FRANCESCO SEVERI

Le diverse concezioni di varietà nella geometria algebrica

Nel preparare una Memoria riguardante i fondamenti della geometria sulle varietà algebriche [1], che prosegue quella pubblicata in proposito quasi mezzo secolo fa, e che ho svolto nelle lezioni del 1950-51 all'Istituto di Alta Matematica, ho dovuto approfondire taluni aspetti del concetto di varietà, per dare un fondamento rigoroso alle formule di postulazione e alla teoria del genere aritmetico; approfondimenti che sono andati al di là delle mie immediate esigenze. Li espongo qui separatamente [2].

Essi porgono nuovi eleganti e opportuni legami fra la geometria algebrica italiana e l'algebra astratta, e fissano le relazioni fra gli H-ideali e talune imagini geometriche, ad essi associate.

Queste imagini sono le varietà base: uno dei tre possibili aspetti delle varietà algebriche, gli altri due essendo le varietà interferenza e le varietà intersezioni, di cui si parla al principio della presente Memoria.

Le varietà base, sotto la denominazione di «gruppi base», furon più volte considerate nella geometria algebrica classica, in Italia e fuori, ma soltanto dal punto di vista delle singolarità infinitamente vicine, subordinatamente dunque alla possibilità di sciogliere tali singolarità con trasformazioni birazionali. D'altronde una teoria generale da questo punto di vista non sarebbe possibile, perchè manca finora una teoria delle singolarità infinitamente vicine per varietà qualunque.

Il concetto che permette di girare la difficoltà delle singolarità infinitamente vicine (e che forse può riuscire utile anche nello studio di queste), è introdotto nel n. 4 della presente Memoria a mezzo dei rami analitici aventi le origini nei punti di una data varietà semplice (cioè interferenza) W, sotto la denominazione di *comportamento* (effettivo o virtuale) delle forme contenenti W, nei punti di questa varietà. Tale comportamento c è caratterizzato da un insieme di rami analitici e di numeri interi ad essi inerenti e la sua associazione con W dà luogo ad un ente (W, c), che è appunto una *varietà base*.

(1) *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche: Seconda Memoria*, Annali di Matematica, 1951. Alcuni risultati in essa contenuti formarono oggetto, nell'agosto 1950, di una mia conferenza alla Harvard University.

(2) Un riassunto dei risultati della presente Memoria trovasi in due Note dei Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris: *Les images géométriques des idéaux de polynomes* (séance du 25 juin 1951, pp. 2295-2296); *Propriétés des images géométriques des idéaux de polynomes* (séance du 2 juillet 1951, pp. 15-17).

Le varietà base sono le imagini degli H-ideali completi; essendoci perfetta corrispondenza biunivoca fra i due insiemi di enti (incluse le « varietà vuote » e gl'ideali banali o T-ideali) ([3]).

Si pone naturalmente il problema di riconoscere sotto quali condizioni i vari concetti di varietà s'identificano. Ciò accade soltanto quando si tratta di varietà base semplici (n. 7), le cui componenti sono senz'altro ideali primi e s'identificano sia con le varietà interferenza che con le varietà intersezione.

Le nozioni inerenti al comportamento chiariscono, in modo forse decisivo, che la definizione di molteplicità d'intersezione di un numero qualunque (finito o infinito) di forme algebriche in una loro interferenza, introdotta in una mia Memoria del 1948, è quella che naturalmente s'impone.

La decomposizione di una varietà (W, c) nelle sue componenti « irriducibili », cioè dell'ideale inerente a (W, c) nei suoi divisori irriducibili, in guisa che la decomposizione sia « ridotta », fa senz'altro cadere nel teorema di Lasker-Noether, che risolve la questione.

Così ad ogni ideale irriducibile $\mathcal{J}$ (e dunque primario) risponde una varietà base (W, c) irriducibile, *associata* o *aderente* ad una varietà semplice W irriducibile, nel senso ordinario.

A una tal (W, c) resta pertanto collegata la *lunghezza* μ di $\mathcal{J}$, intero che Gröbner propone di assumere quale « molteplicità » della componente, mentre (come si chiarisce nel n. 8) esso non ha quella natura infinitesimale che, senza venir meno all'opportuna aderenza del linguaggio ai concetti, può esprimersi con la locuzione di molteplicità d'intersezione (M.I.). Ad $\mathcal{J}$ resta pure associata la M.I. ν delle forme di $\mathcal{J}$ lungo W e sussiste l'ovvia disuguaglianza $\nu \geqslant \mu$.

In particolare, quando uno dei due interi μ, ν è uguale ad 1, anche l'altro lo è $(\mu = \nu)$ e si cade nel caso degl'ideali primi (o varietà semplici).

L'uguaglianza $\mu = \nu$ si verifica però anche in altri casi (n. 11), ma già nel caso dell'ideale irriducibile delle forme ternarie che hanno un punto doppio dato è $\mu = 3, \nu = 4$.

E' da sottolinearsi pure un facile corollario del teorema di Lasker-Noether e cioè che le forme di ordine abbastanza alto $(\geqslant \lambda)$ appartenenti ad un ideale, la cui varietà base sia priva di componenti « immerse » (nel senso di Macaulay), formano un ideale completo.

In particolare la base dell'ideale delle forme di ordine $l \geqslant \lambda$ passanti per una V_d irriducibile, non singolare, di S_r, è costituito da h forme, $h \leqslant r+1$ essendo il minimo numero di forme delle quali V_d può considerarsi quale intersezione completa, dovunque semplice.

Termino con alcune considerazioni sulle formule di postulazione. Quelle concernenti le formule di postulazione relative a due varietà semplici irriducibili V_h, W_k di S_r, con $h + k \leqslant r$, le quali si seghino semplicemente (nel senso di una definizione da me data fin dal 1933 e che è caso particolare delle definizioni generali della pre-

([3]) W. Gröbner nella pregevole opera in seguito citata, identifica addirittura le varietà algebriche cogl'ideali e si limita a qualche spunto elementare euristico sopra le varietà concepite come enti geometrici (ved. n. 3), concezione che non sembra facilmente attuabile senza la nozione di comportamento e di varietà base (ved. in proposito a pag. 10 della presente Memoria).

sente Memoria) lungo una Z_t $(t \geqslant 0)$, si applicano utilmente nella teoria del genere aritmetico, come può vedersi nella Memoria degli «Annali» sulla geometria delle varietà.

Varietà semplici e varietà intersezioni.

1. *Tre modi di considerare le varietà algebriche.* — Una varietà algebrica W può considerarsi, come si è detto, da un triplice punto di vista: quale *interferenza* (4) o quale *intersezione* o infine quale ente geometrico associato a un *ideale* di forme, ente che è un gruppo o una *varietà base* (5).

Nella prima accezione, la varietà W è il luogo dei punti comuni a un numero finito (6) di forme, facendosi astrazione da qualunque comportamento delle forme stesse in quei punti e da ogni nozione di punti comuni infinitamente vicini; nella seconda, W è il luogo predetto, a ciascun punto del quale si associa quale comportamento la molteplicità d'intersezione ivi di quelle forme; nella terza, l'ente geometrico imagine dell'ideale, risulta dall'associazione di W con un'altra specie di comportamento delle forme dell'ideale nei punti di W. Quest'associazione definisce una *varietà base* inerente a W.

2. *Le varietà interferenza o semplici.* — Sono, come si è detto, le varietà nell'accezione classica. Per esse vale il teorema fondamentale di Kronecker (7), secondo il quale ogni varietà interferenza (totale) di date forme, si decompone in un numero finito di varietà *irriducibili* (*componenti*), le cui dimensioni possono variare da 0 ad r—1, essendo r la dimensione dello spazio lineare ambiente.

Secondo l'uso, una tal varietà dicesi *pura* quando è irriducibile o consta di un numero finito di componenti di ugual dimensione. Per una varietà pura dello S_r vale il teorema (di Kronecker-Perron), ch'essa può sempre considerarsi come completa interferenza di r forme al più.

(4) Ved. la mia Memoria, *Il concetto generale di molteplicità delle soluzioni pei sistemi di equazioni algebriche e la teoria dell'eliminazione*, Annali di Matematica, 1948; «Memorie scelte», I vol., p. 327. E' questa in fondo l'accezione classica di varietà algebrica *semplice* o Nullstellengebilde, come trovasi anche in Van der Waerden, *Moderne Algebra*, Springer, Berlin, 1931, II Teil, p. 51; oppure *Einführung in die algebraische Geometrie*, Springer, Berlin, 1939, p. 107; o in Gröbner, *Moderne algebraische Geometrie*, Springer, Wien und Innsbruck, 1949, p. 37. Quest'ultima opera sarà in seguito citata con la sigla M.A.G. Del concetto di varietà algebriche *multiple* nel senso classico si dirà poi (n. 3). Esse rientrano nelle varietà intersezione.

(5) La parola «forma» viene in seguito usata sia per un polinomio omogeneo in r+1 variabili, se lo spazio ambiente è S_r, sia per l'insieme degli zeri di un tal polinomio (cioè come ipersuperficie algebrica). Dal contesto risulta quando si usa in un senso o nell'altro. L'ideale di forme si considera dentro l'anello di tutte le forme di qualsiasi ordine coi coefficienti nel corpo complesso. Parecchie delle cose che si esporranno sono estendibili ad altri corpi algebricamente chiusi. Gl'ideali di cui si fa menzione sono qui *sempre* H-ideali (in coordinate omogenee), che riduconsi a ideali di polinomi in coordinate non omogenee. Perciò ometteremo di solito il prefisso «H».

(6) Od anche ad un sistema di infinite forme, che si riconduce ad un numero finito, mediante il classico teorema della base di Hilbert.

(7) Ved. p. es. Severi, *Lezioni di Analisi*, vol. I, Bologna, Zanichelli, 1933, 1ª ediz., p. 401; Van der Waerden, *Mod. Alg.*, II, p. 65; *Einführung*, p. 169.

Le varietà irriducibili di data dimensione d e di dato ordine n appartenenti ad un S_r, si distribuiscono in un numero finito di famiglie, ossia di sistemi algebrici irriducibili completi; nel senso che l'elemento generico di un tal sistema è appunto una varietà irriducibile di ordine n, mentre al sistema stesso possono appartenere, quali elementi di accumulazione di varietà irriducibili d'ordine n, varietà riducibili dello stesso ordine o varietà pure di ordine n od anche varietà impure, a componenti di dimensione $\geqslant$ d (*).

Le varietà semplici sono casi particolari (ved. il seguito) sia delle varietà intersezioni come delle varietà base.

3. *Le varietà intersezioni. Varietà multiple.* — Anzitutto ricordiamo dalla mia Memoria citata (A. di M. 1948), come si definisce la molteplicità d'intersezione (M.I.) in un punto O comune ad h forme d'uno spazio lineare S_r, essendo h qualsiasi rispetto ad r. Sieno

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0, \dots, f_h = 0 \tag{1}$$

le forme date dagli ordini $n_1, n_2, \dots n_h$ e $x_0, x_1, \dots, x_r$ sieno coordinate omogenee di punto in S_r; n il massimo dei numeri $n_1, n_2, \dots, n_h$. Il sistema lineare

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_h f_h = 0, \tag{2}$$

ove $a_1, a_2, \dots, a_h$ son forme variabili degli ordini $n\text{-}n_1$, $n\text{-}n_2, \dots, n\text{-}n_h$, dicesi *associato* al sistema di equazioni (1). Se O è un'interferenza isolata delle (1), la dimensione di (2) è $\geqslant$ r-1. Allora r forme generiche di (2) son linearmente indipendenti e hanno in O un'intersezione isolata. La M.I. i di queste forme in O è costante [può crescere soltanto per particolari gruppi di r forme di (2)] (*) e chiamasi molteplicità d'intersezione (M.I.) delle (1) in O.

In particolare i = 1 allora e soltanto allora che la generica forma variabile in (2) passa semplicemente per O e non ha ivi tangenti fisse. In tal caso l'intersezione dicesi *semplice*.

Se O è un'interferenza d-dimensionale (pura o impura), se cioè l'interferenza W delle (1) passa per O avendo ivi dimensione d (con che non si esclude che taluna delle componenti di W per O abbia dimensione $<$d), la M.I. delle (1) in O è la M.I. ivi delle sezioni delle (1) con un S_{r-d} generico per O. Le (1) hanno in O *un'intersezione d-dimensionale semplice* allora e soltanto allora che la generica forma variabile in (2) passi per O semplicemente e le sue tangenti fisse ivi riempiano uno spazio lineare S_d. Analiticamente, un'intersezione semplice O è caratterizzata dal fatto che in essa la

(*) Tutto ciò è chiarito nella mia *Introduzione alla geometria algebrica: geometria numerativa*, Roma, Ed. Docet, fac. I e II, 1948 e 1949. Ved. Cap. III e Cap. V. Ved. pure (anche per la bibliografia) la mia conferenza di Liegi, *La géométrie algébrique italienne, sa rigueur, ses méthodes, ses problèmes*, Centre belge de recherches math., 1950.

(*) Ved. per la definizione di molteplicità d'intersezione di r forme di S_r, in una loro intersezione isolata, il n. 20 della Memoria A. d. M., 1948. Pel passaggio dal concetto *dinamico* al concetto *statico* di molteplicità d'intersezione, si può tener presente la «relationtreue Spezialisierung» di Emmy Noether e Van der Waerden, nonchè il mio lavoro, *Sulle molteplicità d'intersezione delle varietà algebriche ed analitiche e sopra una teoria generale dell'eliminazione*, Mathematische Zeitschrift, 1950, p. 827.

matrice funzionale $\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_h)}{\partial(x_0, x_1, \ldots, x_r)}$ ha la caratteristica r-d, ossia la massima compatibile con la dimensione d dell'interferenza (cosicchè l'intersezione semplice ∞^d è la meno esigente per le forme (1), tra le intersezioni della stessa dimensione).

Sia ora V una componente irriducibile dell'interferenza W delle (1). La M.I. delle (1) nei punti di V raggiunge un minimo $\nu (\geqslant 1)$ ed i punti di V dove la M.I. delle (1) è $> \nu$ formano entro V una varietà algebrica subordinata; cioè il minimo ν è la M.I. delle (1) nel punto *generico* di V.

Ebbene, si dice allora che la componente V figura come ν *-pla* nella W, concepita come varietà intersezione; e s'indica con νV. La W, quale varietà intersezione, risulta una somma di varietà del tipo νV.

Si trascurano così le M.I. delle (1) in punti particolari delle componenti νV della varietà intersezione, in quanto nello studio delle proprietà inerenti ai *sistemi lineari* d'ipersuperficie, entro una varietà ambiente (priva di punti multipli), queste molteplicità non hanno importanza (mentre non posson trascurarsi in alcune proprietà dei *sistemi d'equivalenza*).

Ricordo inoltre, dalla Memoria citata, che ogni varietà irriducibile V, ∞^d, di S_r può sempre considerarsi come intersezione *generalmente semplice* di r+1 forme al più, nel senso che in punto generico di V le r+1 forme hanno un'intersezione semplice ($\nu = 1$); e se V è non singolare (cioè priva di punti multipli) essa è intersezione *dovunque semplice* di r+1 forme al più (ossia $\nu = 1$ non soltanto nel punto generico, ma in ogni punto di V). La nozione della varietà V come interferenza, nel caso $\nu = 1$, coincide con la nozione della varietà V quale intersezione semplice (generalmente o dovunque) in quanto ad ogni punto generico di V resta associato il numero 1.

La nozione di varietà intersezione è quella che interviene più di frequente nello sviluppo classico della geometria algebrica. Ad essa è collegata la nozione di *varietà totale* d'un sistema algebrico irriducibile di varietà. E quest'ultima nozione alla sua volta occorre per dar senso al concetto di combinazione lineare a coefficienti interi (positivi in un primo tempo; positivi e negativi, in un secondo tempo, dopo l'introduzione delle varietà virtuali) di più varietà pure della stessa dimensione: concetto che sta a fondamento della teoria invariantiva dei sistemi lineari e dei sistemi d'equivalenza, nonchè della teoria della base.

Pel concetto di varietà totale rinvio a talune mie lezioni [19], delle quali mi limito qui a riferire qualche conclusione, completata e adattata all'indole del presente lavoro.

Sia una V_d semplice e irriducibile di S_r, variabile in un sistema completo irriducibile Σ. Si può supporre V_d rappresentata come intersezione generalmente semplice d'un numero finito di forme, a coefficienti funzioni razionali del punto variabile sopra una varietà irriducibile T, imagine birazionale di Σ. La rappresentazione consiste appunto in ciò: che un punto variabile in T rappresenta un sistema H di forme variabili, dipendenti razionalmente da quel punto, e che soltanto per posizioni parti-

[19] Ved. SEVERI, *Fondamenti di geometria algebrica*, Quaderno matematico n. 2 della Scuola Normale Superiore di Pisa, Padova, Cedam, 1948, p. 46; *Introduzione alla geometria algebrica: geometria numeratica*, Roma, Docet, 1949, fasc. II, Cap. V.

colari del punto su T le forme del sistema o si segano lungo una varietà spezzata o hanno nel punto generico di una componente (necessariamente di dimensione $\geqslant$ d) dell'interferenza, molteplicità d'intersezione >1, oppure si segano in una varietà con qualche componente di dimensione $>$ d (le varie eventualità potendo presentarsi insieme). Sia Z la sottovarietà algebrica di questi punti particolari di T. Ad un punto P^{o} di T, fuori di Z, corrisponde una V_d^{*} semplice e irriducibile, che comprende tutti e soli i punti d'accumulazione di una V_d generica, il cui punto imagine P tenda a P^{o}. La V_d^{*} ha lo stesso ordine di V_d ed è da sola una varietà totale di Σ.

Sia invece P^{o} un punto di Z e δ sia un ramo tracciato su T, di origine P^{o} e non avente con Z in comune (nello intorno di P^{o}) che l'origine. Se un punto P si muove su δ tendendo a P^{o}, la V_d di Σ, di cui P è imagine, rimane sempre (fuori che al limite) semplice e irriducibile. L'insieme dei suoi punti, in conseguenza di elementari proprietà delle funzioni analitiche, ha un *ben determinato* limite, che è una varietà irriducibile o riducibile di dimensione esattamente uguale a d.

Sia ε un ramo *lineare* di S_r avente l'origine in un punto generico O di una componente irriducibile della varietà limite e non tangente ivi a questa. Se una V_d omologa di un punto di δ abbastanza prossimo a P^{o}, incontra esattamente il ramo ε in ν punti distinti (intersezioni semplici della V_d variabile con ε), si dice che quella componente è ν-pla per la varietà totale, e ν uguaglia la molteplicità d'intersezione in O delle forme del sistema limite di H, supposto che attorno ad O esso definisca soltanto i punti della varietà limite.

Poichè questo punto di vista dinamico si trasporta senz'altro (ved. in proposito la mia Memoria citata in Math. Zeitschrift, 1950) alle varietà analitiche, quali interferenze di ipersuperficie analitiche (rappresentate da equazioni olomorfe in un certo campo), ne segue subito *l'invarianza del coefficiente* ν *per trasformazioni pseudoconformi dell'intorno* di P^{o}. E da questo, alla sua volta, segue agevolmente che la conclusione è altresì riferibile al caso in cui il sistema irriducibile Σ, invece di appartenere allo S_r, ha per ambiente una qualsiasi varietà algebrica M_r irriducibile, non singolare.

Così *resta fissato nella sua completa generalità il significato dei coefficienti interi che compaiono nelle componenti di una varietà totale, limite di una varietà semplice irriducibile.*

Naturalmente può accadere che la varietà totale limite possa dipendere dalla scelta del ramo δ di origine P^{o} su T. Ciò avviene allora e soltanto allora che il sistema limite possegga un'interferenza (pura o impura) di dimensione $>$ d. E allora si hanno infinite varietà totali del sistema, aventi per imagine lo stesso P^{o}.

L'ordine di una varietà totale, somma dei prodotti degli ordini delle componenti, per la molteplicità di ciascuna di queste, è uguale all'ordine della V_d generica.

Tutto quanto precede, come ho più volte spiegato, permette di definire il simbolo virtuale $[V_d, W_{r-d}]$ d'intersezione di una V_d variabile in Σ con una varietà W_{r-d} di dimensione complementare entro l'ambiente S_r o M_r e fornisce in ultima analisi il principio della conservazione del numero.

Insomma tutto lo sviluppo della geometria algebrica classica poggia, come ho ricordato in principio, sul concetto di varietà intersezioni semplici e multiple.

Osservazione. Risulta da quanto precede, che il simbolo νV non ha significato in sè, ma o in relazione con un sistema di equazioni (1), considerato dal punto di vista delle M.I., oppure quale componente della varietà totale limite d'una varietà a componenti semplici mobile (entro la varietà ambiente) in un sistema algebrico irriducibile.

Pertanto, l'invarianza per trasformazioni birazionali (o pseudoconformi) vale a condizione che il simbolo della varietà trasformata venga definito cogli enti trasformati di quelli che definiscono νV.

Varietà base e loro prime proprietà.

4. *Le varietà base.* — Consideriamo le varietà nella terza accezione. Bisogna anzitutto definire con precisione che cos'è una varietà base.

Sia W una varietà semplice (n. 2), pura o impura. Imaginiamo l'insieme dei rami analitici — li diremo i *rami* γ — appartenenti ad S_r. Ad ogni γ sia associato un intero $i \geqslant 0$; e sia $i = 0$ se l'origine di γ è fuori di W; $i = +\infty$ se γ giace per intero in qualche componente irriducibile di W.

Diremo che l'insieme delle coppie (γ, i) costituisce un *comportamento* c *delle forme di* S_r *lungo* W (e *soltanto* lungo W) se sono soddisfatte le condizioni seguenti:

1) Esiste un insieme K di forme passanti per W, aventi con ogni γ, nella rispettiva origine, M.I. $\geqslant$ i.

2) Scelto comunque γ, di origine O, fra le forme di K ve n'è qualcuna, che ha con γ in O esattamente la M.I. i.

L'associazione della varietà semplice W *col comportamento* c *definisce una varietà base* (W, c).

Dimensione di (W, c) è la dimensione di W, cioè la massima dimensione delle componenti di W.

Il numero i associato a γ nel comportamento c si chiamerà anche *molteplicità d'intersezione di* γ *con la varietà base* (W, c), *nell'origine di* γ.

Un'osservazione complementare importante nei riguardi di queste definizioni, è che gli enti c e (W, c) restano immutati se all'insieme K si sostituisce un insieme K' di forme soddisfacente ancora alle 1), 2), e ciò perchè l'insieme delle coppie (γ, i) resta invariato.

Ogni forma appartenente ad un insieme come K, K', ..., si dirà che *passa per la varietà base* (W, c) o che *contiene* (W, c) o che *appartiene* a (W, c).

Dimostriamo che:

I. *La totalità delle forme passanti per la varietà base* (W, c) *costituisce un ideale* (un H-ideale).

Anzitutto è chiaro che l'insieme di tutte le forme aventi coi γ, nelle rispettive origini, M.I. $\geqslant$ i, costituisce un ideale (essendo soddisfatte le condizioni che definiscono un ideale entro l'anello delle forme di S_r). Quest'ideale contiene ogni insieme, come K, K'..., soddisfacente alle 1), 2), epperò esso medesimo soddisfa alle 1), 2). Pertanto le sue forme son tutte e sole quelle che appartengono a sistemi del tipo K, K', ...; cioè tutte e sole le forme passanti per (W, c). Resta così dimostrata la proprietà I.

L'ideale delle forme passanti per (W, c), in quanto è individuato da (W, c), ossia da ogni insieme del tipo $K, K', \ldots$, s'indicherà col simbolo $\mathcal{J}(W, c)$.

Un qualsiasi insieme K, soddisfacente alle 1), 2), sta in un ideale (minimo) $\mathfrak{J}$ congiungente le sue forme, il quale alla sua volta appartiene ad $\mathcal{J}(W, c)$, massimo comun divisore di tutti gli $\mathfrak{J}$. Perciò si dirà che $\mathcal{J}(W, c)$ è l'*ideale completo individuato da* (W, c) [11]. Si dirà pure che $\mathfrak{J}$ o $\mathcal{J}(W, c)$ *aderiscono* a (W, c).

In forza del teorema della base di HILBERT [12] ciascuno degl'ideali $\mathfrak{J}$ o $\mathcal{J}(W, c)$ ammette una base finita (l'anello di tutte le forme di S_r è noetheriano).

Non esiste in $\mathfrak{J}$ nè in $\mathcal{J}(W, c)$ *nessuna* forma avente con *ogni* γ, nella rispettiva origine, M.I. esattamente uguale ad i. P. es. se φ è una forma dell'ideale, e γ un ramo di origine O, tracciato in φ (ma non in W), la M.I. di φ, γ in O, è $+\infty$. Per contro, per ogni γ di origine O esistono certo in $\mathfrak{J}$ o in $\mathcal{J}(W, c)$ forme aventi con γ, in O, M.I. $i+1, i+2, \ldots$: p. es. i prodotti di una forma φ di $\mathfrak{J}$ o di $\mathcal{J}(W, c)$, soddisfacente alla 2), per forme passanti semplicemente, doppiamente... per O (senza toccare γ).

Diremo in conseguenza che l'insieme delle forme passanti per (W, c) ha lungo W il comportamento *effettivo* c; mentre una determinata φ di quelle forme, ha lungo W il *comportamento virtuale* c, nel senso che si fa astrazione dal fatto che per qualche γ la M.I. di φ, γ è $> i$.

Il teorema I può esser invertito come segue:

II. *Le forme d'un ideale $\mathfrak{J}$ definiscono una varietà base* (W, c), *per cui esse passano.*

Consideriamo, invero, la varietà semplice W, interferenza completa (n. 2) delle forme di $\mathfrak{J}$, ossia insieme dei punti base di $\mathfrak{J}$. Preso un ramo γ qualunque, avente l'origine in un punto O o tutte le forme di $\mathfrak{J}$ contengono γ e allora l'intero i associato a γ è $i = +\infty$; oppure la M.I. delle forme di $\mathfrak{J}$ con γ in O, ammette un minimo $i > 0$ (uguale a zero nel solo caso in cui O non sta in W). Così $\mathfrak{J}$ associa ad ogni γ un intero i. Le forme di $\mathfrak{J}$ costituiscono senz'altro un insieme soddisfacente alle 1), 2). Pertanto le coppie (γ, i) definiscono un comportamento c lungo W e le forme di $\mathfrak{J}$ passano per la varietà base (W, c).

L'ideale $\mathfrak{J}$ non è necessariamente completo; se lo è, coincide con $\mathcal{J}(W, c)$.

I teoremi I e II sono stati stabiliti nell'ipotesi che si tratti d'una W e d'un ideale di dimensione $d > 0$. Ma un ideale di forme di S_r può essere considerato anche se le sue forme non hanno alcun punto comune. L'ideale è allora un cosidetto *ideale banale* [13]. Riguarderemo un tal ideale come una *varietà base vuota*, la quale non è dunque un ente distinto dall'ideale stesso. Concludendo:

III. *Tra le varietà base e gl'ideali completi di forme di S_r si può stabilire una*

(11) L'ideale completo non è che l'*ideale massimo* (M.A.G., pp. 16, 83) dell'insieme degl'ideali aderenti a (W, c).

(12) Ved. p. es. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, II. Teil, p. 23; oppure M.A.G., p. 17.

(13) O T-*ideale*, ved. M.A.G., p. 54.

corrispondenza biunivoca, associando ad ogni varietà base l'ideale completo delle forme che passano per essa.

Ad ogni ideale, anche non completo, corrisponde una sola varietà base; a questa corrispondono infiniti ideali non completi di forme, passanti per essa.

Una varietà base ed un ideale corrispondenti hanno la stessa dimensione. Agli ideali banali corrispondono le varietà base vuote.

Se λ è il minimo ordine delle forme d'un ideale $\mathcal{J}$ aderenti ad una (W, c), le forme d'un ordine prefissato $l \geqslant \lambda$ costituiscono un sistema lineare Σ_l avente la varietà base W (ed eventualmente avente altri punti base).

E' poi facile verificare che si può scegliere un $\lambda_0 \geqslant \lambda$ tale che il sistema Σ_l delle forme di un dato ordine $l \geqslant \lambda_0$ appartenenti a $\mathcal{J}$, costituiscano un insieme del tipo K, soddisfacente cioè alle 1), 2).

Sia invero $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_h$ una base di $\mathcal{J}$, talchè $\mathcal{J}$ è l'ideale $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_h)$ congiungente di $(\varphi_1), (\varphi_2), \dots, (\varphi_h)$. Scelto comunque un ramo γ di origine O, ciascuna delle $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_h$ ha con γ, in O, M. I. $\geqslant i$; ma certamente v'è qualcuna delle h forme per cui la M. I. è esattamente i, se no per ogni forma di $\mathcal{J}$ la M. I. sarebbe $> i$, contrariamente alla 2) ($i = +\infty$ se γ sta in tutte le φ). Mutando γ, può mutare la forma tra le $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_h$; ma ad ogni modo, se λ_0 è un intero maggiore degli ordini di tutte le $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_h$, in $\mathcal{J}$ vi è sempre qualche forma di ordine $l \geqslant \lambda_0$ soddisfacente alla 2), sicchè le forme $\mathcal{J}$, d'ordine $l \geqslant \lambda_0$, costituiscono un sistema soddisfacente allle 1), 2). Concludendo:

IV. *Sia $\mathcal{J}$ un ideale (completo o no) aderente ad una varietà base* (W, c). *Le forme di $\mathcal{J}$, d'ordine abbastanza alto, costituiscono un sistema lineare soddisfacente alle 1), 2), mediante il quale dunque può definirsi* (W, c), *senza ricorrere a tutte le forme dell'ideale.*

Naturalmente il sistema Σ_l è certo completo se lo è l'ideale considerato, cioè se $\mathcal{J} = \mathcal{J}$ (W, c). Il caso in cui $\mathcal{J}$ non è completo verrà esaminato nel n. 9, nei riguardi della completezza o meno di Σ_l.

Chiamando *generica* una forma d'ordine l d'un ideale $\mathcal{J}$ aderente a (W, c) quando è generica entro il sistema lineare Σ_l delle forme di ordine $l \geqslant \lambda_0$, contenuto in $\mathcal{J}$, si può dire che:

Dato un ramo γ qualunque, d'origine O, *una generica forma di ordine* l *abbastanza grande* ($l \geqslant \lambda_0$) *passante per* (W, c) *ha con γ in* O *esattamente* M.I. *uguale ad* i.

Invero, siccome nella base $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_h)$ del dato ideale $\mathcal{J}$, c'è una forma almeno, avente con γ, in O, M.I. uguale ad i, le forme del tipo $a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \dots + a_h \varphi_h$ — ove $a_1, a_2, \dots, a_h$ son forme variabili di ordini tali che la combinazione lineare considerata sia una forma di un certo ordine $l \geqslant \lambda_0$ — soddisfacenti alla condizione di avere con γ, in O, M.I. $> i$, sono particolari, in quanto i coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_h$ soddisfanno a certi legami algebrici (non identicamente soddisfatti).

Questi legami s'ottengono sostituendo nelle $a_1, a_2, \dots, a_h; \varphi_1 \varphi_2, \dots, \varphi_h$, al posto delle coordinate omogenee correnti, i loro sviluppi in serie d'un medesimo parametro t (convergenti in un intorno di $t = 0$, valore corrispondente ad O) ed esprimendo che l'esponente minimo di t nella serie di potenze risultante è $t + 1$ (almeno).

Se $1 < \lambda_o$ *può darsi che ogni forma del dato ideale* $\mathcal{J}$ *aderente a* (W, c) ***abbia, con qualche*** γ, ***nell'origine rispettiva,* M.I.** $> i$.

P. es. questo avviene quando le forme d'un ordine dato $1 < \lambda_o$ appartenenti ad $\mathcal{J}$, hanno in conseguenza una varietà ulteriore comune appoggiata a W nel punto O, origine di γ.

Osservazione 1ª. Nel libro M. A. G. citato, W. Gröbner [14] identifica in sostanza il concetto di varietà algebrica con quello di ideale di forme. Ma il tentativo di associare nel tempo stesso ad un ideale un concetto geometrico di varietà algebrica, si limita, come s'è detto, a qualche spunto elementare euristico, concernente essenzialmente il caso in cui alle forme dell'ideale è prescritto il passaggio per una W e per punti di primo ordine infinitamente vicini a punti della W concepita quale « Nullstellengebilde [15]. Cosa che può farsi ovviamente, in questo caso elementare, senza uscire dal dominio algebrico, poichè un punto infinitamente vicino di 1° ordine può identificarsi con un elemento lineare ossia con una direzione, che è un'entità rientrante ovviamente nel dominio algebrico [16].

La nostra definizione dei comportamenti evita la difficoltà dei punti base infinitamente vicini e fornisce l'imagine geometrica di un qualunque H-ideale [17].

La M.I. d'un ramo γ, relativo ad un punto O di W, con una forma generica di un ideale (completo o no) $\mathcal{J}$ aderente a W (che è poi, come si è visto, la minima fra le M.I. di γ in O con una qualunque forma dell'ideale), si chiamerà pure *molteplicità*

(14) M.A.G., p. 81 e segg.

(15) M.A.G., p. 36. (Una « Nullstellengebilde » » non è altro che una varietà algebrica semplice considerata quale interferenza). Del resto lo stesso Gröbner non attribuisce alle proprie osservazioni che il valore di accenni preliminari.

(16) Tale osservazione, sul carattere ristretto della definizione, di cui stiamo parlando, è stata già fatta da I. S. Cohen nella recensione di M.A.G., apparsa in Math. Rewiews, july-august 1950, p. 356; e da A. Seidenberg nella recensione dell'opera stessa in Bullettin of the American Mathematical Society, january 1951. Il Seindenberg scrive testualmente: « The AM (algebraische Mannigfaltigkeiten nel senso di Gröbner) of an ideal is to consist, namely of its NA (Nullstellengebilde) together with certain « infinitely near » loci. But the author does not go beyond a few suggestive remarks, and the main work on the idea remains to be carried out, *if it can be at all* » (L'ultima sottolineatura è nostra. La presente ricerca mostra appunto che la desiderata geometrizzazione degli ideali è possibile).

(17) La nozione di punti base infinitamente vicini, allo stato delle cose, può usarsi in modo rigoroso soltanto per gruppi base del piano. Ved. Severi, *Trattato di geometria algebrica*, Bologna, Zanichelli, 1926, vol. I, pagg. da 324 a 332 del detto volume. Con qualche accurato complemento la nozione può altresì riferirsi a gruppi base (costituiti da punti e linee multiple) per superficie dello spazio ordinario. L'introduzione rigorosa delle singolarità infinitamente vicine, da aggiungersi, quali costellazioni, alla varietà interferenza W, per farne derivare (W, c), potrebbe tentarsi in generale (se fosse necessario, ma qui non lo è) usufruendo dell'estensione d'una formula di Noether, indicata di seguito oppure coi mezzi della teoria degl'ideali, come ha fatto Zariski per le superficie (American Journal of math., 1938). L'estensione della formula di Noether, cui s'allude, è quella esprimente la M.I. i d'un ramo γ, di origine O, con una forma φ, passante per O, mediante le molteplicità di O per γ e per φ e le molteplicità di punti successivi ad O comuni a γ e a φ (punti che son necessariamente in numero finito). Se r, s son le molteplicità di O per γ, φ ed r_1, s_1; $r_2, s_2; \ldots; r_t, s_t$ le molteplicità rispettive nei punti successivi comuni $O_1, O_2, \ldots, O_t$, risulta $i = rs + r_1 s_1 + \ldots + r_t s_t$.

d'intersezione del ramo γ col dato ideale, nella propria origine. E' la definizione gemella di quella che definisce la M.I. di γ con la varietà (W, c) associata ad $\mathcal{J}$ (n. 4).

I rami γ d'origine O, inerenti a W, si distribuiscono in classi, ciascuna d'infiniti rami, che hanno nell'intorno di O la medesima successione di punti multipli infinitamente vicini per ognuno di quei γ e per la forma generica, di ordine sufficientemente alto dell'ideale; ossia la medesima M.I.

Osservazione 2ª. Supposto (senza essenziale restrizione) che il punto O di W sia al finito, si può passare a coordinate non omogenee e considerare il corpo delle funzioni razionali quozienti di coppie di polinomi del dato ideale associato a (W, c). L'ordine di ciascuna di queste in O, sopra il ramo γ, ossia la differenza tra le M.I. del numeratore e del denominatore, dà luogo ad una *valutazione*. Nel nostro studio tuttavia non occorrono le proprietà della teoria delle valutazioni.

Osservazione 3ª. L'insieme dei numeri interi i, *che entrano in giuoco nella definizione d'un comportamento* c, *è illimitato,* anche se ci si limita a considerare rami γ non contenuti in W. Si può, invero, dato un qualunque intero N, costruire un ramo γ, relativo ad una data W, avente l'origine in un punto O di questa e non tracciato ivi, il quale abbia con W in O un contatto d'ordine $> N$; oppure assumere per γ un ramo di ordine $> N$. Per un tal ramo risulta $i > N$.

Vi sono però casi in cui i resta definito dalla sola conoscenza d'una classe di rami, cui son associati interi non superiori a un certo limite (ved. i successivi nn. 7,10).

E' possibile definire un qualunque comportamento c *mediante un numero finito di classi di rami* γ, *a ciascun dei quali spetti il medesimo intero?*

Sembra che la risposta affermativa a questa domanda equivalga alla dimostrazione della possibilità di sciogliere le singolarità infinitamente vicine addensate attorno alla varietà base (come lo fa presagire la formula citata di Noether). Comunque, ai nostri fini, non è necessario conoscere la risposta a questa domanda. Si può aggiungere che, se pure la risposta è affermativa, i soli rami lineari (cioè d'ordine 1) non posson bastare per la definizione di ogni comportamento, perchè è ben noto che esistono successioni di punti multipli infinitamente vicini, che si susseguono soltanto su rami d'ordine abbastanza elevato.

Uguaglianze, disuguaglianze, operazioni tra varietà base.

5. *Comportamenti e varietà comparabili. Uguaglianze e disuguglianze.* Data una varietà semplice W, sieno c, c' due comportamenti sopra W. Se le coppie (γ, i), (γ, i') di c, c', relative ad un medesimo ramo γ, soddisfanno tutte, qualunque sia γ, alla disuguaglianza $i \geq i'$; oppure tutte alla disuguaglianza $i \leq i'$, i comportamenti c, c' e le (W, c), (W, c') si dicono *comparabili.*

Esistono varietà base (W, c), (W, c') *inerenti alla medesima varietà semplice* W *e non comparabili.* Eccone un esempio banale. W sia una curva algebrica sghemba irriducibile; c sia la condizione di semplice passaggio per W delle superficie dello spazio (ved. il successivo n. 7), con l'aggiunta della condizione di contatto della superficie medesima, con un dato piano α tangente a W nel punto semplice O; c' sia la condizione analoga, relativa però ad un altro punto semplice O' di W e ad un piano ivi tangente α'. Per un ramo lineare γ di origine O, tangente ad α in O, ma non a W, è $i=2$, $i'=1$; sicchè per quel γ è soddisfatta in O la $i > i'$. Per un ramo γ di origine O', tangente ad α' in O', ma non a W, è invece $i=1$, $i'=2$, sicchè per quel γ è soddisfatta in O' la $i < i'$. Epperò c, c' non son comparabili.

Supposto che c, c' sieno comparabili e che sempre risulti $i \geqslant i'$, esistendo qualche γ per cui $i > i'$, diremo che il comportamento c *contiene* c', in simboli $c \supset c'$; e che c' è *contenuto* in c, in simboli $c' \subset c$. L'uso delle voci del verbo «contenere» è giustificato da ciò che, nel caso in esame, il sistema di equazioni lineari, esprimenti il passaggio d'una forma di dato ordine per la varietà (W, c), comprende il sistema di equazioni lineari esprimenti il passaggio per (W, c').

Se poi per ogni γ è sempre $i=i'$, il comportamento c è *uguale* (anzi *identico*) al comportamento c'. E si scrive $c=c'$. Allora risulta (W, c) identica a (W, c').

Quando $c \supset c'$ si dice pure che la varietà base (W, c) *contiene* la varietà base (W, c'); e questa *è contenuta* in quella; e si scrive $(W, c) \supset (W, c')$ oppure $(W, c') \subset (W, c)$. L'uso delle voci del verbo «contenere» in questo caso vien illuminato dalla considerazione, sia pure intuitiva, delle singolarità infinitamente vicine, che, a guisa di costellazioni si addensano lungo W, in conseguenza dei comportamenti c, c'; chè, se $c \supset c'$, le singolarità componenti (W, c) comprendono, almeno virtualmente, quelle componenti (W, c'); epperò (W, c), come insieme di punti distinti e infinitamente vicini, contiene (W, c'). Tale considerazione non ha alcuna funzione nelle nostre ulteriori deduzioni. E' esposta qui soltanto pel suo valore suggestivo.

I segni $=, \supset, \subset$ applicati a comportamenti ed a varietà base comparabili, hanno gli stessi caratteri dei segni $=, >, <$ tra numeri reali.

Nei riguardi degl'ideali completi $\mathcal{J}(W, c)$, $\mathcal{J}(W, c')$ aderenti a W, W', si vede ch'essi son comparabili se, e soltanto se, son comparabili c, c'. E invero, se $c \supset c'$, ogni forma di $\mathcal{J}(W, c)$, la quale ha con un dato γ, nell'origine, M.I. $\geqslant i$, ha in conseguenza con γ, M.I. $> i'$; epperò appartiene a $\mathcal{J}(W, c')$; e d'altra parte una forma di $\mathcal{J}(W, c')$, che abbia esattamente con γ, la M.I. $i' < i$, *non* appartiene ad $\mathcal{J}(W, c)$, sicchè:

$$\text{se } c \supset c' \quad , \quad \text{è } \mathcal{J}(W, c) \subset \mathcal{J}(W, c').$$

6. *Somme e intersezioni di varietà base.* Sieno (W, c), (W', c') due date varietà base. L'ideale somma dei due ideali completi $\mathcal{J}(W, c)$, $\mathcal{J}'(W', c')$, che è il luogo dei sistemi lineari congiungenti i sistemi lineari Σ_l, Σ'_l delle forme di ordine l, via via crescente, appartenenti ad $\mathcal{J}(W, c)$, $\mathcal{J}'(W', c')$, definisce (n. 4) una varietà base, i cui punti costituiscono la varietà semplice $W \cap W'$ interferenza di W, W', e su questa definisce un comportamento che indicheremo con cc' e chiameremo *prodotto* dei dati comportamenti c, c'.

La varietà $(W \cap W', cc')$ è la *varietà base intersezione delle due date* e s'indica pure con $(W, c) \cap (W', c')$.

Una forma, passante per la varietà base interferenza, possiede con ogni γ M.I. non minore del minore dei due numeri i, i' associati a γ in c, c'. La minima M.I. che cc' associa a γ, se $i \geq i'$, è i' (e ciò vale anche se $i=0$ o $i'=0$).

Pertanto, se $W=W'$, cosicchè $W \cap W'=W=W'$ e i comportamenti c, c' son comparabili, p. es. se $c \supset c'$, risulta $cc'=c'$. Se $W \subset W'$, risulta $W \cap W'=W$.

L'ideale $\mathcal{J}(W, c)+\mathcal{J}'(W', c')$, che definisce la varietà base intersezione non è necessariamente completo. Ecco un semplice esempio in proposito [18].

Consideriamo in S_3 una quartica di 2ª specie W e un piano W', che la seghi in 4 punti distinti. Sieno $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}'$ rispettivamente l'ideale delle superficie passanti per W e l'ideale delle superficie contenenti come parte W'. L'ideale $\mathcal{J}+\mathcal{J}'$, che definisce la varietà base intersezione delle W, W', ossia la quaderna Q dei punti $W \cap W'$, non è completo, perchè le superficie di 2° ordine appartenenti ad $\mathcal{J}+\mathcal{J}'$ sono ∞^4, mentre quelle che passan per Q sono ∞^5.

Ciò non esclude che $\mathcal{J}(W, c)+\mathcal{J}'(W', c')$ possa essere completo quando si limiti inferiormente, in modo opportuno, l'ordine delle sue forme (ved. in proposito il successivo n. 9).

Passiamo a definire la *somma delle due varietà base* (W, c), (W', c'), che indicheremo col simbolo $(W, c)+(W', c')$ o $(W+W', c+c')$. Essa non è che la varietà base determinata dell'interferenza $\mathcal{J}(W, c) \cap \mathcal{J}'(W', c')$ dei due ideali completi delle forme passanti per (W, c), (W', c') ossia il luogo delle intersezioni dei sistemi lineari Σ_l, Σ'_l.

L'insieme dei punti di questa varietà base è la varietà semplice $W+W'$; il comportamento lungo questa lo chiameremo la *somma* dei comportamenti c, c' e lo indicheremo col simbolo $c+c'$.

Una forma passante per $(W+W', c+c')$ associa ad ogni γ, ad essa relativo, il maggiore dei due interi i, i' (e ciò vale anche per $i=0$ o $i'=0$).

Se $W=W'$, cosicchè $W+W'=W=W'$ e i comportamenti c, c' son comparabili, p. es. $c \supset c'$, risulta $c+c'=c$. Se $W \subset W'$, risulta $W+W'=W'$.

L'ideale $\mathcal{J}(W, c)+\mathcal{J}'(W', c')$ è completo, perchè l'intersezione di due sistemi lineari completi Σ_l, Σ'_l è un sistema lineare completo.

L'ideale che definisce la varietà base interferenza è il *massimo comun divisore* di $\mathcal{J}(W, c)$, $\mathcal{J}'(W', c')$; quello che definisce la varietà base somma, ne è il *minimo comune multiplo*.

Osservazione. Prima di terminare questo n. ricorderò che due volte in passato, nel 1908 [19] e nel 1933 [20], ebbi ad occuparmi di concetti del genere di quelli qui introdotti (benchè con linguaggio un po' diverso).

(18) Che trovasi nei miei *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*. Rend. del Circolo mat. di Palermo, 1909, n. 3.

(19) Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. 43, 1908 (Lettera di F. Severi ad E. Bertini).

(20) *Ueber die Grundlagen der algebraischen Geometrie*, ved. p. es. il I vol. delle mie *Memorie scelte*, p. 217 e segg.

La prima volta definii in S_r la varietà base $(W \cap C, \delta)$ intersezione di una varietà base (W, c) e della varietà base $(C, 1)$ (ved. n. 7) determinata dalle forme passanti per una curva irriducibile C di S_r ;essendo $P = W \cap C$ un punto interferenza di W e di C. Il comportamento δ associato a P, per definire $(W \cap C, \delta)$, è determinato dalla minima i delle molteplicità d'intersezione con C, in P, di una forma di ordine abbastanza alto appartenente a (W, c). (Chiamai allora i la molteplicità d'intersezione di (W, c), $(C, 1)$ in P).

La seconda volta definii la *molteplicità d'intersezione in un punto* P, *interferenza di due varietà* V , W *dello* S_r (varietà nel significato classico, cioè semplici) *allor chè la somma* $h+k$ *delle loro dimensioni è minore della dimensione* r *dell'ambiente* (²¹).

Se P fa parte di una varietà Z_t, di dimensione $t \geqslant 0$, comune agl'intorni di P sopra V_h, W_k, ci si riduce anzitutto al caso di un'intersezione isolata, segando le due varietà con un S_{r-t} generico per P. Quando P è isolato, la M.I. in P non è che la M.I. nel punto isolato P', proiezione di P, delle varietà V'_h, W'_k proiezioni di V_h, W_k da un $S_{r-\varrho-1}$ generico di S_r sopra S_ϱ $(\varrho = h+k)$. A questa definizione si può dare un altro aspetto (indicato nella mia Memoria del 1933) che qui non interessa di riferire, il quale tuttavia ha il vantaggio di mostrare a priori l'invarianza del concetto per trasformazioni pseudoconformi dell'intorno di P.

In particolare P è *intersezione semplice delle* V_h, W_k quando V, W, Z passan per P semplicemente, avendo ivi come sole tangenti comuni le rette uscenti da P e situate nello S_t tangente in P a Z (nessuna tangente è comune, se $t = 0$).

Varietà base semplici e loro proprietà.

7. *Varietà base semplici.* C'è un caso notevole, di frequente applicazione nello sviluppo classico della geometria algebrica, in cui le tre accezioni di varietà algebrica confluiscono in una sola. Di esso ci occupiamo in questo n.

Sia, in S_r, la varietà semplice W ed $\mathcal{J}$ un ideale, che definisca lungo W il comportamento c, ossia la varietà base (W, c). Scelto un punto qualunque O di W, le coppie (γ, i) inerenti ai rami γ di origine O, definiscono il comportamento (O, c) subordinato da (W, c) nel punto O di W. Il comportamento (O, c) si dirà *unitario* e s'indicherà con $(O, 1)$ od anche soltanto con 1, se per tutti i rami *lineari* γ, di origine O, non tangenti in O a W, è $i = 1$.

Condizione necessaria e sufficiente perchè il comportamento subordinato da (W, c) *nel punto semplice* O *di* W *sia unitario, è che le forme di* $\mathcal{J}$ *abbiano in* O *un'intersezione semplice.*

(²¹) Non è dunque esatto quanto trovasi in proposito in una recente Nota di Gröbner, *Über den Multiplizitätsbegriff in der algebraischen Geometrie*, Mathematische Nachrichten, 1950-51, p. 194, che « die algebraische Geometrie darf auch nicht in Verlegenheit geraten, wenn ihr etwa die Frage gestellt wird, mit welchen Multiplizität sich zwei Raumkurven in ihren eventuellen gemeinsamen Treffpunkt schneiden! ».

Invero, se per un ramo lineare γ, non tangente in O a W, è $i=1$, una generica forma di $\mathcal{Y}$, d'ordine abbastanza alto, ha con γ, in O, M.I. uguale ad 1 (n. 4); epperò passa semplicemente per O, senza toccare γ. Le forme di $\mathcal{Y}$ non possono poi avere in O una tangente comune, che non tocchi ivi W, perchè se no per un ramo lineare γ, di origine O, tangente ivi a questa retta e quindi non tangente a W, sarebbe $i>1$, contro il supposto. Dunque O è intersezione semplice delle forme di $\mathcal{Y}$.

Viceversa, se O è intersezione semplice di queste forme, una forma variabile nel sistema lineare (2) (n. 3), supposto che le $f_1, f_2, \ldots, f_h$ costituiscan la base di $\mathcal{Y}$, passa per O semplicemente e non tocca un prefissato ramo lineare γ, non tangente a W nel punto semplice O; epperò ha con γ M.I. uguale ad 1. Ogni forma di (2) ha poi con γ M.I. $\geqslant 1$. Pertanto 1 è l'intero associato a γ da $\mathcal{Y}$.

Il teorema dimostrato chiarisce che la definizione di M.I. di più forme in un punto comune, contenuta, sotto la più ampia ipotesi, nella mia Memoria citata del 1948, è quella che naturalmente s'impone.

Dimostriamo ora che:

L'ideale delle forme passanti per una data varietà semplice W, *definisce ivi un comportamento* c, *il quale subordina in ogni punto semplice di* W *il comportamento unitario.*

Basta all'uopo constatare che le forme di ordine l, abbastanza grande, passanti per W, hanno in ogni punto semplice di W un'intersezione semplice.

Proiettiamo perciò ogni componente di W, che abbia la dimensione h ($<$ alla dimensione di W) da un S_{r-h-1} generico, sicchè la proiezione sarà una forma conica dello stesso ordine della componente. Questa forma passa semplicemente per ogni punto semplice O della componente e, variando il centro di proiezione, non conserva alcuna sua tangente fissa, all'infuori di quelle che toccano in O la componente medesima.

Fatta la somma delle generiche forme coniche proiettanti le singole componenti, si ottiene una forma variabile d'ordine m uguale all'ordine di W, la quale passa semplicemente per W non avendo in un punto semplice di W tangenti fisse diverse da quelle di W. Lo stesso accade d'una forma variabile d'ordine $m+1$ passante per W, perchè esiste una forma variabile di quest'ordine soddisfacente alle predette condizioni, la quale è spezzata nella precedente forma variabile di ordine m e in un iperpiano variabile; e così risalendo da $m+1$ ad $m+2$, ecc. Si conclude pertanto che le forme di ordine $l \geqslant m$ passanti per W soddisfanno alle condizioni enunciate, cioè hanno un'intersezione semplice in ogni punto semplice di W.

Inoltre le forme di ordine $l \geqslant m$ passanti per W non hanno punti comuni fuori di W, perchè le forme coniche proiettanti le singole componenti di W non hanno punti base fuori della componente che ciascuna di esse proietta.

La varietà (W, u), cui spetta il comportamento u subordinato su W dall'ideale completo delle forme passanti per W, si chiamerà una *varietà base semplice*. Essa è definita dalla *sola condizione di passaggio* per W imposta alle forme di S_r e subordina in ogni punto semplice di W il comportamento unitario.

Nulla si sa del comportamento subordinato da (W, u) in un punto singolare P di W, che può essere un punto multiplo d'una componente di W o un punto comune a due componenti (o aver le due qualità insieme).

Il comportamento subordinato da (W, u) in P è determinato dalla condizione stessa che definisce (W, u), ossia dalla sola condizione di passaggio per W; non è cioè in nostro arbitrio di assegnarlo.

Ciò non impedisce che nell'ideale completo $\mathcal{J}(W, u)$ — che indicheremo più brevemente, in questo caso, con $\mathcal{J}(W)$ — si possa considerare un sottoideale di forme, il quale definisca in ogni punto semplice di W il comportamento 1 ed in punti singolari di W comportamenti maggiori del comportamento ivi determinato da $\mathcal{J}(W)$.

Pertanto il comportamento u è il *minimo comportamento* tra quelli definiti su W da sottoideali di $\mathcal{J}(W)$; e (W, u) *è la varietà base minima tra quelle che subordinano in ogni punto semplice di* W *il comportamento unitario.*

Facciamo un esempio.

Sia W *una varietà irriducibile di* S_r. *Se* W *non ha punti multipli,* $\mathcal{J}(W)$ *subordina in ogni punto di* W *il comportamento unitario e* W *è nello stesso tempo varietà base semplice* (W, u), *varietà interferenza delle forme di* $\mathcal{J}(W)$ *e intersezione semplice delle forme stesse.*

Se W *ha punti multipli,* $\mathcal{J}(W)$ *subordina in ogni punto semplice di* W *il comportamento unitario e in ogni punto singolare di* W *il comportamento minimo fra quelli ivi determinati dai sottoideali di* $\mathcal{J}(W)$. *La* W, *interferenza delle forme di* $\mathcal{J}(W)$, *dà luogo alla varietà semplice* (W, u) *ed è intersezione generalmente semplice delle forme di* $\mathcal{J}(W)$.

Se O è un punto singolare di W e s'impone p. es. alle forme di $\mathcal{J}(W)$ di passare per O con una molteplicità maggiore di quella con cui vi passa la generica forma di $\mathcal{J}(W)$, si separa da quest'ideale completo un sottoideale, che definisce lungo W un comportamento maggiore di quello definito da $\mathcal{J}(W)$.

Così, se W è una curva sghemba irriducibile, con un punto doppio nodale O, l'ideale $\mathcal{J}(W)$ consta di superficie passanti per W, le quali si toccan necessariamente in O; ad esse si può imporre p. es. la condizione di passare per O doppiamente e si ha una varietà maggiore. Se O è un punto triplo, triplanare per W, le superficie dello ideale $\mathcal{J}(W)$ passan per O doppiamente; ecc., ecc.

Sussiste inoltre il teorema (conseguenza ovvia di note proprietà):

VI. *Le forme passanti per una* W *irriducibile formano un ideale primo completo; e, viceversa, l'interferenza delle forme di un ideale primo è una varietà irriducibile* W *e le forme dell'ideale sono tutte e soltanto quelle che passano per* W. *Cosicchè un ideale è completo pel solo fatto di esser primo* ([22]).

([22]) E' opportuno ricordar qui (per comodità dei lettori che hanno meno familiarità con l'algebra astratta) le nozioni, che occorrono anche nel seguito, d'*ideale primo* (VAN DER WAERDEN, *Moderne algebra*, II. Teil, p. 31; M.A.G., p. 72), d'*ideale primario* (v. d. W. loc. cit., p. 31; M.A.G., p. 72), d'*ideale irriducibile* (v. d. W., loc. cit., p. 36; M.A.G., p. 75). Un ideale, entro un anello ambiente, è primo quando il prodotto di due elementi dell'anello non può appartenere all'ideale senza che vi appartenga almeno uno dei fattori; è primario quando il prodotto stesso non può appartenere all'ideale senza che vi appartenga una qualche potenza di uno almeno dei fattori; è irriducibile quando non può considerarsi quale intersezione di due suoi divisori propri. Ogni ideale primo è primario e irriducibile. Ogni ideale irriducibile è primario (non necessariamente primo); ma vi sono anche ideali primari riducibili. Un T-ideale è sempre primario, perchè una potenza abbastanza elevata di una forma qualunque appartiene ad esso, a norma del citato teorema di Lasker; che suona

La varietà base d'un ideale primo è dunque la varietà base minima associata all'interferenza (irriducibile) delle forme dell'ideale, e queste hanno in ogni punto generico di quest'interferenza molteplicità d'intersezione 1. Pertanto ad ogni ideale primo corrisponde una varietà base semplice minima, irriducibile. Viceversa una tal varietà semplice minima, irriducibile, definisce un ideale primo, sicchè *le imagini geometriche degl'ideali primi son le varietà semplici irriducibili.*

Le componenti irriducibili d'una varietà base.

8. *Il teorema di* Lasker-Noether *nei suoi rapporti con le varietà base.* Come le varietà semplici posson decomporsi in un numero finito di componenti irriducibili, secondo il teorema di Kronecker ricordato nel n. 2, così le varietà base posson decomporsi in varietà più elementari, a norma d'un teorema fondamentale dovuto a Lasker per gli H-ideali e ad Emmy Noether in generale per gli ideali d'un anello noetheriano. Il teorema cui alludiamo [23] si trasporta senz'altro alle varietà base, con l'enunciato seguente:

VII. *Ogni varietà base* (W, c) *può sempre scindersi nella somma di un numero finito di varietà base, i cui ideali sono irriducibili* [24].

Ciascuna delle varietà base associate a ideali irriducibili si dirà alla sua volta *varietà base irriducibile.*

Si può anzi supporre che la predetta decomposizione sia *ridotta,* cioè che:

a) nessun addendo sia contenuto nella somma di altri;

b) che non vi siano mai due addendi inerenti alla medesima varietà semplice (irriducibile).

Poichè ogni ideale primario è relativo ad una varietà semplice irriducibile W, ossia è associato ad un ideale primo le cui forme son definite dal semplice passaggio per W [25], così le componenti non vuote della data varietà base son relative ad un numero finito di varietà irriducibili fra loro distinte, non escludendosi però che taluna di queste possa esser contenuta come varietà subordinata in qualche altra, come ora preciseremo.

---

così: se n_0, n_1, ..., n_h $(h > r)$ son gli ordini delle forme costituenti la base del T-ideale, ogni forma d'ordine $l \geqq n_0 + n_1 + .. + n_h - h$ appartiene all'ideale. Ved. Lasker, *Zur Theorie der Moduln und Ideale*, Math. Annalen, Bd. 60, 1905. Lo stesso teorema fu da me ritrovato, coi metodi della geometria algebrica italiana, nel 1906, nella Nota, *Sopra alcune proprietà dei moduli di forme algebriche*, negli Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino. Un T-ideale è irriducibile soltanto quando la sua base consta di r+1 forme lineari indipendenti (e coincide in tal caso con lo H-ideale unità di tutte le forme di S_r).

[23] Ved. p. es. Van der Waerden, *Moderne Algebra*, II. Teil, p. 39; M.A.G., p. 76.

[24] Non si esclude che uno degli addendi possa essere una varietà base vuota (a T-ideale irriducibile).

[25] Ved. p. es. Van der Waerden, loc. cit., p. 32; M.A.G., p. 73. Le forme dell'ideale primo associate al dato ideale primario son poi caratterizzate dalla condizione che una potenza conveniente di ciascuna appartiene all'ideale primario. L'esponente minimo per cui questa appartenenza si realizza, è l'*esponente caratteristico* dell'ideale primario (M.A.G., p. 74).

Una delle differenze (e non è, come vedremo, la sola) tra il teorema di KRONECKER e il teorema di LASKER-NOETHER deriva appunto da ciò che due varietà base della decomposizione posson provenire da varietà semplici di cui l'una contiene l'altra.

La condizione contemplata nell'enunciato dell'ultimo teorema, che cioè la decomposizione sia ridotta, esclude che nella decomposizione possan esistere due varietà base inerenti alla medesima varietà irriducibile; ma non che una di queste varietà irriducibili, sostegno delle due varietà base, contenga come subordinata l'altra. Quando questo avvenga diremo che la decomposizione di (W, c) in una somma di varietà base, contiene qualche *varietà base immersa;* s'intende con ciò di alludere ad una varietà base inerente ad una varietà irriducibile *subordinata* ad una varietà irriducibile sostegno di un'altra varietà base della decomposizione.

Una varietà base a sostegno irriducibile, non contenuta in un sostegno irriducibile più ampio della nostra decomposizione, dicesi *isolata* [26].

P. es. l'ideale di tutte le superficie dello spazio che toccano un dato piano α nei punti d'una retta a, passando doppiamente per un punto A di a, è un ideale primario (il quadrato di ogni forma nulla in a appartiene infatti all'ideale), che si riduce all'intersezione dell'ideale primario irriducibile delle superficie che toccano α lungo a e dell'ideale primario irriducibile delle superficie aventi il punto doppio A. Quest'ultimo ideale è immerso (nel precedente).

A proposito di questo esempio, si può osservare che la linea base determinata dalle superficie tangenti ad α lungo a, non definisce a quale retta base risultante dalla sovrapposizione di due rette infinitamente vicine. *Una tal frase presa a sè, non ha alcun senso.*

Rette base, distinte fra loro, che da qualche punto di vista possan designarsi con una frase del genere, se ne possono costruire in altri modi. Basta p. es. variare il piano α per a o prendere, invece delle superficie tangenti ad α lungo a le superficie tangenti lungo a ad una data quadrica non specializzata; ecc. [27]. Quel che definisce una retta base è insomma sempre e soltanto il comportamento (o l'ideale) ad essa associato.

Richiamiamo un altro importante concetto. Nella teoria delle varietà intersezione ad ognuna delle componenti dell'interferenza di più forme viene associato un intero (≥ 1): la M.I. delle forme, che definiscono la varietà, in un punto generico della considerata componente (n. 3). Orbene, anche nella decomposizione d'una varietà base in una somma d'ideali primari, ad ogni addendo primario resta associato un ben determinato intero (≥ 1), che è la socidetta *lunghezza* μ *dell'ideale primario* [28].

(26) Ved. p. es. M.A.G., p. 77. Le componenti predette corrispondono agli «isolated primary module» di MACAULAY, indicati in tedesco con le parole «isoliert» e «eingebettet».

(27) Ved. altri esempi in proposito in GAETA, *Nuove ricerche sulle curve algebriche sghembe di residuale finito e sui gruppi di punti del piano*, Annali di Matematica, 1950, p. 5.

(28) Ved. p. es. M.A.G., p. 88. Ricordiamo che una tal lunghezza è il numero dei termini di una serie di composizione del dato ideale primario $\mathcal{J}$ cioè d'una successione d'ideali primari, relativi al medesimo ideale primo, ciascuno dei quali contiene il precedente, essendo $\mathcal{J}$ il primo termine della successione, mentre l'ultimo è l'ideale primo associato, ed in guisa che fra due termini della successione non sia possibile inserire qualche altro ideale primario. Il classico teorema di JORDAN-HÖLDER sulle serie di composizione dei gruppi, opportunamente esteso, mostra che i termini intermedi della successione possono non essere individuati, ma che è in ogni caso individuato il loro numero.

Il numero μ è uguale ad 1, ossia coincide con quello fornito dalla nostra definizione di M.I., soltanto quando si tratta di varietà base irriducibili semplici; allora infatti, e soltanto allora, la lunghezza dell'ideale, che in questo caso è primo, diviene uguale ad 1.

Ma, ciò nonostante, non sarebbe opportuno sostituire all'antico il nuovo concetto di molteplicità, perchè si dovrebbe mutare l'enunciato del novanta per cento dei teoremi di geometria algebrica.

Lo stesso teorema «generale» di Bézout, relativo alle intersezioni di due varietà di dimensioni complementari in uno spazio S_r, trovasi dimostrato in M.A.G. soltanto per l'intersezione di una varietà perfetta (nel senso di Macaulay) con una varietà intersezione completa; e nel libro stesso è indicato un esempio (non però del tutto chiaro) d'una varietà imperfetta per cui il teorema non vale! Bisognerebbe dunque cominciare a mutare l'enunciato di questo teorema, costituente il fondamento rigoroso del principio della conservazione del numero, che non c'è invece alcuna ragione di abbandonare, perchè (fin dal mio primo lavoro in proposito del 1912) se ne conoscono le precise condizioni di validità, che dànno sicura base a innumerevoli proprietà fondamentali di geometria algebrica.

Il teorema generale di Bézout, col complemento indispensabile delle molteplicità d'intersezione, quale fu dimostrato nella mia Memoria del 1933 (citata a pag. 13), rispecchia, in modo talmente fedele, il principio di continuità, bussola d'orientamento di tutte le proprietà algebrico-geometriche valevoli nel corpo complesso, da doversi refutare senz'altro ogni concetto di M.I. che non conferisca piena validità al teorema stesso.

Ma se tale subordinazione del teorema alla continuità può indurre a cercare (per l'estensione di talune proprietà di geometria algebrica a corpi diversi dal corpo complesso) un altro significato di molteplicità, che sia statico e non dinamico, non c'è che da ripetere che il concetto dinamico si può in vari modi trasformare in un concetto statico, senza alterare il valore della molteplicità [28].

Non vi è dunque ragione di crear confusione nell'uso d'una parola consacrata da quasi mezzo secolo, denotando con la medesima un concetto completamente diverso e venendo altresì meno alla proprietà del linguaggio.

La molteplicità d'intersezione ν delle forme che definiscono un ideale primario completo $\mathcal{J}$ appartenente alla varietà irriducibile semplice W, *lungo la varietà stessa, è sempre non minore della lunghezza μ di $\mathcal{J}$.*

Infatti, se l'ideale completo $\mathcal{J}$ è parte propria di un altro ideale completo $\mathcal{J}'$, relativo allo stesso ideale primo, il comportamento delle forme di $\mathcal{J}$ in un punto generico di W è minore del comportamento delle forme di $\mathcal{J}'$ in quel punto, cosicchè passando da un termine della successione di lunghezza μ, cui dà luogo $\mathcal{J}$, ad un termine successivo, la M.I. delle forme dell'ideale nel punto generico di W decresce di un'u-

(28) Ved. la nota (*) a piè della pag. 4 del presente lavoro e Severi, *La géométrie algébrique italienne; sa rigueur, ses méthodes, ses problèmes*, Colloque de Liège, 1949, p. 23; ved. pure P. Samuel, Colloque d'algèbre et théorie des nombres, Paris, 1950, p. 123; nonchè le opportune riflessioni di B. Segre nella recensione di M.A.G. nel Bollettino Un. Mat. Italiana, dicembre 1949, e quelle della recensione già citata di Cohen.

nità almeno, e siccome giunti all'ultimo termine, che è l'ideale primo, si trova la molteplicità d'intersezione (e la lunghezza) uguale ad 1, ne segue $\nu \geqslant \mu$.

Pertanto ad ogni addendo irriducibile d'una decomposizione ridotta d'una varietà base, resta associato una lunghezza, non superiore alla M.I. delle forme appartenenti a quell'addendo nel punto generico della varietà semplice a cui esse aderiscono.

Ma perchè si possa con esatta proprietà di linguaggio riguardare μ quale una « molteplicità » bisognerebbe che per ogni ideale primario fosse possibile costruire un ideale variabile, intersezione di μ ideali di lunghezza 1, cioè primi, in guisa che l'ideale primario fosse il limite completo dell'ideale variabile; e ciò non sembra possibile, nei casi in cui è $\mu < \nu$, mentre lo è sempre, evidentemente, se $\mu = \nu$. Consideriamo un esempio in proposito, con riferimento a ideali di dimensione zero.

Sia p. es. il gruppo base formato da un punto s-plo in S_r. Si vede facilmente che la lunghezza dell'inerente ideale primario è $\binom{s+r-1}{r-1}$ (30), uguale alla postulazione offerta dal gruppo stesso alle forme di ordine l qualunque ($\geqslant s$) (31). Così un punto doppio O presenta nel piano 3 condizioni e l'ideale primario delle curve aventi quel nodo è contenuto nell'ideale primario delle curve passanti per O e tangenti ivi a una data retta; e questo, alla sua volta, nell'ideale primo delle curve passanti per O. Invece la M.I. di O per due curve aventi un nodo in O è 4.

E' vero che quando due curve piane, di ordini m, n, aventi mn intersezioni semplici, variano con continuità, tendendo ad avere tutte intersezioni semplici, meno un'intersezione nodale, il gruppo d'intersezione, che presentava all'inizio mn condizioni alle curve di ordine abbastanza alto, ne presenta al limite $mn-1$, delle quali $mn-4$ provenienti dalle residue intersezioni semplici, e ciò dunque come se il modo avesse assorbito 3 delle intersezioni semplici e non 4; ma questo avviene soltanto ai fini della valutazione della postulazione e non dell'effettivo assorbimento di intersezioni semplici, che vanno a coincidere nella intersezione multipla.

Particolarizziamo ancora, prendendo $m = n = 2$; e sieno A, B, C, D i 4 punti distinti comuni a due coniche generiche Γ_1, Γ_2, le quali definiscono un ideale intersezione di 4 ideali primi, cioè ciascuno di lunghezza $\mu = 1$.

Prese due coniche Γ_1^*, Γ_2^* costituite da due coppie di rette uscenti dal punto A, si posson porre al posto dei coefficienti delle Γ_1, Γ_2 variabili funzioni olomorfe di un parametro t, definite attorno a $t = 0$, in guisa che per $t \to 0$, $\Gamma_1 \to \Gamma_1^*$, $\Gamma_2 \to \Gamma_2^*$. Allora il gruppo base semplice A, B, C, D tende al gruppo base A^* costituito da 4 punti coincidenti, ma non è possibile isolare dall'ideale variabile definito da Γ_1, Γ_2 un ideale costituito da 3 componenti prime, che abbia per limite completo l'ideale primario di lunghezza 3, costituito dalle curve che hanno il punto doppio A^*.

Il limite dell'ideale $\mathcal{J} = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ è l'ideale $\mathcal{J}^* = (\Gamma_1^*, \Gamma_2^*)$ e l'isolamento accennato non è possibile, perchè nessuna delle terne di punti tratte da A, B, C, D si muta in sè per le circolazioni di t attorno a $t = 0$, eccetto il caso in cui uno dei quattro punti della quaderna, per es. il punto D, resti fisso. Ma in questo caso Γ_1^*, Γ_2^* hanno necessariamente in comune la retta DA^* e l'ideale limite $\mathcal{J}^*$ consta di due ideali di dimensione

(30) M.A.G., p. 91.

(31) In M.A.G., p. 160 si dimostra che la postulazione è questa per l abbastanza grande. La cosa è geometricamente ovvia, com'è ovvio che il minimo di l per cui l'asserzione è lecita è $l = s$.

zero a varietà immerse, formati dalle curve passanti semplicemente per D e da quelle passanti doppiamente per A°, oltre all'ideale di dimensione 1, formato dalle curve che contengono al retta fissa DA°. Sicchè, neppure in questo caso l'ideale delle curve con punto doppio A° resta definito come limite completo.

Altre proprietà e applicazioni dei concetti precedenti.

9. *Il teorema di* LASKER-NOETHER *nei suoi rapporti con gl'ideali completi.* La decomposizione (ridotta) di un ideale qualunque nelle sue componenti irriducibili isolate, è univocamente determinata; ossia quelle che posson mutare nella decomposizione sono soltanto le componenti immerse (ma non il loro numero) [32].

In particolare, ogni varietà base irriducibile isolata, che figuri come addendo nella decomposizione d'una varietà base, a norma del teorema di Lasker-Noether, è individuata dalla data varietà base e l'ideale irriducibile (primario) che la definisce, essendo individuato dalla varietà semplice base dell'ideale primo associato, è completo.

Ne deriva il teorema:

VIII. *Le forme di ordine* l *abbastanza alto, appartenenti ad un ideale, la cui varietà base sia priva di componenti immerse formano un ideale completo* [33].

E' anzitutto evidente che le forme d'un ideale $\mathcal{J}$, aventi l'ordine $l \geqslant \lambda$, ove λ sia un intero prefissato ad arbitrio, formano alla lor volta un ideale. Si tratta di provare che, scelto λ abbastanza grande, quest'ultimo ideale è completo.

Invero, la decomposizione (ridotta) di $\mathcal{J}$ conduce ad un numero finito d'ideali irriducibili, per ipotesi tutti isolati, ed eventualmente a un T-ideale. Le forme di ogni ordine appartenenti a ciascuno degl'ideali componenti di dimensione > 0 costituiscono altrettanti ideali completi; e così è della loro intersezione, perchè, come s'è notato, l'intersezione di due ideali completi è ovviamente completa. Rimane da considerare l'intersezione dell'ideale completo, così ottenuto, col T-ideale che può non esser completo. Ma pel teorema di Lasker citato a pag. 17 tutte le forme di ordine $l \geqslant \lambda$, ove λ è un conveniente intero, appartengono al T-ideale. Da ciò la conclusione.

Si vede di più che *l'ideale, di cui al teorema* VIII, *è senz'altro completo se nella sua decomposizione in componenti irriducibili non esiste un ideale banale; se invece un tal ideale esiste, il minimo* λ *per cui il teorema* VIII *è soddisfatto, è l'esponente* [34] *di quest'ideale banale.*

Quest'osservazione può applicarsi in particolare al caso in cui trattasi dell'ideale primo $\mathcal{J}$ delle forme passanti per una varietà semplice irriducibile non singolare W, la quale, come si è ricordato nel n. 3, può sempre considerarsi intersezione semplice completa di forme:

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ \ldots,\ f_h = 0. \tag{3}$$

[32] Ved. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, II, p. 40-43.

[33] Esiste un ideale associato ad una varietà base con componenti immerse le cui forme di ordine $l \geqslant \lambda$ formino sempre un ideale incompleto, qualunque sia λ?

[34] Ved. VAN DER WAERDEN, loc. cit., p. 34.

Sussiste cioè il corollario:

Le forme di un ordine $l \geqslant \lambda$, *ove* λ *è un conveniente intero, passanti per una varietà semplice irriducibile* W, *non singolare, posson sempre esprimersi come combinazione lineare delle forme* (3), *che sono il minimo numero di forme di cui* W *è intersezione completa semplice* (35).

In altre parole, h è il numero delle forme della base dell'ideale delle forme di ordine $l \geqslant \lambda$ passanti per W.

Nel caso estremo $h = r - d$, l non subisce alcuna limitazione all'infuori di quella data dall'esistenza di una forma di ordine l passante per W. In tal caso il teorema trovasi già in una mia Nota del 1902 (36).

Se le forme (3) costituiscono una base dell'ideale (primo) delle forme per W, cosicchè h non sarà necessariamente uguale al minimo possibile, allora l'ideale definito dalle (3) è completo (teor. VI) e quindi non c'è alcuna limitazione per l (all'infuori di quel minimo di l assicurante l'esistenza di forme dell'ideale). Quando, a norma del teorema di KRONECKER-PERRON (ved. a tal proposito la mia Memoria più volte citata, degli A.d.M. 1948), la W si considera quale intersezione di meno del numero minimo h di forme che la dànno come intersezione completa dovunque semplice, l'ideale di quelle forme diviene riducibile (anche a prescindere dalle eventuali componenti banali). Così nel caso della quintica di VAHLEN C, i tre coni del 5° ordine che (a norma d'un risultato di PERRON), dànno C come completa interferenza, definiscon un ideale intersezione dell'ideale primo delle superficie passanti per C e di quattro ideali di dimensione zero, costituiti dalle superficie passanti pei 4 punti d'appoggio della quadrisecante.

10. *Cenni sopra ulteriori questioni riguardanti i comportamenti. Confronto fra i comportamenti nei punti d'una data varietà base irriducibile.* Consideriamo una componente irriducibile $(V, \bar{c})$ d'una data varietà base (W, c), ove V è una varietà semplice, componente irriducibile di W; sicchè l'ideale completo $\mathcal{J}(V, c)$ è irriducibile (e quindi primario). Sia poi $(O, \bar{c})$ il comportamento subordinato da $(V, \bar{c})$ in un punto O di V. Non escludiamo che $(V, \bar{c})$ possa essere immersa in un'altra componente di (W, c).

E' possibile istituire un confronto tra il comportamento (O, c) ed il comportamento $(O', \bar{c})$ subordinato in un altro punto O' di V? A questa domanda può darsi risposta affermativa quando esista una trasformazione pseudoconforme biregolare dell'intorno di O in S_r nello intorno di O' in S_r, la quale: 1) muti l'intorno di O in V nello

(35) Per $r = 3$, $d = 1$ il teorema trovasi dimostrato, coi mezzi classici della geometria algebrica italiana, nella mia Memoria *Ueber die Darstellung algebraischer Mannifaltigkeiten als Durchschnitte von Formen*, Abhadlungen aus dem math. Seminar der Hansischen Universität, vol. 15, 1943. Ved. anche in proposito, pel caso generale, la Memoria più volte citata di LASKER e la ben nota opera di MACAULAY, *The algebraic theory of modular systems*, Cambridge University Press, 1916, dai quali lavori il teorema precedente si può facilmente derivare.

(36) *Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre*, Rend. dei Lincei, 1902.

intorno di O′ in V; 2) per due rami omologhi γ, γ' inerenti a V e di origini O, O′, si verifichi che gl'interi i, i′, ad essi associati da $(V, \bar{c})$ soddisfacciano sempre alla disuguaglianza $i \geqslant i'$ oppure alla $i \leqslant i'$.

Si può allora dire che $(O, \bar{c}) \supseteq (O', \bar{c})$, oppure che $(O, \bar{c}) \subseteq (O', \bar{c})$. La condizione 1) è certamente soddisfatta quando O, O′ son punti semplici di V. Invero due falde analitiche lineari, di origini O, O′ e della stessa dimensione d, possono sempre trasformarsi l'una nell'altra con una trasformazione biregolare pseudoconforme, che muti l'intorno di O in S_r nell'intorno di O′. Vi sono anzi infinite trasformazioni siffatte, ognuna di esse dipendendo dalla scelta di r—d coppie di funzioni olomorfe rispettivamente in O, O′ (sottoposte soltanto ad una condizione d'indipendenza funzionale).

Il comportamento $(O, \bar{c})$, inerente ad un punto *generico* semplice O di V, è individuato dall'ideale $\mathcal{J}(V, \bar{c})$ e, viceversa, individua l'ideale stesso: lo abbiamo visto nel caso particolare in cui $(O, \bar{c})$ è unitario (n. 7), ossia quando $\mathcal{J}(V, \bar{c})$ è primo. Non ci fermiamo sulla dimostrazione generale di questa proprietà, avvertendo soltanto ch'essa diviene quasi evidente, quando si pensino i comportamenti collegati con le singolarità infinitamente vicine, a mezzo della ricordata formula di Noether.

Possiamo anche provare facilmente che, se O è un qualunque punto semplice di V e O′ un punto di un intorno abbastanza ristretto di O in V, è $(O, \bar{c}) \supseteq (O', \bar{c})$. Consideriamo infatti una trasformazione pseudoconforme τ, biregolare, che muti l'intorno di O nell'intorno di O′ e quindi un ramo γ, di origine O, in un ramo γ', vicinissimo, di origine O′. Il ramo γ' incontra la falda lineare Φ di V, avente l'origine O, in punti semplici, in ciascun dei quali γ' ha con Φ, nelle vicinanze dell'origine O di Φ, una certa M.I.; e la somma di queste M.I. è uguale alla M.I. di γ, Φ in O. Poichè O′ è uno dei punti comuni a Φ e a γ', nell'intorno di O risulta dunque $i \geqslant i'$.

Le ipotesi possibili sono pertanto due: o per *tutti* i punti O′ d'un intorno ristretto di O è $(O', \bar{c}) = (O, \bar{c})$ e allora il comportamento $(O, \bar{c})$ è quello spettante ad un punto generico di V; oppure in ogni intorno di O giacciono punti O′ per cui $(O', \bar{c}) = (O, \bar{c})$ e punti O′ per cui $(O', \bar{c}) \subset (O, \bar{c})$. In quest'ultimo caso O è un punto particolare di V, giacente sopra una componente di $(W, \bar{c})$, immersa in $(V, \bar{c})$.

Insomma *il comportamento subordinato dalla varietà* $(V, \bar{c})$ *in un punto generico di* V *è il minimo possibile fra i comportamenti subordinati da* $(V, \bar{c})$ *nei vari punti di* V *ed è sempre lo stesso, se* V *è priva di punti multipli e* $(V, \bar{c})$ *è isolata.*

Quando $(V, \bar{c})$ si definisce a mezzo del comportamento $(O, \bar{c})$ nel punto generico di V, essa non contiene alcuna componente immersa, la cui presenza importerebbe la riducibilità di $(V, \bar{c})$; cioè $(V, \bar{c})$ è la minima fra le varietà base, che subordinano nel punto generico O di V il comportamento $(O, \bar{c})$; le altre potendo possedere componenti immerse.

11. *Qualche caso in cui i caratteri* μ ν *inerenti ad un ideale irriducibile sono uguali.* Abbiamo già osservato che gl'interi μ, ν inerenti ad un ideale irriducibile $\mathcal{J}$ associato alla varietà irriducibile semplice V_d, di S_r, che sono la M.I. ν delle forme di $\mathcal{J}$ lungo V_d e la lunghezza μ di $\mathcal{J}$, sono ambedue uguali ad 1 quando l'ideale è primo; e viceversa.

Si posson tuttavia dare altri casi in cui $\mu=\nu$. Sia $\nu=2$. Allora sarà $1 \leqslant \mu \leqslant 2$ e siccome non può essere $\mu=1$, senza che $\nu=1$, così dovrà risultare $\mu=2$. Questo caso si presenta allorchè le forme di $\mathcal{J}$ hanno lungo V_d un *contatto del 1° ordine*; cioè quando la generica forma di $\mathcal{J}$ passa semplicemente per V_d ed ha in un punto generico P di V_d un S_{d+1} tangente fisso, contenente lo S_d tangente ivi a V_d; con la condizione ulteriore che una tangente generica in questo S_{d+1} ha in P, con la forma, un contatto del 1° ordine (molteplicità d'intersezione 2).

Dunque, *per l'ideale irriducibile delle forme che passano semplicemente per una data V_d irriducibile, avendo lungo V_d un contatto di 1° ordine, molteplicità d'intersezione lungo V_d e lunghezza dell'ideale sono ambedue uguali a 2.*

Più in generale, è facile dimostrare che l'*uguaglianza* $\mu=\nu=\omega$ si verifica ogni volta che le forme dell'ideale passan semplicemente per V_d, avendo ivi un *contatto di ordine* $\omega-1$, proveniente da un S_{d+1}, tangente fisso in un punto generico P di V_d, con la condizione che una retta generica della stella P, nel detto S_{d+1}, abbia ivi con la forma generica dell'ideale M.I. ω.

Ma, per esempio, se $\omega=4$ l'ideale predetto ha la lunghezza 4 ($\mu=\nu=\omega=4$), mentre per l'ideale delle forme che passano doppiamente per V è $\nu=\omega=4$ e $\mu=3$.

12. *Talune riflessioni sulle formule di postulazione.* Riprendiamo l'ipotesi considerata dall'A. nel 1933 (ved. n. 5) di due varietà semplici V_h, W_k dello S_r, quando $h+k<r$ e le due varietà interferiscono lungo una Z_t ($t \geqslant 0$), avendo nel punto generico di questa (cioè di ogni sua componente) molteplicità d'intersezione 1.

Supponiamo che le V, W, Z sieno irriducibili. Occorre approfondire questo caso per vedere quali conseguenze derivino dai risultati precedenti, in ordine alle formule di postulazione delle tre varietà, occorrendo ciò per la Memoria sulla geometria delle varietà algebriche, che ha dato luogo alla presente ricerca.

Sieno

$$(4) \qquad f_1=0, f_2=0, \dots, f_s=0\,; \qquad g_1=0, g_2=0, \dots, g_\sigma=0$$

le basi rispettive degl'ideali primi delle forme passanti per V_h, W_k.

Le $f_1=0, f_2=0, \dots, f_s=0$ hanno lungo V_h M.I. 1 e così le $g_1=0, g_2=0, \dots, g_\sigma=0$ lungo W_k. Le forme della somma $(f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_\sigma)$ dei due ideali hanno come varietà base associata la varietà intersezione delle V_h, W_k, la quale, nelle nostre ipotesi, è la varietà *semplice* Z_t. Le (4) insomma, complessivamente considerate, hanno in un punto generico P di Z_t la M.I. uguale ad 1. Invero, la generica forma f dell'ideale $(f_1, f_2, \dots, f_s)$ passa semplicemente per P, avendo ivi, come sole tangenti fisse, quelle dello S_h tangente a V_h; e analogamente per ciò che concerne la generica forma g di $(g_1, g_2, \dots, g_\sigma)$ nei suoi rapporti con W_k. Ne viene che la generica forma $af+bg$, con a, b forme variabili generiche di convenienti ordini, passa per P semplicemente, avendo come sole tangenti fisse quelle dello S_t tangente in P a Z_t. Pertanto il luogo dei punti base di $(f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_\sigma)$ è la varietà semplice (Z_t, i).

A norma del teorema VIII se ne trae che *le forme di un ordine* l *abbastanza* *alto, passanti per* Z_t *appartengono tutte all'ideale somma degli ideali delle forme passanti per* V_h, W_k $(h+k<r)$.

Il teorema si estende senz'altro al caso in cui le V_h, W_k *sieno riducibili, anche impure,* purchè, ogni loro componente sia semplice e su ogni componente (semplice) di Z_t le V_h, W_k si incontrino semplicemente.

Diciamo $\varphi(l;V)$ la postulazione di una varietà qualunque V_h (priva di parti multiple) per le forme di ordine l. Siccome per un dato l i sistemi delle forme d'ordine l passanti per V_h+W_k e di quelle appartenenti all'ideale $(f_1,\dots,f_s,g_1,\dots,g_\sigma)$ son rispettivamente il sistema intersezione e il sistema congiungente dei sistemi lineari di forme per V_h, W_k, l'elementare relazione fra le dimensioni dei quattro sistemi nominati, tenuto conto che il sistema lineare intersezione è completo, come i sistemi lineari da cui si parte, porge subito l'uguaglianza ([37]):

$$(5)\qquad \varphi(l;V)+\varphi(l;W)=\varphi(l;V+W)+\bar{\varphi}(l),$$

ove con $\bar{\varphi}(l)$ si è denotata la postulazione dell'ideale $(f_1,\dots,f_s,g_1,\dots,g_\sigma)$ per le forme d'ordine l.

Ma, siccome, in forza del teorema precedente, per l abbastanza grande, è $\bar{\varphi}(l)=\varphi(l;Z)$, dalla (5), *per* l *abbastanza grande,* si trae la relazione

$$(6)\qquad \varphi(l;V)+\varphi(l;W)=\varphi(l;V+W)+\varphi(l;Z).$$

Dunque:

Quando due varietà semplici irriducibili V_h, W_k *dello* S_r, *con* $h+k<r$, *s'intersecano semplicemente lungo una* Z_t $(t\geq 0)$, *fra le loro formule di postulazione passa la relazione* (6) ([38]).

Ciò vale fino al caso estremo ovvio in cui Z_t manchi, nel quale caso, in conseguenza della stessa formula (5), donde la (6) è derivata, mancando il sistema intersezione, si deve porre $\varphi(l;Z)=0$.

Un'ulteriore osservazione. La postulazione $\varphi[l;(V,c)]$ della varietà base (V,c) di un qualunque ideale $\mathcal{J}$ coincide con la funzione caratteristica hilbertiana $\chi(l;\mathcal{J})$ dell'ideale. Quando l è abbastanza grande, queste due funzioni numeriche, identiche, si esprimon mediante un polinomio in l, di grado d uguale alla dimensione (massima) delle varietà base. I coefficienti di tale polinomio, indipendenti naturalmente da l, sono caratteri proiettivi di (V,c) o di $\mathcal{J}$. Anzi (come ho mostrato nella mia Memoria citata del 1909, sulla geometria delle varietà algebriche) quando V è semplice essi esprimonsi mediante i generi aritmetici di V e delle sue sezioni spaziali delle varie dimensioni.

Esiste un'espressione di $\varphi[l;(V,c)]$ *valida per tutti i valori di* l?

([37]) Questa è la nota relazione di HILBERT fra le funzioni caratteristiche di due ideali e quelle del loro massimo comune divisore e del loro minimo comune multiplo. Le osservazioni precedenti provano che, se ci si riferisce agl'ideali, per l abbastanza grande, il massimo comun divisore è, nel nostro caso, completo, come il minimo comune multiplo.

([38]) Questo teorema trovasi, acquisito coi metodi della geometria algebrica italiana, e nell'ipotesi in cui $t+1=\min(h,k)$, nella mia Memoria, *Fondamenti per la geometria algebrica*, Rendiconti di Palermo, 1909, n. 3, teor. II.

La risposta affermativa è contenuta in una proprietà posta in rilievo da F. Gaeta (39).

Dalla teoria hilbertiana delle sizigie (40), d'accordo con una proprietà da me osservata in una Memoria del 1903 (41), secondo la quale la formola di postulazione di una V_d intersezione completa semplice di r—d forme vale per ogni l, quando si attribuisca valore zero ai simboli combinatori il cui numeratore sia minore del denominatore, risulta, secondo Gaeta, che esiste un'espressione di $\varphi[l;(V,c)]$, ove nei coefficienti del polinomio in l compaiono gli ordini delle forme costituenti la base di $\mathcal{J}$ e certi ordini inerenti alla catena delle sizigie di $\mathcal{J}$, essendo quest'espressione applicabile per ogni l.

Quando V_d è irriducibile, semplice, il polinomio $\varphi[l;(V,c)]$ s'identifica con quello i cui coefficienti sono espressi mediante i generi aritmetici delle sezioni spaziali di V_d; e si ottiene così un *metodo per calcolare il genere aritmetico di V_d e delle sue sezioni spaziali mediante gli ordini della base delle forme passanti per V_d e delle annesse sizigie hilbertiane.*

Questo metodo, accennato per la varietà completa intersezione di r—d forme, al n. 30 della mia Memoria del 1909, sulla geometria delle varietà, fu dipoi sviluppato per le varietà stesse dal Pannnelli (42). Resta da svilupparlo per varietà semplici qualsiansi.

A proposito della formula di postulazione valida per ogni l, è altresì opportuno ricordare un interessantissimo lavoro di Ostrowski (43). L'A. sostituisce alla catena delle prime, seconde, terze, ... sizigie hilbertiane, forme in due, tre, quattro, ... serie di variabili. Introducendo gli ordini $n_{i1}, n_{i2}, n_{i3}, \ldots$ delle forme di Ostrowski, la formula di postulazione di un ideale qualunque $\mathcal{J}$ viene scritta da Gaeta così:

$$\chi(l, V) = \binom{l+r}{r} - \sum_{i=1}^{s_1} \binom{l-n_{i1}+r}{r} + \sum_{i=1}^{s_2} \binom{l-n_{i2}+r}{r} \cdots$$

attribuendo ai simboli combinatori il valore convenzionale che io avevo indicato per le intersezioni complete.

La formula cioè assume un aspetto identico a quella valevole per le intersezioni complete (44). Soltanto, in quest'ultimo caso le n son gli ordini delle forme intersecantisi in V; mentre nel caso generale gli ordini delle sizigie successive son le somme a due a due, a tre a tre, ecc. degli ordini predetti.

E' interessante pure la proprietà osservata da Ostrowski, che cioè la serie di potenze

$$H(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \chi(l;\mathcal{J})x^l \qquad [\chi(0,\mathcal{J}) = 1]$$

è convergente per $|x| < 1$ ed ha per somma

(39) Memoria citata a pag. 18. L'osservazione è relativa ad un caso particolare, ma ha valore generale.

(40) Ved. p. es. M.A.G., p. 185 e segg.

(41) *Su alcune questioni di postulazione*, Rendiconti di Palermo, 1903.

$$H(x) = \frac{g(x)}{(1 - x)^{r+1}}$$

con

$$g(x) = 1 - \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha} \sum_{i=1}^{s_{\alpha}} x^{n_{\alpha_i}}$$

ove k è il numero dei moduli di sizigie e n_{α_i} sono gli ordini degli α-esimi polinomi di Ostrowski.

(42) *Sul genere aritmetico di una varietà completa intersezione di forme,* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1909.

(43) *Ueber ein algebraisches Uebertragungsprinzip.* Abh. Math. Seminar Hamburg, 1922.

(44) Formula, che trovasi per l abbastanza grande nella Nota lincea citata del 1902, e, per l qualunque, nella Memoria di Palermo, 1903.