FEDERICO GAETA

Sulle rigate doppie di genere lineare assoluto $p^{(1)} = 1$ (*)

I. - Rigate razionali

INTRODUZIONE

ENRIQUES ha dato le linee generali per la classificazione delle superficie algebriche di genere lineare assoluto $p^{(1)} = 1$ dal punto di vista delle trasformazioni birazionali (¹). Esse possiedono «in generale» un fascio $\{C\}$ di genere uguale all'irregolarità q di curve ellittiche (privo di punti base) (²) col quale si compongono i sistemi canonici e pluricanonici della superficie. In generale, nel senso che l'unica eccezione è costituita dalle superficie le cui curve canoniche sono linearmente equivalenti allo zero dell'equivalenza lineare, per le quali possono non esistere fasci di curve ellittiche.

ENRIQUES propose la classificazione di queste superficie in base ai seguenti caratteri, invarianti per trasformazioni birazionali:

1) L'irregolarità q della superficie.

2) Il genere aritmetico p_a.

3) Il determinante d, che si definisce come il minimo numero di punti determinabili razionalmente sopra una curva del fascio in funzione del parametro da cui esse dipendono.

4) Da certi caratteri s_i $(i = 1, 2, \dots, \alpha)$ in corrispondenza ai α divisori δ_i di d diversi da 1, che esprimono il numero di curve spezzate del fascio, con una componente unica $\overline{C}$ che contata δ_i volte costituisce una curva totale di $\{C\}$ sopra un modello di F, privo di curve eccezionali di prima specie (³).

(*) Presentata dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

(¹) Nei suoi lavori *Sui piani doppi di genere lineare $p^{(1)} = 1$*, Rend. Accad. Lincei, 1° semestre 1898 e *Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$*. Rend. Accad. Lincei, febbraio 1914, riprodotti nel suo libro postumo *Le superficie algebriche*, Zanichelli, Bologna (1949).

(²) Per $q > 0$ è ovvio e ben noto che $\{C\}$ non può avere punti base sopra un modello privo di singolarità. Per $q = 0$ questo fatto si presenta soltanto per le superficie di determinante uno e vedremo che allora la superficie diventa razionale e può escludersi dalle nostre considerazioni. La esistenza del fascio $\{C\}$ di genere q su queste superficie fu scoperta da ENRIQUES: *Intorno alle superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$*. Rend. Accad. di Bologna (1906).

(³) Ved. libro cit. in (¹).

Lo stesso Autore ha studiato certe varietà di superficie regolari ($q = 0$), di determinante uno e due, accennando poi come si possano studiare quelle di determinante superiore, nonchè l'estensione dei suoi metodi alle superficie irregolari.

In questo lavoro approfondiamo lo studio delle superficie regolari di determinante uno o due, precisando e rettificando in qualche punto le ricerche d'ENRIQUES, come base per uno studio ulteriore delle superficie che ammettono un gruppo infinito discontinuo di trasformazioni birazionali e dei rapporti tra la divisione algebrica delle curve tracciate su quelle superficie ed i sistemi pluricanonici (4).

Rispetto al gruppo delle trasformazioni birazionali, la classificazione delle superficie algebriche (di una data classe) importa dapprima la determinazione dei caratteri numerici invarianti per trasformazioni birazionali in corrispondenza di dati valori dei quali *tutte* le superficie che li posseggono più le relative superficie di accumulazione formano un ente algebrico irriducibile (*famiglia*) e quindi la determinazione dei parametri (moduli) variabili con continuità che individuano le superficie entro di essa.

Una famiglia di superficie birazionalmente definite è dunque una varietà algebrica irriducibile la cui superficie generica possiede certi caratteri invarianti per trasformazioni birazionali (ad es. $q, p^{(1)}, p_a, \ldots$, ecc.) (5) non ulteriormente ampliabile. Quando occorra designeremo una famiglia di superficie con una lettera maiuscola in corsivo più una parentesi dove si scriveranno i caratteri che si suppongono fisse per la superficie generica. In questo lavoro sottinderemo spesso i caratteri $q = 0$, $p^{(1)} = 1$.

In quest'ordine di idee dimostro nel Cap. I, § 1 di questa memoria che *le classi di superficie regolari di genere lineare assoluto* $p^{(1)} = 1$, *di determinante uno e di dato genere* p *(aritmetico = geometrico) birazionalmente distinte costituiscono una sola famiglia* $\mathcal{C}_1(p)$ *di dimensione* $10p + 8$ (6).

Una superficie generica entro $\mathcal{C}_1(p)$ si dirà con pieno diritto *a moduli generali*. *La superficie a moduli generali di* $\mathcal{C}_1(p)$ *si può rappresentare birazionalmente senza eccezioni essenziali* (7) *sopra un cono razionale normale doppio* $\Phi^{2\sigma+2}$ *d'ordine*

(4) Un breve sunto dei risultati ottenuti trovasi nella mia nota *Sulla classificazione delle superficie algebriche regolari con un fascio di curve ellittiche*. Rend. Accad. Lincei, s. VIII, vol. VIII, fasc. 6, 1950.

(5) Ciò non esclude naturalmente che vi possano essere varietà subordinate di superficie per le quali i suddetti caratteri assumono valori diversi, come accade già per le curve, ad es. sulla famiglia ∞^{3p-3} $(p > 1)$ di curve algebriche di genere p.

(6) Nella nota lincea citata di 1914, ENRIQUES afferma senza dimostrazione che le superficie di determinante uno si distribuiscono in un'infinità numerabile di piani doppi, fra i quali include, oltre ai piani doppi di tipo I e II di cui ci occupiamo nei nn. 3, 4 di questo lavoro, i coni razionali d'ordine $\sigma+1$ di $[\sigma+2]$ con curva di diramazione costituita dall'intorno del vertice più una trisecante le generatrici. Questi coni dipendono, secondo un computo fatto dallo stesso ENRIQUES, da $M = 8p + \sigma + 7$ moduli. Nel libro postumo tralascia questi coni doppi forse perchè per certe superficie a moduli particolari rientrano come caso particolare dei piani doppi I o II. Invece *sono questi coni doppi le superficie a moduli generali* come ho detto. L'intero σ non è un carattere indipendente; esso si esprime mediante il genere secondo la formula $\sigma = 2p + 1$ e risulta $M = 10p + 8$ d'accordo col mio computo.

(7) L'unica eccezione dal punto di vista proiettivo è costituita dal vertice del cono, al quale corrisponde l'unisecante U delle curve C. Considerando il vertice come curva infinitesima vi è dunque una corrispondenza biunivoca fra i punti di U e quelli dell'intorno del prim'ordine di V.

$2p+2$, *normale in* $[2p+3]$ [8] *la cui curva di diramazione è spezzata nell'intorno del vertice più l'intersezione del cono con una forma generica del terz'ordine dello* $[2p+3]$ *ambiente.*

Da questo cono Φ^{2p+2} si passa ad un'altra rigata doppia sulla quale la rappresentazione non presenta più eccezioni, considerando l'imagine proiettiva del sistema lineare di tutte le curve razionali normali di $[2p+3]$ contenute nel cono Φ^{2p+2} [9]; essa è rigata d'ordine $2p+4$ di $[2p+5]$ con una direttrice rettilinea di grado virtuale $-(2p+2)$. Sopra questa rigata doppia la curva di diramazione è priva di punti multipli, essendo spezzata nella direttrice rettilinea V più una curva Δ irriducibile e priva di punti multipli, senza punti comuni con V [10].

I piani doppi dei tipi I e II d'ENRIQUES [11] sono a moduli particolari, cioè riempiono soltanto varietà subordinate entro la $C_1(p)$, come si riconosce agevolmente applicando un'opportuna trasformazione di JONQUIÈRES alla curva di diramazione di questi piani che la trasformi in una curva particolare (con un certo numero di nodi ordinari in più che la curva generica) del sistema lineare imagine del triplo delle sezioni iperpiane, in una opportuna rappresentazione piana del cono.

Il numero di moduli trovato $10p+8$, riesce maggiore del minimo $9p-2p^{(1)}+12=$ $=9p+10$ assegnato da ENRIQUES per le superficie regolari coi generi $p^{(1)}$, p [12].

In quanto alla superficie di determinante $d=2$ introduciamo un nuovo carattere π invariante per trasformazioni birazionali, uguale al genere virtuale del sistema $|B|$ di bisecanti le curve del fascio C di grado virtuale minimo m. Nel Cap. II dò una classificazione esauriente di tutte le superficie regolari di genere lineare assoluto $p^{(1)}=1$, di determinante due in base ai caratteri $d=2$, p, π ed s (numero di curve del fascio $|C|$ spezzate in una unica componente irriducibile doppia, C_1 sopra un modello di F privo di curve eccezionali). [13].

Il carattere s esprimesi mediante il genere p ed il bigenere P_2 secondo la formula $s=P_2-2p+1$ [14]. Vedremo qui che esse hanno pure una grande importanza per lo

(8) Adopereremo talvolta la notazione $[r]$ per indicare uno spazio proiettivo S_r ad r dimensioni per comodità tipografica.

(9) In generale: le curve razionali normali di $[r+1]$ tracciate sopra un cono razionale normale Φ^r costituiscono il sistema lineare completo $|V+(r+1)R|$, dove V, (intorno del vertice) ed R (generatrice) si assumono come base minima delle curve di Φ^r. Il grado di questo sistema è $r+2$ e la dimensione $r+3$.

(10) D'accordo col fatto che sopra una superficie irriducibile e priva di punti multipli la curva di coincidenza di un'involuzione del second'ordine priva di punti fondamentali è sempre priva di punti multipli. Ved. GAETA: *Sulla curva di coincidenza di un'involuzione del second'ordine appartenente ad una superficie algebrica*. Rend. di matematica e delle sue applicazioni, Roma, 1952.

(11) Ved. libro citato in (1), pag. 260.

(12) Non sussiste dunque il paradosso segnalato da ENRIQUES (nota lincea cit. 1914, libro postumo, pag. 261) in quanto che i piani doppi di genere p dei tipi I o II, dipendenti da $8p+7$ od $8p+6$ moduli rispettivamente [v. nota (32) al piè della pag. 8 di questo lavoro] sono a moduli particolari.

(13) La maggior parte delle argomentazioni svolte in questo lavoro si estendono alle superficie irregolari. Ciò non è stato fatto qui perchè occorrerebbe una digressione troppo lunga sui cont astratti irregolari.

(14) Cfr. ENRIQUES, libro citato a pag. 263.

studio del gruppo della divisione delle curve algebriche tracciate su essa ([15]). All'uopo dividiamo il Cap. II in due paragrafi considerando nel primo § il caso $s=0$ e nel secondo quello $s>0$.

Per $s>0$ il carattere m esprimesi in funzione di π secondo la formula

$$m = 2\,(\pi - p)$$

Si dimostra agevolmente come conseguenza del fatto che la dimensione del sistema $|B|$ non può superare l'unità ([16]) che fra p e π intercede la disuguaglianza $p \geq \pi$ che, del resto è l'unica condizione a cui deve soddisfare il carattere π, che può prendere tutti i valori (≥ 0) compatibili con essa.

Ponendo per brevità $\nu = p - \pi$ dimostro che per $\nu > 0$ *le superficie regolari coi caratteri* $p^{(1)} = 1$, $d = 2$, p, π, *costituiscono una sola famiglia* $C_2(p, \pi)$ *dipendente da* $9p + \pi + 9$ *moduli. La superficie a moduli generali di* $C_2(p, \pi)$ *è rappresentabile senza eccezioni essenziali* ([17]) *sopra un cono razionale normale doppio* Φ^ν *d'ordine* ν *di* $[\nu+1]$ *la cui curva di diramazione è una quadrisecante le generatrici con un punto* $(2\pi+2)$*-plo a tangenti distinte nel vertice V del cono e priva di ogni altra singolarità.*

L'imagine proiettiva del sistema lineare $\infty^{\nu+3}$ delle curve razionali normali di $[\nu+1]$ tracciate sul cono Φ^ν trasforma questo cono in una rigata $R^{\nu+2}$ d'ordine $\nu+2$ di $[\nu+3]$ sulla quale V diventa una direttrice rettilinea di grado $-\nu$. La curva di diramazione su questo nuovo modello è irriducibile e priva di punti multipli ([18]), in guisa che la rappresentazione di F sulla $R^{\nu+2}$ doppia è assolutamente priva di eccezioni.

Nel caso $\nu = 0$ *le superficie regolari coi caratteri* $p^{(1)} = 1$, $d = 2$ *si distribuiscono in infinite famiglie individuate dall'intero* p $(= \pi)$. *Ognuna di esse dipende da* $10p + 8$ *moduli. La superficie a moduli generali è rappresentabile doppiamente senza eccezioni sopra una quadrica doppia* Φ^0 *non specializzata la cui curva di diramazione, irriducibile e priva di punti multipli è la curva generica del sistema lineare completo* $|4V + (2p+2)R|$ (V ed R le due schiere di generatrici della quadrica). *Le imagini delle generatrici* R *sono le curve del fascio* $|C|$. *Quelle delle generatrici* V *sono curve del fascio* $|B|$ *privo di punti base, di genere virtuale uguale al genere delle superficie, e di grado virtuale minimo* (uguale a zero).

Siccome interessa sopratutto la classificazione di queste superficie rispetto al carattere p ci poniamo la seguente domanda:

Una superficie F variabile entro la famiglia C_2 (p, π) può tendere verso una superficie particolare $\overline{F}$ sulla quale la bisecante B di grado minimo $[= 2(\pi - p)]$ si spezzi in una $\overline{B}$ di grado inferiore più una curva del fascio $|C|$? Se così fosse

([15]) V. Severi: *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve tracciate sopra una superficie algebrica.* Rend. Circ. mat. di Palermo, 2° semestre 1910.

([16]) In generale sopra una superficie (anche irregolare) di determinante d la dimensione di un sistema lineare di d-secanti di grado minimo m non può superare $d-1$, altrimenti si staccherebbe una d-secante di grado $< m$.

([17]) V. nota ([8]). Nel caso $\nu = 1$ la Φ^1 diventa un piano doppio la cui curva di diramazione possiede un unico punto singolare O che fà l'uffizio di «vertice».

([18]) Cfr. nota ([16]).

il genere virtuale $\bar{\pi}$ di $\bar{B}$ sarebbe uguale a $\pi-2$ giacchè il genere virtuale di $B+C$ dev'essere ancora uguale a π. Ne deriverebbe che la famiglia $C_2\,(p, \pi)$ conterrebbe come varietà subordinata la $C_2\,(p, \pi-2)$. La risposta è affermativa essendo conseguenza immediata del fatto che la famiglia delle rigate $R^{\nu+2}$ d'ordine $\nu+2$ di $[\nu+3]$ birazionalmente equivalenti senza eccezioni essenziali ai coni Φ^{ν} di $[\nu+1]$ contiene come varietà subordinata la famiglia dei coni razionali $\Phi^{\nu+2}$ di $[\nu+3]$. Ne seguono le seguenti relazioni d'inclusione fra le famiglie $C_2(p,\pi)$:

$$C_2(p,p\text{-}1) \supset C_2(p,p\text{-}3) \supset C_2(p,p\text{-}5) \supset \cdots$$

$$C_2(p,p) \supset C_2(p,p\text{-}2) \supset C_2(p,p\text{-}4) \supset \cdots$$

Le famiglie $C_2(p,p\text{-}1)$ e $C_2(p,p)$ non si possono ampliare e non esiste nessuna relazione d'inclusione fra di esse perchè i generi virtuali delle loro bisecanti di grado minimo sono di diversa parità oppure perchè ambedue famiglie dipendono da $10p+8$ moduli. Ne segue che *le varietà* $C_2\,(p,p-1)$, $C_2\,(p,p)$ *sono pure famiglie rispetto al solo carattere p.* Queste famiglie coincidono con quelle che ENRIQUES chiama nel suo libro postumo di tipi I e II. ENRIQUES è pervenuto rapidamente ad ottenere queste famiglie osservando che una superficie regolare di determinante due si può rappresentare sopra un piano doppio con curva di diramazione D^{2n} d'ordine $2n$ con un punto O $(2n\text{-}4)$-plo, cercando poi di determinare le ulteriori singolarità di D^{2n} affinchè non sia possibile abbassare n con trasformazioni quadratiche. Con questo metodo non si riconosce se i piani doppi ottenuti sono a moduli generali; anzi lo stesso metodo applicato alla superficie di determinante uno conduce ad errore, come abbiamo visto. La ragione per la quale il metodo d'ENRIQUES ha condotto effettivamente alle *famiglie* di superficie di determinante due, mentre invece non accade così per quelle di determinante uno dipende dal fatto che la curva di diramazione del piano doppio di tipo I' è priva di singolarità fuori del punto $(2n\text{-}4)$-plo; analogamente la quadrica doppia imagine della superficie a moduli generali di II' conduce per proiezione stereografica generica ad un piano doppio la cui curva di diramazione è priva di singolarità fuori del punto O e del punto quadruplo, che nascono dalla proiezione. Invece per le superficie di determinante uno si presentano piani doppi trasformati dei nostri coni doppi, la cui curva di diramazione possiede punti multipli non influenti sul calcolo del genere p del piano doppio, che influiscono invece sul computo di moduli, dei quali non aveva tenuto conto ENRIQUES. In sostanza il metodo che ho adoperato qui cerca di sfruttare fino al massimo la rapresentazione senza eccezioni della superficie sopra una rigata doppia, che permette di avere un'intuizione più netta della superficie obiettiva.

Nel § 2 del Cap. II studiamo le superficie regolari F di determinante due con $s>0$. Esse non si possono rappresentare senza eccezioni sopra una rigata proiettiva, bensì sopra una rigata astratta Ψ le cui «generatrici» siano coniche [19]. L'involuzione I che dà luogo alla rappresentazione possiede coincidenze isolate che hanno come imagini in Ψ punti doppi conici ordinari, i cui intorni formano parte della curva di diramazione. Chiameremo con Λ il resto della curva di diramazione, fuori di

(19) V. SEVERI, *Sulla classificazione delle rigate algebriche.* Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni. Università di Roma [5], 2 (1941).

questi punti doppi isolati. Da Ψ si passa ad una rigata proiettiva in guisa che le rette doppie componenti di coniche particolari del fascio $|C|$ imagini delle curve $2C_i$ di F danno luogo a tacnodi della curva trasformata di Λ nella rigata, le cui tangenti tacnodali sono generatrici che formano anch'esse parte della curva di diramazione; questa circostanza dipende essenzialmente dal fatto che ogni sistema di bisecanti le curve del fascio $|C|$ possiede un gruppo S di s punti base giacenti sulle curve C_i, che sono coincidenze isolate dell'involuzione I.

Il carattere s esprimesi in funzione del genere p e del bigenere P_2 della superficie, secondo la formula $s = P_2 - 2p + 1$. Si riconosce agevolmente che il bigenere di una superficie regolare di genere zero può assumere qualsiasi valore intero ≥ 0.

L'esistenza e classificazione di queste superficie deriva da costruzioni molto analoghe a quelle già menzionate per le superficie con $s = 0$. S'introduce il carattere $\nu = p + s - \pi$ dove π è il genere virtuale delle bisecanti di grado virtuale minimo m; il grado virtuale di queste curve considerando il gruppo S come gruppo base assegnato è uguale a -2ν; a differenza di quanto accade nel caso $s = 0$ si verifica sempre $\nu > 0$.

Anche in questo caso il metodo d'Enriques conduce a *tutte* le superficie regolari col $p^{(1)} = 1$, $d = 2$, $s > 0$, in guisa che i piani doppi III' d'Enriques esauriscono tutte quelle superficie.

Per le superficie di determinante due con $s > 0$, il gruppo della divisione algebrica ([29]) delle curve tracciate su esse si determina agevolmente a partire dalle curve doppie $2C_i$ del fascio $|C|$. Si dimostra che *ogni divisore dello zero della superficie è equivalente ad una curva virtuale del tipo*:

$$C_1 + C_2 + \dots + C_{2h} - hC \quad (2h \leq s)$$

Ciò permette asserire che *il gruppo della divisione su queste superficie è somma diretta di s-1 gruppi ciclici del secondo ordine.*

Ne deriva che l'invariante σ di Severi è uguale a 2^{s-1} e siccome $s = P_2 - p + 1$, risulta che *sopra queste superficie l'invariante σ esprimesi mediante il genere* p *ed il bigenere* P_2, *secondo la formula*:

$$\sigma = 2^{P_2 - 2p}$$

Nel capitolo III classifico completamente la superficie di determinante uno che possiedono un gruppo infinito discontinuo di trasformazioni birazionali in sè. Si dimostra che le superficie della famiglia $\mathcal{C}_1(p)$ che possiedono un gruppo infinito discontinuo si distribuiscono in un'infinità numerabile di varietà algebriche irriducibili di dimensione $9p+8$, ognuna delle quali è individuata da un intero γ. Questo risultato permette osservare che:

1) *Il numero base assoluto delle superficie a moduli generali della famiglia* $\mathcal{C}_1(p)$ *è uno.*

2) *La condizione perchè il numero base aumenti non è algebrica, ma si spezza nella somma di un'infinità numerabile di condizioni algebriche di dimensione p, più una condizione algebrica semplice che corrisponde allo spezzamento di una curva del fascio* $|C|$.

([29]) Ved. Severi, loc. cit. in ([10]).

CAPITOLO I.

Superficie di determinante uno

1. — L'esistenza di superficie regolari di determinante uno è assicurata dai piani doppi studiati da ENRIQUES ([21]). Tuttavia darò un altro esempio, contenente quelli di ENRIQUES come caso particolare, che dà luogo, come vedremo, alle superficie regolari di determinante uno più generali fra quelle di dato genere.

Sia Φ^{2p+2} un cono razionale normale di $[2p+3]$ ottenuto proiettando una curva razionale normale di un iperpiano $[2p+2]$ da un punto esterno V. Chiamiamo con Δ l'intersezione del cono Φ^{2p+2} con una forma generica del terz'ordine. Δ è irriducibile, priva di punti multipli, di grado $18(p+1)$ e genere (virtuale = effettivo) $6p+4$.

Esiste una classe ben determinata di superficie F, birazionalmente equivalenti al cono doppio Φ^{2p+2} con curva di diramazione costituita dall'intorno del vertice V più la curva Δ.

Lo si può riconoscere direttamente considerando un $[2p+3]$ doppio conveniente, ma in vista di ulteriori applicazioni determineremo un piano doppio birazionalmente equivalente ad esso. All'uopo considereremo la rappresentazione piana di Φ^{2p+2} in cui il sistema delle sezioni iperpiane si muta nel sistema:

$$C^{2p+2}\ (O^{2p+1};\ O_1,\ O_2, \dots, O_{2p+1}) \tag{1}$$

delle curve piane C^{2p+2} d'ordine $2p+2$ col punto O $(2p+1)$-plo con le $2p+1$ tangenti distinte e fisse. Chiamiamo con $O_1, O_2, \dots, O_{2p+1}$ i punti base del sistema infinitamente vicini ad O nelle direzioni delle sudlette $2p+1$ tangenti.

L'imagine di Δ è la curva generica del sistema triplo di quello (1):

$$C^{6p+6}\ (O^{6p+3};\ O_1^3, O_2^3, \dots, O_{2p+1}^3) \tag{2}$$

che è d'ordine $6p+6$ dotata da un punto $(6p+3)$-plo e $2p+1$ punti tripli infinitamente vicini ad O.

Esiste un piano doppio avente questa C^{6p+6} come curva di diramazione. L'intorno del primo ordine di O forma parte della curva di diramazione ([22]).

Preferiamo in seguito ragionare sul cono doppio in quanto che, come vedremo, la rappresentazione dell'involuzione I cui dà luogo il cono doppio si fà senza eccezioni essenziali nel senso che verrà precisato più avanti.

Una generatrice generica del cono possiede quattro punti di diramazione distinti, quindi la sua imagine in F è una curva ellittica C. La superficie F possiede dunque un fascio lineare $|C|$ di curve ellittiche privo di punti base e di curve spez-

([21]) V. libro cit. in([1]) pag. 290.

([22]) V. ad es. il libro di CONFORTO: *Le superficie razionali nelle lezioni del prof.* ENRIQUES, Zanichelli, Bologna, 1945, pag. 396.

zate [22]. Questo fascio possiede un'unisecante U imagine di V, di grado virtuale $-(p+1)$, imagine di V, che forma parte della curva di coincidenza dell'involuzione. Il resto della curva di coincidenza è costituita da una curva D imagine di Λ.

La curva Λ soddisfa su Φ^{2p+3} l'equivalenza lineare:

$$\Lambda \equiv 3\,[V + (2p+2)R] \tag{3}$$

essendo $|R|$ il fascio delle generatrici e $|V+(2p+2)R|$ il sistema delle sezioni iperpiane. Ne deriva che D soddisfa su F l'equivalenza lineare:

$$D \equiv 3U + (3p+3)C \tag{4}$$

Il sistema canonico virtuale $|\Gamma|$ del cono Φ^{2p+2} [24] è individuato dall'equivalenza lineare:

$$\Gamma \equiv G_{(V,V)} - 2R - 2V \tag{5}$$

essendo $G_{(V,V)}$ il gruppo di generatrici passanti per un gruppo caratteristico virtuale (V,V) della curva infinitesima V [25]. Il sistema canonico $|K|$ di F si deduce a partire da quello del cono secondo la nota equivalenza

$$K \equiv T(\Gamma) + D + U \tag{6}$$

essendo $T(\Gamma)$ la trasformata di Γ nella corrispondenza [2,1] fra F e Φ e D+V la curva di coincidenza dell'involuzione I.

In virtù della (5) si verifica

$$T(\Gamma) \equiv 2G_{(U,U)} - 2C - 4U \tag{7}$$

essendo $G_{(U,U)}$ il gruppo virtuale di curve del fascio $|C|$ che sega un gruppo caratteristico virtuale di U, su questa curva.

Dalle (6), (7), (4) risulta finalmente

$$K \equiv -2C - G_{(U,U)}$$

e ciò significa che:

(22) S'intende sopra un modello di F, privo di curve eccezionali. Essendo irriducibili tutte le generatrici del cono le curve spezzate del fascio $|C|$ sulla superficie F potrebbero provvenire soltanto dai punti multipli della curva di diramazione che non esistono. Cfr. loc. cit. in (7).

(24) V. Severi: *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche tra varietà algebriche* (a cura di Conforto e Martinelli), Ed. Cremonese, Roma, 1942, pag. 249. Una curva canonica Γ sopra una rigata qualsiasi soddisfa l'equivalenza $\Gamma \equiv G_{(A,A)} + H - 2A$ ove $G_{(A,A)}$ è il gruppo di generatrici individuato da un gruppo coratteristico (A,A) del sistema $|A|$ delle sezioni iperpiane, H un gruppo canonico del fascio delle generatrici). A si può sostituire per una direttrice qualsiasi E. Infatti sarà $E \equiv A + G_\mu$ (G gruppo di μ generatrici R); ne segue che $(E,E) \equiv (A,A) + 2(G_\mu, A)$, $G_{(A,A)} \equiv G_{(E,E)} - 2\,G_\mu$ e finalmente: $\Gamma \equiv G_{(E,E)} - 2\,G_\mu + H - 2\,(E - G_\mu) \equiv G_{(E,E)} + H - 2E$ come avevamo predetto.

(25) Per i legami funzionali e numerativi che passano fra due superficie in corrispondenza algebrica di cui faccio uso v. Severi, loc. cit. precedentemente pag. 316 e seg.

Il sistema canonico di F è costituito dal sistema lineare $|(-m-2)\,C|$ *(privo di curve fisse) di tutti i gruppi di* $-m-2$ *curve del fascio lineare* $|C|$, *essendo* $m=[U,U]$ *il grado virtuale di U.*

Siccome abbiamo visto che

$$m = -(p+1)$$

risulta: *il sistema canonico di F è* $|(p-1)C|$ quindi *il genere geometrico* p_g *di F è uguale a p.* La superficie F è priva di curve eccezionali in quanto che il sistema canonico impuro è privo di parti fisse [26] quindi *il genere lineare assoluto della superficie è* $p^{(1)}=1$.

Nel fascio $|C|$ esistono $\delta=12(p+1)$ curve nodate. Infatti esse possono provvenire soltanto dalle generatrici del cono tangenti alla curva Δ. Il suo numero è uguale all'ordine del gruppo jacobiano della g^1_2 segata dalle generatrici su C. Sarà dunque

$$\delta = 2.3 + 2(6p+4) - 2 = 12p + 12$$

L'invariante I di Zeuthen-Segre di F calcolato a partire del fascio $|C|$ è

$$I = \delta - 4 = 12p + 8$$

D'altronde la formula di Noether

$$I + p^{(1)} = 12p_a + 9$$

ci dice che l'invariante di Zeuthen-Segre è uguale a $12p_a+8$ essendo p_a il genere aritmetico di F. Ne deriva pure $p_a=p$, in guisa che *la superficie F risulta regolare* [27].

2. — Vedremo più oltre che l'esempio adotto precedentemente dà la supeficie regolare più generale di genere lineare $p^{(1)}=1$, determinante uno e genere p $(=p_a=p_g)$.

Prima di arrivare a questo risultato fondamentale del presente lavoro, dimostreremo che *le superficie regolari di genere p rappresentabili sopra l'anzidetto cono doppio* Φ^{2p+2} *di* $[2p+3]$ *costituiscono una varietà* $C_1(p)$ *irriducibile, di dimensione* $10p+8$ *contenente come varietà subordinata le varietà di piani doppi studiate da* Enriques.

Osserviamo anzitutto che il cono Φ^{2p+2} si può supporre fisso, in quanto che due coni razionali normali generici di $[2p+3]$ sono proiettivamente equivalenti fra loro.

Si vede subito che la serie caratteristica del sistema $|\Delta|$ segato dalle forme del terz'ordine su Φ^{2p+2} è non speciale completa sulla generica Δ. Ne deriva che tali forme segano un sistema completo regolare di dimensione

$$18(p+1) - (6p+4) + 1 = 12p + 15$$

(26) Ciò che risulta direttamente dal fatto che il fascio $|C|$ è priva di curve spezzate.

(27) Lo si riconosce anche subito direttamente sul piano in virtù di un noto teorema di De Franchis.

Siccome due coni doppi di sostegno Φ^{2p+2} sono birazionalmente identici allora e allora soltanto che le rispettive curve Λ siano equivalenti rispetto al gruppo ∞^{2p+7} delle omografie che mutano Φ^{2p+2} in sè stesso, risulta (tenendo conto che tanto il sistema $|\Lambda|$ come la varietà delle trasformate di una generica Λ per le omografie del suddetto gruppo sono varietà algebriche irriducibili) in virtù di un noto criterio [28]

La totalità delle classi di coni doppi del tipo studiato birazionalmente identiche costituisce una varietà algebrica irriducibile.

Applicando il principio del computo di costanti [29] vediamo che la dimensione M di questa varietà è

$$M = 12p + 15 - (2p + 7) = 10p + 8 \quad [30]$$

3. — Secondo ENRIQUES [31] le superficie regolari di genere lineare $p^{(1)} = 1$ e determinante uno si classificano in due categorie di piani doppi I e II caratterizzati dalle seguenti curve di diramazione:

I. — Curva di diramazione D^{2n} d'ordine $2n$ dotata di un punto $(2n\text{-}3)$-plo: $D^{2n}(O^{2n-3})$. L'intero n è legato al genere p della superficie dalla relazione:

$$n = p + 2.$$

La totalità di questi piani doppi di dato genere p birazionalmente distinti costituisce una varietà algebrica irriducibile di dimensione $8p + 7$.

II. — Curva di diramazione D^{2n} ordine $2n$ con un punto $(2n\text{-}3)$-plo O ed un punto quadruplo B. Questa curva si spezza nella retta OB più una $D^{2n-1}(O^{2n-4}, B^3)$.

L'intero n è legato al genere p dalla relazione:

$$n = p + 3.$$

La totalità di questi piani doppi di dato genere p birazionalmente distinti è una varietà algebrica irriducibile di dimensione $8p + 6$ [32].

Dimostreremo che invece *questi piani doppi d'*ENRIQUES *riempiono varietà algebriche subordinate a quella dei nostri coni doppi* Φ^{2p+2} *di* $[2p+3]$. Basterebbe invero riconoscere che quelli di tipo I godono di questa proprietà giacchè vedremo tosto che quelli di tipo II di genere p costituiscono una varietà subordinata alla varietà dei coni dello stesso genere di tipo I.

Consideriamo un piano doppio di genere p del tipo I, osservando anzitutto alcune particolarità della curva di diramazione D^{2p+4} di questi piani che fanno sospettare l'appartenenza ad una varietà più ampia di superficie cogli stessi caratteri:

[28] V. ad es. le lezioni litografiche di SEVERI *Introduzione alla Geometria algebrica. Geometria numerativa.* Ed. Docet, Roma, 1947, fasc. I, pag. 158.

[29] V. loc. cit. precedentemente.

[30] V. la nota (5) al piè della pag. 2, nell'Introduzione.

[31] V. libro e nota lincea del 1914 citati in (1).

[32] Nel computo di costanti d'ENRIQUES vi è un errore. La dimensione della varietà dei piani doppi di tipo II di genere p è 8p+6 invece di 8p+5. V. la nota (23) al piè della pag. 13.

1°) Il genere della curva di diramazione $D^{2p+4}(O^{2p+1})$ è

$$\frac{(2p+3)(2p+2)}{2} - \frac{(2p+1)2p}{2} = 4p+3$$

mentre noi abbiamo visto che il genere di Δ per la superficie rappresentabile sul cono doppio Φ^{2p+2} era $6p+4$. Questa circostanza fà presumere che la curva Δ del cono Φ^{2p+2} doppio equivalente a $D^{2p+4}(O^{2p+1})$ possieda punti doppi (vedremo che accade così infatti).

2°) (Conseguenza della precedente). Il numero di rette per O tangenti altrove alla curva D^{2p+4} è diverso da $12(p+1)$. (numero di curve nodate del fascio $|C|$).

Applicando alla curva di diramazione $D^{2p+4}(O^{2p+1})$ di un piano doppio I una trasformazione di de Jonquières che muti la rete omaloidica delle curve

$$C^{2p+2}(O^{2p+1};\, O_1, O_2, \ldots, O_{2p+1};\, A_1, A_2, \ldots, A_{2p+1})$$

d'ordine $2p+2$ col punto base $(2p+1)$-plo O, $2p+1$ punti base O infinitamente vicini ad O nelle direzioni delle tangenti alla D^{2p+4} in O ed altri $2p+1$ punti base generici A_i (fuori della D^{2p+4}), nella rete delle rette del piano, la curva D^{2p+4} si muta in una curva d'ordine $6p+6$ del tipo:

$$C^{6p+6}(O'^{6p+3};\, O_1'^3, O_2'^3, \ldots, O_{2p+1}'^3;\, A_1'^2 A_1'^2 \ldots A_{2p+1}'^2) \tag{8}$$

dotata di un punto $(6p+3)$-plo O', $2p+1$ punti tripli infinitamente vicini ad O': $O_1', O_2', \ldots, O_{2p+1}'$ e $2p+1$ nodi ordinari $A', A_2', \ldots, A_{2p+1}'$. Questa curva è particolare fra quelle (2) considerate al n. 1 che danno la curva di diramazione più generale del piano doppio birazionalmente equivalente al cono doppio Φ^{2p+2} generico di $[2p+3]$.

Reciprocamente ogni curva del tipo (8) è cremonianamente equivalente ad una $D^{2p+4}(O^{2p+1})$ di diramazione di un piano doppio di tipo I d'Enriques. Riassumendo possiamo dire:

La varietà dei piani doppi I di genere p birazionalmente distinti è birazionalmente equivalente alla varietà [subordinata di $C_1(p)$] dei coni doppi la cui curva Δ possiede $2p+1$ nodi.

L'acquisto di un nodo della curva Δ è una condizione semplice imposta alla varietà $C_1(p)$. Ciò spiega la differenza di dimensione

$$10p+8-(8p+7) = 2p+1$$

fra la varietà $C_1(p)$ e quella dei piani doppi di tipo I, di genere p.

4\. — Per lo studio dei coni doppi di tipo II d'Enriques osserviamo anzitutto che la curva $D^{2n}(O^{2n-3}, B^4)$ si può considerare come proiezione stereografica di una curva appartenente ad una quadrica non specializzata Q, spezzata in una generatrice V passante per il punto O, più una curva generica $\overline{\Lambda}$ (e quindi irriducibile e priva di punti multipli) del sistema lineare completo

$$|3V + (2p + 2)R|$$

essendo $|R|$ l'altra schiera di generatrici di Q.

La retta OB del piano, che forma parte della curva di diramazione provviene dal centro di proiezione. Invece l'intorno del punto O che deve appartenere alla curva di diramazione si muta come abbiamo detto nella generatrice V della quadrica.

Le due componenti $\overline{V}, \overline{\Lambda}$ della curva di diramazione di Q hanno $2p+2$ punti comuni distinti: $P_1, P_2, \ldots, P_{2p+2}$.

Consideriamo su Q il sistema lineare ∞^{2p+3} delle curve $|V+(2p+2)R|$ a cui s'impongono i punti P_i come punti base. L'imagine proiettiva di questo sistema è un cono razionale normale di $[2p+3]$. La retta V si muta nell'intorno del vertice. La curva $\overline{\Lambda}$ si muta in una curva (che chiameremo ancora con Λ) non passante per il vertice, dotata di $2p+2$ punti doppi nei punti fondamentali omologhi delle generatrici passanti per i punti P_i.

Reciprocamente, se la curva di diramazione di un cono doppio Φ^{2p+2} di $[2p+3]$ della varietà $C_1(p)$ possiede $2p+2$ punti doppi, ponendo un'omografia fra il fascio $|G|$ d'iperpiani individuato dai $2p+2$ punti doppi e le generatrici di una schiera V di una quadrica non specializzata Q ed un'altra proiettività fra le generatrici del cono e quelle di un'altra schiera $|R|$ di Q si definisce una trasformazione birazionale fra Φ^{2p+2} e Q che associa un punto generico P del cono comune alle generatrici V,R della quadrica omologhe della curva G e la generatrice del cono passanti per P nelle due anzidette proiettività. In questa trasformazione birazionale la curva Λ di Φ^{2p+2} si muta in una curva spezzata in una generatrice $\overline{V}$ di $|V|$ più curva $\overline{\Lambda}$ generica del sistema $|3V+(2p+2)R|$. Proiettando stereograficamente sopra un piano da un punto generico di V si ottiene una curva di diramazione del tipo II d'Enriques.

La varietà dei coni doppi II di genere p birazionalmente distiti è birazionalmente equivalente alla varietà dei coni doppi di $C_1(p)$ la cui curva Λ possiede $2p+2$ nodi.

Ne segue, per quanto abbiamo visto per i piani doppi di tipo I che *la varietà dei piani di tipo II di genere p è birazionalmente equivalente ad una sottovarietà irriducibile di quella dei piani doppi I dello stesso genere.*

Una curva di diramazione di un piano di tipo II deve essere cremonianamente equivalente ad una curva di diramazione particolare di tipo I.

Per riconoscerlo osserviamo anzitutto che una generica trasformazione quadratica con due punti fondamentali in O,B muta la curva

$$D^{2p+6}(O^{2p+2};\ B^6)$$

di un piano doppio di tipo II di genere p in una curva spezzata in una curva del sistema lineare

(9) $$D^{2p+5}(O^{2p+3};\ B^5)$$

più una generica retta L per B imagine dell'unisecante U. La retta L sega la curva (9) fuori di B in $2p+2$ punti distinti $P_1, P_2, \ldots, P_{2p+2}$. Questa trasformazione birazionale è l'imagine piana di un'omografia della quadrica in sè che sposta la retta V fuori del centro della proiezione stereografica.

Una nuova trasformazione quadratica coi punti fondamentali O,B ed uno dei punti P_i (che supporrò sia P_1) muta la (9) in una curva del tipo:

$$D^{2p+4}\,(O'^{2p+1};\,B'^{2}) \tag{10}$$

mentre la retta L si muta nell'intorno di O'. I punti O',B' sono quelli fondamentali del secondo piano imagini di BP_1 e OP_1; il terzo punto fondamentale O'_1 è esterno alla (10). Reciprocamente una curva del tipo (10) si muta in una del tipo (9) mediante una trasformazione quadratica con due punti fondamentali in O,B ed un terzo in un punto generico O'_1 esterno alla (10). Riassumendo possiamo dire:

La curva di diramazione di un piano doppio II di genere p è cremonianamente equivalente ad una curva di tipo I con un punto doppio.

La dimensione delle varietà dei piani doppi di tipo II di genere p birazionalmente distinti è uguale a $8p+6$ $[=10p+8-(2p+2)]$. La presenza dei $2p+2$ punti doppi nella curva Δ del relativo cono doppio Φ^{2p+2} fa diminuire di $2p+2$ il numero $10p+8$ di dimensione della varietà. Si giunge alla stessa conclusione sul piano in quanto che l'imposizione di un punto doppio alla curva di tipo I fà diminuire di un'unità la dimensione $(=8p+7)$ dei piani doppi di tipo I birazionalmente distinti [33].

5. — Dopo gli sviluppi del n. precedente sorge spontanea la seguente questione: La varietà $C_1(p)$ esaurisce tutti i tipi di superficie regolari birazionalmente distinte di genere lineare $p^{(1)}=1$, determinante uno e genere p, oppure è contenuta in una varietà più ampia di superficie con i medesimi caratteri?

Prima di rispondere a questa domanda osserviamo anzitutto che la dimensione $10p+8$ di $C_1(p)$ supera il minimo di moduli da cui dipende una famiglia di superficie di generi p, $p^{(1)}$, trovato da ENRIQUES [34] essendo

$$10p+8 > 9p-2p^{(1)}+12 = 9p+10$$

La risposta alla domanda di cui sopra esige una analisi alquanto minuta e delicata; perciò voglio separare le ipotesi che conducono a questa conclusione per poter controllare più facilmente l'uffizio di ciascuna di esse.

(33) Secondo ENRIQUES (nota lincea cit. 1914, libro postumo, pag. 261) i piani doppi di tipo II costituiscono una varietà di dimensione $8p+5$ invece di $8p+6$. Vi è un errore che proviene dal fatto che ENRIQUES non ha tenuto conto che la trasformazione quadratica generica con punti fondamentali O,B muta la curva $D^{2n}(O^{2n-3};\,B^4)$ in un'altra curva dello stesso sistema *a cui deve aggiungersi la retta L* imagine dell'intorno del punto O che forma parte della curva di diramazione originaria. La questione si vede meglio sulla quadrica Q. Su le Q le curve $|\overline{V}+\Delta|$ di diramazione di tipo II costituiscono un sistema algebrico di dimensione $8p+12$. La totalità delle omografie che mutano la quadratica in sè è ∞^6, quindi la dimensione voluta è $8p+6$.

(34) V. ENRIQUES, libro postumo pag. 261. Non sussiste dunque il paradosso rilevato da ENRIQUES in quanto che le varietà di piani doppi I e II non sono *famiglie* di superficie di caratteri dati $(p^{(1)}=1, d=1, p_a=p_g=p)$ essendo come abbiamo visto ulteriormente ampliabili.

Abbiamo visto che la superficie generica della famiglia $\mathcal{C}_1(p)$ possiede un sistema canonico privo di parti fisse. Ne deriva che se esistesse una varietà irriducibile $\overline{\mathcal{C}_1(p)}$ più ampia, di superficie cogli stessi caratteri $q=0$, $p^{(1)}=1$, $d=1$, $p_a=p_g=p$), contenente la $\mathcal{C}_1(p)$ come varietà subordinata *il sistema canonico della superficie generica di* $\overline{\mathcal{C}_1(p)}$ *sarebbe privo di parti fisse.*

Questa semplice osservazione conduce alla conclusione che $\mathcal{C}_1(p)$ non è ulteriormente ampliabile. All'uopo dimostreremo che:

Ogni superficie regolare coi ricordati caratteri il cui sistema canonico puro sia privo di parti fisse e rappresentabile sopra un cono doppio della varietà $\mathcal{C}_1(p)$.

Vediamo intanto che il grado virtuale dell'unisecante U è uguale a $-(p+1)$. Infatti dall'equivalenza funzionale:

$$(U,U) \equiv (U',U) - (K,U)$$

(K curva canonica di F, U' curva aggiunta di U), risulta

$$K \equiv (p-1)C$$

in quanto che K è privo di parti fisse (ved. n. 1, pag. 9), e siccome

$$[U',U] = -2$$

essendo U una curva razionale, risulta,

$$[U,U] = -(p+1)$$

Ciò premesso, consideriamo il sistema lineare completo $\Gamma = |2U+(2p+2)C|$ possedente i caratteri virtuali seguenti:

Grado virtuale : $4p+4$
Genere virtuale: $3p+2$

La dimensione r di Γ soddisfa la disuguaglianza:

$$r \geqslant 4p+4-(3p+2)+p+1 = 2p+3 \tag{11}$$

in virtù del teorema di Riemann-Roch per le superficie (35).

D'altronde Γ contiene un sistema lineare subordinato ∞^{2p+2} di curve spezzate nella U contata due volte più $2p+2$ curve C e risulta quindi irriducibile.

Γ non può essere composto con un'involuzione più ampia di I. La curva U è fondamentale per Γ in quantochè non è curva fissa e soddisfa la relazione:

$$[U, 2U+(2p+2)C] = 0$$

(35) V. ad es. Severi, loc. cit. in (34), cap. VII, pag. 368 e seg.

Ne segue che il *sistema* Γ *è privo di punti base*. L'imagine proiettiva di Γ è una rigata razionale doppia Φ le cui generatrici passano per un punto V omologo della curva fondamentale U; Φ è dunque un cono d'ordine $2p+2$ (metà del grado virtuale $=4p+4$ di $|\Gamma|$). La sezione iperpiana generica di Φ è una curva razionale d'ordine $2p+2$. La serie caratteristica del sistema delle sezioni iperpiane di Φ è di dimensione $\geqslant 2p+2$ secondo la (11). D'altronde non può superare il grado $2p+2$ dunque:

Il sistema Γ è regolare completo di dimensione $2p+3$. Il cono Φ^{2p+2} è normale ed *appartiene* ad un $[2p+3]$.

E' ovvio che l'intorno del vertice V forma parte della curva di diramazione del cono doppio. Ci resta far vedere che essa si completa con una curva Δ intersezione del cono con una forma del terz'ordine di $[2p+3]$. All'uopo osserviamo che fra tutti i sistemi lineari completi del tipo $|3V+\lambda R|$ di trisecanti le generatrici del cono le intersezioni di esso con le forme F^3 dell'ambiente è caratterizzato dal fatto che la generica di esse non ha nessun punto comune con la curva infinitesima V (non passa per V) [36]. Bisogna e basta dunque dimostrare che Δ e V non possono avere un punto comune. Un tale punto sarebbe doppio per la curva di diramazione e potrebbe provenire soltanto dalla componente irriducibile ben determinata di una curva del fascio $|C|$ avente un solo punto comune con U; ciò non è possibile perchè un tale componente dovrebbe essere fondamentale per il sistema $|\Gamma|$ mentre una curva spezzata nell'unisecante U contata doppiamente ed una $(2p+2)$-pla di generatrici è bisecante di essa.

OSSERVAZIONE 1ª. — *Tutta l'argomentazione precedente deriva dal fatto che il grado virtuale di U sia* $-(p+1)$, che abbiamo dedotto supponendo che $|K|$ sia privo di parti fisse. Si giunge alla stessa conclusione se la parte fissa non ha nessun punto comune con U.

OSSERVAZIONE 2ª. — Tuttavia resta il dubbio che possa esistere una varietà di superficie F subordinata a $C_1(p)$ il cui sistema canonico possieda parti fisse ulteriormente ampliabile in una varietà irriducibile che esorbiti dalla $C_1(p)$. La rimozione di questo dubbio sarà lo scopo del seguente n.

6. — Per lo studio di una *qualsiasi* superficie regolare F di genere lineare assoluto $p^{(1)}=1$ e determinante uno giova considerare la rappresentazione di essa sopra un'imagine Ψ *priva di eccezioni* dell'involuzione I generata da un'unisecante irriducibile U delle curve del fascio $|C|$. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè Ψ sia birazionalmente equivalente senza eccezioni ad una rigata proiettiva è che il fascio $|C|$ di F sia privo di curve spezzate* [37]. Supponendo prima che $|C|$ sia privo di curve spez-

[36] Ciò è una conseguenza immediata del fatto che la direttrice infinitesima V ed una generatrice R costituiscono una base minima per la totalità delle curve tracciate sul cono. Ogni trisecante delle generatrici appartiene ad un sistema lineare della forma $|3V+\lambda R|$. Se questa trisecante ha un numero virtuale nullo di intersezioni con V dev'essere $\lambda=6p+6$ essendo $-(2p+2)$ il grado virtuale di V. Siccome $|V+(2p+2)R|$ è il sistema lineare delle sezioni iperpiane del cono ne segue ovviamente l'affermazione.

[37] V. SEVERI, loc. cit. in [19].

zate e assumiamo come modello di Ψ una rigata proiettiva. Se V è la componente della curva di diramazione di Ψ omologa di U, un sistema lineare completo di direttrici del tipo $|V+\lambda R|$ con λ abbastanza alto e privo di punti base, semplice e privo di curve fondamentali. L'imagine proiettiva di esso è ancora un modello birazionalmente equivalente senza eccezioni a Ψ. Supporremo quindi in seguito che Ψ possieda addirittura come sistema di sezioni iperpiane il sistema completo $|V+\lambda R|$. Questo sistema $|V+\lambda R|$ ha come imagine nella superficie F un sistema lineare completo, privo di punti base, di bisecanti le curve del fascio $|C|$ della forma $|2U+\lambda C|$.

Vediamo ora quali modificazioni bisogna fare nel caso che $|C|$ possieda curve spezzate. Sulla superficie Ψ imagine senza eccezioni di I la curva di diramazione è priva di punti multipli ([28]) e quindi è irriducibile o spezzata, sconnessa, essendo tutte le componenti connesse irriducibili e prive di punti multipli. In particolare la curva V imagine di U è sconnessa col resto Δ della curva di diramazione. Il suo grado virtuale è un numero pari -2λ $(\lambda > 0)$. Il sistema completo $|V+2\lambda R|$ contiene come parte il sistema delle curve spezzate in V più un gruppo di 2λ generatrici. *In questo caso però il sistema $|V+2\lambda R|$ possiede necessariamente curve fondamentali.* Per vederlo distinguiamo in una generatrice spezzata R due componenti R_1 ed R_2: $R = R_1 + R_2$. La prima R_1 necessariamente irriducibile che chiameremo *componente principale* è caratterizzata dal possesso di un (unico) punto comune con U e il resto R_2 che chiameremo componente secondaria che può essere comunque spezzata. Una curva spezzata in V più un gruppo di 2λ generatrici generiche sega R_1 in un punto; ne segue che la curva generica di $|V+2\lambda C|$ sega R_1 in un solo punto e quindi che R_2 è *una curva fondamentale di quel sistema. La curva Δ deve segare R_2 in due punti almeno.* Supponiamo che Δ non seghi R_2. Allora l'imagine di R_2 in F sarebbe di genere virtuale -1, spezzata in due curve di genere virtuale zero (non necessariamente irriducibili), prive di punti comuni, coniugate nella involuzione I. Ma questo è assurdo perchè ognuna di queste curve sarebbe allora una curva eccezionale di prima specie, contro l'ipotesi che F è priva di tali curve. Ne segue che l'imagine proiettiva di $|V+2\lambda R|$ che è un cono razionale normale $\Phi^{2\lambda}$ di $[2\lambda+1]$ non è più un'imagine senza eccezioni dell'involuzione I, le eccezioni possono provenire soltanto dai punti multipli della curva di diramazione, imagini delle componenti secondarie delle curve spezzate del fascio $|C|$, che sono fondamentali per il sistema $|V+2\lambda R|$. Questi punti multipli appartengono necessariamente alla curva trasformata di quella Δ di Ψ (che chiameremo con la stessa lettera Δ). Questa curva Δ non passa per il vertice del cono ed è una trisecante delle generatrici. Queste due proprietà bastano ad assicurare che essa è l'intersezione del cono con una forma cubica dell'ambiente, che non sarà più generica dovendo essere tangente al cono nei punti multipli di Δ ([29]).

Per sciogliere il dubbio espresso nell'Osservazione 2ª del n. precedente basterebbe dimostrare che $\lambda = p+1$ cioè che lo spezzamento di una curva di C non cambia il genere (aritmetico = geografico) della superficie. All'uopo calcoleremo l'invariante di Zeuthen-Segre di F sui modelli Ψ e Φ. Mentre, nel caso che $|C|$ non possieda curve spezzate, tutte le curve nodate del fascio $|C|$ provenivano da generatrici di Ψ (o ciò

([28]) V. Gaeta, loc. cit. in (*).
([29]) Cfr. l'osservazione della nota ([26]).

che è lo stesso di Φ) tangenti alla curva Λ, qui dobbiamo distinguere i nodi appartenenti ad una componente di una curva spezzata C (non necessariamente irriducibile) mutata in sè dall'involuzione I e non ulteriormente ampliabile come tale, da quelli di connessione di due componenti appartenenti ad I di cui non si possa sopprimere una parte senza che si perda la proprietà della curva di appartenere all'involuzione.

Dimostreremo che *il contributo dei nodi di connessione appartenenti ad una curva spezzata $\overline{C}$ di $|C|$ nel computo dell'invariante di* Zeuthen-Segre *della superficie F a partire del fascio $|C|$ è uguale al doppio del numero di punti doppi a cui equivale il punto multiplo O della curva Λ relativo a $\overline{C}$ nella valutazione del genere effettivo di Λ.* Ne segue, che il contributo complessivo dei nodi di connessione nel computo delle curve nodate del fascio $|C|$ è uguale al doppio della differenza fra il genere virtuale ed il genere effettivo della curva Λ. Tenendo conto che il numero dei punti doppi della g_2^1 segnata dalle generatrici del cono Φ sulla curva Λ di genere effettivo π è $2\pi+4$ risulta, in definitiva, che il numero di curve nodate di $|C|$ sarà uguale al numero di punti doppi di una g_2^1 sopra una curva di genere uguale al genere virtuale di Λ sul cono. Questo genere virtuale dev'essere uguale a $6p+4$ essendo $12(p+1)$ il numero delle curve nodate di $|C|$.

Un punto multiplo ordinario di Λ sul cono Φ può essere un punto doppio od un punto triplo. Esaminiamo prima il caso di un nodo ordinario e di una cuspide ordinaria e poi quello di un punto triplo ordinario per passare poi al caso generale.

Sia O un nodo ordinario della curva Λ del cono. Il punto O procede dalla componente secondaria C_2 di una generatrice spezzata $\overline{R}$ della superficie Ψ la quale alla sua volta rappresenta biunicamente senza eccezioni le coppie di punti coniugati in I appartenenti ad una componente C_2 di una curva spezzata $\overline{C}$ di $|C|$. La componente secondaria R_2 di $\overline{R}$ risulta irriducibile, priva di punti multipli e bisecata dalla Λ. R_1 ed R_2 hanno un punto comune. L'imagine di $\overline{R}$ su F sarà dunque una curva $\overline{C}$ spezzata in due curve razionali C_1 e C_2 irriducibili con due punti comuni (coniugati nell'involuzione I). *Il contributo di $\overline{C}$ nel computo delle curve nodate di $|C|$ è uguale a due* secondo una nota formula di Godeaux [40] d'accordo con quanto abbiamo detto. Se O fosse una cuspide ordinaria la curva Λ di Ψ sarebbe tangente alla componente secondaria R_2. Su F la componente secondaria C_2 si spezza in due curve razionali coniugate in I aventi un punto comune (doppio per la curva complessiva) corrispondente al punto di contatto di R_2 con Λ su Ψ.

Consideriamo ora invece un punto triplo ordinario O della curva Λ del cono. La imagine proiettiva di un sistema lineare semplice abbastanza ampio avente in O un punto base ordinario muta Φ in una superficie $\overline{\Phi}$ in cui O si è trasformato in una curva eccezionale di prima specie $\overline{\omega}$ trisecata dalla curva $\overline{\Lambda}$ trasformata di Λ considerando il punto O come assegnato. Ne segue che $\overline{\omega}$ avendo un numero dispari di punti comuni con $\overline{\Lambda}$ deve formar parte della curva di diramazione [41]. La curva di

[40] *Sur le calcul de l'invariant de* Zeuthen-Segre. Mémoires de la societé des sciences de Hainaut, t. 66, 1920. Per altre notizie sull'argomento v. Enriques, libro postumo, pag. 172.

[41] Cfr. il libro di Conforto citato in [22], pag. 396.

diramazione di $\bar{\Phi}$ possiede tre nodi ordinari P_1, P_2, P_3 nei punti d'incrocio di $\bar{\omega}$ col resto della curva di diramazione. Trasformando questi tre punti in curve eccezionali di prima specie irriducibili mediante un sistema lineare opportuno avente ivi tre punti base semplici, otteniamo una nuova superficie $\bar{\bar{\Phi}}$ birazionalmente equivalente a $\bar{\Phi}$ sulla quale la curva $\bar{\omega}$ si muta in una componente $\bar{\bar{\omega}}$ sconnessa dal resto della curva di diramazione, di grado -4. I punti P_1, P_2, P_3 di $\bar{\Phi}$ diventano tre curve eccezionali $\bar{\bar{\omega}}_1, \bar{\bar{\omega}}_2, \bar{\bar{\omega}}_3$ sconnesse fra loro ed unisecanti $\bar{\bar{\omega}}$. Sulla superficie obiettiva F la curva $\bar{C}$ appare costituita dalla componente principale C_1, razionale e irriducibile, più una curva razionale doppia Ω che forma parte della curva di coincidenza di I, più tre curve razionali irriducibili Ω_1, Ω_2, Ω_3, sconnesse fra loro ed unisecanti Ω. In simboli:

$$(12) \qquad [C_1, \Omega] = 1;\ [C_1, \Omega_i] = 0\ (i = 1, 2, 3);\ [\Omega, \Omega_i] = 1\ [\Omega_i, \Omega_j] = 0\ i \neq j$$

Secondo la ricordata formula di GODEAUX il contributo di $\bar{C}$ al computo dell'invariante di ZEUTHEN-SEGRE è uguale a

$$(1-1)(-2) + (2-1)(-2) + 1.(1+2-1) + 3.0.(1+1-1) + 3.1.(2+1-1) + 3.0.(1+1-1) = 6$$

d'accordo col fatto che un punto triplo ordinario equivale a tre nodi ordinari.

Consideriamo ora il caso di una curva Λ sul cono Φ con singolarità arbitrarie. E' noto come si possono sciogliere le singolarità della curva mediante trasformazioni birazionali della superficie F, che mutano i punti multipli propri di Λ in curve eccezionali della superficie trasformata, e quelli infinitamente vicini nell'intorno del prim'ordine in singolarità proprie... e infine quelli dell'intorno i-esimo in singolarità dell'intorno (i-1)-esimo della trasformata. Applicando questo processo un numero finito di volte si ottiene un modello di Φ sul quale Λ possiede singolarità ordinarie. Ne deriva facilmente il teorema, mediante un processo ricorrente sul quale non vogliamo indugiarci.

CAPITOLO II.

Superficie di determinante due

§ 1. — SUPERFICIE CON DIVISIONE UNIVOCA

7. — L'esistenza di superficie regolari di determinante due per tutti i valori del genere p è assicurata dai tipi trovati da ENRIQUES [42]. Egli osservò che vi sono famiglie di superficie di determinante due, tali che la generica di esse gode della proprietà che il fascio $|C|$ possiede un numero finito s di curve spezzate con un'unica componente irriducibile ellittica che contata due volte esaurisce la curva totale del fascio [43].

[42] V. il libro postumo più volte citato, pag. 262.

[43] Questo caso si presentò ad ENRIQUES per la prima volta studiando la superficie che porta il suo nome, sulla quale, in ogni fascio di curve ellittiche vi sono due $(s=2)$ curve spezzate in una componente ellittica doppia (ved. pure la sua memoria *Sulle superficie algebriche di bigenere uno*, Mem. soc. italiana delle scienze (detta dei XL), 1906, libro postumo, Cap. VII, pag. 295.

In questo § studieremo le famiglie di superficie regolari di genere lineare $p^{(1)} = 1$, di determinante due sulle quali non si presenta questa circostanza, cioè per le quali è $s = 0$. Come nel caso delle superficie di determinante uno considereremo prima il caso particolare, che il fascio $|C|$ sia privo di curve spezzate. Questo caso conduce come allora alle superficie che avremo più tardi il diritto di chiamare *a moduli generali*.

Il grado virtuale m di una bisecante qualsiasi B delle curve C è uguale alla differenza $m = 2\pi - 2p$ essendo π il genere virtuale di B. Infatti questa relazione è la traduzione numerativa dell'equivalenza:

$$(B,B) \equiv (B', B) - (K,B) \qquad \text{(K curva canonica)}$$

essendo $[B', B] = 2\pi - 2$, $[K, B] = 2(p-1)$.

La dimensione r del sistema lineare completo non speciale $|B|$ soddisfa la disuguaglianza:

$$r \geqslant m - \pi + p + 1 = 2(\pi - p) - \pi + p + 1 = \pi - p + 1$$

Supponiamo in seguito che B sia una bisecante di grado virtuale minimo. Allora la dimensione del sistema lineare completo $|B|$ è ≥ 1. Altrimenti si potrebbe staccare dal sistema stesso una curva spezzata in una curva C più una bisecante di grado virtuale inferiore al minimo ([44]).

Risulta dunque: $\pi - p \leq 0$ ossia $m = 2(\pi - p) \leq 0$.

Distingueremo i casi $m = 0$ ed $m > 0$: chiameremo con ν l'intero non negativo $\nu = p - \pi$ in guisa che sussista la relazione:

$$m = -2\nu$$

8. — *Primo caso*: $m > 0$ $(\nu > 0)$.

Il grado virtuale -2ν di B è negativo, quindi *B è linearmente isolata.*

Fra i sistemi lineari completi di bisecanti del tipo $|B + \lambda C|$ ve ne è uno ben determinato irriducibile, privo di punti base ∞^2 almeno ed avente la curva B come fondamentale. La condizione necessaria e sufficiente affinchè sia

$$[B + \lambda C, B] = 0$$

è evidente che: $m = -\lambda[B,C] = -2\lambda$ ossia $\lambda = \nu$.

In virtù del teorema di Riemann-Roch per le superficie, la dimensione virtuale del sistema $|B + \nu C|$ è

$$2\nu - (2p - \pi) + p + 1 = p - \pi + 1 = \nu + 1 \geqslant 2$$

in quanto che il grado virtuale di esso è 2ν e il genere virtuale $2p - \pi$.

D'altronde il sistema $|B + \nu C|$ contiene quello delle curve spezzate nella B più il sistema completo $|\nu C|$ di dimensione ν. Ne deriva che *$|B + \nu C|$ è irriducibile ed ha la*

([44]) Si osservi che con argomentazione perfettamente analoga si dimostra in generale che: *la dimensione di un sistema lineare completo di d-secanti le curve di un fascio $|C|$ di curve ellittiche appartenente ad una superficie (regolare o irregolare) col $p^{(1)} = 1$ di determinante d non può superare d-1.*

curva B come fondamentale. Siccome gli eventuali punti base di $|B+\nu C|$ debbono appartenere alla curva B risulta che *questo sistema è privo di punti base*.

Facciamo l'imagine proiettiva del sistema $|B+\nu C|$. L'ordine delle curve trasformate è uguale a ν, metà del grado 2ν del sistema. Siccome la dimensione del sistema $|B+\nu C|$ è $\geqq \nu+1$ la dimensione della serie caratteristica del sistema trasformato sarà $\geqq \nu$ ma siccome essa non può superare l'ordine ν risulta che:

Il sistema lineare completo $|B+\nu C|$ è regolare di dimensione $\nu+1$.

L'imagine proiettiva Φ^ν del sistema $|B+\nu C|$ è un cono razionale normale doppio di $[\nu+1]$. L'intorno del vertice è l'imagine della bisecante B. Le generatrici del cono sono le imagini delle curve del fascio $|C|$.

La sezione iperpiana generica di Φ^ν è dunque una curva razionale del suo $[\nu]$.

Per individuare la rappresentazione di F sul cono doppio basta caratterizzare la relativa curva di diramazione. All'uopo considereremo prima la curva di coincidenza D dell'involuzione I sulla superficie obiettiva F.

L'involuzione I individuata dalla bisecante B induce sulla curva generica del fascio C una g_2^1 il cui gruppo Jacobiano intersezione della curva D con C soddisfa la equivalenza:

$$(D,C) \equiv 2(B,C)$$

dalla quale si trae, applicando il criterio d'equivalenza di SEVERI più volte citato:

$$D \equiv 2B + \lambda C$$

Per determinare λ osserveremo che D sega B in un gruppo di $2\pi+2$ punti di coincidenza dell'involuzione I, quindi:

$$\lambda = 2p - \pi + 1$$

in conseguenza, possiamo dire che *la curva di coincidenza D di I soddisfa l'equivalenza lineare*:

$$D \equiv 2B + (2p - \pi + 1)C$$

Ne deriva che *sul cono doppio Φ^ν la curva di diramazione Δ soddisfa l'equivalenza lineare*:

$$\Delta \equiv 4V + (4p - 2\pi + 2)R \tag{13}$$

dove chiameremo con V la curva infinitesima costituita dall'intorno del vertice e con $|R|$ il fascio delle generatrici del cono.

I risultati precedenti si possono invertire facilmente:

Ogni cono razionale normale doppio d'ordine ν di $[\nu+1]$ la cui curva di diramazione sia una quadrisecante le generatrici generica entro il sistema $|\Delta|$ [cfr. formula (13)] *rappresenta una superficie regolare di $p^{(1)}-1$ di determinante due, genere p la cui curva bisecante di grado minimo è di genere virtuale π.*

L'esistenza del cono doppio si riconduce ovviamente a quella di un piano doppio birazionalmente equivalente mediante la considerazione di una rappresentazione piana del cono.

Risulta dunque che i caratteri p, π sono indipendenti e possono prendere valori arbitrari purchè si verifichi sempre $p \geqslant \pi$.

9. — Siccome due coni razionali normali generici Φ^{ν} di $[\nu+1]$ sono omografici fra loro, possiamo fare la rappresentazione doppia di tutte le superficie regolari coi medesimi caratteri ($p^{(1)}=1$, $q=0$, $d=2$, $s=0$, genere p, genere virtuale minimo delle bisecanti $=\pi$) sopra un medesimo cono Φ^{ν}.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè due coni doppi su Φ^{ν} rappresentino superficie birazionalmente identiche è che le loro curve di diramazione Δ siano equivalenti rispetto al gruppo $\infty^{\nu+5}$ delle omografie di $[\nu+1]$ che mutano in sè il cono.

La totalità delle curve Δ di Φ^{ν} costituisce il sistema lineare completo $|\Delta|$ che è regolare, non speciale, e possiede i seguenti caratteri virtuali:

Grado:

$$[\Delta, \Delta] = -16\nu + 8(4p - 2\pi + 1) = 8(4p - 2\pi + 2) - 16(p - \pi) = 16(p + 1).$$

Genere:

$$-6\nu - 3 - (4p - 2\pi + 2) + 1 + 4(4p - 2\pi + 2) - 1 = 3(4p - 2\pi + 2) - 6(p - \pi) - 3 = 6p + 3.$$

d'accordo col fatto che vi sono $2 . 4 + 2 . (6p+2) = 12(p+1)$ generatrici tangenti alla curva di diramazione, essendo $12(p+1)$ il il numero di curve nodate del fascio $|C|$.

Ne segue che la dimensione del sistema regolare completo $|\Delta|$ è:

$$16(p+1) - (6p+3) + 1 = 10p + 14$$

Come nel n. 2 per le superficie di determinante uno si conclude che la totalità delle classi di superficie regolari birazionalmente identiche, coi caratteri $p^{(1)}=1$, $d=2$, p, π rappresentate su coni doppi di questo tipo costituisce una varietà algebrica irriducibile, che chiameremo $C_2(p,\pi)$ di dimensione

$$M = 10p + 14 - (p - \pi + 5) = 9p + \pi + 9 \tag{14}$$

Queste varietà non sono ulteriormente ampliabili conservando i suddetti caratteri. Lo si riconosce come nel n. 5 osservando che la superficie generica di ogni varietà irriducibile contenente $C_2(p,\pi)$ possiede un fascio $|C|$ privo di curve spezzate e quindi è necessariaente rappresentabile sopra un cono doppio Φ^{ν} di $C_2(p,\pi)$. Tuttavia si può fare l'obiezione dell'osservazione 2ª del n. 5, pag. 13, che considereremo dopo di avere studiato pure il caso $m=0$.

10. — *Secondo caso*: $m = 0$ $(\nu = 0)$.

Nel caso $\nu = 0$ il sistema lineare $|B|$ delle bisecanti di grado virtuale minimo $(m = 0)$ è ∞^1 almeno e siccome non può essere di dimensione superiore (cfr. n. 7, pag. 16) risulta che:

$|B|$ è un fascio lineare irriducibile, privo di punti base di curve di genere virtuale p uguale al genere (aritmetico = geometrico) della superficie.

Infatti una curva B non può spezzarsi in due unisecanti essendo F per ipotesi di determinante due. D'altronde non si può staccare da B una zerosecante le C, cioè una curva fondamentale perchè essa sarebbe composta con curve di C ed il resto sarebbe una bisecante di grado negativo contro l'ipotesi che le B sono bisecanti di grado virtuale minimo.

La superficie F con $\nu = 0$ si può rappresentare senza eccezioni [43] *sopra una quadrica doppia non specializzata Φ^*.* Basta perciò porre due proiettività fra i fasci $|C|$ e $|B|$ e le due schiere rigate della quadrica.

La curva di coincidenza dell'involuzione I, che qui non è altro che la curva di contatto dei due fasci soddisfa come sempre l'equivalenza (13) essendo applicabile l'argomentazione svolta nel caso $m > 0$. Avuto conto del fatto che $p = \pi$ risulterà in questo caso:

$$D \equiv 2B + (p + 1)C$$

sulla superficie F. Di conseguenza la curva di diramazione Δ' sulla quadrica Φ^* soddisferà l'equivalenza lineare:

$$\Delta \equiv 4V + (2p + 2)R \tag{14}$$

chiamando ancora con V le generatrici omologhe delle B e con R quelle omologhe delle C:

La curva di diramazione Δ della quadrica doppia Φ^* è una curva quadrisecante le generatrici R e $(2p+2)$-secanti le generatrici V.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè Δ sia priva di punti multipli è che il fascio $|C|$ sia privo di curve spezzate.

Reciprocamente una quadrica doppia con una siffatta curva di diramazione possiede i caratteri richiesti, cioè il genere aritmetico (= geometrico = genere delle curve B) può assumere qualsiasi valore positivo.

Come nel caso $\nu > 0$, si osserva che tutte le superficie con $\nu = 0$, e genere p si possono rappresentare sulla stessa quadrica non specializzata Φ^*, e che due quadriche doppie su Φ^* danno luogo alla medesima superficie allora e allora soltanto che le due curve Δ siano equivalenti rispetto al gruppo ∞^6 delle omografie che mutano in sè la quadrica. Ne segue che *le superficie coi caratteri $\nu = 0$, p rappresentabili sopra una quadrica doppia siffatta costituiscono una varietà algebrica $C_2(p,p)$ irriducibile non ulteriormente ampliabile, di superficie coi medesimi caratteri.*

[43] Come nel caso $d = 1$ si osserva che la mancanza di eccezioni proviene essenzialmente dall'ipotesi che il fascio $|C|$ è privo di curve spezzate.

Il numero di moduli della famiglia $C_2(p,p)$ si calcola osservando che il sistema lineare $|A|$, di grado virtuale $[A,A]=8(2p+2)=16(p+1)$ e genere virtuale $6p+3$, ha la dimensione

$$16(p+1)-(6p+3)+1=10p+14$$

Le omografie che mutano in sè la quadrica sono ∞^6 quindi il numero di moduli M che cerchiamo è

$$M=10p+8. \tag{15}$$

Proiettando stereograficamente Φ^v da un punto generico sopra un piano generico la quadrica doppia si muta in un piano doppio con curva di diramazione d'ordine $2p+6$, con un punto $(2p+2)$-plo O ed un punto quadruplo A e priva di altre singolarità. Questi piani doppi sono quelli che Enriques, nel suo libro postumo, chiama di tipo II' (46).

11. — La superficie generica F della famiglia $C_2(p,\pi)$ possiede una bisecante B di grado minimo m di genere virtuale π; è facile immaginare che al variare di F entro la famiglia la bisecante B possa spezzarsi sopra una particolare $\bar{F}$ in una bisecante $\bar{B}$ di grado $\bar{m}$ minore di m più una curva del fascio $|C|$. Se così fosse siccome le curve C di F bisecano B il grado virtuale di $\bar{B}+C$ sarebbe $\bar{m}+4=m$; analogamente si vede che il genere virtuale di $\bar{B}$ sarebbe $\pi-2$. Se questa specializzazione si presenta è ovvio che la famiglia $C_2(p,\pi-2)$ riempie una varietà subordinata di quella $C_2(p,\pi)$. Applicando successivamente queste considerazioni si otterrebbero due famiglie di superficie di determinante due, $s=0$ e genere p non ulteriormente ampliabili, quella $C_2(p,p)$ e $C_2(p,p-1)$ tutte due dipendenti da $10p+8$ moduli [ved. la formula (15) e quella (14) per $\pi=p-1$].

La famiglia $C_2(p,p)$ coincide con quella dei piani doppi di tipo II' d'Enriques come abbiamo detto. Quella $C_2(p,p-1)$ conduce ad un Φ^1 doppio, cioè ad un piano doppio sul quale la rappresentazione della superficie a moduli generali non possiede eccezioni all'infuori del punto 2p-plo O della D^{2p+4} di diramazione, il cui intorno del prim'ordine è in corrispondenza [1,2] coi punti della bisecante B di grado -2. *Questi piani doppi coincidono con quelli di tipo I' d'*Enriques (47).

Dimostreremo in seguito la possibilità di tali spezzamenti della curva B quando F varia in $C_2(p,\pi)$. All'uopo premetteremo talune considerazioni sulle famiglie di coni razionali normali di $[v+1]$.

Abbiamo già accennato al fatto che la corrispondenza birazionale tra le coppie di punti coniugati nell'involuzione I appartenente alla superficie generica F della famiglia $C_2(p,\pi)$ ed i punti del cono Φ^v $(v=p-\pi)$ di $[v+1]$ non possiede eccezioni all'infuori del vertice del cono che si muta nella bisecante di grado minimo B. Una qualsiasi rigata della stessa *specie* del cono Φ^v sulla quale la direttrice V corrispondente al vertice non sia più infinitesima darà luogo ad una rappresentazione di F

(46) V. Enriques, libro citato, pag. 262.
(47) Ibidem, pag. 262.

assolutamente priva di eccezioni. Il modello più semplice di una tale superficie che sia una rigata proiettiva normale sulla quale la direttrice V sia una retta è l'imagine proiettiva del sistema lineare completo irriducibile semplice $|V+(\nu+1)R|$ di grado $\nu+2$ e dimensione $\nu+3$ [48]. Essa è una rigata razionale normale di $[\nu+3]$ con una unica direttrice rettilinea V di grado virtuale $-\nu$. Queste rigate non esauriscono la totalità delle rigate razionali normali di $[\nu+3]$ per $\nu>0$; esse costituiscono invece una varietà subordinata di rigate che chiameremo *pseudoconiche* [49].

Si riconosce agevolmente che la varietà delle rigate razionali pseudoconiche $R^{\nu+2}$ di $[\nu+3]$ contiene come varietà subordinata quella dei coni razionali $\Phi^{\nu+3}$ di $[\nu+3]$ sui quali la direttrice V diventa infinitesima [50].

Queste considerazioni giustificano pienamente le nostre asserzioni e possiamo dire che:

La superficie generica della famiglia $C_2(p,\pi)$ è birazionalmente equivalente senza eccezioni ad una rigata razionale normale pseudoconica doppia $R^{\nu+2}$ di $[\nu+3]$ la cui curva di diramazione irriducibile e priva di punti multipli appartiene al sistema lineare $|V+(\frac{1}{2}p-2\pi+2)R|$ (V direttrice rettilinea, R generatrice).

La famiglia $C_2(p,\pi)$ rispetto ai caratteri $p^{(1)}=1$, $d=2$, $\delta=0$, p,π contiene come varietà subordinata quella $C_2(p,\pi-1)$.

Si vede dunque classificando le superficie rispetto ai caratteri $q=0$, $p^{(1)}=1$, $d=2$, $s=0$, p unicamente *non vi sono altre famiglie oltre a quelle $C_2(p,p-1)$ (piani doppi di tipo I') e $C_2(p,p)$ (piani doppi di tipo II')* d'Enriques *tutte e due dipendenti da $10p+8$ moduli* [51].

Le superficie della famiglia $C_2(p,p-1)$ si caratterizzano dal fatto che il genere virtuale della bisecante di grado minimo è di diversa parità che il genere p, essendo uguale a $p-1$ per la superficie a moduli generali. Le superficie della famiglia $C_2(p,p)$ invece hanno una curva B di genere virtuale della stessa parità di p; esso è uguale a p per la superficie a moduli generali sulla quale le curve B costituiscono un fascio lineare privo di base.

OSSERVAZIONE 1ª. — Il metodo d'Enriques per arrivare alla classificazione delle superficie regolari di determinante due consiste sostanzialmente nell'osservare

(48) V. Severi, loc. cit. in (19).

(49) Quando si assume come imagine piana delle sezioni iperplane di Φ^{ν} il sistema lineare $C^{\nu+1}(O^{\nu};\overline{A_1,\dots,A_{\nu+1}})$ (A_i punti appartenenti ad una medesima retta L) l'imagine del sistema $|V+(\nu+1)R|$ di Φ^{ν} è il sistema $C^{\nu+2}(O^{\nu+1};\overline{A_1,\dots,A_{\nu+1}})$ la cui imagine proiettiva è una rigata razionale normale pseudoconica di $[\nu+3]$. Il fatto che i punti A siano allineati ci dice che per $\nu>1$ le rigate pseudoconiche sono particolari.

(50) Consideriamo $\nu+1$ rette distinte $r_1, r_2, \dots, r_{\nu+1}$ uscenti da un medesimo punto O del piano ed una retta L variabile segante le r_i nei punti O_i. Quando L tende a passare per O il sistema $C^{\nu+2}(O^{\nu+1};\overline{O_1,\dots,O_{\nu+1}})$ tende a quello $C^{\nu+2}(O^{\nu+1};O_1,O_2,\dots,O_{\nu+1})$ coi punti O_i infinitamente vicini ad O nelle direzioni r_i che rappresenta un cono razionale normale di $[\nu+3]$.

(51) In un lavoro in preparazione ho classificato vari tipi di superficie regolari col $p^{(1)}=1$ dotate di un fascio $|C|$ di curve ellittiche privo di curve spezzate di genere p, di determinante $d=3,4$ ottenendo sempre come numero di moduli $10p+8$. Ho ragioni da ritenere che il numero di moduli di una famiglia di superficie regolari col $p^{(1)}=1$ dotata di un fascio $|C|$ privo di curve spezzate $(s=0)$ di genere p e determinante d qualsiasi dipenda sempre da $10p+8$ moduli.

che una tale superficie è rappresentabile sopra un piano doppio con curva di diramazione D^{2n} possedente un punto 0 $(2n-4)$-plo. Affinchè l'ordine della curva di diramazione non possa essere abbassato applicando opportune trasformazioni quadratiche, egli osserva che essa dev'essere dei tipi I' o II'. Con questo metodo non si vede che le D^{2n} siffatte corrispondano a superficie a moduli generali delle rispettive famiglie. Anzi, abbiamo visto che lo stesso metodo applicato alle superficie di determinante uno conduce a errore. La ragione per cui il metodo d'Enriques non dà luogo a errori per $d=2$ deriva dal fatto che queste superficie si rappresentano birazionalmente senza eccezioni sopra una rigata cubica doppia di S_4 o sopra una quadrica non specializzata. Passando da queste superficie ai relativi piani doppi I' o II' la curva di diramazione trasformata non possiede altre singolarità che il punto $(2n-4)$-plo immagine della direttrice rettilinea della rigata cubica oppure del punto $(2n-4)$-plo più il punto quadruplo per i piani II'. Invece nel caso delle superficie di determinante uno il piano doppio equivalente ad un cono doppio imagine senza eccezioni essenziali dell'involuzione I, possiede una curva di diramazione dotata di singolarità non influenti nel computo di moduli delle quali Enriques aveva fatto a meno (cfr. nn. 3 e 4).

OSSERVAZIONE 2ª. — Si presenta anche qui il dubbio analogo a quello espresso nell'osservazione 2ª alla fine del n. 5, Cap. I, che si rimuove con lo stesso metodo. Si osservi qui che le singolarità ordinarie che può acquisire la curva di diramazione Δ sul cono Φ^V sono:

1°. — Un nodo ordinario che dà luogo ad una curva C spezzata in due componenti razionali irriducibili, coniugate in I aventi una coppia di punti coniugati in comune.

2°. — Un punto triplo che dà luogo ad una curva spezzata in una curva razionale semplice C_1, più una curva razionale doppia Ω (con $[C,\pi]=1$) più tre curve razionali sconnesse fra loro e con la curva C, aventi ciascuna un punto comune con Ω.

3°. — Un punto quadruplo che dà luogo ad una curva C irriducibile, ma fa diminuire di un'unità il genere p della superficie.

OSSERVAZIONE 3ª. — Le superficie delle famiglie $C_2(p,p-1)$ o $C_2(p,p)$ non appartenenti a famiglie $C_2(p,\pi)$ con $\pi<p-1$ si caratterizzano dalla proprietà che *tutti i sistemi lineari completi di bisecanti tracciate su esse sono regolari.*

Osserviamo infatti che la dimensione virtuale di un sistema completo $|B|$ qualsiasi di bisecanti di genere virtuale g e grado virtuale $2(g-p)$ è secondo il teorema di Riemann-Roch:

$$2(g-p)-g+p+1=g-p+1$$

Sopra una superficie generica di una famiglia $C_2(p,\pi)$ con $\pi<p-1$ la bisecante B di grado minimo è linearmente isolata e la dimensione virtuale del sistema B è negativa.

Invece per le superficie di $C_2(p,p-1)$ o $C_2(p,p)$ che non appartengono ad una famiglia $C_2(p,\pi)$ con $\pi<p-1$ si riconosce la regolarità di tutti i sistemi suddetti sopra la relativa superficie doppia imagine senza eccezioni di I.

§ 2. — Superficie con $s > 0$

12. — Considereremo ora le superficie regolari di determinante due il cui fascio $|C|$ possieda s curve ellittiche doppie $C_1, C_2, \ldots, C_s$, tali cioè che

$$(16) \qquad 2C_1 \equiv 2C_2 \equiv \ldots \equiv 2C_s \equiv C$$

Supporremo [32] che il fascio $|C|$ non possieda altre curve spezzate, fuori delle $2C_1, 2C_2, \ldots, 2C_s$ sopra il solito modello di F privo di curve eccezionali.

Studieremo prima talune proprietà generali di queste superficie riservandoci dopo il problema dell'esistenza e classificazione.

Come nel caso $s = 0$ considereremo una bisecante B di grado virtuale minimo m, di genere virtuale π. Le curve $C_1, C_2, \ldots, C_s$ segano B nei punti $P_1, P_2, \ldots, P_s$, che costituiscono un gruppo di s punti distinti sopra B che denoteremo con S, di un notevole interesse nello studio di queste superficie.

Per lo studio dell'involuzione I generata dalla curva B nel modo consueto, giova considerare come prima i sistemi lineari completi di bisecanti delle curve C della forma $|B + \lambda C|$. E' ovvio che le curve di un sistema siffatto sono unisecanti le C_i e siccome queste curve sono ellittiche, il punto d'intersezione della curva generica con C_i è fisso e per determinarlo basterà considerare una curva particolare. Prendiamo una curva spezzata in B più un gruppo generico di λ curve di $|C|$. Questa curva sega C_i nel P_i. Possiamo dunque dire:

Gli s punti P_i del gruppo S sono punti base semplici per ogni sistema lineare di bisecanti delle curve del fascio C della forma $|B + \lambda C|$.

Considerando i punti base P_i come assegnati indicheremo questi sistemi con la notazione $|B + \lambda C|_s$; in caso opposto col solito simbolo $|B + \lambda C|$. Si vede subito che:

Le curve $C_i (i = 1, 2, \ldots, s)$ *sono fondamentali per ogni sistema di bisecanti del tipo* $|B + \lambda C|_s$.

Una curva generica C possiede quattro punti doppi dell'involuzione I. Al variare di C questi punti generano una curva D, che evidentemente sarà bisecante le curve C_i. *Le curve C_i non potranno dunque formar parte della curva di coincidenza di I*, giacchè la superficie F è priva di curve eccezionali e quindi l'involuzione I è priva di punti fondamentali [33]. Ne segue che i punti P_i sono coincidenze isolate dell'involuzione I e quindi *ipercoincidenze*, in virtù di un noto teorema di Severi [34].

Una curva C_i è necessariamente mutata in sè dall'involuzione I. I induce su di essa una g^1_2 con quattro punti doppi. Fra questi punti doppi abbiamo oltre a P_i i due punti del gruppo (C_i, D) d'intersezione della curva C con D. Chiameremo con Q_i l'ulteriore punto di coincidenza di I sopra C_i.

(32) Questa ipotesi non è restrittiva per lo studio delle *famiglie*. Lo si riconosce come nel caso precedente. Cfr. le Oss. del n. 5, pag. 13; tralasciamo qui la discussione corrispondente.

(33) Cfr. il mio lavoro citato in (9).

(34) V. Severi, loc. cit. in (24), pag. 285. Atti dell'Istituto veneto (1908).

Distingueremo le superficie di genere zero da quelle di genere $p > 0$. In ogni caso chiamando con K una curva canonica (effettiva o virtuale) si verifica:

$$K \equiv C_1 + C_2 + \ldots + C_s + (p-1)C \tag{17}$$

Infatti se C' è una curva aggiunta di C sussiste l'equivalenza

$$(C', C) \equiv (C, C) \equiv 0 \tag{18}$$

dalla quale si trae, secondo il criterio d'equivalenza di Severi più volte citato, tenuto conto del fatto che le uniche curve fondamentali del fascio $|C|$ che non sono curve totali del medesimo sono le curve C_i

$$C' \equiv \varepsilon_1 C_1 + \varepsilon_2 C_2 + \ldots + \varepsilon_s C_s + (p-1)C$$

dove evidentemente possiamo supporre che tutte le ε_i assumono soltanto i valori 1,0,—1. Per $p > 0$ si riconosce subito che tutte le ε_i sono uguali ad uno in base al teorema di Riemann-Roch. Infatti le curve C_i debbono essere parti fisse del sistema canonico effettivo $|K|$. Se così non fosse il sistema completo $|C_i|$ d'indice di specialità $i = p-1$ sarebbe di dimensione non inferiore a

$$0 - 1 + p - (p-1) + 1 = 1$$

ciò che è assurdo in quanto che ogni C_i è di necessità linearmente isolata. Per $p = 0$ sussiste ancora la (17), che sarà dimostrata con un altro metodo, nel n. 12.

Considereremo in questo n. le superficie di genere $p > 0$. Dalla (16) tenendo conto delle (16) risulta:

$$2K \equiv 2(p-1)\, C + s\, C = (2p + s - 2)\, C \tag{19}$$

Ne segue che il bigenere P_2 soddisfa l'uguaglianza:

$$P_2 - 1 = 2p + s - 2$$

ossia

$$s = P_2 - 2p + 1 \tag{20}$$

Il sistema canonico completo è evidentemente $|\sum_s^1 C_i + (p-1)C|$. Come negli altri casi giova considerare le bisecanti B delle curve C di grado virtuale minimo m. Se π è il relativo genere virtuale risulta immediatamente:

$$m = 2\pi - 2 - [s + 2(p-1)] = 2(\pi - p) - s$$

traducendo numerativamente l'equivalenza algebrica

$$(B,B) \equiv (B', B) - (K,B)$$

Oltre ad m considereremo il carattere m_s, grado virtuale di B imponendo S come gruppo base assegnato. Evidentemente risulta:

$$m_s = m - s = 2(\pi - p - s) = -2\nu$$

dove abbiamo messo per brevità

$$\nu = p + s - \pi$$

in guisa che per $s = 0$ si ottenga il carattere ν già adoperato nel § 1. Qui si presenta una differenza essenziale rispetto al caso analogo con $s = 0$ poichè: *il sistema $|B|$ non può mai essere un fascio lineare*. Infatti una curva C_i sarebbe fondamentale per un sistema siffatto e quindi essa formerebbe parte di una curva del fascio $|B|$. Il resto di C_i rispetto a tale curva conterrebbe certamente qualche componente irriducibile bisecante le curve C di grado virtuale minore di m contro l'ipotesi.

Il sistema completo $|B + \nu C|$ è non speciale di grado virtuale $2\nu + s$ e di genere virtuale $\pi + 2\nu$, quindi la sua dimensione soddisfa la disuguaglianza

$$r \geqq 2\nu + s - (\pi + 2\nu) + p + 1 = p + s - \pi + 1 = \nu + 1$$

ciò che ci permette asserire che esso è irriducibile, giacchè contiene come parte il sistema ∞^ν spezzato nella curva B fissa più un gruppo di ν curve del fascio $|C|$. Siccome si verifica ovviamente:

$$[B + \nu C, B] = -2\nu + s + 2\nu = s$$

risulta che $|B + \nu C|$ non possiede altri punti base oltre quelli P_i di S.

Imponendo a $|B + \nu C|$ il gruppo S come assegnato otteniamo un sistema $|B + \nu C|_s$ irriducibile di grado 2ν avente B e le s curve C_i come curve fondamentali. L'imagine proiettiva del sistema $|B + \nu C|_s$ è un cono razionale normale Φ^ν d'ordine ν di $[\nu + 1]$ [35]. Ne segue come al solito la regolarità di $|B + \nu C|$.

Gli s punti P_i si mutano in s generatrici $R_1, R_2, \ldots, R_s$ di Φ^ν che formano parte evidentemente della curva di diramazione del cono. Su ciascuna di esse si distingue un punto T_i (diverso dal vertice V) imagine della relativa curva C_i. L'imagine della curva D è una curva Δ che deve passare per i punti con due rami [imagini dei due punti del gruppo (C_i, D)] e quel punto deve assorbire le quattro intersezioni di Δ con R_i inquantochè D non passa per P_i. Vedremo che T_i *è un tacnodo della curva Δ*. Per approfondire il comportamento della corrispondenza [2,1] fra F e Φ^ν nell'in-

[35]) Cfr. il caso $s = 0$ svolto nel § 1 di questo Capitolo. Tralasciamo gli sviluppi analoghi per $s > 0$.

torno di T_1 su Φ considereremo su F un fascio di quadrisecanti le curve del fascio $|C|$ privo di punti base sopra le C_1 e composto con l'involuzione I. Ad esso corrisponde un fascio $|H|$ di bisecanti le generatrici R del cono la cui curva generica H è tangente alla retta R_1 nel punto T_1. Ad ogni X di H infinitamente vicino ai due punti T_1, $\overline{T}_1$ che si confondono in T_1 corrisponde una coppia di punti coniugati in I appartenenti alla curva C_1, variabili in una g_2^1 di essa come abbiamo già detto. I punti doppi di questa serie corrispondono ai punti X appartenenti alle due curve del fascio osculatrici ai due rami di Δ passanti per T_1 in corrispondenza ai punti del gruppo (C_1, D) più il punto che corrisponde alla curva del fascio contenente la retta R_1 come parte, più quello che corrisponde alla curva del fascio con un punto doppio in T_1.

Fuori degli s tacnodi T_1 la curva Δ è priva di singolarità. Essa possiede un punto $(2\pi+2-s)$-plo nel vertice V, cioè sega la curva infinitesima V in $2\pi+2-s$ punti. Da ciò segue che Δ esprimesi mediante la base minima V,R delle curve tracciate sul cono mediante l'equivalenza:

$$\Delta \equiv 4V + (2\pi+2-s+4\nu)R \equiv 4V + (4p+3s-2\pi+2)R \tag{21}$$

Le curve soddisfacenti un'equivalenza del tipo (17) costituiscono un sistema lineare completo regolare di grado virtuale $16(p+1)+8s$ e genere virtuale $6p+3+3s$ la cui dimensione è dunque:

$$16(p+1)+8s-(6p+3+3s)+1 = 10p+5s+14$$

Le curve di questo sistema possedenti s tacnodi le cui tangenti tacnodali sono generatrici del cono costituiscono una varietà algebrica subordinata di dimensione

$$10p+5s+14-4s = 10p+s+14.$$

Ne segue ripetendo argomentazioni già note ([58]) che le superficie coi caratteri p, π, s dipendono da

$$M = 10p+s+14-(\nu+5) = 9p+\pi+9$$

moduli.

Reciprocamente un cono doppio Φ^ν di $[\nu+1]$ con curva di diramazione del tipo (21) possiede i caratteri richiesti. Infatti la superficie obiettiva F possiede un fascio $|C|$ di curve ellittiche imagini delle generatrici $|R|$, possedenti s curve ellittiche 2C, spezzate in una componente ellittica doppia. Il numero di curve nodate del fascio $|C|$ si ottiene osservando che il numero di punti doppi della g_4^1 segata dalle generatrici su Δ è

$$8+2(6p+3+s-1) = 12p+12+2s$$

essendo $6p+s = 6p+3s-2s$ il genere effettivo di Δ) dalle quali 2s provengono dagli s tacnodi. Ne segue che il numero di curve nodate è $12(p+1)$ tenuto conto del fatto

([58]) V. n. 2, Cap. I, n. 8, § 1, Cap. II.

che le curve ellittiche doppie danno un contributo nullo nel computo dell'invariante di Zeuthen-Segre ([37]). Siccome il numero di curve nodate è $12(p+1)$ risulta che effettivamente il genere della superficie è uguale a p. Essendo $p > 0$ le curve C_i sono parti fisse del sistema canonico, . . . , ecc.

13. — Consideriamo ora il caso $p=0$. Dimostriamo che sussiste ancora l'equivalenza (17). Cominciamo osservando che se le C_i soddisfanno una combinazione lineare del tipo

$$\varepsilon_1 C_1 + \varepsilon_2 C_2 + \ldots + \varepsilon_s C_s \equiv 0$$

dove le ε_i sono interi che assumono soltanto i valori $-1, 0$ od 1 si verifica necessariamente $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_s = 0$. Infatti un'equivalenza del genere si può scrivere in forma di equivalenze fra varietà effettive del tipo:

$$\Sigma C_i \equiv \Sigma' C_j$$

essendo ΣC_i, ΣC_j due gruppi di h curve C_i ($2h \leq s$) prive di curve comuni. E' ovvio che una tale equivalenza non può sussistere, essendo il fascio $|C|$ irriducibile.

Sappiamo che il sistema canonico (virtuale) è della forma

$$|\lambda C + \Sigma \varepsilon_i C_i|$$

e quindi di grado virtuale zero e genere virtuale uno. Ne segue, essendo $[C, K] = 0$ che i caratteri virtuali del sistema aggiunto $|C'|$ sono gli stessi di $|C|$, cioè grado zero e genere uno. E siccome $|C'|$ è non speciale la dimensione virtuale di $|C'|$ è

$$0 - 1 + 0 + 1 = 0$$

ciò che ci dice che C' è una curva aritmeticamente effettiva. Questa curva è della forma

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \ldots + x_s C_s + \lambda C$$

dove le x_i assumono il valore zero od uno e $\lambda \geqslant 0$. D'altronde deve essere $\lambda = 0$ altrimenti il sistema canonico $|C' - C|$ sarebbe effettivo.

Si verifica dunque:

$$K \equiv x_1 C_1 + x_2 C_2 + \ldots + x_s C_s - C \qquad (x_i = 0, 1)$$

D'altronde, una curva aggiunta C_1' di C_1 (sicuramente esistente essendo $|C_1'|$ non speciale di genere uno e grado zero) soddisfa l'equivalenza

$$C_1' \equiv \{(1 + x_1) C_1 - C\} + x_2 C_2 + \ldots + x_s C_s$$

([37]) V. la formula di Godeaux citata in ([27]).

dove il termine scritto fra graffi dev'essere una curva effettiva o nulla. Questa condizione può verificarsi soltanto se $x_1 = 1$. Analogamente si dimostra che

$$x_2 = x_3 = \ldots = x_s = 1.$$

Si verifica dunque l'equivalenza:

$$K \equiv C_1 + C_2 + \ldots + C_s - C$$

che ci dice che: *il sistema aggiunto $|C'|$ del fascio $|C|$ è costituito dalla somma di tutte le curve C_i $(1, 2, \ldots, s)$.*

Una curva bicanonica 2K soddisfa dunque l'equivalenza:

$$2K \equiv (s-2)C$$

cioè sussiste la (19) per $p = 0$.
Ne segue che *il sistema bicanonico $|(s\text{-}2)C|$ è effettivo, di dimensione s-2*, dunque *s esprimesi in funzione del bigenere P_2 nella forma*:

$$s = P_2 + 1$$

Vedremo tosto che si può prendere qualsiasi valore, anche essendo $p = 0$ e quindi si può affermare che *esistono superficie regolari di genere* (aritmetico-geometrico) *nullo per le quali il bigenere P_2 assume un qualsiasi valore $P_2 \geqslant 0$.*

Tutti i sistemi *i*-canonici con $i > 1$ sono effettivi se $P_2 > 1$. Per *i* dispari: $i = 2h+1$ abbiamo infatti:

$$(2h+1)\,K \equiv C_1 + C_2 + \ldots + C_s + [(s-1)h - 1]C$$

ciò che ci dà il valore P_{2h+1} dell'$(2h+1)$-genere:

$$P_{2h+1} = (s-1)h = hP_2$$

Per i pari, $i = 2h$ abbiamo invece:

$$2hK \equiv (hs\text{-}2h)C \equiv (s-2)hC$$

e quindi

$$P_{2h} = (s-2)h + 1 = h(P_2 - 1) + 1$$

14. — Consideriamo ora una superficie regolare col $p^{(1)} = 1$, di determinante due con $p = 0$ dotata di s curve ellittiche doppie $2C_i$ del fascio $|C|$.

Sia B una bisecante di grado minimo m e genere virtuale π. Si verifica l'equivalenza

$$(B\,,B) \equiv (B'\,,B) - (K\,,B) \equiv (\sum_1^s C_i - C\,,B)$$

tenuto conto della (16), dalla quale si trae la relazione:

$$m = 2\pi - 2 - (s - 2)$$

Il genere virtuale di B considerando il gruppo base S come assegnato è

$$m_s = m - s = 2(\pi - s) = -2(0 + s - \pi) = -2\nu$$

ponendo come al solito $\nu = p + s - \pi = s - \pi$ Si verifica *sempre* $\nu > 0$, ossia $m > 0$. Il sistema completo $|B + \nu C|$ virtualmente privo di punti base ha la dimensione virtuale:

$$2\nu + s - (\pi + 2\nu) + 1 = s - \pi + 1 = \nu + 1$$

Si conclude come nei casi precedenti che esso è irriducibile, regolare, composto con I, col gruppo base totale S. Il sistema $|B + \nu C|$ assegnando S come gruppo-base è di grado -2ν. L'imagine proiettiva di $|B + \nu C|$ è un cono razionale normale doppio Φ^ν d'ordine ν di $[\nu + 1]$ con curva di diramazione appartenenti al sistema lineare $4V + 3s - 2\pi + 2$ dotata di s tacnodi, aventi come tangenti tacnodali generatrici del cono alla quale si aggiungono queste medesime tangenti tacnodali. L'esistenza di queste superficie risulta osservando che reciprocamente ogni cono doppio siffatto possiede i caratteri assegnati e la curva di diramazione prefissata esiste ovviamente in quanto che la dimensione del sistema è $5s + 14$ e quella della varietà subordinata a questo sistema costituita dalle curve possedenti s tacnodi con tangenti tacnodali nelle generatrici è uguale $5s + 14 - 4s = s + 14$ in quanto che ogni tacnodo siffatto impone $3 + 3 - 1 - 1 = 4$ condizioni.

Ne segue inoltre che la classe delle superficie regolari col $p^{(1)} = 1$, di genere zero coi caratteri π, s birazionalmente distinte costituisce una varietà algebrica non ulteriormente ampliabile, cioè una famiglia dipendente da $\pi + 9$ moduli.

15. — Riassumendo i risultati finora ottenuti per le superficie regolari, col $p^{(1)} = 1$, $d = 2$ ed $s > 0$, abbiamo visto che le suddette superficie coi medesimi caratteri p, P_2, π, costituiscono un'unica famiglia subordinata a quella delle superficie con $s = 0$ e caratteri $p + s$, π, di dimensione $9p + \pi + 9$.

Si riconosce che fissando p, P_2 $(= s + 2p - 1)$ il massimo valore di π è

$$p + s - 1 = P_2 - p$$

e siccome la famiglia $C_2(p + s,\ p + s - 1)$ contiene come varietà subordinata quella coi caratteri p, s, $(\pi = p + s - 1)$ possiamo dire che:

Le superficie coi dati caratteri $q = 0$, $p^{(1)} = 1$, $d = 2$, genere p e bigenere P_2 costituiscono un'unica famiglia. Sulla superficie a moduli generali il genere virtuale π delle bisecanti di grado virtuale minimo delle curve del fascio è uguale a $P_2 - p$. Per esempio, sulla superficie d'ENRIQUES $(p = 0\ P_2 = 1)$ le bisecanti di grado virtuale minimo $(= 0)$ sono curve ellittiche.

Sostituendo π per il massimo $\pi = P_2 - p$ nella formula che dà il numero di moduli della famiglia di caratteri p, P_2, π, risulta

$$M = 8p + P_2 + 9$$

d'accordo col computo fatto da Enriques.

Anche nel caso $s > 0$, il metodo d'Enriques conduce dunque alle superficie a moduli generali. La spiegazione è la stessa del n. 10 (*Oss.* 1ª). *Non ci sono altre superficie regolari col* $p^{(1)} = 1$ *ed* $s > 0$, *oltre ai piani doppi III' d'*Enriques [38].

§ 3. — Il gruppo della divisione algebrica

16. — E' noto che la superficie d'Enriques [39] possiede una curva canonica K di ordine zero che è un divisore dello zero di periodo due. Il suo gruppo della divisione algebrica [40] è rappresentato dalle curve virtuali K e 2K ($\equiv 0$) (dove 0 rappresenta lo zero dell'equivalenza algebrica = lineare). La superficie d'Enriques rientra nella classificazione svolta nel § 2 di questo capitolo possedendo i caratteri $q = 0$, $p^{(1)} = 1$, $d = 2$, $p = 0$, $P_2 = 1$ $(s = 2)$.

Consideriamo il modello di S_3 della superficie a moduli generali costituito come è noto dalla superficie del sest'ordine passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro. Togliendo da questo tetraedro una coppia di spigoli opposti A ed A' resta un quadrilatero sghembo costituito dagli altri quattro lati. Le ∞^1 quadriche passanti per questo quadrilatero segano ulteriormente la superficie in un fascio |C| di quartiche sghembe ellittiche (di prima specie) contenente $s = 2$ curve ellittiche doppie rappresentate su questo modello dagli spigoli A ed A' contati quattro volte. Dal punto di vista invariantivo si riconosce subito che le rette doppie A ed A' rappresentano curve ellittiche sopra un modello della superficie privo di singolarità e di curve eccezionali di prima specie. Queste curve sono mutuamente aggiunte ciò che giustifica la notazione usata per A.

La curva canonica K soddisfa l'equivalenza:

$$K \equiv A + A' - C \equiv A - A'$$

dalla quale si deduce

$$2K \equiv 0$$

Vediamo come queste semplici considerazioni si estendono a tutte le superficie studiate nel n. precedente. In particolare vedremo che per $s \geqslant 2$ l'invariante σ di Severi è maggiore di uno, cioè per tali superficie la divisione delle curve per un intero non è un'operazione univoca.

[38] V. libro postumo pag. 262. L'esistenza di un'unica famiglia di curve di genere p con un dato $s > 0$ dipende dal fatto che la diminuzione del genere π della bisecante B di grado minimo dovuta allo staccamento di una curva C, si fà di unità in unità nel caso $s > 0$, mentre per $s = 0$, π diminuisce di due a due, ciò che rende possibile l'esistenza delle due famiglie C_2 (p,p-1) C_2 (p,p). Cfr. n. 10, § 1 di questo Cap.

[39] V. memoria cit. in (19), libro postumo, pag. 236.

[40] V. Severi, loc. cit. in (15).

Riprendiamo la nostra superficie F con un fascio $|C|$ di curve ellittiche dotato di s curve doppie $2C_i$ di determinante due, genere p e bigenere P_2.

Si riconosce subito che *ogni curva virtuale Z di F del tipo*:

$$Z = C_1 + C_2 + \dots + C_{2h} - hC \tag{22}$$

è un divisore dello zero di periodo due.

La proprietà s'inverte: *ogni divisore dello zero di F è della forma* (22).

Basta osservare che si può prendere sempre un intero positivo λ abbastanza alto tale che, tanto λC come $\lambda C + Z$ siano curve non speciali. Allora $\lambda C + Z$ è una curva aritmeticamente effettiva essendo di grado zero e genere uno. Presa una curva effettiva equivalente linearmente a $\lambda C + Z$ essa è fondamentale per le curve del fascio C essendo

$$[\lambda C + Z, C] = 0$$

e quindi essa è somma di curve C_i più una curva μC con $\mu > 0$. Siccome Z è una curva d'ordine zero, risulta finalmente un'equivalenza del tipo

$$Z \equiv C_{i_1} + C_{i_2} + \dots + C_{i_{2h}} - hC \qquad (C_{i_j} \neq C_{i_k} \quad j \neq K)$$

a cui soddisfa la Z ($i_1, i_2, \dots, i_{2h}$ è una combinazione senza ripetizione di 1, 2, …, s).

Ciò premesso osserviamo che *condizione necessaria e sufficiente affinchè due divisori dello zero di F*

$$\bar{Z} \equiv C_{i_1} + C_{i_2} + \dots + C_{i_{2h}} - hC \;;\; \bar{\bar{Z}} \equiv C_{j_1} + C_{j_2} + \dots + C_{j_{2k}} - kC \tag{23}$$

siano equivalenti è che si verifichi $h = k$ e siano identici i due gruppi di curve C_i che compaiono nelle rappresentazioni (23). Infatti tale equivalenza conduce ad un'equivalenza tra curve effettive della forma:

$$(h-k)\, C \equiv \Sigma C_i - \Sigma C_j$$

Questa equivalenza non può sussistere se non è possibile trovare h—k coppie di curve C_i uguali che duplicate danno luogo ad una curva C. Ma, per ipotesi questa eventualità può verificarsi soltanto se $h = k$ e le C_i sono uguali in un ordine conveniente alle C_j.

Conseguenza immediata di questa proprietà è che:

L'invariante σ assume il valore:

$$\sigma = 1 + \binom{s}{2} + \binom{s}{4} + \dots = 2^{s-1}$$

Consideriamo fra tutti i divisori dello zero di F gli s-1 seguenti:

$$Z_1 = C_1 - C_s,\; Z_2 = C_2 - C_s, \dots, Z_{s-1} = C_{s-1} - C_s$$

differenza fra le curve $C_1, C_2, \ldots, C_{s-1}$ e la curva C_s. Il risultato precedente può esprimersi sotto la forma seguente più espressiva:

Il gruppo della divisione algebrica su F è somma diretta degli $s-1$ gruppi ciclici del second'ordine generati dagli Z_i precedenti.

Basta osservare che sostituendo hC per la curva equivalente $2hC_s$ possiamo scrivere in maniera unica un divisore dello zero qualsiasi $Z \equiv C_{i_1} + C_{i_2} + \ldots + C_{i_h} - hC$ come combinazione lineare delle Z_i:

$$Z \equiv \varepsilon_1 Z_1 + \varepsilon_2 Z_2 + \ldots + \varepsilon_{s-1} Z_{s-1}$$

dove le ε_i assumono soltanto i valori zero od uno.

Ne segue un altro metodo più rapido per riconoscere che il numero dei divisori dello zero distinti è proprio $\sigma = 2^{s-1}$.

Sappiamo che l'invariante s esprimesi mediante il genere p ed il bigenere P_2 della superficie nella forma:

$$s = P_2 - 2p + 1$$

Possiamo dunque enunciare il seguente teorema:

L'invariante σ della divisione di Severi, *di una superficie regolare, di genere lineare assoluto $p^{(1)} = 1$, di determinante due, di genere (aritmetico = geometrico) p e bigenere P_2 esprimesi in funzione del genere e del bigenere mediante la formula:*

$$\sigma = 2^{P_2 - 2p}$$

In particolare per le superficie di genere aritmetico e geometrico nulli si verifica

$$\sigma = 2^{P_2}$$

Così per esempio per la superficie d'Enriques si ottiene $\sigma = 2$ come sappiamo.

CAPITOLO III.

Classificazione delle superficie regolari di determinante uno con un gruppo infinito discontinuo di trasformazioni birazionali.

17. — E' noto che le superficie algebriche che ammettono un gruppo infinito discontinuo di trasformazioni birazionali in sè non contenuto in un gruppo continuo possiedono il fascio $|C|$ di curve ellittiche di genere uguale all'irregolarità q a meno che tutti i generi della superficie siano uguali ad uno ([61]). Se una superficie F possiede un *unico* fascio irriducibile di curve ellittiche di genere uguale all'irregolarità,

([61]) V. Enriques: *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali.* Rend. Accad. Lincei [5], *15*, 665 (2° semestre 1906). L'effettivo caso d'eccezione a cui possono dar luogo le superficie con tutti i generi uguali all'unità è stato considerato da Severi e Fano. Severi [loc. cit. in (15)] dimostra che la superficie più generale del quart'ordine contenente una sestica di genere due possiede un gruppo infinito discontinuo e non possiede fasci di curve ellittiche. Questa superficie era già stata studiata geometricamente da Fano: *Sopra alcune superficie* privo di curve spezzate condizione necessaria e sufficiente affinchè F possegga un gruppo infinito discontinuo di trasformazioni birazionali è che il numero base assoluto della superficie (cioè il numero base sopra un modello di F privo di curve eccezionali di prima specie) sia $\geqslant 3$.

F possiede certamente un unico fascio $|C|$ se qualche plurigenere P_i è >1 perchè allora il relativo sistema pluricanonico sarà composto con le curve del fascio. Ma anche se tutti i plurigeneri sono uguali ad uno può darsi che vi sia soltanto un fascio di curve ellittiche, ciò che si verifica ad esempio sulla superficie più generale del quart'ordine contenente una retta.

Vedremo subito che per le superficie di determinante uno la condizione precedente si traduce come segue: *affinchè una superficie di determinante uno possegga un gruppo infinito discontinuo di trasformazioni birazionali occorre e basta che il fascio $|C|$ possegga due unisecanti almeno* [82].

Da questa proprietà discende subito la classificazione delle superficie di determinante uno e genere dato p possedenti un gruppo infinito discontinuo. Risolviamo qui il problema per le superficie regolari.

All'uopo studieremo talune proprietà delle superficie di determinante uno in rapporto alla base ed al gruppo della divisione algebrica. Dimostriamo anzitutto che l'invariante σ di Severi è uguale ad uno sulle superficie di determinante uno, il cui fascio $|C|$ sia privo di curve spezzate.

Sia Z un divisore dello zero della superficie F di determinante uno e genere aritmetico $p_a \geqslant 0$. Esiste un intero λ abbastanza alto in guisa che tanto la curva effettiva λC come quella virtuale $\lambda C + Z$ siano non speciali. La curva $\lambda C + Z$ è aritmeticamente effettiva. Sia Γ una curva effettiva linearmente equivalente a $\lambda C + Z$. Si verifica $[\Gamma, C] = [C, C] = [\Gamma, \Gamma] = 0$ quindi Γ è una curva fondamentale del fascio $|C|$ necessariamente costituita da un gruppo di λ curve C. Sostituendo l'equivalenza lineare per quella algebrica risulta finalmente:

$$\lambda C + Z \equiv \lambda C \quad \text{ossia} \quad Z \equiv 0 \qquad \text{c. v. d.}$$

Una conseguenza immediata dell'unicità della divisione è questa: Se una superficie F di determinante uno possiede due unisecanti distinte U_1, U_2 delle curve del fascio $|C|$ esse generano necessariamente una trasformazione birazionale ciclica infinita della superficie in sè.

---

del quart'ordine rappresentabili sul piano doppio. Rend. Ist. Lombardo [2], *39*, 1071 (1905-6). Recentemente Fano ha ripreso questo problema nella sua nota: *Superficie del quart'ordine contenente una rete di curve di genere due*. Commentationes pont. accad. scientiarum, anno VII, vol. VII, n. 9.

(82) Ciò che permette assicurare l'esistenza di superficie di determinante uno o due che non posseggono un gruppo infinito discontinuo; appare pure probabile l'esistenza di superficie di determinante superiore che non posseggono un tale gruppo. Invece si dimostra agevolmente l'esistenza di un semigruppo infinito discontinuo di trasformazioni *razionali* in sè sopra ogni superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$ con fascio $|C|$ di curve ellittiche di genere uguale all'irregolarità q che mutano in sè le singole curve del fascio. Ved. Gaeta, *Sull'esistenza di una serie infinita discontinua di trasformazioni razionali in sè*.... ecc. Atti dell'Istituto Veneto (1951).

Basta considerare la trasformazione birazionale T che fà corrispondere ad ogni punto X appartenente alla generica C il punto X′ della medesima curva definito dall'equivalenza:

$$X' - X \equiv (U_2\,,\ C) - (U_1\,,\ C)$$

Se questa traformazione fosse ciclica d'ordine m si avrebbe:

$$m(X' - X) \equiv (mU_2\,,\ C) - (mU_1\,,\ C) \equiv 0$$

e d'accordo col criterio d'equivalenza tante volte citato:

$$mU_2 \equiv mU_1 + \lambda C$$

essendo $|C|$ privo di curve spezzate. Applicando le potenze successive T^i di questa trasformazione T e chiamando con U_i la trasformata di U_{i-1} per T si ottengono le equivalenze:

$$mU_2 \equiv mU_1 + \lambda C$$

$$mU_3 \equiv mU_2 + \lambda C$$

$$\cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot$$

$$mU_n \equiv mU_{n-1} + \lambda C$$

$$mU_1 \equiv mU_n + \lambda C$$

dalle quali si trae:

$$mU_1 \equiv mU_1 + m\lambda C \text{ ovvero } m\lambda\ C \equiv 0$$

ossia $\lambda = o$ ma essendo la divisione univoca dall'equivalenza

$$mU_1 \equiv mU_2$$

si dedurrebbe quella

$$U_2 \equiv U_1$$

che è assurda perchè sopra una superficie con un fascio di curve di genere uguale all'irregolarità curve algebricamente equivalenti segano sulle curve del fascio gruppi linearmente equivalenti [63].

Se la superficie F possiede un'unica unisecante irriducibile U non può possedere un gruppo infinito discontinuo. Altrimenti la curva U sarebbe mutata in sè stessa da tutte le trasformazioni del grupo. Se $q > 1$ il gruppo discontinuo di F indurrebbe su U un gruppo finito secondo il teorema di Schwarz-Klein per le curve e allora esisterebbe un'infinità di trasformazioni del gruppo che mutano in sè tutte le curve C e tutti i punti di U. Questo è impossibile perchè essendo le C di modulo variabile la trasformazione indotte sulla generica C sarebbero di seconda specie e

(63) V. Severi: *Relazioni fra gli integrali semplici e multipli di prima specie sopra una varietà algebrica*. Annali di matematica pura ed applicata [3], tomo XX, pag. 201 e seg. (1913).

muterebbero il punto (C, U) in un altro punto che al variare di $|C|$ descriverebbe un'altra unisecante irriducibile. Altrimenti vi sarebbero invece infinite trasformazioni del gruppo che scambiano fra loro le curve del fascio dello stesso modulo ciò che è impossibile in quanto che allora non esisterebbero curve nodate nel fascio e quindi $12(p_a+1)=0$ ossia $p_a=-1$, contro l'ipotesi.

18. — Consideriamo una superficie regolare di determinante uno e genere p, che possieda due unisecanti U_1, U_2.

Supponiamo per semplicità che il fascio lineare $|C|$ sia privo di curve spezzate (64). Chiameremo con J l'involuzione generata dalla g_2^1 individuata sulla generica C dai punti comuni ad essa ed alle due unisecanti; la curva di coincidenza di J sega U_1, U_2 nel gruppo di punti comuni (U_1, U_2). Poniamo per brevità

$$[U_1, U_2] = \gamma + 1 \geqslant 0$$

essendo γ il genere virtuale della curva spezzata $U_1 + U_2$.

Si riconosce immediatamente ripetendo con lievi varianti l'argomentazione svolta al n. 8 che la curva di coincidenza D di J soddisfa l'equivalenza:

$$D \equiv 2\,(U_1 + U_2) + \lambda C$$

essendo λ un intero che si determina subito osservando che D sega U_1 (od U_2) nel gruppo comune alle due unisecanti: (U_1, U_2) in guisa che

$$[U_1 + U_2 + \lambda C, U_1] = [U_1 + U_2 + \lambda C, U_2] = -(p+1) + \gamma + 1 + \lambda = \gamma + 1$$

dalla quale risulta:

$$\lambda = p + 1$$

e quindi possiamo dire:

La curva di coincidenza D dell'involuzione J soddisfa l'equivalenza lineare:

$$D \equiv 2\,(U_1 + U_2) + (p+1)\,C$$

Fra i sistemi lineari effettivi di bisecanti delle curve C del tipo $|U_1 + U_2 + \lambda C|$ esiste uno ben determinato $|B|$ di grado virtuale minimo m, la cui dimensione è come sappiamo ≤ 1; si verifica come abbiamo visto $\pi \leq p$ essendo π il genere virtuale del sistema (cfr. n. 7).

Distinguiamo due casi, secondo che γ sia $< p$ oppure $\gamma \geq p$.

Se $p > \gamma \geqslant 0$ il sistema lineare completo $|U_1 + U_2 + (p-\gamma)C|$ è regolare di dimensione $p-\gamma+1$ essendo la sua imagine proiettiva un cono razionale doppio $\Phi^{p-\gamma}$ di $[p-\gamma+1]$ la cui curva di diramazione Δ è una quadrisecante delle generatrici del cono con un punto $(2\gamma+2)$-plo nel vertice del cono origine di $\gamma+1$ rami cuspidali or-

(64) Si riconosce «a posteriori» come nel Cap. I, nn. 5, 6, che ciò non costituisce una restrizione essenziale.

dinari del second'ordine. E' dunque evidente che la nostra superficie appartiene alla famiglia C_2 (p, γ) (γ=π) di curve di determinante due e genere p. Se invece del cono doppio $\Phi^{p-\gamma}$ scegliamo come modello la trasformata birazionale senza eccezioni essenziali che abbiamo chiamato rigata razionale *pseudoconica* di [p — γ+3] (cfr. n. 10) la curva di diramazione Δ diventa tangente alla retta V imagine del cono, ovunque l'incontra.

La condizione affinchè una curva del sistema lineare |Δ| di $R^{p-\gamma+2}$ sia tangente alla retta V è una condizione algebrica irriducibile e semplice, quindi la condizione perchè sia (γ+1)-tangente sarà pure irriducibile e di dimensione γ+1.

In definitiva possiamo dire in virtù dei risultati del Cap. II:

Le superficie regolari col $p^{(1)}=1$ *di determinante uno e genere p che posseggono due unisecanti con γ+1 punti comuni* ($p > \gamma \geqq 0$) *costituiscono una famiglia dipendente da*

$$9p + \gamma + 9 - (\gamma + 1) = 9p + 8$$

moduli.

La superficie generica di questa famiglia è birazionalmente equivalente senza eccezioni essenziali ad un cono razionale normale doppio $\Phi^{p-\gamma}$ *di* [p — γ+1] *la cui curva di diramazione è una quadrisecante le generatrici con punto* (2γ + 2)*-plo nel vertice del cono origine di γ+1 rami cuspidali ordinari, e priva di ogni altra singolarità oppure si può rappresentare senza nessuna eccezione sopra una rigata razionale normale pseudoconica* $R^{p-\gamma+2}$ *doppia di* [p — γ+3] (cfr. n. 10) *la cui curva di diramazione è irriducibile, priva di punti multipli e sega in quattro punti le generatrici di* $R^{p-\gamma+2}$ *ed in* 2γ+2 *punti la retta V essendo tangente ad essa in γ+1 punti distinti.*

Tuttavia essendo $\gamma \leq p$ si può considerare il valore γ = —1 che corrisponde al caso in cui le due unisecanti non hanno nessun punto comune:

$$[U_1, U_2] = 0$$

Allora col solito metodo si osserva che la superficie dev'essere birazionalmente equivalente ad un cono doppio Φ^{p+1} di [p+2] la cui curva di diramazione è l'intersezione del cono con una forma generica del quart'ordine di [p+2]. L'intorno del vertice è l'imagine della coppia di unisecanti U_1, U_2. Come negli altri casi si può sostituire il cono per una superficie pseudoconica doppia di [p+4] sulla quale la rappresentazione è priva di eccezioni.

Il grado virtuale del sistema lineare |Δ| sul cono è 16[p+1] ed il genere virtuale è 6p+3. Ne segue che la dimensione del sistema lineare completo regolare |Δ| è:

$$16(p + 1) - (6p + 3) + 1 = 10p + 14$$

e quindi il numero di moduli da cui dipendono queste famiglie è

$$10 + 14 - (p + 1 + 5) = 9p + 8$$

come nel caso precedente.

Consideriamo ora il caso $\gamma > p$. La curva $U_1 + U_2$ soddisfa un'equivalenza del tipo:

$$U_1 + U_2 \equiv B + \lambda C$$

essendo B la bisecante di grado virtuale minimo fra quelle del tipo $|U_1 + U_2 + \mu C|$ ($\mu \gtreqless 0$). Il genere virtuale γ della curva spezzata $U_1 + U_2$ esprimesi in funzione di quello π della curva B mediante la formula:

$$\gamma = \pi + 2\lambda$$

Il sistema lineare completo $|U_1 + U_2|$ è regolare di dimensione $\gamma - p + 1$ e si rappresenta sul cono $\Phi^{p-\pi}$ di $[p - \pi + 1]$ della famiglia $C_2(p, \pi)$ di superficie di determinante due, mediante un sistema $|L|$ di unisecanti le generatrici segante la curva infinitesima V in

$$\frac{1}{2}[U_1 + U_2, B] = \frac{1}{2}[-2(p-\pi) + 2\lambda] = \lambda - (p - \pi)$$

punti. Questo sistema possiede una curva imagine di $U_1 + U_2$ tangente la curva di diramazione ovunque l'incontra (in $\gamma + 1$ punti distinti). Reciprocamente, se il cono doppio $\Phi^{p-\pi}$ di $[p - \pi + 1]$ della famiglia $C_2(p, \pi)$ (cfr. n. 8) possiede una curva $(\gamma + 1)$— tangente la curva di diramazione appartenente al sistema di unisecanti le generatrici con un punto $[\lambda - (p - \pi)]$-plo nel vertice, esso è l'imagine di una superficie di determinante uno con due unisecanti U_1, U_2 aventi $\gamma + 1$ punti comuni imagini dei punti di contatto della curva suddetta.

La condizione affinchè una curva del sistema lineare $|A|$ sia $(\gamma + 1)$-tangente una curva di $|L|$ è algebrica irriducibile di dimensione $\gamma + 1 - (\gamma - p + 1) = p$.

Ricordando che $C_2(p, \pi)$ appartiene ad una unica famiglia di curve di determinante due e genere p [$C_2(p, p\text{-}1)$ o $C_2(p, p)$] secondo che π (o ciò che è lo stesso γ) sia di diversa parità o della stessa parità di p possiamo dire:

Le superficie di determinante uno e genere possedenti due unisecanti U_1 *ed* U_2 *con* $\gamma + 1$ *punti comuni* ($\gamma \geqslant p$) *costituiscono pure una famiglia dipendente da* $9p + 8$ *moduli.*

Se γ *è della stessa parità di* p *la superficie a moduli generali è birazionalmente senza eccezioni ad una quadrica doppia della famiglia* $C_2(p, p)$ (cfr. n. 11) *la cui curva di diramazione è irriducibile e priva di punti multipli e* $(\gamma + 1)$*-tangente una curva del sistema lineare* $\left|V + \frac{\gamma - p}{2} R\right|$.

Se γ *è di parità diversa che* p *la superficie a moduli generali è rappresentabile birazionalmente senza eccezioni sopra una rigata cubica razionale doppia di* S_4 *della famiglia* $C_2(p, p\text{-}1)$ *la cui curva di diramazione è irriducibile priva di punti multipli e* $(\gamma + 1)$*-tangente una curva del sistema lineare* $\left|V + \frac{\gamma + 1 - p}{2} R\right|$.

19. — Possiamo riassumere i risultati di questo capitolo come segue:

Le superficie regolari di genere lineare $p^{(1)} = 1$ determinante uno e genere p che posseggono un gruppo infinito discontinuo di trasformazioni birazionali in sè possiedono una coppia di unisecanti le curve del fascio $|C|$ segantisi in $\gamma + 1$ punti (γ = genere virtuale della bisecante spezzata $U_1 + U_2$). Il carattere γ può prendere tutti i valori interi a partire da $\gamma = -1$: $\gamma = -1, 0, 1, 2, \ldots$.

Fissato un valore di γ, le superficie coi ricordati caratteri con $[U_1, U_2] = \gamma + 1$ costituiscono un'unica famiglia $\mathcal{D}(p, \gamma)$ dipendente da $9p+8$ moduli.

Tranne il caso $\gamma = -1$, in cui le due unisecanti non hanno nessun punto comune le famiglie $\mathcal{D}_1(p, \gamma)$ riempiono varietà subordinate entro le due famiglie $C_2(p, p\text{-}1)$ o $C_2(p, p)$ di superficie di determinante due e genere p (cfr. n. 9). La superficie generica di $\mathcal{D}_1(p, \gamma)$ si può ottenere come limite di una superficie di $C_2(p, p\text{-}1)$ o $C_2(p, p)$ quando una curva del sistema lineare $\left| B + \frac{\gamma - p}{2} C \right|$ tende a spezzarsi in due unisecanti U_1, U_2 intersecantisi fra loro in $\gamma+1$ punti.

L'esistenza e classificazione di tutti questi tipi di superficie è intimamente legata alla rappresentazione senza eccezioni essenziali sopra coni doppi ben determinati.

OSSERVAZIONE 1ª. — La classificazione precedente fornisce una dimostrazione del fatto che *il numero base di una superficie regolare col $p^{(1)} = 1$ di determinante uno e genere p a moduli generali è uguale a due sopra un modello di essa privo di curve eccezionali. Siccome la divisione su quelle superficie è univoca ne segue secondo una nota argomentazione che: la base minima per le curve tracciate sulla suddetta superficie a moduli generali è costituita dal'unisecante irriducibile U più una curva C del fascio.*

OSSERVAZIONE 2ª. — Il numero base assoluto di una superficie della famiglia $C_1(p)$ può aumentare quando si spezza una curva del fascio $|C|$ in due curve razionali bisecantisi fra loro, ciò che comporta come sappiamo l'acquisto di un punto doppio della componente Λ della curva di diramazione del cono doppio Φ^{2p+2} di $[2p+3]$ (cfr. n. 5). Le superficie della famiglia con una curva C spezzata in due curve razionali bisecantisi riempiono entro $C_1(p)$ una varietà algebrica irriducibile subordinata di dimensione $10p+7$.

Se la base aumenta (sempre sopra un modello privo di curve eccezionali) e tutte le curve C si mantengono irriducibili la superficie F acquista necessariamente una nuova unisecante. Infatti se E è una curva n-secante le curve C algebricamente indipendente da U, C i due gruppi di punti $n(U, C)$ e (E, C) sulla generica C sono disequivalenti e quindi al variare di C il punto X definito dall'equivalenza:

$$X \equiv (E, C) - m(U, C)$$

descrive una nuova unisecante.

In virtù degli sviluppi del n. precedente possiamo affermare che *l'aumento del numero base assoluto sulle superficie della famiglia $C_1(p)$ è una condizione non algebrica somma di un'infinità numerabile di condizioni algebriche di dimensione p più una condizione algebrica semplice.*