ALDO ANDREOTTI

Sopra il problema dell'uniformizzazione per alcune classi di superficie algebriche (*)

Si deve a Poincaré [1] il primo studio sui sistemi di funzioni di una variabile complessa che ammettono un *teorema di moltiplicazione*, cioè sui sistemi di funzioni meromorfe in tutto il piano della variabile complessa u per le quali esiste un numero m, in modulo > 1, tale che il valore di ciascuna delle funzioni considerate, nel punto $m u$, si esprima razionalmente per mezzo dei valori delle funzioni medesime nel punto u. Picard è tornato successivamte sull'argomento [2] ed in una nota [3] (riprodotta anche nel suo trattato sulle funzioni algebriche di due variabili indipendenti [4]) si estendono al caso di più variabili, presentandole sotto un aspetto più generale, alcune delle considerazioni sviluppate nei precedenti lavori; fra l'altro è qui enunciato, con un cenno di dimostrazione, un teorema che l'autore presume possa esser utilizzato per uniformizzare alcuni tipi essenzialmente nuovi di superficie algebriche.

Fra le superficie che fin'ora si sanno uniformizzare [5] vi sono le superficie razionali, e quelle iperelittiche; esse rientrano anche nella classe delle superficie uniformizzabili con le trascendenti considerate da Picard il quale così si esprime al termine della sua nota: « *Il serait, je crois, intéressant de rechercher s'il y a d'autres surfaces que les précédentes (avec leurs dégénérescences) rentrant dans la classe sur la quelle certaines équation fonchionnelles appellent ainsi l'attention* ».

In questa nota ci proponiamo di rispondere a tale questione *mostrando come si uniformizzino con quelle funzioni alcune famiglie di superficie che non sono, per valori generici dei loro moduli, nè razionali nè iperelittiche* (nè rientrano in classi di superficie che si uniformizzano con trascendenti note com'è p. es. delle superficie rigate, delle superficie ellittiche, delle superficie prodotto di due curve algebriche o di quelle delle coppie non ordinate di punti d'una curva algebrica; delle superficie imagini di involuzioni appartenenti a superficie dei tipi nominati).

(*) Presentato dall'Accademico Francesco Severi.

(1) M. N. Poincaré, *Sur une classe nouvelle de trascendantes uniformes.* « Journ. de Math. pures et appliquées t. 6, 1890, pag. 313 e sgg.

(2) E. Picard, *Sur une classe de trascendantes nouvelles* « Acta Mathematica ». t. 18, 1894, pag. 133 e sgg e t. 23, 1900, pag. 333 e sgg.

(3) E. Picard, *Sur certaines équations fonctionnelles et sur une classe de surfaces algébriques,* « Comptes rendus, 4 Luglio 1904, t. 139, pag. 5 e sgg.

(4) Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes,* Paris, Gauthier Villars, 1897, 1906, t. II pag. 465 e sgg.

(5) « Uniformizzare » nel senso di assegnare una rappresentazione parametrica uniforme in grande della superficie.

Fra queste mi pare di particolare interesse quella (dipendente da 10 moduli) delle superficie di genere $P_g = 0$ bigenere $P_2 = 1$, e trigenere $P_3 = 0$ (superficie di ENRIQUES) di cui alcuni casi particolari già s'incontrano fra le superficie iperelittiche. Ciascuna di queste superficie possiede un gruppo discontinuo di trasformazioni birazionali in sè e su tali superficie, giusto in vista del problema dell'uniformizzazione, SEVERI già da tempo aveva attratto l'attenzione dei lettori ed ha richiamato ora la mia (6).

Nei nn. 1-5 esporremo, con lievi semplificazioni e precisazioni che consentono maggiore speditezza nel seguito, una dimostrazione completa del teorema di Picard di cui si è discorso, nei nn. 6-8 si danno gli esempi di superficie di cui si è accennato ed infine nel n. 9 *si dimostra che le superficie che si possono uniformizzare con le dette trascendenti vanno ricercate* (tolto il caso di superficie con un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in sè, superficie per le quali il problema dell'uniformizzazione è già risoluto) (7) *fra le superficie con un fascio, di genere uguale all'irregolarità, di curve ellittiche e fra quelle (regolari) con tutti i generi uguali all'unità.*

1. *Dimostrazione di un teorema di Picard.* - Per non complicare inutilmente l'esposizione, daremo la dimostrazione del teorema di Picard nel caso (il solo che ci interessi pei nostri scopi) di un sistema di 3 funzioni di due variabili, quando fra queste funzioni intercede una relazione algebrica. La estensione delle considerazioni che stiamo per sviluppare a sistemi di funzioni (legate o no da relazioni algebriche) in quante si vogliano variabili è pressochè ovvia.

Ecco di che cosa si tratta. Sia $f(x, y, z) = 0$ l'equazione di una superficie algebrica F irriducibile dell' $S_3(x, y, z)$, la quale possegga una trasformazione razionale τ (non necessariamente birazionale) che la muti in sè:

$$(1) \quad \begin{cases} x' = R(x, y, z) \\ y' = S(x, y, z) \\ z' = T(x, y, z) \end{cases}$$

ove R, S, T sono funzioni razionali dei rispettivi argomenti.

Ammetteremo inoltre che τ possegga un punto unito in un punto semplice di F. Se, com'è lecito supporre, il punto unito è nell'origine delle coordinate e il piano tangente ivi ad F coincide col piano $z = 0$, la F, nell'intorno dell'origine si rappresenta con una equazione del tipo

$$(2) \quad z = z(x, y)$$

ove $z(x, y)$ è una serie doppia di potenze x, y, cominciante con termini di 2° grado almeno, convergente totalmente in un intorno $|x| < \rho$ $|y| < \rho$ dell'origine ($\rho > 0$). Sosti-

(6) F. SEVERI, *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica*, « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », t. 30, pagg. 265 e sgg. 1910.

(7) Qualche particolare osservazione andrebbe fatta, a dir vero, per le superficie ellittiche di determinante maggiore di uno dato che la possibilità di una loro rappresentazione parametrica non è mai stata esplicitamente rilevata.

tuendo l'espressione data per z dalla (2) nelle prime due delle (1), si ottengono le x' y' come funzioni delle sole x, y, sicchè sviluppando in serie i secondi membri avremo due equazioni del tipo:

$$(3)\quad \begin{cases} x' = \alpha y + \beta y + [2]_{xy} \\ y' = \gamma x + \delta y + [2]_{xy} \end{cases}$$

(ove con $[2]_{xy}$ s'indica l'insieme dei termini d'ordine ≥ 2 in x, y).

La trasformazione (3) viene approssimata fino all'intorno del 2° ordine dalla proiettività:

$$(4)\quad \begin{cases} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = \gamma x + \delta y \end{cases}$$

e questa per scelta conveniente degli assi x, y sul piano $z = 0$ si potrà ridurre alla forma canonica

$$(5)\quad \begin{cases} x' = a\,x \\ y' = \qquad by \end{cases} \qquad (ab \neq 0)$$

ogni qualvolta la proiettività subordinata dalla τ fra le direzioni uscenti dal punto unito non sia nè degenere nè parabolica. I numeri a, b sono le radici della equazione caratteristica della proiettività (4) (*):

$$\begin{vmatrix} \alpha-\rho & \beta \\ \gamma & \delta-\rho \end{vmatrix} = 0$$

Ebbene il teorema di Picard asserisce che: nelle ipotesi sopra specificate, se risulta $|a| > 1$, $|b| > 1$, e non è mai $a^h = b$, $b^h = a$, con h intero ≥ 2, *si possono trovare 3 funzioni meromorfe,* univoche in tutto il piano complesso delle due variabili complesse u, v; $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$, *due a due funzionalmente indipendenti, legate dall'equanone algebrico.* $f(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) = 0$ *sicchè ponendo* $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, $z = \chi(u,v)$ *si ha una*

(*) Le a, b, sono invarianti per trasformazioni birazionali (anzi topologiche) della F che siano regolari nell'intorno del punto unito considerato. Per omogeneità di notazioni indichiamo le coordinate non omogenee sul piano $z = o$ con x^1, x^2 e su quello $Z = o$ tangente nel punto analogo del punto unito, sulla superficie trasformata e che porremo ancora nell'origine, con X^1, X^2. Pensando z, Z come funzioni delle x^i, X^i rispettivamente, nasce fra i due piani $z = o$, $Z = o$ una corrispondenza $X^i = X^i(x^j)$ invertibile nelle $\{ x^k = x^k(X^s)$. La (3) in coordinate x^i è del tipo $\{x'^i = \alpha^i_k x^k + [2]$ e in coordinate X^i del tipo $\{ X'^i = X^i(\alpha^k_j x^k(X^s) + [2])$.

Pertanto i coefficienti α^i_s analoghi agli α^i_k sono espressi dalle $\alpha'^i_s = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \alpha^j_k \frac{\partial x^k}{\partial X^s}$ epperò l'equazione caratteristica relativa alla nuova proiettività approssimante è: $\left| \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} \alpha^j_k \frac{\partial x^k}{\partial X^s} \right) - \rho\, 1 \right| = o$ con ovvie notazioni matriciali. Questa ha le stesse radici della equazione scritta nel testo. Infatti dalle $X^i = X^i(x^j(X^s))$ derivando rispetto a X^s e indicando con δ^s_i il simbolo di Kronecker, si ha: $\frac{\partial X^i}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial X^s} = \delta^i_s$ ed è per l'ipotesi della regolarità della trasformazione $\left| \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right| \neq o$.

Il dott. C. Longo, cui comunicai l'esistenza di questi invarianti, si è occupato di assegnarne il significato sia topologico che proiettivo in un lavoro di prossima pubblicazione, ove è approfondito lo studio delle trasformazioni puntuali fra piani sovrapposti.

una rappresentazione parametrica della $f(uyz) = 0$; *e tali da soddisfare alle equazioni funzionali:*

$$(6) \begin{cases} \varphi(au, bv) = R(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \\ \psi(au, bv) = S(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \\ \chi(au, bv) = T(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \end{cases}$$

Sul piano delle variabili uniformizzanti u,v, la trasformazione τ assume così la forma

$$\begin{cases} u' = a\,u \\ v' = \quad\; bv. \end{cases}$$

2. Passiamo alla dimostrazione del teorema. All'uopo cominciamo ad osservare che un'equazione funzionale del tipo

$$g(au, bv) = a\, g(u,v) + G(u,v)$$

nella funzione incognita $g(u,v)$, ove sia $G(u,v)$ una serie doppia di potenze cominciante con termini di 2° ordine al più; $G(u,v) = \sum_{r+s \geq 2} g_{rs} u^r v^s$; totalmente convergente per $|u| < \rho$, $|v| < \rho$ $(\rho > o)$, definisce una funzione $g(u,v)$, sviluppabile in una serie doppia di potenze, totalmente convergente in $|u| < \rho$, $|v| < \rho$; e ciò in modo unico se si conviene che sia:

$$g(o,o) = o, \quad g'_u(o,o) = k \quad (\text{con } k \neq o, \text{ prefisso}) \quad g'_v(o,o) = o$$

Posto infatti $g(u,v) = ku + \sum_{r+s \geq 2} A_{rs} u^r v^s$ si ottengono le relazioni:

$$A_{rs}(a^r b^s - a) = g_{rs} \qquad r + s \geq 2$$

Perciò, formalmente risulta essendo $a^r b^s - a \neq o$, per le ipotesi fatte sui numeri a, b e cioè di non esser mai $a^h = b$ ovvero $b^h = a$ con $h \geq 2$,

$$g(u,v) = ku + \sum_{r+s \geq 2} \frac{g_{rs}}{a^r b^s - a} u^r v^s.$$

Poichè per $r + s \to \infty$, $|a^r b^s - a| \to \infty$, esiste un numero positivo M_a tale che per $r + s \geq 2$, sia $a^r b^s - a > M_a$, la serie sopra scritta ammette come serie maggiorante la serie

$$|k|\,|u| + \frac{1}{M_a} \sum |g_{rs}|\,|u|^r\,|v|^s$$

che è convergnte per $|u| < \rho$, $|v| < \rho$. Di qui l'asserto

Osserviamo ancora che se ρ è abbastanza piccolo risulta per $|u| < \rho$, $|v| < \rho$, $|g(u,v)| < \rho$, purchè $|k| < \frac{M_a}{M_a + 1}$.

Infatti, per ρ conveniente se $|u| < \rho$, $|v| < \rho$ risulta certo $\sum |g_{rs}|\,|u|^r\,|v|^s < |k|\rho$ e quindi

$$|g(u,v)| \leq |k|\,|u| + \frac{1}{M_a} \sum |g_{rs}|\,|u|^r\,|v|^s$$

$$< |k|\rho\left(1 + \frac{1}{M_a}\right) < \rho$$

3. Riprendiamo in esame le equazioni (3) che scriviamo ora per disteso prendendo il riferimento com'è richiesto dalle (5):

$$\begin{cases} x' = a\,x \qquad + P(x,y) \\ y' = \qquad b\,y + Q(x,y) \end{cases}$$

essendo $P(x,y)$, $Q(x,y)$ serie doppie di potenze comincianti con termini di 2° ordine almeno.

Consideriamo le equazioni funzionali nelle funzioni incognite $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$:

$$(6)\begin{cases} \varphi(au,bv) = a\,\varphi(u,v) + \qquad\qquad P[\varphi(u,v),\psi(u,v)] \\ \psi(au,bv) = \qquad\qquad b\,\psi(u,v) + Q[\varphi(u,v),\psi(u,v)] \end{cases}$$

Fissato un numero $k \neq 0$ e $< \dfrac{1}{M+1}$ ove M è un numero positivo non superiore ai due numeri M_a, M_b (*) (che si definisce allo stesso modo di M_a), è possibile determinare un numero positivo ρ tale che

a) $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ convergano totalmente per $|x| < \rho$, $|y| < \rho$

b) nel medesimo campo le serie dei moduli di P e Q si mantengono inferiori a $|k|\rho$.

Sotto queste ipotesi *si posson determinare due funzioni* $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, *funzionalmente indipendenti nell'intorno di* $u = v = 0$, *olomorfe in tutto* $|u| < \rho$, $|v| < \rho$.

Per questo consideriamo il sistema $\{\varphi_n(u,v)\}$, $\{\psi_n(u,v)\}$ di funzioni definite in modo ricorrente per ogni valore dell'intero n, dalle relazioni

$$\varphi_0(u,v) = u \quad , \quad \psi_0(u,v) = v$$

$$\begin{cases} \varphi_n(au,bv) = a\,\varphi_n(u,v) + \qquad P[\varphi_{n-1}(u,v),\psi_{n-1}(u,v)] \\ \psi_n(au,bv) = \qquad b\,\psi_n(u,v) + Q[\varphi_{n-1}(u,v),\psi_{n-1}(u,v)] \end{cases}$$

e ciò sotto le condizioni specificate al n. 2 per la prima di queste equazioni e le analoghe, per la seconda equazione quando si scambino gli uffici di u e v.

In virtù di ciò che si disse al n. 2 risulta:

1°) $\varphi_1(u,v)$ definita e totalmente convergente in $|u| < \rho$, $|v| < \rho$ ed è ivi $|\varphi_1(u,v)| < \rho$;

$\psi_1(u,v)$ definita e totalmente convergente nel medesimo campo e ivi $|\psi_1(u,v)| < \rho$;

2°) $\varphi_2(u,v)$ definita e totalmente convergente in $|u| < \rho$, $|v| < \rho$ ed ivi $|\varphi_2(u,v)| < \rho$ dato che i valori assunti dalla serie dei moduli di $P[\varphi_1(u,v), \psi_1(u,v)]$ in $|u| < \rho$, $|v| < \rho$ sono fra i valori assunti dalla serie dei moduli di $P(u,v)$ nello stesso campo.

Analogamente per $\psi_2(u,v)$.

Così procedendo si ottengono le due successioni di funzioni $\{\varphi_n(u,v)\}$, $\{\psi_n(u,v)\}$ olomorfe in $|u| < \rho$, $|v| < \rho$ ivi equilimitate: $|\varphi_n(u,v)| < \rho$, $|\psi_n(u,v)| < \rho$.

4. Le serie di queste approssimazioni successive convergono uniformemente se ρ è convenientemente piccolo.

(*) $\dfrac{M}{M+1} \leqslant \dfrac{M_a}{M_a+1}$; $\dfrac{M}{M+1} \leqslant \dfrac{M_b}{M_b+1}$, implica $M \leqslant M_a$; $M \leqslant M_b$, e viceversa.

Infatti, poichè nell'origine $u = v = o$ le derivate prime di $P(u,v)$, $Q(u,v)$ sono nulle, fissato un ε positivo e $< M$, per ρ sufficientemente piccolo risulta in $|u| < \rho$, $|v| < \rho$

$$(7) \quad |P(u_1, v_1) - P(u_2, v_2)| < \varepsilon\,\delta \; ; \; |Q(u_1, v_1) - Q(u_2, v_2)| < \varepsilon\,\delta$$

essendo (u_1, v_1), (u_2, v_2) una qualunque coppia di punti nell'intorno considerato, e δ il più grande dei numeri $|u_1 - u_2|$, $|v_1 - v_2|$.

Ciò posto, si osservi che le differenze $\Phi_n(u,v) = \varphi_n(u,v) - \varphi_{n-1}(u,v)$;

$$\Psi_n(u,v) = \psi_n(u,v) - \psi_{n-1}(u,v)$$

sono nulle in $u = v = o$ insieme alle loro derivate parziali prime e, per $n \geq 2$, soddisfano le equazioni funzionali:

$$\begin{cases} \Phi_n(au,bv) = a\Phi_n(u,v) + \{P[\varphi_{n-1}(u,v), \psi_{n-1}(u,v)] - P[\varphi_{n-2}(u,v), \psi_{n-2}(u,v)]\} \\ \Psi_n(au,bv) = b\psi_n(u,v) + \{Q[\varphi_{n-1}(u,v), \psi_{n-1}(u,v)] - Q[\varphi_{n-2}(u,v), \psi_{n-2}(u,v)]\} \end{cases}$$

Indicando pertanto con Δ_{n-1} il maggiore dei confini superiori di $|\Phi_{n-1}(u,v)|$, $|\Psi_{n-1}(u,v)|$ in $|u| < \rho$, $|v| < \rho$ risulta in questo campo:

$$|\Phi_n(u,v)| < \frac{1}{M_a}\,\varepsilon\,\Delta_{n-1} \; ; \; |\Psi_n(u,v)| < \frac{1}{M_b}\,\varepsilon\,\Delta_{n-1} .$$

Infatti posto nel primo caso $P[\varphi_{n-1}(u,v), \psi_{n-1}(u,v)] - P[\varphi_{n-2}(u,v), \psi_{n-2}(u,v)] = \sum\limits_{r+s\geq 2} h_{rs}u^r v^s$ viene:

$$\Phi_n(u,v) = \sum_{r+s\geq 2} \frac{h_{rs}}{a^r b^s - a}\, u^r v^s$$

e quindi

$$|\Phi_n(u,v)| < \frac{1}{M_a}\,|\Sigma\, h_{rs}\, u^r v^s| < \frac{1}{M_a}\,\varepsilon\,\Delta_{n-1}$$

in virtù delle (7).

È dunque:

$$|\varphi_2 - \varphi_1| < \frac{1}{M}\,\varepsilon \cdot 2\rho \; ; \; |\varphi_3 - \varphi_2| < \frac{1}{M^2}\,\varepsilon^2 \cdot 2\rho \; ; \ldots ; \; |\varphi_n - \varphi_{n-1}| < \frac{1}{M^n}\,\varepsilon^n \cdot 2\rho$$

e analogamente per la successione $\{\psi_n\}$.

Ciò dimostra che in $|u| < \rho$, $|v| < \rho$ le serie

$$\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots$$

e

$$\psi_0 + (\psi_1 - \psi_0) + (\psi_2 - \psi_1) + \ldots$$

convergono totalmente essendo minoranti della serie geometrica (convergente per essere $\varepsilon < M$)

$$2\rho\,\frac{\varepsilon}{M}\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{M^2} + \ldots\right)$$

Le funzioni $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ ottenute come limiti delle successioni $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ soddisfanno le equazioni funzionali (6'), esse non si riducono a costanti perchè il complesso dei termini del prim'ordine di $\varphi(u,v)$ è dato da ku e quello di $\psi(u,v)$ da kv. Per questo $\varphi(u,v)$ e $\psi(u,v)$ sono nell' intorno di $u = v = o$ funzionalmente indipendenti essendo

$$\left|\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}\right|_{(o,o)} = \begin{vmatrix} k & o \\ o & k \end{vmatrix} = k^2 \neq o .$$ [10]

5. Sostituiamo ora nella (2) x, y con le funzioni $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ trovate e poniamo

$$\chi(u,v) = z[\varphi(u,v), \psi(u,v)].$$

Allora per $|u| < \rho$, $|v| < \rho$ restano soddisfatte dalle funzioni φ, ψ, χ le equazioni funzionali (6).

D'alra parte le (6) definiscono in modo univovo le *funzioni* $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$ in tutto il campo $|u| < |a|\rho$, $|v| < |b|\rho$; a sua volta quest'ultime funzioni permettono il prolungamento analitico di $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$ per mezzo sempre delle (6) in tutto il campo $|u| < |a|^2\rho$, $|v| < |b|^2\rho$. Così proseguendo si constata che le funzioni $\varphi(u,v)$ $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$ *sono funzioni meromorfe* [11] *in tutto il piano delle variabili u. v, ed anzi nel caso che R, S, T siano polinomi nelle x, y, z, quelle funzioni non hanno mai singolarità al funito; sono cioè trascendenti intere.*

Con ciò il teorema di Picard è completamente dimostrato.

Osserviamo, prima di terminare che il *procedimento di approssimazioni successive adoperato fornisce delle funzioni φ, ψ, χ, uno sviluppo in serie di funzioni razionali.*

6. ***Esempi di superficie parametrizzabili colle funzioni di Poincaré-Picard.*** – Ecco un primo esempio di una famiglia di superficie *dipendente da 17 moduli* e parametrizzabile con le funzioni considerate per valori generici dei moduli.

Si tratta delle *superficie del 4° ordine generiche dello spazio ordinario contenenti una coppia di rette incidenti.*

Se, com'è lecito supponiamo che quelle due rette siano le rette improprie dei piani x = cost, y = cost, e che le cubiche staccate su $x = o$, $y = o$ rispettivamente, passino per l'origine $x = y = z = o$ presentando ivi un flesso; che le tangenti di flesso coincidano cogli assi coordinati y ed x rispettivamente [12]; l'equazione della superficie ha la forma:

[10] A rigore basterebbe solo osservare che $\lim\limits_{n \to \infty} \Phi_n = o$ $\lim\limits_{n \to \infty} \Psi_n = o$ perchè in virtù del teorema di Vitali si potrebbero estrarre dalle $\{\varphi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ due successioni di funzioni uniformemente convergenti $\{\varphi_\nu\}$, $\{\psi_\nu\}$ in $|u| < \rho$ $|v| < \rho$ insieme colle successioni $\{\varphi_{\nu-1}\}$, $\{\psi_{\nu-1}\}$. La $\{\varphi_\nu\}$ e la $\{\psi_{\nu-1}\}$, e così la $\{\psi_\nu\}$ e $\{\psi_{\nu-1}\}$ per la detta osservazione convergono allo stesso limite φ, ψ, rispettivamente e così si conclude come sopra circa la proprietà da dimostrare.

[11] Le singolarità essenziali di queste funzioni sono tutte sulla retta impropria del piano u, v, e questa da sola non può costituire varietà di diramazione per nessuna delle funzioni considerate.

[12] Ciò che è lecito supporre per la generica di queste superficie essendo queste condizioni verificate per le superficie rappresentate dall'equazione scritta qui sotto.

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) \equiv\ & A\,xy + B\,x^3 + C\,x^2y + D\,xy^2 + E\,y^3 + F\,x^3y + G\,x^2y^2 + H\,xy^3 \\
& + z\,(a + bx + cy + dx^2 + f\,xy + gy^2 + h\,x^2y + k\,xy^2) \\
& + z^2\,(\alpha + \beta x + \gamma y + \delta\, xy) + L\,z^3 = o. \qquad (a \neq o)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Consideriamo su f la trasformazione razionale τ che associa ad ogni punto (x, y, z) il suo tangenziale (x', y', z') sulla cubica segata su f dal piano $y = \text{cost}$ che passa per quel punto. Nell'intorno dell'origine la τ sarà rappresentata da equazioni del tipo:

$$
\begin{cases} x' = \alpha_{10}\, x + \alpha_{01}\, y + [2]_{xy} \\ y' = \phantom{\alpha_{10}\, x + \alpha_{01}\,} y \end{cases}
$$

Vediamo di calcolare α_{10} e α_{01}. Per questo fissiamo sulle curve $y = \text{cost}$, nell'intorno di $y = o$, l'integrale abeliano di 1ª specie

$$
u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f'_z(x, y, z)}
$$

ove y si pensi come parametro e prendendo l'origine dei cammini d'integrazione sulla curva K luogo dei flessi delle cubiche $y = \text{cost}$ nell'intorno dell'origine. Posto poi $y = t$ la falda di f tangente nell'origine al piano $z = 0$ si può uniformizzare per mezzo delle variabili u, t col porre

$$
(a) \quad \begin{cases} x = g(u,t) \\ y = h(u,t) = t\,. \end{cases}
$$

Le funzioni g ed h sono funzioni olomorfe [13] dei rispettivi argomenti in un intorno di $u = t = o$ ed ivi univocamente invertibili.

È dunque:

$$
g'_u(o,o) \neq o \quad , \quad h'_u(o,o) = o \quad , \quad h'_t(o,o) = 1\,.
$$

Quanto a $g'_t(o,o)$ si osservi che essa è uguale al $\lim\limits_{\Delta y \to o} \left(\dfrac{\Delta x}{\Delta y}\right)$ sul ramo della curva K $(u = o)$ uscente dall'origine cioè al reciproco del coefficiente angolare della tangente a K nell'origine. Per aver l'equazione sul piano $z = o$ di questa tangente che sta in $z = o$ appartenendo la K alla F) basta considerare nella $f(x, y, z) = o$ la y come parametro, scrivere l'equazione $H(x, y, z) = o$ della hessiana della cubica considerata, porre in $H(x, y, z) = o$ $z = o$ e annullare il complesso dei termini di 1° grado di $H(x, y, o) = o$.

[13] Ciò è evidente per la h che si riduce alla sola variabile t. Quanto alla g si osservi che la funzione $\Phi(u, t, x_0, x) = u - \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{f'_z(x,t,z)}$ è olomorfa nei suoi argomenti in un intorno dell'origine $u = t = x = x_0 = o$ epperò tale è anche la funzione implicita $x = g(u, t)$ definita dall'equazione $\Phi(u, t, x_0(t), x) = o$ essendo $x_0(t)$ l'ascissa del flesso della curva $y = t$ nell'intorno dell'origine.

Facendo i calcoli risulta:

$$H(x,y,o) = \begin{vmatrix} o & 2Ay & 2a + 2cy + 2bx \\ 2Ay & 2Cy + 6Bx & b + fy + 2dx \\ 2a + 2cy + 2bx & b + fy + 2dx & 2\alpha + 2\gamma y + 2\beta x \end{vmatrix} + [2]_{xy}$$

epperò

$$g'_t(o,o) = \frac{Ab - aC}{3\,a\,B} = \mathbf{a}$$

D'altra parte sul piano delle variabili u,t, la trasformazione τ viene rappresentata nell' intorno dell'origine dalle equazioni (14):

$$(\beta) \begin{cases} u' = -2u \\ t' = t \end{cases}$$

Posto dunque

$$(\gamma)\ x' = g(u', t')$$

risulta pensando la x' funzione delle x, y, attraverso le (γ), (β), (α), e tenendo subito che u' dipende solo da u e t' solo da t;

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)_{(o,o)} = \frac{\partial x'}{\partial u'}\ \frac{\partial u'}{\partial u}\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x'}{\partial t'}\ \frac{\partial t'}{\partial t}\ \frac{\partial t}{\partial x} = -2$$

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)_{(o,o)} = \frac{\partial x'}{\partial u'}\ \frac{\partial u'}{\partial u}\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial x'}{\partial t}\ \frac{\partial t'}{\partial t'}\ \frac{\partial t}{\partial y} = +\ 2\,g_t'(o,o) + g_t'(o,o) = 3\mathbf{a}$$

dato che $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{g'_u}$; $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{g'_t}{g'_u}$

È dunque $\alpha_{11} = -2$; $\alpha_{22} = 3\mathbf{a}$

La trasformazione τ considerata non rientra ancora nel tipo delle trasformazioni razionali considerate nel teorema dimostrato nei numeri precedenti perchè una delle radici caratteristiche della proiettività approssimante è uguale ad 1. Ma ciò che si detto per la τ ed il fascio $y = \text{cost}$, si può ripetere per l'analoga trasformazione σ relativa alle cubiche del fascio $x = \text{cost}$. Questa verrà rappresentata nell' intorno dell'origine da equazioni del tipo:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 3\mathbf{b}x - 2y + [2]_{xy} \end{cases}$$

e sarà $\mathbf{b} = \dfrac{Ac - aD}{3aE}$.

Componendo le due trasformazioni τ e σ otteniamo una trasformazione θ:

$$\begin{cases} x' = -2x + 3\mathbf{a}y\ [2]_{x,y} \\ y' = 3\mathbf{b}x - 2y + [2]_{x,y} \end{cases}$$

(14) Ciò in virtù del fatto che, pel teorema di Abel, $u' + 2u \equiv o$ (modd. periodi), l'origine dei cammini d'integrazione essendo in O e che muovendoci solo nell' intorno di O la congruenza scritta si muta in una uguaglianza.

e l'equazione caratteristica della proiettività approssimante la ε fino al 2° ordine è:

$$(8) \quad \begin{vmatrix} -2-\rho & 3\mathfrak{a} \\ 3\mathfrak{b} & -2-\rho \end{vmatrix} = \rho^2 + 4\rho + 4 - 9\,\mathfrak{ab} = o\,.$$

Questa ha le radici $\rho_1 = -2 + 3\sqrt{\mathfrak{ab}}$; $\rho_2 = -2 - 3\sqrt{\mathfrak{ab}}$.
La superficie sarà uniformizzabile non appena risulti:

1°) $|\rho_1| > 1$; $|\rho_2| > 1$
2°) $\rho_1^h \neq \rho_2$; $\rho_2^h \neq \rho_1$ (h intero ≥ 2 .)

La seconda di queste condizioni è soddisfatta quando $\mathfrak{ab} = o$ epperò anche dalla generica superficie della famiglia considerata. Quanto alla prima essa ci dice che pel numero $\pm 3\sqrt{\mathfrak{ab}}$ vanno esclusi quei valori che cadono, sul piano complesso $\xi + i\eta$, nei cerchi con centri nei punti ± 2 e raggio unitario ossia per $\pm\sqrt{\mathfrak{ab}}$ vanno esclusi quei valori che cadono nei cerchi di centro nei punti $\pm {}^2/_3$ e aventi il raggio $= {}^1/_3$.

Sembrerebbe a prima vista perchè la superficie data risuli uniformizzabile colle trascendenti considerate, che fosse necessario imporre delle limitazioni alla variabilità dei moduli di natura non analitica sicchè non sarebbe senz'altro lecito asserire che la superficie generica della classe è parametrizzabile.

Così non è. Basta prendere infatti in luogo della trasformazione τ (e così della σ) che associa ad ogni punto $(x' y' z')$ d'una curva del fascio $y = \text{cost}$ il gruppo dei punti doppi (x, y, z) della g^1_2 residua del punto rispetto alla g^2_3 delle sezioni piane, quella τ' (o ripettivamente σ') che si ottiene partendo anzichè da questa g^2_3, dalla serie g^5_6, $g^8_9, \ldots$ doppia, tripla, ... di quella associando ad ogni punto $(x' y, z')$ i punti tripli, quadrupli, ... della serie residua di quel punto rispetto alla data.

Allora invece dell'equazione (8) se ci si riferisce alle serie multiple secondo l'intero n delle g^1_3 rettilinee sulle curve dei fasci $x = \text{cost}$ si ha l'equazione:

$$(9) \quad \begin{vmatrix} -h-\rho & (h+1)\,\mathfrak{a} \\ (h+1)\mathfrak{b} & -h-\rho \end{vmatrix} = \rho^2 + 2h\rho + h^2 - (h+1)^2\,\mathfrak{ab} = o$$

ov'è $h = 3n - 1$ e ove $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ sono i medesimi che nella (8) poichè riferendosi per esempio alla trasformazione che ha sostituito la τ, essa ammette sempre come curva di punti uniti la K (più una parte residua).

I valori che ora occorre escludere per $\pm\sqrt{\mathfrak{ab}}$ sono quelli che cadono nei cerchi di centri $\pm \frac{h}{h+1}$ e di raggio $\frac{1}{h+1}$.

Se si fa tendere n all'∞ questi cerchi tendono a ridursi ai punti ± 1 sicchè in definitiva l'unica condizione che s'impone ad $\mathfrak{ab}$ è d'essere $\neq 1$, condizione verificata dalla generica delle superficie considerate.

Le superficie in esame dipendono da 17 moduli rispetto al gruppo delle trasformazioni birazionali. Infatti tanti sono gli invarianti proiettivi [13] e d'altro canto una tra-

[13] Ciò che risulta dal fatto che l'equazione $f(x\,y\,z) = o$ contiene 20 coefficienti non omegenei e che la scelta del punto unità diminuisce ancora di 3 unità il numero dei parametri. O anche osservando che le superficie del 4° ordine per una coppia di rette incidenti sono $\infty^{34-9} = \infty^{25}$ e che vi sono ∞^8 omografie che mutano in sè quella coppia di rette.

sformazione birazionale che muti l'una nell'altra due di queste superficie è senza eccezioni e deve mutare i due fasci di cubiche piane dell'una nei due fasci analoghi dell'altra sicchè necessariamente è una trasformazione omografica.

La generica di queste superficie ha tutti i generi $p_a = p_g = P_i = 1$ $(i = 2, 3,...)$ e non è nè razionale, nè riferibile a rigata, nè ellittica, nè iperelittica (chè ogni famiglia di superficie iperellittiche dipende da 3 moduli al più) [16].

Il nostro asserto è completamente provato.

7. Le considerazioni precedenti permettono di concludere che anche la superficie generica della *famiglia, anch'essa dipendente da 17 moduli, delle superficie del 4° ordine che contengono una coppia di rette sghembe* è uniformizzabile colle funzioni considerate.

Si prenda infatti una di queste rette nella retta impropria del piano $y = o$ e l'altra nella retta del piano $x = o$; $\alpha z = 1$. Possiamo senza restrizione imporre anche le cubiche della superficie staccate dai piani $x = o$, $y = o$ passino per l'origine con un flesso e che la tangente d'inflessione ivi coincida rispettivamente con l'asse delle y o con quello delle x. L'equazione della superficie risulta della forma:

$$(\alpha z - 1)\, \varphi_3(y,z) + x\, \psi_3(x,y,z) = o \qquad (10)$$

ove $\varphi_3(y,z)$ e un polinomio del 3° ordine in y,z privo del termine noto, di quello in y, in y^2, e di quello in z^3; e ove $\psi_3(x,y,z)$ è un polinomio di 3° ordine in x,y,z privo del termine noto e dei termini in x, x^2, x^2z, z^2, z^2x.

Le considerazioni del numero precedente fatte per la trasformazione razionale τ' fissata servendosi delle curve del fascio $y = \text{cost}$ valgono inalterate.

Quanto alla trasformazione σ' che si fissa servendosi delle curve del fascio

$$t(\alpha z - 1) + x = o$$

(t parametro da cui dipendono le curve del fascio), uniformizzando la falda delle superficie tangente nell'origine al piano $z = o$, colle variabili t ed u, u essendo l'integrale abeliano di 1ª specie fissato sulle curve del fascio considerato, colle:

$$\begin{cases} x = g(u,t) \\ y = h(u,t) \end{cases}$$

risulta: $\quad h'_u(o,o) \neq o,\quad g'_u(o,o) = o,\quad g'_t(o,o \neq o)$.

Pertanto risulta, colle solite notazioni:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = o ;$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = (h+1)\mathfrak{b} \qquad \text{con } \mathfrak{b} = \frac{h'_t(o,o)}{g'_t(o,o)} ;$$

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = -h .$$

[16] Ved. Enriques-Severi *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques*, « Acta Mathematica » t. 32, 33, 1909-10, prix Bordin 1907. Ved. anche Bagnera-de Franchis. *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica...*, « Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL) » s. 3, t. 15 pag. 251 e sgg. 1908.

L'equazione caratteristica della proiettività approssimante sul piano $z=0$ la $\tau'\sigma'$ ha sempre la forma (9) ed $\mathfrak{ab}$ è una funzione razionale dei coefficienti dell'equazione delle superficie (indipendente da h) la quale per valori generici di quest'ultimi è $\neq 1$ e tale che nessuna delle radici dell'equazione caratteristica elevata ad un esponente ≥ 2 uguagli l'altra.

Basta invero osservare che facendo nella (10) $\alpha \to 0$ cioè portando le due rette contenute nella superficie a coincidere, si ottiene al limite la generica delle superficie (8) ove è $L=0$, cioè dotata di punto doppio nel punto improprio dell'asse z, e che per questa superficie le condizioni indicate sono verificate.

Anche queste superficie hanno tutti i generi uguali ad 1.

8. Come *ultimo esempio* mostriamo come uniformizzare colle trascendenti considerate *la superficie generica di genere geometrico* $p_g=0$, *bigenere* $P_2=1$, *trigenere* $P_3=0$.

Enriques ha dimostrato che ogni superficie di questo tipo può essere trasformata birazionalmente in una superficie F_6 del 6° ordine che passa doppiamente per gli spigoli di un tetraedro Δ ([17]). Queste superficie costituiscono un'unica famiglia dipendente da 10 moduli.

Riferiamoci al modello proiettivo F_6 e prendiamo in esame due dei fasci di quartiche ellittiche, staccati sopra F_6 dalle quadriche che passano per le quaterne di spigoli del tetraedro Δ ottenute sopprimendo coppie di spigoli opposti. Siamo $|C|$, $|D|$ questi due fasci. Su ciascuna delle C (D) consideriamo la serie ivi razionalmente individuata g^{4n-1}_{4n}, multipla secondo n della g^3_4 delle sezioni piane, e la trasformazione razionale τ' (σ') che associa ad ogni punto (x'y'z') i punti (x,y,z) (4 n—1)—upli della serie residua, di (x'y'z') rispetto alla g^{4n-1}_{4n} considerata.

Sia V un punto di F_6 che sia stazionario sia come punto della C, sia come punto della D che passano per esso (cioè il piano osculatore alla curva considerata in V abbia colla medesima ivi incontro quadripunto) e siano K, H le curve dei punti stazionari delle C e delle D rispettivamente.

Scegliamo un nuovo riferimento (X,Y,Z) prendendo V come origine, l'asse X tangente ivi alla C per V, l'asse Y tangente ivi alla D per V.

Ragionando come nei casi precedenti si riconosce che le τ', σ' vengono rappresentate nell'intorno di V sul piano XY da equazioni del tipo:

$$\tau' \begin{cases} X' = -hX + (h+1)\mathfrak{a}Y + [2]_{xy} \\ Y' = \qquad\qquad\qquad\quad Y + [2]_{xy} \end{cases}$$

$$\sigma' \begin{cases} X' = X \qquad\qquad\qquad\quad + [2]_{xy} \\ Y' = (h+1)\mathfrak{b}X - hY \quad + [2]_{xy} \end{cases}$$

ove $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ sono funzioni razionali dei coefficienti dell'equazione in coordinate (X,Y,Z) di F_6 e precisamente rappresentano:

$\mathfrak{a}$ il reciproco del coefficiente angolare della tangente in V a K

$\mathfrak{b}$ il coefficiente angolare della tangente in V ad H.

([17]) F. Enriques, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno* « Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL) » 1. 3, t. 14, pag. 327 e agg. (1907)

Componendo le trasformazioni τ', τ' si ottiene una trasformazione razionale di F_6 in sè la quale ammette come equazione caratteristica della proiettività approssimante sul piano X,Y l'equazione (9), con $h = 4n-1$.

Il nostro scopo sarà raggiunto appenachè mostreremo che la funzione razionale ab per valori generici dei moduli di F_6 è $\neq 1$ e tale che nessuna delle radici dell'equazione caratteristica sia uguale ad una potenza dell'altra ad esponente ≥ 2.

Basta verificare questo fatto sopra un esempio. Prendiamo come primo riferimento (x y z) quello offerto dal tetraedro Δ e consideriamo quelle particolari superficie F_6 che sono mutate in sè dalle simmetrie

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \\ z' = z \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

rispetto ai piani $x = y$; $y = z$; e che passano per il punto unità V(1,1,1).

Una tal superficie ha una equazione del tipo:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) \equiv a\,(x^3yz + xy^3z + xyz^3) + b\,xyz + c\,(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2) + d\,x^2y^2z^2 + \\ + f\,(x^2y^2z + x^2yz^2 + xy^2z^2) + g\,(x^2yz + xy^2z + xyz^2) = o \end{aligned}$$

essendo

$$3a + b + 3c + d + 3f + 3g = o.$$

Sia il fascio |C| segato dalle quadriche $z = \lambda xy$ e quello |D| dalle quadriche $x = \mu yz$.

L'imposizione che il punto V sia stazionario per C (e quindi anche per D) essendo C, (D), la curva di F_6 $z = xy$ $(x = yz)$, è, come si verifica [15], automaticamente verificata sicchè, date le simmetrie che mutano in sè i fasci |C| e |Γ| i rami di K ed H che escono V devono trovarsi sui piani $x = y$; $y = z$, rispettivamente. Prendendo come unità di

[15] Questa condizione equivale alla relazione differenziale (a) $2y'y''' = 3y''^2$ fra le derivate in $x = 1$, prime, seconde e terze dell'ordinata $y(x)$ del punto variabile sopra C nell'interno di V. Questa relazione si ottiene infatti imponendo ai 3 vettori (dx,dy,dz), (d^2x,d^2y,d^2z), (d^3x,d^3y,d^3z) di appartenere alla stessa giacitura o, se si vuole, imponendo alla conica $xy + \alpha x + \beta y + \gamma = o$ aggiunta alla proiezione C' di C sul piano xy ed osculante la C' nel punto (1,1) di aver ivi con C' contatto 4-punto; ciò che si esprime sostituendo nell'equazione della conica la y con la funzione $y(x)$ e annullando le derivate della funzione di x che è al primo membro, nel punto $x = 1$, fino al 3° ordine.

Facendo i calcoli si ottiene, riferendosi all'equazione $f(x,y) = o$ di C':

$$f'_x(1,1) = 4a + 2c + 2d + 4f + 2g \;;\; f''_{x^2}(1,1) = f''_{y^2}(1,1) = 4a + 2d + 2c + 2f$$
$$f''_{xy}(1,1) = 4a + 4d + 5f + g \;;\; f'''_{x^3} = o\ .$$

Donde

$$y'(1) = -1 \ , \ y''(1) = \frac{4d - 4c + 6f + 2g}{f'_y(1,1)} \quad , \quad \left\{ 3f''_{xy}\,y'' + 3f''_{y^2}\,y'y'' + f'_y\,y''' \right\}_{x=y=1} = o$$

da cui, moltiplicando per y' 1° e 2° membro e tenendo conto della (a), si ha:

$$\left\{ -f''_{xy} + f''_{y^2} + \tfrac{1}{2} f'_y\,y'' \right\}_{x=y=1} = o$$

E questa relazione è verificata sempre dai coefficienti a, c, d, f, g della equazione della superficie.

misura su X, Y quei segmenti che si proiettano dal punto improprio dell'asse z in segmenti di lunghezza unitaria sul piano xy, si riconosce che:

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad b = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad .$$

Pertanto:

$$\rho_1 = -2n + 1 \quad , \quad \rho_2 = -6n + 1$$

e per $n \geq 2$ le condizioni dette sono verificate.

9. ***Sulla totalità delle superficie parametrizzabili colle funzioni di Picard-Poincaré.*** — Quali sono le superficie algebriche che si può sperare di « uniformizzare » con le funzioni di Picard Poincarè ?.

Forse non è facile dare una risposta adeguata alla questione; ad ogni modo *se si escludono le superficie razionali; riferibili a rigata, ellittiche ed iperellittiche* delle quali si conoscono rappresentazioni parametriche con trascendenti note, *non rimangono come possibili tipi di superficie uniformizzabili con quelle funzioni che:*

a) *superficie d' irregolarità* $q \geq 0$ *qualsiasi con un fascio di genere* q *di curve ellittiche;*

b) *superficie regolari con tutti i generi uguali ad 1.*

Ricordiamo ([17]) all'uopo che una superficie algebrica F di genere lineare $p^{(1)} > 1$ ha per valori convenientemente elevati dell' intero k, il sistema k-canonico irriducibile, semplice ed almeno ∞^3.

Si indichi, per questo, con $|K|$ il sistema canonico di F; sarà provato il nostro asserto se dimostreremo che per k convenientemente alto il sistema $|kK|$ contiene parzialmente il sistema $|C|$ delle sezioni iperpiane di F. Se difatti così non fosse, sulla generica C le curve kK segnerebbero una $g_{k[K,C]}$ di dimensione r_k uguale a P_k-1 e non speciale per k sufficientemente alto dato che $[K,C] > 0$. Sia p il genere di C, pel teorema di Rieman-Roch sopra la curva C risulta

$$r_k \leq k\,[K,C] - p$$

mentre dall'analogo teorema sulla superficie F si deduce la nota disuguaglianza:

$$P_k - 1 \geq p_a + \frac{k\,(k-1)}{2}\,(p^{(1)} - 1) \quad .$$

Ne verrebbe che

$$k\,[K,C] - p \geq p_a + \frac{k\,(k-1)}{2}\,(p^{(1)} - 1) \quad ,$$

relazione assurda per k sufficiemente alto dato che il primo membro è infinito del 1° ordine ed il 2° di 2° ordine per $k \to \infty$.

([17]) Questa osservazione è già contenuta p. es. in un lavoro di Dantoni (Superficie algebriche con infinite involuzioni irrazionali..., « Commentationes della Pontificia Academia Scientiarum » t. IX, pagine 169-203, 1945). Il concetto della dimostrazione che qui esponiamo è tolto da un ragionamento esposto in vista di tutt'altri scopi dal prof. Severi nelle sue lezioni di Alta Geometria nell' anno Accademico 1947-48.

Ciò premesso dimostriamo che:

Una superficie algebrica irrazionale F, *di genere lineare* $p^{(1)} > 1$ *non può ammettere trasformazioni razionali che la mutino in sè che non siano birazionali* (cioè invertibili) *e quest'ultime sono al più un numero finito.*

Sia τ una trasformazione razionale di F in sè; supponemo F immersa in $S_3(x,y,z)$ e e dotata di singolarità ordinarie e sia $f(x,y,z) = o$, l'equazione di F; allora la τ sarà rappresentata con equazioni del tipo:

$$\begin{aligned} x' &= x'(x,y,z) \\ y' &= y'(x,y,z) \\ z' &= z'(x,y,z) \end{aligned}$$

le funzioni al 2° membro essendo razionali nei loro argomenti.

Siano

$$\underset{1}{A}(x,y,z)\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^k \quad ;\ldots\ldots; \quad \underset{P_k}{A}(x,y,z)\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^k \text{[29]}$$

P_k forme tensoriali di ordine 2k, di 1ª specie, linearmente indipendenti.

Allora anche le forme:

$$\underset{\alpha}{A}(x',y',z')\left(\frac{\partial(x',y')}{\partial(u,v)}\right)^k = \underset{\alpha}{A}[x'(x,y,z), y'(x,y,z), z'(x,y,z)]\left(\frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)}\right)^k \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^k \qquad (\alpha = 1,\ldots, P_k)$$

sono forme tensoriali d'ordine 2k, ancora di prima specie e quindi esprimibili come combinazione lineare (a coeff. costanti) delle P_k forme date:

$$\underset{\alpha}{A}(x',y',z')\left(\frac{\partial(x',y')}{\partial(u,v)}\right)^k = \sum_{1}^{P_k}{}_{\beta}\, \lambda_{\alpha\beta}\, \underset{\beta}{A}(x,y,z)\cdot\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^k \cdot \qquad (\alpha = 1,\ldots, P_k) \qquad (11)$$

Osserviamo subito che il determinate delle $\lambda_{\alpha\beta}$ è diverso da zero, chè, altrimenti, le forme tensoriali $\underset{\alpha}{A}(x',y',z')\left(\frac{\partial(x'y')}{\partial(u,v)}\right)^k$ $(\alpha = 1,\ldots, P_k)$, sarebbero linearmente dipendenti e ciò è assurdo.

Ciò posto, per un k fissato e opportunamente alto, consideriamo nello S_{P_k-1} l'imagine proiettiva di F col sistema k-canonico (ciò che è lecito per l'osservazione fatta poco fa). La superficie Φ che così si ottiene è rappresentata dalle equazioni, in coordinate omogenee x_α,

$$\begin{cases} x_\alpha = \underset{\alpha}{A}(x,y,z) \qquad f(x,y,z) = o. \\ \alpha = 1,\ldots, P_k \end{cases}$$

[29] Ved. E. Kähler, *Forme differenziali e funzioni algebriche*, « Memorie della R. Accademia d'Italia » t. 3, (1932). Colle notazioni tensoriali usuali, ciascuna di queste forme si presenta come una espressione del tipo: $A_{i_1 i_2 \ldots i_{2k-1} i_{2k}}\, \xi^{i_1 i_2} \ldots \xi^{i_{2k-1} i_{2k}}$, essendo $\xi^{i_1 i_2}$ il tensore plückeriano di 2° grado ed ove il tensore covariante $A_{(i_1 i_2) i_3 \ldots i_{2k}} = A_{i_1 i_2 (i_3 i_4) i_5 \ldots i_{2k}} = \ldots = A_{i_1 i_2 \ldots (i_{2k-1} i_{2k})} = o$ sicchè rimane una sola componente sostanzialmente: $A_{12\,12 \ldots 12} = A(x,y,z)$.

Le (11) mostrano d'altra parte che:

$$\frac{\underset{\alpha}{A}(x',y',z')}{\underset{1}{A}(x',y',z')} = \frac{\lambda_{\alpha 1}\underset{1}{A}(x,y,z) + \ldots + \lambda_{\alpha P_k}\underset{P_k}{A}(x,y,z)}{\lambda_{11}\underset{1}{A}(x,y,z) + \ldots + \lambda_{1 P_k}\underset{P_k}{A}(x,y,z)}$$

la quale relazione fra punti corrispondenti (x',y',z'); (x,y,z) nella τ sopra F si traduce, pel modello proiettivo Φ nella:

$$\frac{x'_\alpha}{x_1} = \frac{\lambda_{\alpha 1} x_1 + \ldots + \lambda_{\alpha P_k} x_{P_k}}{\lambda_{11} x_1 + \ldots + \lambda_{1 P_k} x_{P_k}} \tag{12}$$

cioè, essendo $|\lambda_{\alpha\beta}| \neq 0$, in una trasformazione omografica non degenere della Φ in sè.

Ciò dimostra intanto che ogni trasformazione razionale della superficiè data in sè è necessariamente birazionale.

Rimane da provare che, quando ci sono, le trasformazioni birazionali della superficie data in sè sono in numero finito.

Per questo si considerino tutte le omografie (non degeneri) dello S_{P_k-1} in sè; ciò che equivale a lasciare nelle (12) le λ arbitrarie.

Imponendo che la trasformata di Φ mediante le (12) coincide ancora con Φ, si vengono a scrivere nelle λ un certo numero di condizioni algebriche. Ciò prova intanto che su F o vi è un numero finito di trasformazioni birazionali in sè oppure ve n'è una infinità continua (algebrica).

Questa seconda eventualità va esclusa. Sia data, invero, se possibile, una ∞^1 algebrica, irriducile, rappresentata dai punti di una curva Γ, di trasformazioni birazionali di F in sè.

Allora le $\lambda_{\alpha\beta}$ risultano funzioni razionali $\lambda_{\alpha\beta}(\xi)$, del punto ξ corrente sopra Γ e queste funzioni non tutte risultano costanti.

Sia ξ_0 un polo di ordine s_β per $\lambda_{\alpha\beta}(\xi)$, ed s sia il più grande dei numeri per s_β $(\beta = 1,\ldots, P_k)$; qualche ξ_0 e per α conveniente è certo $s \geq 1$ e l'α-esima delle equazioni (11) si può scrivere nella forma:

$$\underset{\alpha}{A}(x',y',z')\left(\frac{\partial(x',y')}{\partial(u,v)}\right)^k = \frac{1}{(\xi-\xi_0)^s}\sum_{1}^{P_k}{}_\beta\, \lambda'_{\alpha\beta}(\xi)\,\underset{\beta}{A}(x,y,z)\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^k$$

ove con ξ e ξ_0 si pensi d'indicare una conveniente delle coordinate del punto ξ e ξ_0 ed ove le $\lambda'_{\alpha\beta}(\xi)$ sono funzioni analitiche regolari in $\xi = \xi_0$ e ivi non tutte nulle.

Facendo allora nella uguaglianza scritta $\xi \to \xi_0$ poichè il primo membro si conserva finito dev'essere

$$\sum_{1}^{P_k}{}_\beta\, \lambda'_{\alpha\beta}(\xi_0)\,\underset{\beta}{A}(x,y,z)\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^k = 0$$

e ciò è assurdo essendo le P_k forme tensoriali, che qui compaiono, linearmente indipendenti.[21] Ciò dimostra il nostro asserto [22].

[21] Questo medesimo ragionamento applicato a due superficie F, F' distinte, le quali abbiano un k-genere uguale, ≥ 4 e corrispondenti sistemi k-canonici irriducibili e semplici, prova che *ogni possi-*

Siamo ormai ad un passo dalla conclusione. Infatti una superficie irrazionale di genere lineare $p^{(1)} > 1$ non può rientrare nella classe delle superficie che ammettono una trasformazione razionale in sè del tipo descritto al n. 1 dato che essa essendo di necessità birazionale e periodica ha gli invarianti a, b relativi ad un suo punto unito entrambi in modulo uguali ad 1 (se n è il periodo risulta $a^n = b^n = 1$).

Se si ricorda allora che le superficie irrazionali di genere lineare $p^{(1)} \leq 1$ sono state classificate da Enriques ([23]) e si distribuiscono nei seguenti tipi:

1) superficie riferibili a rigata (irrazionale);
2) superficie ellittiche;
3) superficie di Picard;
4) superficie con un fascio di genere uguale all'irregolarità di curve ellittiche;
5) superficie con tutti i generi uguali all'unità.

Si conclude con quanto si è asserito al principio di questo numero.

D'altronde gli esempi addotti mostrano che entrambi questi casi sono possibili.

10. Tutto mi porta a ritenere che con funzioni meramorfe in certo senso analoghe a quelle di Picard-Poincaré, si riesca sempre ad uniformizzare una superficie del tipo 4 di irregolarità non superiore ad uno ([24]). Gli esempi dati risulterebbero casi particolari di un teorema di tale natura.

---

bile corrispondenza razionale fra F ed F' è necessariamente birazionale. In certo senso questà proprietà estende alle superficie il teorema di Weber per le curve secondo il quale ogni corrispondenza razionale fra due curve di ugual genere $p > 1$ è necessariamente birazionale.

([22]) In forma geometrica il ragionamento si può esporre come segue: Anzitutto si osserverà che una trasformazione razionale di Φ in sè deve mutare il sistema delle sezioni iperpiane in sè epperò la trasformazione è omografica. L'inesistenza poi di infinite trasformazioni siffatte, discende da un noto teorema di Enriques-Fano [V. Enriques in «Atti dell'Istituto Veneto» s. 7, t. 4, (1892-93) e Fano nei «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo» t. 10 (1896) e t. 11 (1897)].

([23]) F. Enriques, *Sulla trasformazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare* $p^{(1)} = 1$, «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei» t. 23, s. 5, pagg. 119; 206; 291 e sgg. (1914).

([24]) Si potrebbe per esempio per una superficie siffatta di determinante 1 (cioè possedente una unisecante le curve del fascio), fissare dapprima *razionalmente* su ciascuna delle curve ellittiche del fascio l'integrando dell'integrale abeliano di prima specie e fissare poi l'origine dei cammini d'integrazione sulla unisecante. Allora il parametro antomorfo in corrispondenza al quale si hanno le singole curve del fascio e l'integrale abeliano così fissato su ciascuna di dette curve danno luogo a due variabili per mezzo delle quali si scrivon le equazioni parametriche delle superficie. Se il fascio è di genere $\leqslant 1$ si avrebbero così rappresentazioni con funzioni meromorfe.