indice di allacciamento su questo ambiente, dei due cicli H^{δ}, K^{λ}, intersezioni rispettive dei primi k_1 cicli e dei successivi k_2 ($k_1 + k_2 = k$) con T', coincide con l'indice di allacciamento fornito dalla definizione dianzi esposta. Questo ci abilita ad assumere come definizione possibile dell'indice di allacciamento degli m cicli inizialmente considerati, l'indice di allacciamento, su T', dei due suddetti cicli H^{δ}, K^{λ}, secondo quanto ebbe a suggerire il Prof. Segre in una conferenza del Seminario da lui diretto, presso l'Istituto Nazionale di Alta Matematica.

Il § 2 contiene poi due applicazioni dei risultati dianzi riassunti. La prima (nn. 5 - 8) concerne la molteplicità di intersezione di un punto isolato, comune ad n varietà analitiche complesse, molteplicità che, come è specificato nel n. 8, viene espressa come indice di allacciamento di n cicli, opportunamente definiti. La questione, nel caso particolare di due curve analitiche complesse di un piano, era già stata trattata da vari Autori (*) (cfr. [1], [2], [3], [8], [10]).

La seconda (n. 9) riguarda la definizione topologica della molteplicità di un punto unito per una trasformazione analitica regolare fra spazi sovrapposti. Secondo quanto è infatti esposto al n. 9, la molteplicità di un tal punto unito equivale di fatto alla molteplicità di intersezione di certe ipersuperficie, definite dalla trasformazione stessa, ciò che permette di applicare i precedenti risultati ad alcuni problemi esaminati in [4].

§ 1 - INDICE DI ALLACCIAMENTO DI PIU' CICLI

2. - Siano $\gamma_1^{p_1}, \gamma_2^{p_2}, \dots, \gamma_m^{p_m}$ m cicli appartenenti ad una medesima suddivisione simpliciale finita di M^n ed ivi omologhi a zero con divisione (nell'omologia a coefficienti interi). Avvertiamo che, ogni qualvolta considereremo intersezioni di due o più cicli su M^n, supporremo tali intersezioni costruite secondo la teoria di Newman[9], e quindi supporremo tacitamente che le catene siano in posizione regolare nel senso di Newman. Poichè le m catene $\gamma_1^{p_1}, \gamma_2^{p_2}, \dots, \gamma_m^{p_m}$ sono dei cicli omologhi a zero con divisione, tale è anche il ciclo intersezione di un numero qualunque di essi.

Per ogni intero h, tale che $0 < h < m$, i due cicli:

$$U_h^{\delta} = \gamma_1^{p_1} \circ \gamma_2^{p_2} \circ \dots \circ \gamma_h^{p_h} ,$$

$$V_k^{\lambda} = \gamma_{h+1}^{p_{h+1}} \circ \gamma_{h+2}^{p_{h+2}} \circ \dots \circ \gamma_m^{p_m} ,$$

(*) I risultati fin qui riassunti hanno sostanzialmente formato oggetto di una mia comunicazione premiata al V Congresso dell'Unione Matematica Italiana (Atti del V Congr. dell'U.M.I., Cremonese, Roma 1956, p. 320).

hanno dimensioni:

$$d = p_1 + p_2 + \cdots + p_h - n(h-1),$$

$$\delta = p_{h+1} + p_{h+2} + \cdots + p_m - n(m-h-1),$$

le quali sono legate dalla relazione $d + \delta = n-1$, se e solo se:

$$(1) \quad \sum_1^m p_i - n(m-1) + 1 = 0 .$$

Poichè i cicli dati sono in posizione regolare, in virtù della (1) si ha

$$|\gamma_1^{p_1}| \cap |\gamma_2^{p_2}| \cap \ldots \cap |\gamma_m^{p_m}| = \phi .$$

ossia:

$$|U_h^d| \cap |V_h^{n-d-1}| = \phi .$$

Per quanto precede, si può allora valutare l'indice di allacciamento $\{U_h^d, V_h^{n-d-1}\}$, il quale, come è noto, (cfr. [11], pag. 195) è definito dalla relazione:

$$(2) \quad \{U_h^d \cdot V_h^{n-d-1}\} = {}^1/_t \, [U_h^d \cdot C_h^{n-d}] .$$

ove C_h^{n-d} è una catena tale che

$$f\, C_h^{n-d} = t\, V_h^{n-d-1} .$$

Dimostriamo ora che tale indice risulta di fatto indipendente dall'intero h, dipendendo quindi soltanto dagli m cicli, presi nel dato ordine.

Per provare che il primo membro della (2) non dipende dall'intero h, occorre dimostrare che, fissato un qualsiasi altro intero h', tale che $1 \leq h' \leq m-1$, essendo $d' = p_1 + p_2 + \ldots + p_{h'} - n(h'-1)$, si ha

$$\{U_h^d, V_h^{n-d-1}\} = \{U_{h'}^{d'}, V_{h'}^{n-d'-1}\},$$

ossia

$$(4) \quad {}^1/_t \, [U_h^d, C_h^{n-d}] = {}^1/_{t'} \, [U_{h'}^{d'}, C_{h'}^{n-d'}],$$

ove $C_{h'}^{n-d'}$ è una catena tale che $fC_{h'}^{n-d'} = t'\, V_{h'}^{n-d'-1}$. Non è restrittivo supporre, per fissare le idee, $h' > h$, ed anzi dimostreremo la (4) per $h' = h + 1$ poichè, con un ovvio procedimento induttivo, essa risulterà allora dimostrata in generale. Nell'ipotesi suddetta abbiamo:

$$(5) \quad U_{h'}^{d'} = U_h^d \circ \gamma_{h+1}^{p_{h+1}}, \quad V_h^{n-d-1} = \gamma_{h+1}^{p_{h+1}} \circ V_{h'}^{n-d'-1},$$

sicchè la (4) può scriversi:

$${}^1/_{t'} \quad [U_h^d, C_h^{n-d}] = {}^1/_{t'} \, [(U_h^d \circ \gamma_{h+1}^{p_{h+1}}), C_{h'}^{n-d'}] .$$

Moltiplicando la seconda delle (5) per t', si ha:

$$t'\, V_h^{n-d-1} = \gamma_{h+1}^{p_{h+1}} \circ t'\, V_{h'}^{n-d'-1} = \gamma_{h+1}^{p_{h+1}} \circ f\, C_{h'}^{n-d'},$$

e quest'ultima può anche scriversi (cfr. [11], pag. 189):

$$t' V_h^{n-d-1} = f\,(\gamma_{h+1}^{p_{h+1}} \circ C_{h'}^{n-d'}) .$$

In base ad essa risulta:

$$\rbrace\, U_h^d ,\, V_h^{n-d-1} \lbrace = {}^1/_{\nu} \left[U_h^d ,\, (\gamma_{h+1}^{p_{h+1}} \circ C_{h'}^{n-d'}) \right] ;$$

ed avendosi

$$\rbrace\, U_{h'}^d ,\, V_{h'}^{n-d'-1} \lbrace = {}^1/_{\nu} \left[(U_h^d \circ \gamma_{h+1}^{p_{h+1}}) ,\, C_{h'}^{n-d'} \right] ,$$

la relazione (4), che dobbiamo dimostrare, si riduce a:

$$\left[U_h^d ,\, (\gamma_{h+1}^{p_{h+1}} \circ C_{h'}^{n-d'}) \right] = \left[(U_h^d \circ \gamma_{h+1}^{p_{h+1}}) ,\, C_{h'}^{n-d'} \right] .$$

Quest'uguaglianza è manifestamente vera, perchè a primo e secondo membro figurano rispettivamente l'indice di Kronecker della 0-catena $U_h^d \circ (\gamma_{h+1}^{p_{h+1}} \circ C_{h'}^{n-d'})$ e della 0-catena $(U_h^d \circ \gamma_{h+1}^{p_{h+1}}) \circ C_{h'}^{n-d'}$ i quali, per la proprietà associativa dell'operazione di intersezione, coincidono.

In base al risultato testè ottenuto, è lecito sopprimere nel simbolo $\rbrace U_h^d, V_h^{n-d-1} \lbrace$ l'indice h e siamo ormai in grado di porre per definizione:

$$(6) \qquad \rbrace\, \gamma_1^{p_1} ,\, \gamma_2^{p_2} ,\, \ldots ,\, \gamma_m^{p_m} \lbrace = \rbrace\, U^d ,\, V^{n-d-1} \lbrace .$$

3. - Mostreremo ora che mutando l'ordine degli m cicli dati, il loro indice di allacciamento si altera al più per il segno.

Poichè una qualunque permutazione degli indici *1*, *2*,...,m si ottiene con un dato numero di trasposizioni di elementi consecutivi, potremo supporre che la permutazione considerata si riduca allo scambio dei due cicli $\gamma_l^{p_l}$ e $\gamma_{l-1}^{p_{l-1}}$. In base al risultato conseguito nel n. 2, si può senz'altro scrivere:

$$U^d = (\gamma_1^{p_1} \circ \gamma_2^{p_2} \circ \ldots \circ \gamma_{l-1}^{p_{l-1}}) \circ \gamma_l^{p_l} = (\gamma_1^{p_1} \circ \gamma_2^{p_2} \circ \ldots \circ \gamma_{l-2}^{p_{l-2}}) \circ (\gamma_{l-1}^{p_{l-1}} \circ \gamma_l^{p_l}) ,$$

ed avendosi evidentemente:

$$U^d = (-1)^{(n-p_l-1)\,(n-p_l)}\, (\gamma_1^{p_1} \circ \gamma_2^{p_2} \circ \ldots \circ \gamma_l^{p_l} \circ \gamma_{l-1}^{p_{l-1}}) ,$$

si trova infine:

$$\rbrace\, \gamma_1^{p_1} ,\, \gamma_2^{p_2} ,\, \ldots ,\, \gamma_{l-1}^{p_{l-1}} ,\, \gamma_l^{p_l} ,\, \ldots ,\, \gamma_m^{p_m} \lbrace =$$
$$(-1)^{(n-p_l-1)\,(n-p_l)} \rbrace\, \gamma_1^{p_1} ,\, \gamma_2^{p_2} ,\, \ldots ,\, \gamma_l^{p_l} ,\, \gamma_{l-1}^{p_{l-1}} ,\, \ldots ,\, \gamma_m^{p_m} \lbrace .$$

ciò che prova il nostro asserto.

4. - Scelto un intero k tale che $2 \leq k \leq m - 1$, chiamiamo T^{ν} l'intersezione degli ultimi $m - k$ cicli, *il cui sostegno*, $|T^{\nu}|$, *supporremo, come M^n, varietà geometrica orientabile*, supponendo inoltre che, fissata un'orientazione della varietà, T^{ν} coincida con il ciclo fondamentale di $|T^{\nu}|$. Scelti due interi non nulli k_1 e k_2, tali che $k_1 + k_2 = k$, chiamiamo H^l e K^{λ} le intersezioni rispettive dei primi k_1 cicli e dei successivi k_2 con T^{ν}; poniamo cioè:

$$T^{\nu} = \gamma_{k+1}^{p_{k+1}} \circ \gamma_{k+2}^{p_{k+2}} \circ \ldots \circ \gamma_m^{p_m} \; , \; (\nu = p_{k+1} + p_{k+2} + \cdots + p_m - n(m-k-1)) \; ,$$

$$H^l = W_1^{\nu_1} \circ T^{\nu} = \gamma_1^{p_1} \circ \gamma_2^{p_2} \circ \ldots \circ \gamma_k^{p_k} \circ T^{\nu} \; , \; (l = p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1} + p_k + \cdots$$
$$+ \; p_m - n(k_1 + m - k - 1)) \; ,$$

$$K^{\lambda} = W_2^{\nu_2} \circ T^{\nu} = \gamma_{k_1+1}^{p_{k_1+1}} \circ \gamma_{k_1+2}^{p_{k_1+2}} \circ \ldots \circ \gamma_k^{p_k} \circ T^{\nu} \; , \; (\nu = p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \cdots$$
$$+ \; p_k + p_{k+1} + \cdots + p_m - n(m - k_1 - 1)) \; ,$$

ove

$$W_1^{\nu_1} = \gamma_1^{p_1} \circ \gamma_2^{p_2} \circ \ldots \circ \gamma_k^{p_k} \quad . \quad W_2^{\nu_2} = \gamma_{k_1+1}^{p_{k_1+1}} \circ \gamma_{k_1+2}^{p_{k_1+2}} \circ \ldots \circ \gamma_k^{p_k} \quad .$$

tenuto conto che in forza della (1), la relazione $1 + \lambda = \nu - 1$ è soddisfatta. Dimostreremo ora che sussiste l'uguaglianza (*):

$$(7) \qquad \{ U^d \, , V^{n-d-1} \} = \{ H^l \, , K^{\nu-l-1} \}_{T^{\nu}} \; .$$

Avuto riguardo al n. 2, possiamo senz'altro supporre:

$$(8) \qquad U^d = W_1^{\nu_1} \quad , \quad V^{n-d-1} = W_2^{\nu_2} \circ T^{\nu} \; ,$$

$$(9) \qquad H^l = W_1^{\nu_1} \circ T^{\nu} \; , \; K^{\nu-l-1} = V^{n-d-1} = W_2^{\nu_2} \circ T^{\nu} \; ,$$

talchè la (7) può scriversi:

$$\{ W_1^{\nu_1} \, , (W_2^{\nu_2} \circ T^{\nu}) \} = \{ (W_1^{\nu_1} \circ T^{\nu}) \, , (W_2^{\nu_2} \circ T^{\nu}) \}_{T^{\nu}} \; ,$$

ed anche

$$(10) \qquad \frac{1}{t} [W_1^{\nu_1} \, , C^{n-\nu_1}] = \frac{1}{s} [(W_1^{\nu_1} \circ T^{\nu}) \, , \Gamma^{\nu-l}]_{T^{\nu}} \; ,$$

essendo:

$$t \, W_2^{\nu_2} \circ T^{\nu} = f \, C^{n-\nu_1} \; , \qquad s \, W_2^{\nu_2} \circ T^{\nu} = f \, \Gamma^{\nu-l} \; ,$$

ove $C^{n-\nu_1}$ e $\Gamma^{\nu-l}$ sono rispettivamente una catena di M^n ed una catena di T^{ν}. Poichè è $W_2^{\nu_2} \approx 0$ su M^n, esistono una catena C^{ν_2+1} di M^n ed un intero τ tali che

(*) D'ora in poi indicheremo in basso, a destra, la varietà ove si considerano indici di allacciamento od intersezioni, omettendo tale indicazione qualora l'ambiente sia M^n.

$W_2^{\nu_2} = f\, C^{\nu_2+1}$. Moltiplicando la seconda delle (9) membro a membro per τ si ha:

$$\tau\, K^{\nu-l-1} = \tau\, V^{n-d-1} = \tau\, W_2^{\nu_2} \circ T^{\nu} = f\, C^{\nu_2+1} \circ T^{\nu} ,$$

e, per la (5),

$$\tau\, K^{\nu-l-1} = \tau\, V^{n-d-1} = (-1)^{(n-\nu)(n-\nu_2)} f\,(C^{\nu_2+1} \circ T^{\nu}) ,$$

Quest'ultima relazione prova che $K^{\nu-l-1}$ è omologo a zero con divisione in $|T^{\nu}|$, in quanto un suo multiplo è contorno della catena di $|T^{\nu}|$, $C^{\nu_2+1} \circ T^{\nu}$. Quindi nel valutare il secondo membro della (10), possiamo porre $s = (-1)^{(n-\nu)(n-\nu_2)}$, assumendo $\Gamma^{\nu-l}$ coincidente con $C^{\nu_2+1} \circ T^{\nu}$, talchè la (10) si riduce alla relazione:

$$[\, W_1^{\nu_1} \cdot (C^{\nu_2+1} \circ T^{\nu})] = [(W_1^{\nu_1} \circ T^{\nu}) \cdot (C^{\nu_2+1} \circ T^{\nu})]_{T^{\nu}} . \tag{11}$$

la quale, in virtù delle ipotesi fatte, risulta soddisfatta (cfr. [5], pag. 430). La (7) è così dimostrata.

In base ad essa, possiamo definire l'indice di allacciamento degli m cicli dati mediante la seguente relazione:

$$\{ \gamma_1^{p_1} \cdot \gamma_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot \gamma_m^{p_m} \} = \{ H^l \cdot K^{\nu-l-1} \}_{T^{\nu}} .$$

§ 2 - ALCUNE APPLICAZIONI

5. - Date n varietà analitiche complesse ad n-1 dimensioni dello spazio affine complesso S_n, definite nell'intorno dello stesso punto O, *mostreremo ora come la molteplicità di intersezione di esse in O possa esprimersi mediante un opportuno indice di allacciamento*, secondo quanto esporremo nel seguito. (*)

Ogni ipersuperficie analitica, o varietà analitica ad n-1 dimemsioni di origine O si ottiene annullando una funzione olomorfa in un intorno di O, la quale potrà essere prodotto di un certo numero di fattori irriducibili (in piccolo). Ciascuno dei fattori irriducibili definisce, come luogo degli zeri, un insieme di punti che si chiama *falda analitica* di origine O (cfr. [14], pag. 118). Consideriamo dapprima n falde analitiche di dimensioni n-1, di origine O in $S_n\,(z_1, z_2, \ldots, z_n)$:

$$f_1(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0 , \ldots , f_n(z_1\, z_2, \ldots, z_n) = 0 ,$$

e supponiamo che esse siano, secondo una denominazione di F. Severi, (cfr. [16], pag. 110 e [18], pag. 20) *quasi lineari*, cioè trasformate pseudoconformi (**) di falde

(*) Per l'analogo risultato nel caso n = 2 cfr. [1], [2], [3], [8], [10].

(**) « Una trasformazione pseudoconforme è analitica, regolare, biunivoca senza eccezioni, definita intorno alle origini della falda e della sua trasformata » cfr. [18], pag. 20.

lineari. Ricordiamo che le falde quasi lineari sono caratterizzate dalla proprietà di essere parametrizzabili regolarmente ed assolutamente; ossia le coordinate dei loro punti sono esprimibili come serie di potenze in *n-1* parametri complessi, convergenti nell'intorno di un punto O′ di un S_{n-1} complesso, in modo che fra i punti della falda e quelli dell'intorno vi sia corrispondenza assolutamente biunivoca. Passando all'S_{2n} reale, immagine dell'S_n complesso – di coordinate $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ ($x_i + iy_i = z_i$; i = 1, 2,..., n) — ciascuna falda ha ivi per immagine reale una varietà caratteristica (*) F^i_{2n-2}. Mostreremo ora che, data un'ipersfera Σ_{2n-1} di centro O e raggio abbastanza piccolo, *la molteplicità di intersezione in O delle n falde uguaglia l'indice di allacciamento su* Σ_{2n-1} (cfr. [11], pag. 194) *delle intersezioni di* Σ_{2n-1} *rispettivamente con una qualsiasi delle varietà caratteristiche e con la varietà comune alle rimanenti n-1 falde.*

6. - Proveremo che *l'intersezione* F^i_{2n-3} *di* F^i_{2n-2} *con* Σ_{2n-1}, *è una varietà chiusa*, mostrando più precisamente — per quanto ciò non sia essenziale per le nostre considerazioni – che ciascuna F^i_{2n-2} interseca la Σ_{2n-1} in una F^i_{2n-3}, la quale è omeomorfa ad una sfera a *2n-3* dimensioni.

Quanto ora enunciato vale, anzi, più in generale, poichè proveremo che: *una falda analitica k-dimensionale* (cfr. [14], pag. 117-118) *quasi lineare* F_k *di origine O di* S_n *è tale che la sua varietà caratteristica* F_{2k} *interseca una* Σ_{2n-1} *di raggio opportunamente piccolo e di centro O in una varietà chiusa* F_{2k-1}, *omeomorfa ad una sfera a 2k - 1 dimensioni.*

Infatti, essendo la falda quasi lineare, la rappresentazione parametrica della falda stessa induce un omeomorfismo ω tra l'intorno di un punto O′ in un S_{2k} reale e la falda, definita nell'intorno di O. Sia F_{2k-1} l'intersezione di F_{2k} con una ipersfera Σ_{2n-1} di centro O, di raggio sufficientemente piccolo e sia F'_{2k-1} la varietà di S_{2k} che si trasforma in F_{2k-1} mediante ω. Le semirette r di S_{2k} uscenti da O′ si mutano, attraverso ω, in altrettante linee l, uscenti da O, che riempiono F_{2k}. Per provare l'asserto, basterà dimostrare che l'insieme V′, intersezione di una qualsiasi di queste semirette con F'_{2k-1}, consta di un solo punto, ovvero che l'insieme $V = \omega V'$, intersezione della linea $l = \omega r$ con F_{2k-1}, consta anch'esso di un solo punto.

Dimostriamo dapprima che V non è vuoto. Infatti, considerato l'intorno di O′, ove è definita la parametrizzazione della falda, sia U'_{2k-1} una superficie ipersferica di centro O′ contenuta in esso, e sia $U_{2k-1} = \omega\, U'_{2k-1}$. Detto P′ il punto in cui il raggio r per O′ interseca U'_{2k-1} e $P = \omega P' \in U_{2k-1}$, la distanza OP è funzione continua di P′, in virtù dell'omeomorfismo ω. D'altra parte, trattandosi di funzione continua in un insieme chiuso e limitato (la ipersfera U'_{2k-1}), essa ammette un minimo m, il quale è positivo (in quanto altrimenti O non sarebbe il corrispondente del solo O′). Basta allora assumere il raggio Σ_{2n-1} non superiore ad m, perchè

(*) cfr. [14], pag. 112: ricordiamo che per varietà caratteristica si intende l'insieme dei punti $f_i\,(z_1, \dots, z_n) = 0$ rappresentati sulla riemaniana di S_n.

l'affermazione fatta all'inizio del capoverso sia verificata. F_{2k} è quindi una varietà chiusa.

Proveremo ora che V si riduce ad un sol punto, ossia che è assurdo supporre l'esistenza di una linea *l* che, comunque piccolo si scelga il raggio di Σ_{2n-1}, intersechi F_{2k} in almeno due punti. Sia *t* il parametro reale che individua il punto variabile su *r*; questo parametro sarà atto a rappresentare un punto mobile su *l*, dato l'omeomorfismo esistente tra *r* ed *l*. Quindi, detto Q il punto generico di *l*, le sue coordinate saranno funzioni analitiche di *t*, cioè (imponendo inoltre che il punto O si ottenga per $t = 0$):

$$(12) \qquad \begin{cases} x_1 = a_1 t^{h_1} + b_1 t^{h_1+1} + \cdots \\ y_1 = \alpha_1 t^{k} + \beta_1 t^{k_1+1} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = a_n t^{h_n} + b_n t^{h_n+1} + \cdots \\ y_n = \alpha_n t^{k_n} + \beta_n t^{k_n+1} + \cdots \end{cases}$$

Se la linea *l* incontra in almeno due punti qualche sfera a $2n-1$ dimensioni, di centro O, la distanza $\rho = +\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_n^2}$ del punto Q di *l* da O, come funzione continua di *t*, assume valori uguali in punti diversi, onde si ha: $\frac{d\rho}{dt} = 0$, per un certo valore di *t*. Si ha immediatamente l'uguaglianza:

$$(13) \quad \frac{d\rho^2}{dt} = 2\,h_1\,a_1^2\,p_1(t)\,t^{2h_1-1}\left(1 + \frac{t}{h_1}\frac{d}{dt}\log[p(t)] + \cdots\right) + \cdots + 2\,k_n\,\alpha_n^2\,q_n^2(t)\,t^{2k_n-1} \left(1 + \frac{t}{k_n}\frac{d}{dt}\log[q_n(t)] + \cdots\right),$$

ove:

$$p_i(t) = 1 + \frac{b_i}{a_i}t + \cdots$$

$$q_i(t) = 1 + \frac{\beta_i}{\alpha_i}t + \cdots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Poichè, a norma di un risultato contenuto in [13], pag. 162, il ramo trasformato di un ramo lineare è lineare, le derivate $\frac{dx_i}{dt}$, $\frac{dy_i}{dt}$ non sono tutte contemporaneamente nulle per $t = 0$; pertanto, uno almeno degli esponenti che figurano nella (12) deve essere uguale ad uno. Dalla (13) si deduce inoltre che, per $t = 0$, $\frac{d\rho^2}{dt} = 0$ e $\frac{d^2\rho^2}{dt^2} > 0$. Poichè $\left(\frac{d^2\rho^2}{dt^2}\right)_{t=0}$ è funzione continua dei parametri desunti dalle (12), che possiamo supporre variabili nell'insieme chiuso e limitato costituito dall'ipersfera U'_{2k-1}, essa ammette un minimo positivo, essendo sempre > 0; poichè, inoltre $\frac{d^2\rho^2}{dt^2}$ è funzione continua di *t*, essa conserva lo stesso segno in tutto un intorno di centro O'. In tutto un intorno di O, sulla falda F_{2k}, risulta quindi crescente (e positiva, essendo nulla in O). Allora $\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{2\rho} \frac{d\rho^2}{dt}$, in un intorno opportuno di $F_{2k} - O$, è pur essa positiva, ciò che dimostra il teorema.

7. - Orientiamo Σ_{2n-1} come contorno positivo della 2n−cella da essa racchiusa, dotata dell'orientamento indotto in S_{2n} dagli assi coordinati $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ $(x_i + i y_i = z_i ; i = 1, 2, \ldots, n)$; orientiamo inoltre la falda F^i_{n-2} intrinsecamente in base ai $2n-2$ parametri reali $\tau_1', \tau_1'', \ldots \tau_n', \tau_n''$ che intervengono nella sua rappresentazione analitica:

$$x_i = x_i(t_1 \,, t_2 \,, \ldots \,, t_{n-1}) \qquad \text{ove} \quad t_i = \tau_i' + i\tau_i'' \qquad (i = 1 \,, 2 \,, \ldots \,, n) \,.$$

Dall'orientamento fissato in Σ_{2n-1} in relazione a quello di S_{2n}, viene subordinato l'orientamento delle varietà chiuse F^i_{2n-3}, intersezioni di Σ_{2n-1} con F^i_{2n-2}, in modo che, indicata con f l'operazione di passaggio al contorno, valga la relazione:

$$f\, \overline{F}^i_{n-2} = F^i_{2n-3} \,,$$

ove $\overline{F}^i_{2n-3}$ è la porzione di F^i_{2n-2} interna all'ipersfera. Supposto inoltre O' intersezione isolata, le F^i_{2n-3} su Σ_{2n-1} non hanno alcun punto in comune.

8. - Allo scopo di esprimere la molteplicità di intersezione in O delle n falde come indice di allacciamento, definiamo tale molteplicità secondo SEVERI (cfr. [15], pag. 227 e [14], pag. 147). In base a tale definizione, la molteplicità suddetta diremo che è uguale ad uno (ovvero che il punto O comune alle n falde è intersezione semplice) se O è semplice per le n forme $f_h = 0$ $(h = 1, 2, \ldots n)$ e se gli n iperpiani ad esse tangenti in O sono linearmente indipendenti; diremo che O è intersezione di molteplicità i, se, sostituendo alle forme date n forme g_h genericamente (*) prossime ad esse, delle intersezioni semplici delle g_h un numero fisso i cade nell'intorno di O e tende ad esso quando la n−pla di forme tende a quella data.

Consideriamo una qualunque, g_k, delle forme g_h e la varietà di intersezione delle altre $n-1$; gli i punti comuni alle n forme g_h nell'intorno di O sono i punti comuni a g_k e all'intersezione delle rimanenti $n-1$ forme; a norma del teorema dimostrato nel n. 6, questa intersezione semplice bidimensionale (cfr. [15], pag. 232) che chiamiamo G_2^k, taglia Σ_{2n-1} in una circonferenza. Orientiamo G_1^k in modo che, detta $\overline{G}_2^k$ la porzione di G_2^k avente il contorno su Σ_{2n-1} e contenuta all'interno di essa, sia

$$f\, \overline{G}_2^k = G_1^k \,.$$

Con le convenzioni poste per gli orientamenti, ognuno dei punti che sono comuni a g_k e all'intersezione delle altre n-1 forme conta positivamente nella valu-

(*) Genericamente, nel senso che le g sono trasformate delle f mediante un'omografia genericamente prossima all'identità. (Cfr. [17], pag. 838).

tazione dell'indice di Kronecker di $\overline{G}^k_2$, G^k_{2n-2} in S_{2n} e allora la definizione di molteplicità i di intersezione secondo Severi per le n forme date si traduce in:

$$i = [G^k_2 \, , \overline{G}^k_{2n-2}] \text{ in } S_{2n} \, . \tag{14}$$

Essendo le g_h prossime alle f_h, anche le relative F^k_{2n-3}, F^k_1 sono prossime alle G^k_{2n-3}, G^k_1, sicchè gli indici di allacciamento non variano (cfr. [8], pag. 427), e cioè:

$$\rbrace G^k_1 \, , G^k_{n-3} \lbrace_{\Sigma_{2n-1}} = \rbrace F^k_1 \, , F^k_{2n-3} \lbrace_{\Sigma_{2n-1}} \, ; \tag{15}$$

e poichè, come proveremo fra un momento, vale la relazione:

$$i = [\overline{G}^k_2 \, , \overline{G}^k_{2n-2}] = \rbrace G^k_1 \, , G^k_{2n-3} \lbrace_{\Sigma_{2n-2}} \, , \tag{16}$$

tenuto conto della (15), il nostro asserto è dimostrato.

Per provare la (16), denotiamo anzitutto con H^k_{2n-2} una qualunque varietà a $2n$ - 2 dimensioni, tracciata su Σ_{2n-1}, ed avente per contorno G^k_{2n-3}, ossia tale che:

$$f \, H^k_{2n-2} = G^k_{2n-3} \, .$$

Poichè f $G^k_{2n-2} = G^k_{2n-3}$, la varietà $G^k_{2n-2} - H^k_{2n-2}$ è un ciclo omologo a zero entro la 2n - cella racchiusa da Σ_{2n-1}; inoltre, avendo assunto il raggio di $\Sigma_{2n-1} < m$ (cfr. n. 6), si ha $G^k_2 - H^k_{2n-2} \backsim 0$ in $S_{2n} - f \, G^k_2$, onde, per una nota proprietà dell'indice di allacciamento, (cfr. [7], pag. 287) consegue che:

$$\rbrace \overline{G}^k_{2n-2} - H^k_{2n-2} \, , f \, G^k_2 \lbrace = 0 \, ,$$

ossia

$$[\overline{G}^k_{2n-2} - H^k_{2n-2} \, , G^k_2] = 0 \, ,$$

e quindi:

$$[G^k_2 \, . \, \overline{G}^k_{2n-2}] = [G^k_2 \, , H^k_{2n-2}] \text{ in } S_{2n} \, . \tag{17}$$

D'altra parte sussiste la relazione (cfr. [5], pag. 430):

$$[G^k_2 \, , H^k_{2n-2}] = [G^k_1 \, , H^k_{2n-2}]_{\Sigma_{2n-1}} \, ,$$

sicchè, avendosi ovviamente:

$$[G^k_2 \, , G^k_{2n-2}] = [G^k_2 \, , G^k_{2n-2}] \, ,$$

tenendo conto della (14), si trae:

$$i = [G^k_2 \, , H^k_{2n-2}] \, ;$$

e poichè, per definizione, si ha:

$$\{ G_1^k , G_{2n-3}^k \}_{\Sigma_{2n-1}} = [G_1^k , H_{2n-2}^k]_{\Sigma_{2n-1}} ,$$

è quindi provata la (16). Risulta così dimostrato che *la molteplicità di interserzione in O delle n falde analitiche quasi lineari è esprimibile come indice di allacciamento,* su di un'ipersfera Σ_{2n-1}, di due varietà chiuse appartenenti ad essa e precisamente delle intersezioni di Σ_{2n-1} con una delle varietà caratteristiche e con la varietà comune alle altre *n - 1.*

Supponiamo che le ipersuperficie analitiche considerate constino di più falde di origine O. Poichè la molteplicità di intersezione in O è la somma delle molteplicità di intersezione di ogni gruppo di n falde e poichè un'analoga proprietà vale per gli indici di allacciamento, il risultato stabilito sussiste ancora, purchè si indichi con i la molteplicità di intersezione in O delle n ipersuperficie e con F_{2n-2}^h, F_1^h i sistemi di varietà che costituiscono l'intersezione delle ipersuperficie con Σ_{2n-1}.

In base al § 1 — ponendo nella (3) $h = n - 1$ — possiamo anche affermare che *la molteplicità di intersezione di n ipersuperficie analitiche quasi lineari in un punto comune O uguaglia l'indice di allacciamento sull'ipersfera* Σ_{2n-1} (di raggio abbastanza piccolo) *degli n cicli* F_{2n-1}^i, *intersezioni delle n varietà caratteristiche* F_{2n-2}^i *con* Σ_{2n-1}.

9. - Come ulteriore applicazione dei risultati conseguiti nel § 1, mostreremo ora, tenendo conto di quanto esposto in (4), che la molteplicità di un punto unito in una trasformazione analitica regolare si può esprimere in modo opportuno come molteplicità di intersezione.

Avvertiamo anzitutto che in (4) vengono considerate trasformazioni analitiche di un S_n nel caso $n = 2$, ma poichè i risultati di (4) che a noi interessano continuano a sussistere per n qualunque, nel richiamarli brevemente, ci riferiremo senz'altro a quest'ultimo caso. Sia dunque τ una trasformazione analitica di un S_n complesso, riferito a coordinate non omogenee $z_1, z_2, \ldots, z_n$, definita da:

$$(18) \qquad \begin{cases} z_1' = f_1(z_1, \cdots, z_n) , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n' = f_n(z_1, \cdots, z_n) . \end{cases}$$

ove $f_1, \ldots, f_n$ sono funzioni analitiche delle n variabili $z_1, \ldots, z_n$. Essendo x_i ed y_i la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, potremo pensare τ operante nell'S_{2n} reale di coordinate $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$. Supponiamo che τ ammetta un'*invertibilità algebroide* (cioe che dia luogo ad un numero finito di punti $P_1, P_2, \ldots, P_m$ corrispondenti di uno stesso P'). I punti $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ di S_{2n} che si mutano, mediante τ^{-1}, nell'origine delle coordinate, si diranno *zeri* della trasformazione τ. Una varietà σ di dimensione *2n-1* chiusa ed orientata, che avvolga semplicemente uno zero, si muta, mediante τ, in una varietà σ' che avvolge ν volte l'origine, con $\nu > 0$ (e non necessariamente uguale ad uno). Qualora $\nu = 1$, lo zero si dirà *semplice* per τ; se, invece, $\nu > 1$, si dirà che lo zero ha *ordine di molteplicità* ν, valendo al riguardo il seguente

TEOREMA: *se si fa variare con continuità* (*) *una trasformazione, in modo che un certo numero* ν *dei suoi zeri semplici vengano a coincidere in un unico punto, questo risulta punto unito di ordine* ν *per la trasformazione limite. Inversamente, qualsiasi zero isolato multiplo di ordine* ν, *si può riguardare come limite di* ν *zeri semplici.*

Sia τ' la trasformazione associata a τ, che al punto P di S_{2n} fa corrispondere il punto P', estremo del vettore $\overrightarrow{PP'}$, uscente dall'origine O di S_{2n} ($P' = \tau P$); τ' risulta anch'essa analitica regolare nel punto generico di S_{2n}, cioe in ogni punto distinto dai punti fondamentali, dai punti impropri e dai punti il cui corrispondenti è improprio ed i suoi punti uniti (propri) sono tutti e soli gli zeri di τ; ed anzi *l'ordine di molteplicità di un punto unito di* τ uguaglia l'ordine di molteplicità del corrispondente zero di τ' (cfr. [4], pag. 85).

Consideriamo ora una trasformazione τ definita dalla (18). Ciascuno, Q, dei suoi zeri verifica ovviamente le n equazioni $f_i = 0$; ossia è un punto comune alle n ipersuperficie analitiche $f_1(z_1, \ldots, z_n) = 0, \ldots, f_n(z_1 \ldots, z_n) = 0$, definite dalla trasformazione.

Ad un siffatto punto Q resta quindi associato un ordine di molteplicità, in quanto zero della trasformazione τ' (cfr. [4], pag. 85) ed un ordine di molteplicità, in quanto punto comune ad n ipersuperficie analitiche (cfr. [14], pag. 147). Mostreremo ora che i due interi positivi, così associati a Q, coincidono. Infatti, il teorema precedente afferma che l'intero ν indica il numero degli zeri semplici per la trasformazione $\bar{\tau}$ genericamente prossima a τ, che tendono a Q quando $\bar{\tau}$ varia opportunamente con continuità, tendendo a τ. Ma una variazione continua di $\bar{\tau}$ equivale ad una variazione continua delle n ipersuperficie analitiche, definite dalla $\bar{\tau}$ stessa, i cui punti comuni dànno gli zeri di $\bar{\tau}$. Se ν di essi tendono a Q, per $\bar{\tau}$, tendente a τ, Q è dunque simultaneamente zero ν—plo per τ, secondo la definizione precedente, e intersezione ν—pla per le n ipersuperficie definite da τ, in base alla definizione dinamica di molteplicità di intersezione.

Osserviamo infine che, in base alle conclusioni del n. 8, qualora le n ipersuperficie analitiche definite dalla (18) siano costituite da falde analitiche quasi lineari, l'ordine di molteplicità di un punto fisso di una trasformazione analitica di S_n può essere interpretato topologicamente come opportuno indice di allacciamento.

Roma — Istituto Nazionale di Alta Matematica.

(*) In modo che la trasformazione, variando, continui a soddisfare alle ipotesi poste.

BIBLIOGRAFIA

[1] O. Chisini: « Sugli incroci delle curve di diramazione per una funzione algebrica di due variabili » - Rend. Acc. Naz. Lincei, (5), 29, 127-130 (1920).

[2] O. Chisini: « Sui contattti delle curve di diramazione per una funzione algebrica di due variabili » - Rend. Acc. Naz. Lincei, (5), 29, 241-247 (1920).

[3] O. Chisini: « Sulla molteplicità di intersezione di due curve algebriche in un loro punto comune » - Scritti matematici offerti a L. Berzolari, Pavia, 1936, 261-270.

[4] M. Dedò: « Determinazione topologica di molteplicità » - Rend. Ist. Lombardo, 83, 79-90 (1950).

[5] S. Lefschetz: « Manifolds whith a boundary and their transformations » - Trans. Am. Math. Soc., 29, 429-462 (1927).

[6] S. Lefschetz: « Topology » - Am. Math. Soc. Coll. Publ., vol. XII, New-York, 1930.

[7] E. Martinelli: « Sulle estensioni della formula integrale di Cauchy alle funzioni analitiche di più variabili complesse » - Ann. di Mat., (4), 34, 277-347 (1953).

[8] E. Martinelli: « Sulle intersezioni delle curve analitiche complesse » - Rend. di Mat. e Appl., (5), 14, 422-430 (1953); ed anche « Sur les intersections des variétés analytiques complexes » - Proc. of Int. Congr. of Math. Amsterdam, 2, 138-139 (1954).

[9] M. H. A. Newman: « Intersection-complexes, I combinatory Theory » - Proc. Cambridge Phil. Soc., 27, 491-501 (1931).

[10] J. E. Reeve: « A Summary of results in the Topological classification of plane algebroid singolarities » - Rend. Sem. Mat. Torino, (14), 159-187 (1954-55).

[11] B. Segre: « Forme differenziali II » - Docet, Roma, 1956.

[12] F. Severi: « Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse » - Rend. Sem. Mat., Roma, (2), 51-58 (1930-31).

[13] F. Severi: « Sul teorema fondamentale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica » - Ann. di Mat., (4), 23, 149-181 (1944).

[14] F. Severi: « Introduzione alla geometria algebrica, geometria numerativa, Docet, Roma, 1947.

[15] F. Severi: « Il concetto generale di molteplicità delle soluzioni di più sistemi di equazioni algebriche e la teoria dell'eliminazione » - Ann. di Mat., (4), 26, 228-270 (1947).

[16] F. Severi: « Fondamenti di geometria algebrica » - CEDAM, Padova, 1948.

[17] F. Severi: « Sulle molteplicità di intersezione delle varietà algebriche ed analitiche e sopra una teoria geometrica dell'eliminazione » - Math. Zeit., 52, 827-851 (1950).

[18] F. Severi: « Sunti di lezioni tenute all'Istituto Nazionale di Alta Matematica », 1955.