MARIO CARAFA

Espressione in forma finita di ogni funzionale analitico non lineare (*)

RIASSUNTO. — Trasformando opportunamente lo sviluppo in serie di Fantappiè di un funzionale analitico non lineare, si dimostra che, analogamente a quanto si riscontra per un funzionale analitico lineare, anche per uno non lineare esiste una funzione «indicatrice» (variabile però, in generale, da punto a punto della regione funzionale di definizione) mediante la quale è possibile esprimere in *forma finita* (con un numero finito di integrazioni definite ed una derivazione) il funzionale in tutto un intorno, del punto considerato, che appartenga a detta regione.

PREMESSA. — Se $F[y(t)]$ è un funzionale analitico (1) lineare definito in una regione funzionale lineare (A) sappiamo che, come ha dimostrato Fantappiè, basta determinare la funzione

$$u(\alpha) = F\left[\frac{1}{\alpha - t}\right] \tag{1}$$

ottenuta calcolando il funzionale F sulla particolare linea analitica $\frac{1}{\alpha - t}$, per poter ottenere il valore di F in ogni punto $y(t)$ di (A) mediante la formula integrale:

$$F[y(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C u(\alpha)\, y(\alpha)\, d\alpha \tag{2}$$

dove C è una curva chiusa della sfera complessa che racchiude tutti i punti di A e lascia fuori tutti i punti dell'insieme I ove la $y(\alpha)$ non è definita (curva che si dice perciò *separatrice* dei due insiemi).

La funzione $u(\alpha)$ è stata chiamata da Fantappiè *indicatrice* del funzionale F, termine che mette bene in evidenza la proprietà, chiaramente espressa dalla [2], di individuare completamente ed univocamente detto funzionale.

In questo lavoro si dimostra che: *anche per ogni funzionale analitico non lineare* $F[y(t)]$ *definito in una regione funzionale* H, *in corrispondenza ad ogni punto* y_0 *di detta ragione, si riesce a definire una funzione «indicatrice»*, che si ottiene calcolando il funzionale F su una particolare varietà analitica avente un pezzo regolare

(*) Nota presentata dall'Accademico Francesco Severi.

(1) Per la Teoria dei funzionali analitici si rimanda alle seguenti Memorie del prof. Luigi Fantappiè (nelle citazioni i titoli verranno abbreviati con le maiuscole qui ad essi preposte): F. A: *I funzionali analitici*, «Memorie dell'Accademia dei Lincei», s. 6ª, vol. III, fasc. 11, 1930; N. F.: *Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici*, «Memorie dell'Accademia d'Italia», vol. XII, n. 13, 1941, pp. 617-706; T. F. A.: *Teoria de los funcionales analiticos y sus aplicaciones*, Consejo Superior de Investigaciones Cientificas, Barcelona, 1943. Per una trattazione più aggiornata cfr. la seguente opera di prossima pubblicazione: L. FANTAPPIÈ e F. PELLEGRINO: *Théorie des fonctionnelles analytiques*, Edition du Griffon, Neuchâtel (Svizzera).

in comune con un conveniente intorno (A,σ) del punto y_0 e con la quale si può ottenere il valore di F mediante un numero finito d'integrazioni definite (calcoli di residuo) ed una derivazione, in tutto detto intorno (A,σ) di y_0, (contenuto in H).

Abbiamo visto invece che la funzione *indicatrice* dei funzionali analitici lineari permette di ottenere in *forma finita* [cfr. nota (11)] il valore di F in tutta la regione di definizione, ma si deve osservare che la minore ampiezza del campo d'azione della funzione *indicatrice* di un funzionale analitico *non lineare* è in parte da attribuirsi alla maggiore generalità della sua regione di definizione, infatti i funzionali lineari sono sempre definiti in una regione funzionale di tipo particolare e cioè *lineare*.

Quanto si è ora detto, trova un'immediata conferma nel fatto che se la regione H è lineare anche per un funzionale non lineare può definirsi un'*indicatrice* unica (vedi n. 9).

Nel caso generale sarà quindi più proprio parlare di un'*indicatrice locale* in quanto essa serve a determinare il valore del funzionale solo in un intorno (A,σ) della funzione data, che appartenga alla regione di definizione, e la formula che si ottiene può dunque rappresentare in *forma finita* il valore del funzionale non lineare esattamente nello stesso campo in cui esso è dato dalla serie di Fantappiè.

Si vedrà infatti che ogni funzionale analitico F può rappresentarsi in tutto un intorno (A,σ) (contenuto in H) di un qualunque punto $y_0(t)$ di H mediante la formula:

$$F\,[y(t)] = Z\left[\frac{u}{1 - \varepsilon Q[y(t) - y_0(t)]}\right] \tag{3}$$

dove Z e Q sono simboli di *funzionali lineari, indipendenti da* F, *dalla* $y(t)$ *e dalla* $y_0(t)$ mentre la funzione u è la suddetta *indicatrice locale* relativa al punto y_0, ed è quindi l'unica espressione che dipenda dal funzionale F.

Termino questa breve introduzione esprimendo la mia profonda gratitudine e riconoscenza al prof. Fantappiè per i consigli ed i suggerimenti datimi.

1. - Brevi richiami sulla Teoria dei funzionali analitici. — Sia F $[y(t)]$ un funzionale analitico (localmente) definito in una regione funzionale H (2). Se $y_0(t)$ è un qualunque «punto» di H, esiste per definizione tutto un intorno (A,σ) di $y_0(t)$, appartenente ad H, in cui il funzionale F si mantiene regolare.

Se $y(t)$ è una qualunque funzione dell'intorno (A,σ), di $y_0(t)$ in tutto l'insieme chiuso A si ha per definizione d'intorno;

$$|y(t) - y_0(t)| < \sigma \tag{1,1}$$

e se poniamo

$$|\varphi(t)| = y(t) - y_0(t) \tag{1,2}$$

in A è pure

$$|\varphi(t)| < \sigma \tag{1,3}$$

Indichiamo con M il massimo di $|\varphi(t)|$ nell'insieme chiuso A, perciò:

$$M < \sigma ; \frac{\sigma}{M} > 1 \tag{1,4}$$

preso allora un parametro n, per ogni valore di questo parametro per cui è:

(2) Cfr. N. F. , n. 10, pag. 632.

(1,5) $$|u| < h = \frac{\sigma}{M}$$

la funzione

(1,6) $$y_0(t) + u\ \varphi(t)$$

appartiene all'intorno (A, σ) di $y_0(t)$.

Il valore del funzionale F per detta funzione, cioè $F[y_0(t) + u\varphi(t)]$, risulta per definizione, funzione analitica di u regolare in tutto l'intorno (1,5) di $u = o$ ed il suo sviluppo in serie di potenze della u [3] in questo intorno (serie di Fantappiè) [4] è il seguente:

(1,7) $$F[y_0(t) + u\ \varphi(t)] =$$

$$= F[y_0(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \mathring{F}^{(n)} [y_0(t) ; \mathring{\alpha}_1, \mathring{\alpha}_2, \dots, \mathring{\alpha}_n] \varphi(\mathring{\alpha}_1)\varphi(\mathring{\alpha}_2) \dots \varphi(\mathring{\alpha}_n)$$

convergente assolutamente per $|u| < h$. Nella (1,7) con $\mathring{F}[y_0(t) ; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ si indica il *funzionale derivato n-esimo simmetrico* di F definito dalla formula seguente:

(1,8) $$\mathring{F}^{(n)}[y_0(t) ; \mathring{\alpha}_1, \mathring{\alpha}_2, \dots, \mathring{\alpha}_n] \varphi(\mathring{\alpha}_1)\varphi(\mathring{\alpha}_2) \dots \varphi(\mathring{\alpha}_n) =$$

$$= \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2 \dots \partial \varepsilon_n} F\left[y_0(t) + \frac{\varepsilon_1}{1 - t\alpha_1} + \frac{\varepsilon_2}{1 - t\alpha_2} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{1 - t\alpha_n} \right] \right\}_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = 0}$$

funzione simmetrica delle α_k definita e regolare quando ogni α_k è fuori di $\bar{A}$, insieme dei reciproci dei valori di t in A.

Ancora nella (1,7) deve intendersi:

(1,9) $$\mathring{F}^{(n)}[y_0(t) ; \mathring{\alpha}_1, \mathring{\alpha}_2, \dots, \mathring{\alpha}_n] \varphi(\mathring{\alpha}_1)\varphi(\mathring{\alpha}_2) \dots \varphi(\mathring{\alpha}_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_C \frac{d\alpha_1}{\alpha_1} \int_C \frac{d\alpha_2}{\alpha_2} \dots \int_C \frac{d\alpha_n}{\alpha_n} \mathring{F}^{(n)} \left[y_0(t) ; \frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \frac{1}{\alpha_n} \right] \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2) \dots \varphi(\alpha_n)$$

essendo C una qualunque curva chiusa che racchiude l'insieme chiuso A, ove $\varphi(t)$ è regolare, e lascia fuori l'insieme I ove $\varphi(t)$ non è definita.

Per mettere poi in evidenza che il generico termine $(n+1)^{esimo}$ della (1,7), dato dalla (1,9), è un funzionale (analitico non lineare) della funzione $\varphi(t)$, lo scriveremo anche nel modo seguente:

(1,10) $$\mathring{F}[y_0(t) ; \mathring{\alpha}_1, \mathring{\alpha}_2, \dots, \mathring{\alpha}_n] \varphi(\mathring{\alpha}_1)\varphi(\mathring{\alpha}_2) \dots \varphi(\mathring{\alpha}_n) = G_n[\varphi(t)]$$

Infine, dato che per la (1,4) $h > 1$ ne viene che la (1,7) è valida anche per $u = 1$, nel quale caso avremo:

(1,11) $$F[y(t)] = F[y_0(t) + \varphi(t)] =$$

$$= F[y_0(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathring{F}^{(n)}[y_0(t) ; \mathring{\alpha}_1, \mathring{\alpha}_2, \dots, \mathring{\alpha}_n] \varphi(\mathring{\alpha}_1)\varphi(\mathring{\alpha}_2) \dots \varphi(\mathring{\alpha}_n) = F[y_0(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} G_n[\varphi(t)]$$

[3] Cfr. F. A., n. 87, pag. 180.

[4] Cfr. H. G. Haefeli e F. Pellegrino: *Die Reihe von Fantappiè und die Stetigkeit der analytischen nicht linearen Functionale*. «Commentarii Mathematici Helvetici», 1949, n. 1.

sviluppo assolutamente convergente che dà il valore del funzionale F per ogni punto $y(t)=y_0(t)+\varphi(t)$ dell'intorno (A,σ) di $y_0(t)$.

La funzione prescelta $y_0(t)$ essendo regolare nell'insieme chiuso A sarà anche regolare in un dominio A′ leggermente più ampio di A e contenente A nel suo interno. Viceversa l'intorno (A',σ) di $y_0(t)$ è tutto contenuto nell'intorno (A,σ) della stessa y_0.

Per ogni funzione dell'intorno (A',σ) di y_0 nell'espressione (1,9) del termine $(n+1)^{\text{esimo}}$ della serie di Fantappiè, può sempre prendersi una stessa curva chiusa C contenente l'insieme A ma contenuta nell'insieme A′, per esempio il contorno di A′.

Per semplificare la trattazione in questa prima ricerca supporremo che come dominio A′ relativo alla funzione y_0 considerata, possa scegliersi un cerchio. In un prossimo lavoro dimostrerò che anche nel caso più generale in cui A′ sia qualunque si arriva agli stessi risultati con analogo procedimento.

2. - Una dimostrazione preliminare. — Per il seguito è necessario dimostrare la biunivocità di alcune corrispondenze intercorrenti tra insiemi di numeri interi ed m-uple non ordinate o coppie ordinate di numeri interi.

Dati i numeri interi positivi $k_1, k_2, \ldots, k_m$ con

(2,1) $$k_r \geqslant m \quad (m>1;\ r=1,2,\ldots,m)$$

si ponga

(2,2) $$E_1=k_1!+k_2!+\ldots+k_m!$$

Dati poi altri m numeri interi positivi qualsiasi $h_1, h_2, \ldots, h_m$ e posto

(2,3) $$E_2=h_1!+h_2!+\ldots+h_m!$$

si vuole dimostrare che la relazione

(2,4) $$E_2=E_1$$

si verifica solo quando l'm^{upla} non ordinata $(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ è formata con gli stessi elementi della m^{upla} $(k_1, k_2, \ldots k_m)$. Infatti supponiamo di avere ordinate le somme E_1 ed E_2 in modo che:

(2,5) $$\begin{array}{l} k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_m \\ h_1 \leqslant h_2 \leqslant \ldots \leqslant h_m \end{array}$$

allora il massimo valore preso dai termini di E_2 vale $h_m!$.

Il massimo valore preso dai termini di E_1 sarà invece $k_m!$. Dimostriamo intanto che se è verificata la (2,4) non può essere

(2,6) $$h_m > k_m$$

perchè infatti dalla (2,6) discenderebbe

(2,7) $$h_m \geqslant k_m+1\ ;\ h_m! \geqslant (k_m+1)! = (k_m+1)k_m!$$

e dato che, per le ipotesi fatte

(2,8) $$E_1 \leqslant m\, k_m!$$

mentre per la (2,1)

(2,9) $$k_m+1 > m$$

dalla (2,7) risulta:

$$E_2 > h_m! > m\, k_m! \geqslant E_1$$

quindi se si verifica la (2,4) *non può essere* $h_m > k_m$.

Così pure non può essere

$$h_m < k_m$$

dato che risulterebbe:

$$h_m \leqslant k_m - 1$$

e quindi:

$$E_2 \leqslant m\, h_m! \leqslant m(k_m - 1)! \leqslant k_m! < E_1$$

cioè

$$E_2 < E_1$$

Si conclude in definitiva che se è $E_2 = E_1$ deve essere necessariamente $h_m = k_m$.

Me se $h_m = k_m$ dalla (2,4) discende anche:

$$h_1! + h_2! + \dots + h_{m-1}! = k_1! + k_2! + \dots + k_{m-1}!$$

e poichè:

$$k_r > m - 1 \qquad (r = 1, 2, \dots, m-1)$$

ragionando come prima si può dimostrare che $h_{m-1} = k_{m-1}$ e procedendo per successive eliminazioni si ricava

$$h_r = k_r \qquad (r = 1, 2, \dots, m)$$

come già si era affermato.

Si può anche dire che tra le m^{uple} non ordinate $k_1, k_2, \dots, k_m$ ed i numeri E_1 definiti dalle (2,2) e (2,1) la corrispondenza è biunivoca, infatti data l'm^{upla} $k_1, k_2, \dots k_m$ con $k_s \geqslant m$ ad essa corrisponde uno solo dei numeri E_1, viceversa, dato uno di detti numeri E_1, ad esso corrisponde una sola m^{upla} $k_1, \dots, k_m$. Ricordiamo infine che è pure biunivoca la corrispondenza tra le coppie *ordinate* (k, h) ed i numeri interi positivi

$$(2k+1)\, 2^h$$

numeri che in seguito indicheremo più brevemente con [k, h] (5).

3. - Le funzioni $\Psi_{1,n}$, $\Psi_{2,n}$, e Θ_n. — Sia $y_0(t)$ una funzione della regione funzionale H e sia (A, σ) un intorno di $y_0(t)$ contenuto in H e quindi tale che in esso il funzionale F si mantiene regolare.

Supponiamo come già si è accennato al n. 1 che la y_0 sia anche regolare in un cerchio A' contenente A. Evidentemente l'intorno (A', σ) di y_0 è tutto contenuto nell'intorno (A, σ) e quindi in H.

Si osservi inoltre che possiamo sempre riportarci al caso in cui il cerchio A' abbia centro nell'origine; il raggio di A' sia ϱ'.

Ripetiamo ancora una volta che per tutte le funzioni dell'intorno (A', σ) di y_0 nell'espressione (1,9) del termine $(n+1)^{\text{esimo}}$ $G_n[\varphi]$, la curva d'integrazione C può restare inalterata e precisamente per essa può prendersi una qualunque circonferenza (O,R), di centro nell'origine e raggio R contenente A ma non esterna ad A' $(R \leq \varrho')$.

(5) Cfr. M. Carafa: *Calcolo del nucleo risolvente delle equazioni funzionali lineari mediante un numero finito di integrazioni*, «Collectanea Mathematica», vol. I, fasc. I, 1948, Barcellona, n. 3, pag. 12.

Se $y(t)$ è poi una qualsiasi funzione di (A',σ), la differenza:

$$\varphi(t) = y(t) - y_0(t) \tag{3,1}$$

sarà una funzione regolare in A' e quindi il suo sviluppo:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, t^k \tag{3,2}$$

converge certamente per $|t| \leqslant \varrho'$.

Introduciamo ora le particolari funzioni:

$$\Psi_{1,n}\left(\frac{t}{\nu\beta}, \xi\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\nu\beta}\right)^{\nu} \xi^{[\nu,n]} \tag{3,3}$$

$$\Psi_{2,n}(t\nu, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} (t\nu)^k \xi^{[k,n]+1} \tag{3,4}$$

dove si è posto $[\nu,n] = (2\nu+1)\, 2^n$ e $[k,n] = (2k+1)\, 2^n$, cfr. n. 2.

Si osservi subito che le (3,3) e (3,4) convergono assolutamente per

$$\left|\frac{t}{\nu\beta}\right| < 1\,;\, |\xi| = 1\,;\, |t\nu| < 1$$

Sia poi $(o,\bar{\varrho})$ un cerchio $\bar{A}$ contenente A ma interno alla circonferenza $C = (O,R)$ (quindi $\bar{\varrho} < R$) e si fissi nelle (3,3) e (3,4) il parametro β reale positivo tale che:

$$\frac{\bar{\varrho}}{R} < \beta < 1 \tag{3,5}$$

per cui risultando

$$\frac{\bar{\varrho}}{\beta} < R \tag{3,6}$$

si può allora a sua volta fissare il parametro ν reale positivo soddisfacente alla disuguaglianza

$$\frac{\bar{\varrho}}{\beta} < \nu < R \tag{3,7}$$

Dalla (3,7) discende

$$\frac{\bar{\varrho}}{\nu\beta} < 1\,;\, \frac{\nu}{R} < 1 \tag{3,8}$$

Si conclude quindi che quando le (3,5) e (3,7) sono soddisfatte, lo sviluppo (3,3) converge totalmente per

$$|t| \leqslant \bar{\varrho} \text{ e } |\xi| = 1 \tag{3,9}$$

mentre lo sviluppo (3,4) converge totalmente per [6]:

$$|t| \leqslant 1/R \text{ e } |\xi| = 1 \tag{3,10}$$

Calcoliamo ora il *prodotto funzionale simmetrico* [7] della funzione $\Psi_{2,n}(t\nu,\xi)$ per la $\varphi(t)$ rispetto alla t.

[6] Si osservi che β e ν sono stati fissati in modo da soddisfare alle (3,5) e (3,7) e resteranno inalterati qualunque sia $\varphi(t) = y(t) - y_0(t)$ con $y(t)$ appartenente all'intorno (A', σ) di y_0.

[7] Cfr. F. A., nn. 34 e 35, pp. 55 e 58.

Essendo $R < \varrho'$ risulta $\frac{1}{R}\ \varrho' > 1$ e quindi detto prodotto è eseguibile ed anzi rappresentabile con la seguente serie ([8]):

$$(3,11) \qquad \bar{\varphi}_n(\xi,\nu) = \overset{\circ}{\Psi}_{\xi,n}(t\nu,\xi)\overset{\circ}{\varphi}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{t}\,\Psi_{\xi,n}\left(\frac{\nu}{t},\xi\right)\varphi(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \nu^k \xi^{([k,n]+1)!}$$

che converge assolutamente. Nella (3,11) con C si è indicata la circonferenza (O,R) già considerata.

Si fa ora notare che con il prodotto funzionale (3,11), ciascuno dei termini $a_k\,\nu^k$ dello sviluppo (3,2) della $\varphi(\nu)$ viene ad acquistare come coefficiente la potenza $\xi^{([k,n]+1)!}$ che, come ora vedremo, permetterà di individuare in modo univoco i monomi del tipo $a_{k_1}\,a_{k_2}\dots a_{k_n}$ che si presentano nello sviluppo in serie della funzione $\bar{\varphi}_n^{\,n}$, potenza n^{esima} della $\bar{\varphi}_n$. Per poi meglio fissare le idee e ricordare che la $\bar{\varphi}_n$ deriva dalla φ e per mettere in evidenza che detta $\bar{\varphi}_n$ può riguardarsi come risultato di una particolare preparazione della φ, la quale infatti figurerà nei nostri calcoli soltanto dopo essere stata trasformata nella $\bar{\varphi}_n$, quest'ultima verrà chiamata *preparata* n^{esima} della φ o quando non c'è possibilità di equivoco semplicemente *preparata* della φ; mentre la funzione $\psi_{\xi,n}$ $(t\nu,\xi)$ che serve nella (3,11) per la suddetta trasformazione, si dirà la *preparatrice* (n^{esima}) della φ.

Consideriamo ora la potenza n^{esima} della $\bar{\varphi}_n$ che potrà rappresentarsi con il seguente sviluppo:

$$(3,12) \qquad \bar{\varphi}_n^{\,n}(\xi,\nu) = \sum_{0}^{\infty}{}_{k_1,k_2,\dots,k_n}\ a_{k_1}a_{k_2}\dots a_{k_n}\ \xi^{\sum_1^n([k_s,n]+1)!}\ \nu^{k_1+\dots+k_n}$$

ed osserviamo che in una serie n^{upla} come la (3,12), il generico indice k_s, per una qualunque scelta degli altri indici k_1, $k_2,\dots,$ $k_{s-1},\dots,$ $k_{s+1},\dots,$ k_n, assume ciascun valore della serie naturale una volta sola, di modo che le n^{uple} *ordinate* k_1, $k_2,\dots,$ k_n sono tutte diverse tra loro, cioè per una data scelta degli indici k_1, $k_2,\dots,$ k_n tutte le corrispondenti n^{uple} ordinate che si possono formare con detti indici e che figurano in detta serie n^{upla} sono tante quante sono le permutazioni *con ripetizione* degli n elementi $k_1,\dots,$ k_n, numero che verrà indicato con $\omega_{k_1,\dots,k_n}$. Si può così anche dire che nella serie (3,12) il generico monomio $a_{k_1}\dots a_{k_n}$ si presenta $\omega_{k_1,\dots,k_n}$ volte.

Il numero $\omega_{k_1,\dots,k_n}$ risulta uguale ad $n\,!/p_1!p_2!\dots p_s!$ se tra gli elementi $k_1,\dots,$ k_n ve ne sono p_1 uguali tra loro, altri p_2 uguali tra loro e non ai precedenti ([9]) ecc.

Per quanto si è ora detto la (3,12) può quindi scriversi nel modo seguente:

$$(3,13) \qquad \bar{\varphi}_n^{\,n}(\xi,\nu) = \sum_{k_n=0}^{\infty}\sum_{k_{n-1}=0}^{k_n}\dots\sum_{k_1=0}^{k_2}\omega_{k_1,\dots,k_n}\,a_{k_1}a_{k_2}\dots a_{k_n}\,\xi^{\sum_{s=1}^{n}([k_s,n]+1)!}\,\nu^{k_1+\dots+k_n}$$

infatti nella serie multipla (3,13) di tutte le possibili $\omega_{k_1,\dots,k_n}$ n^{uple} ordinate che si possono formare con una certa scelta degli indici $k_1,\dots,$ k_n vi figura soltanto quella, evidentemente unica, per la quale si ha $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$.

([8]) Cfr. F. A., n. 51, pag. 79.

([9]) Cfr. F. Severi: *Lezioni di Analisi*, Ed. Zanichelli, Bologna, 1933, vol. I, pag. 5, n. 4.

Per semplificare i simboli nel seguito la (3,13) verrà scritta anche così:

$$(3,13)' \qquad \overset{-n}{\Psi}_n(\xi,\nu) = \sum_{0\,k_1<k_2<\dots<k_n}^{\infty} \omega_{k_1,\dots,k_n}\, a_{k_1}\, a_{k_2}\dots a_{k_n}\, \xi^{\sum\limits_{s=1}^{n}([k_s,n]+1)!}\, \nu^{k_1+\dots+k_n}$$

Introduciamo poi un'altra particolare funzione e cioè quella rappresentata dalla seguente serie:

$$(3,14) \qquad \Theta_n(\xi,\beta) = \sum_{0\,h_1<h_2<\dots<h_n}^{\infty} \frac{\beta^{h_1+\dots+h_n}}{\omega_{h_1,\dots,h_n}}\, \xi^{V_{h_1,\dots,h_n}}$$

nella quale β è reale positivo minore dell'unità, $|\xi|=1$ ed inoltre:

$$(3,15) \qquad V_{h_1,\dots,h_n} = \sum_{s=1}^{n} \{[h_s,n]! + ([h_s,n]+1)!\}$$

dato poi che $\omega_{h_1,\dots,h_n} \geqslant 1$, nelle ipotesi ora fatte per la β e la ξ, la serie multipla (3,14) risulta assolutamente convergente per $|\beta|<1$ ovvero totalmente per $|\beta| \leqslant \beta_0 < 1$.

Con la funzione $\Psi_{1,n}$ data dalla (3,3) formiamo il prodotto:

$$(3,16) \quad \Psi_{1,n}\left(\frac{\alpha_1}{\nu\beta},\xi\right)\Psi_{1,n}\left(\frac{\alpha_2}{\nu\beta},\xi\right)\dots\Psi_{1,n}\left(\frac{\alpha_n}{\nu\beta},\xi\right) = \sum_{0\,\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n}^{\infty} \alpha_1^{\nu_1}\dots\alpha_n^{\nu_n}\, \xi^{\sum\limits_{s=1}^{n}[\nu_s,n]!}\, (\nu\beta)^{-(\nu_1+\dots+\nu_n)} =$$

$$= \sum_{0\,\nu_1<\nu_2<\dots<\nu_n}^{\infty} \omega_{\nu_1,\dots,\nu_n}\, \alpha_1^{\nu_1}\dots\alpha_n^{\nu_n}\, \xi^{\sum\limits_{s=1}^{n}[\nu_s,n]!}\, (\nu\beta)^{-(\nu_1+\dots+\nu_n)}$$

Mediante le (3,14), (3,16) e (3,13)' possiamo scrivere il prodotto *funzionale simmetrico* della funzione $\Theta_n(\xi,\beta)$ per la funzione $\Psi_{1,n}\left(\frac{\alpha_1}{\nu\beta},\xi\right)\dots\Psi_{1,n}\left(\frac{\alpha_n}{\nu\beta},\xi\right)\overset{-n}{\Psi}_n(\xi,\nu)$ rispetto alla variabile ξ, nella seguente forma:

$$(3,17) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{d\xi}{\xi}\,\Theta_n\left(\frac{1}{\xi},\beta\right)\Psi_{1,n}\left(\frac{\alpha_1}{\nu\beta},\xi\right)\dots\Psi_{1,n}\left(\frac{\alpha_n}{\nu\beta},\xi\right)\overset{-n}{\Psi}_n(\xi,\nu) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{d\xi}{\xi}\sum_{\substack{0\,h_1<h_2<\dots<h_n\\ \nu_1<\nu_2<\dots<\nu_n\\ k_1<k_2<\dots<k_n}}^{\infty} \frac{\omega_{\nu_1,\dots,\nu_n}\,\omega_{k_1,\dots,k_n}\,\alpha_1^{\nu_1}\dots\alpha_n^{\nu_n}\, a_{k_1}\dots a_{k_n}\,\xi^{\sum\limits_{s=1}^{n}\{[\nu_s,n]!+([k_s,n]+1)!\}-V_{h_1,\dots,h_n}}}{\omega_{h_1,\dots,h_n}\,\nu^{-(k_1+\dots+k_n)}\,\beta^{-(h_1+\dots+h_n)}\,(\nu\beta)^{\nu_1+\dots+\nu_n}}$$

dove la curva C_1 è la circonferenza (0,1) del piano ξ.

Si osservi ora che l'esponente della ξ a secondo membro della (3,17):

$$(3,18) \qquad \sum_{s=1}^{n}\{[\nu_s,n]!+([k_s,n]+1)!\} - V_{h_1,\dots,h_n}$$

è nullo soltanto quando i fattoriali della prima somma $\sum\{[\nu_s n]!+([k_s n]+1)!\}$ coincidono con quelli della seconda $V_{h_1,\dots,h_n}$ che è espressa dalla (3,15) come si dimostra subito applicando i risultati nel n. 2, il che è possibile dato che nella somma $V_{h_1,\dots,h_n}$ [cfr. la (3,15)] i fattoriali sono in numero di $2n$ e che per $n \geqslant 1$ si ha sempre $[h_s, n] = (2h_s+1)\, 2^n \geqslant 2n$.

Dato poi che i numeri interi $[v_s, n]$ ed $[h_s, n]$ sono pari, mentre quelli $[k_s, n]+1$ ed $[h_s, n]+1$ sono dispari, dalla suddetta coincidenza dei termini della prima somma con quelli della seconda che figurano nella (3,18) discende necessariamente:

$$\begin{matrix} [v_s, n] = [h_s, n] \\ [k_s, n]+1 = [h_s, n]+1 \end{matrix} \quad (s=1,2,\dots n)$$

dalle quali ne viene per la corrispondenza biunivoca tra i numeri $[k, h]$ e le coppie ordinate (k, h) ricordata alla fine del numero 2:

$$v_s = h_s\,; \quad k_s = h_s \qquad (s=1,2,\dots, n) \tag{3,19}$$

Integrando quindi il secondo membro della (3,17), come è possbiile, termine a termine, si deduce che detta integrazione *annulla tutti i termini per i quali non è verificata la* (3,19) lasciando inalterati tutti gli altri, cioè:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{d\xi}{\xi}\,\Theta_n\left(\frac{1}{\xi}, \beta\right)\Psi_{1,n}\left(\frac{\alpha_1}{\nu\beta}, \xi\right)\cdots\Psi_{1,n}\left(\frac{\alpha_n}{\nu\beta}, \xi\right)\overline{\varphi}_n^n(\xi, \nu) = \sum_{0\,h_1<h_2<\dots<h_n}^{\infty} m_{h_1,\dots,h_n}\,\alpha_1^{h_1}\dots\alpha_n^{h_n}\,a_{h_1}\dots a_{h_n} =$$

$$= \sum_{0\,h_1,\dots,h_n}^{\infty} \alpha_1^{h_1}\dots\alpha_n^{h_n}\,a_{h_1}\dots a_{h_n} = \varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\dots\varphi(\alpha_n) \tag{3,20}$$

Facendo riferimento a quanto si è esposto nel lavoro citato alla nota ([5]), $\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\dots\varphi(\alpha_n)$ può considerarsi come risultato di un particolare *prodotto funzionale generalizzato* della funzione $\overline{\psi}\left(\frac{\alpha_1}{\nu\beta}\right)\dots\overline{\psi}\left(\frac{\alpha_n}{\nu\beta}\right)$, con $\overline{\psi}\left(\frac{\alpha}{\nu\beta}\right) = \sum_{\kappa=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\nu\beta}\right)^{\kappa} = 1/\left(1-\frac{\alpha}{\nu\beta}\right)$ per la funzione $\varphi^n(t)$.

La $\Theta_n(\xi, \beta)$ ne è la relativa *funzione-stampo* così detta perchè permette d'*imprimere* (figuratamente), mediante un *prodotto funzionale simmetrico* al generico monomio $a_{h_1}\dots a_{h_n}$ dello sviluppo in serie della $\varphi^n(t)$ il coefficiente $\alpha_1^{h_1}\dots\alpha_n^{h_n}$ dello sviluppo della funzione $\overline{\psi}\left(\frac{\alpha_1}{\nu\beta}\right)\dots\overline{\psi}\left(\frac{\alpha_n}{\nu\beta}\right)$ in modo che si abbia per risultato proprio la $\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\dots\varphi(\alpha_n)$.

Nel numero seguente si farà una prima importante applicazione del risultato ottenuto.

4. - Indicatrice del funzionale polinomiale omogeneo $G_n[\varphi(t)]$. — Il funzionale $G_n[\varphi(t)]$ espresso dalla (1,10) è analitico, omogeneo di grado n e regolare in tutta la regione funzionale lineare (A').

Dato che la funzione $\Psi_{1,n}\left(\frac{t}{\nu\beta}, \xi\right)$ per ν e β soddisfacenti alle (3,5) e (3,7) e per $|\xi|=1$ quale funzione della t è regolare in $\overline{A}$, e quindi pure in A, si può eseguire il seguente *prodotto funzionale simmetrico* multiplo [cfr. la 1,10)]:

$$u_n(\xi, \lambda) = \mathring{F}^{(n)}[y_0(t)\,; \mathring{\alpha}_1, \mathring{\alpha}_2, \dots, \mathring{\alpha}_n]\,\Psi_{1,n}\left(\frac{\mathring{\alpha}_1}{\lambda}, \xi\right)\Psi_{1,n}\left(\frac{\mathring{\alpha}_2}{\lambda}, \xi\right)\dots\Psi_{1,n}\left(\frac{\mathring{\alpha}_n}{\lambda}, \xi\right) = G_n\left[\Psi_{1,n}\left(\frac{t}{\lambda}, \xi\right)\right] \tag{4,1}$$

dove si è posto $\lambda = \nu\beta$.

La funzione u_n, per le ragioni che ora esporremo, verrà detta *indicatrice* del funzionale polinomiale $G_n[\varphi(t)]$, in essa la variabile ξ si chiamerà l'*indice* dell'indicatrice.

La u_n verrà anche chiamata *indicatrice speciale* quando occorra distinguerla dall'*indicatrice generale* che definiremo nei prossimi numeri.

Un'immediata applicazione dei risultati del n. 3 ci permette di scrivere la seguente relazione [cfr. la (3,20)]:

$$(4.2)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{d\xi}{\xi}\,\Theta_n\left(\frac{1}{\xi},\beta\right)u_n(\xi,\nu\beta)\overline{\varphi}_n^{\,n}(\xi,\nu)=\overset{\circ}{F}{}^{(n)}[y_0(t),\overset{\circ}{\alpha}_1,\overset{\circ}{\alpha}_2,\dots,\overset{\circ}{\alpha}_n]\varphi(\overset{\circ}{\alpha}_1)\varphi(\overset{\circ}{\alpha}_2)\dots\varphi(\overset{\circ}{\alpha}_n)=G_n[\varphi(t)]$$

permutando, come è possibile, le integrazioni rispetto alle variabili $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ che figurano nella espressione (4,1) della u_n, con quella rispetto alla ξ. La (4,2) ci rivela che: *mediante la u_n si può ottenere il valore del funzionale $G_n[\varphi(t)]$ in ogni punto $\varphi(t)$ della regione funzionale lineare (A') a partire dalla potenza* (ordinaria) *n^{esima} della preparata della φ, con un solo integrale definito.*

Si ricordi che la *preparata* $\overline{\varphi}$ si ottiene applicando alla $\varphi(t)$ un funzionale lineare indipendente da G_n.

Così la funzione u_n individua completamente il funzionale non lineare G_n e quindi è giustificato il nome d'*indicatrice* assegnatole, presentando essa infatti una stretta analogia con la funzione *indicatrice* [10] (introdotta da Fantappiè) dei funzionali analitici lineari.

Si tenga inoltre conto che come l'indicatrice di un funzionale analitico lineare anche l'indicatrice u_n si ottiene calcolando il funzionale G_n sopra una *linea analitica* dello spazio funzionale analitico, infatti nella $\Psi_{1,n}\left(\frac{t}{\nu\beta};\xi\right)$, oltre alla variabile t, c'è il solo parametro ξ dato che, come si è detto, la ν e la β vengono fissate una volta per tutte per l'intorno (A',σ) di y_0.

Si osservi però che mentre per determinare il valore di un funzionale analitico lineare mediante la sua *indicatrice* basta eseguire un'integrazione definita (cfr. *Premessa*), per ottenere invece il funzionale non lineare $G_n[\varphi(t)]$ occorre anche conoscere le funzioni Θ_n, $\Psi_{1,n}$ e $\Psi_{2,n}$ che tuttavia, essendo indipendenti dal funzionale stesso e dalla $\varphi(t)$, possono calcolarsi una volta per sempre e debbono perciò considerarsi funzioni note.

Si noti inoltre che per calcolare $G_n[\varphi(t)]$, cioè il termine $(n+1)^{esimo}$ dello sviluppo (1,11) (a meno del coefficiente $1/n!$) occorrono, applicando la (1,10), n integrazioni, invece una volta note le funzioni u_n e $\overline{\varphi}_n$ la (4,2) ne richiede una sola; ricordando che la *preparata* $\overline{\varphi}_n$ si calcola dalla φ con un'altra integrazione, si ha in definitiva che *ogni termine della* (1,11) *si calcola sempre con due integrazioni definite, qualunque sia n.*

Volendo generalizzare i risultati e cioè passare dal calcolo del termine $(n+1)^{esimo}$ della serie (1,11) a quello della somma della serie stessa, dobbiamo ancora perfezionare i mezzi finora a nostra disposizione, perchè infatti se si rappresentasse il generico $G_n[\varphi(t)]$ con l'espressione (4,2) dovremmo introdurre per ogni n le funzioni $\Psi_{1,n}$ e $\Psi_{2,n}$ diverse da n ad n e che non figurano linearmente, si richiederebbero così tante operazioni per quanti termini possiede la (1,11), cioè infinite.

[10] Cfr. F. A., n. 26; N. F., n. 13; T. F. A., n. 15.

Se vogliamo perciò ottenere la somma della (1,11) *in termini finiti* [11] dovremmo sostituire alle generiche funzioni $\Psi_{1,n}$ e $\Psi_{2,n}$ $(n=1,2,\ldots)$ due sole funzioni, rispettivamente Ψ_1 e Ψ_2 di struttura più complessa, ma tali da permetterci di calcolare il termine $(n+1)^{\text{esimo}}$ della (1,11) per ogni n *con le stesse operazioni, in numero finito ed indipendente da* n.

5. - Le funzioni Ψ_1 e Ψ_2. — Per quanto si è detto alla fine del n. 4 occorre introdurre due altre particolari funzioni Ψ_1 e Ψ_2 che sostituiscano rispettivamente le $\Psi_{1,n}$ e $\Psi_{2,n}$ qualunque sia n.

Dette funzioni Ψ_1 e Ψ_2 sono le seguenti, formate mediante le stesse $\Psi_{1,n}$ e $\Psi_{2,n}$, cioè:

$$\Psi_1\left(\frac{t}{\sqrt{\beta}},\xi,r\right)=\sum_{q=1}^{\infty} r^q\,\Psi_{1,q}\left(\frac{t}{\sqrt{\beta}},\xi\right) \tag{5,1}$$

$$\Psi_2(t\nu,\xi,r)=\sum_{p=1}^{\infty} r^p\Psi_{2,p}(t\nu,\xi) \tag{5,2}$$

dove r è un parametro di convergenza in modulo minore od uguale ad un certo $r_0<1$. Infatti dalle (3,3) e (3,4) risulta per β e ν soddisfacenti alle (3,5) e (3,7) e per $|\xi|=1$:

$$|\Psi_{1,q}|\leqslant\frac{1}{1-\rho/\sqrt{\beta}} \text{ per } |t|\leqslant\rho \tag{5,3}$$

$$|\Psi_{2,p}|\leqslant\frac{1}{1-\nu/R} \text{ per } |t|\leqslant 1/R \tag{5,4}$$

si deduce perciò che le serie (5,1) e (5,2) convergono totalmente per questi valori di t e di ξ quando $|r|\leqslant r_0<1$.

Si calcoli ora il *prodotto funzionale simmetrico* della Ψ_2 per la $\varphi(t)$ rispetto alla variabile t, si ottiene la funzione [cfr. la (3,11)]:

$$\overline{\varphi}(\xi,\nu,r)=\Psi_2(\overset{*}{t}\nu,\xi,r)\varphi(\overset{*}{t})=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{t}\Psi_2\left(\frac{\nu}{t},\xi,r\right)\varphi(t)dt=\sum_{p=1}^{\infty} r^p\,\overline{\varphi}_p(\xi,\nu) \tag{5,5}$$

dove evidentemente la generica funzione $\overline{\varphi}_p(\xi,\nu)$ è la *preparata* p^{esima} della φ. E' quindi naturale chiamare la $\overline{\varphi}$ *preparata generale* della φ e la funzione Ψ_2 che viene impiegata per determinarla si dirà la funzione *preparatrice generale*.

Per il seguito sarà utile scrivere i seguenti sviluppi:

$$\overline{\varphi}^{\,i}(\xi,\nu,r)=\sum_{1\;p_1p_2\ldots p_i}^{\infty} r^{p_1+p_2+\cdots+p_i}\,\overline{\varphi}_{p_1}(\xi,\nu)\,\overline{\varphi}_{p_2}(\xi,\nu)\cdots\overline{\varphi}_{p_i}(\xi,\nu) \tag{5,6}$$

$$\Psi_1\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{\beta}},\xi,r\right)\Psi_1\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{\beta}},\xi,r\right)\cdots\Psi_1\left(\frac{\alpha_j}{\sqrt{\beta}},\xi,r\right)=\sum_{1\;q_1,q_2,\ldots,q_j}^{\infty} r^{q_1+q_2+\cdots+q_j}\,\Psi_{1,q_1}\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{\beta}},\xi\right)\Psi_{1,q_2}\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{\beta}},\xi\right)\cdots\Psi_{1,q_j}\left(\frac{\alpha_j}{\sqrt{\beta}},\xi\right) \tag{5,7}$$

Calcoliamo poi il *prodotto funzionale simmetrico* rispetto alla variabile ξ, della funzione $\Theta_n(\xi,\beta)$ per la funzione prodotto delle funzioni (5,6) e (5,7), cioè:

$$\Psi_1\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{\beta}},\xi,r\right)\cdot\cdot\,\Psi_1\left(\frac{\alpha_j}{\sqrt{\beta}},\xi,r\right)\overline{\varphi}^{\,i}(\xi,\nu,r) \tag{5,8}$$

[11] Si dirà che un'espressione matematica è in *termini finiti* (ovvero in *forma finita*) se in essa figurano soltanto un numero *finito* di simboli di funzione, di derivazione e d'integrazione.

dove sia $j+i=2n$, cioè l'integrale:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{d\xi}{\xi}\,\Theta_n\left(\frac{1}{\xi},\beta\right)\Psi_1\left(\frac{\alpha_1}{\nu\beta},\xi,r\right)\dots\Psi_1\left(\frac{\alpha_j}{\nu\beta},\xi,r\right)\bar{\varphi}^{i}(\xi,\nu,r) \tag{5,9}$$

Pensiamo di sostituire nella (5,9) alle funzioni $\bar{\varphi}^{i}(\xi,\nu,r)$ e $\Psi_1\left(\frac{\alpha_1}{\nu\beta},\xi,r\right)\dots\Psi_1\left(\frac{\alpha_j}{\nu\beta},\xi,r\right)$ i rispettivi sviluppi in serie (5,6) e (5,7) ed osservando che è possibile integrare termine a termine la serie multipla che se ne ottiene, passiamo a calcolare il risultato di detta integrazione per ciascuno dei termini, cioè:

$$r^{q_1+\dots+q_j+p_1+\dots+p_i}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{d\xi}{\xi}\,\Theta_n\left(\frac{1}{\xi},\beta\right)\Psi_{1,q_1}\left(\frac{\alpha_1}{\nu\beta},\xi\right)\dots\Psi_{1,q_j}\left(\frac{\alpha_j}{\nu\beta},\xi\right)\bar{\varphi}_{p_1}(\xi,\nu)\dots\bar{\varphi}_{p_i}(\xi,\nu) \tag{5,10}$$

Sostituendo ora nella (5,10) alle funzioni Θ_n, $\Psi_{1,n}$ e $\bar{\varphi}_p$ i rispettivi sviluppi in serie (3,14); (3,3) e (3,11) si otterrà sotto il segno integrale una serie multipla prodotto delle seguenti serie:

$$\frac{1}{\xi}\,\Theta_n\left(\frac{1}{\xi},\beta\right)=\frac{1}{\xi}\sum_{0\,h_1<h_2<\dots<h_n}^{\infty}\frac{\beta^{h_1+\dots+h_n}}{\varpi_{h_1,\dots,h_n}}\,\xi^{-V_{h_1,\dots,h_n}} \tag{5,11}$$

$$\Psi_{1,q_1}\left(\frac{\alpha_1}{\nu\beta},\xi\right)\dots\Psi_{1,q_j}\left(\frac{\alpha_j}{\nu\beta},\xi\right)=\sum_{0\,\nu_1<\nu_2<\dots<\nu_j}^{\infty}\varpi_{\nu_1,\dots,\nu_j}\,\alpha_1^{\nu_1}\dots\alpha_j^{\nu_j}\,\xi^{\sum\limits_{s=1}^{j}[\nu_s,q_s]!}\,(\nu\beta)^{-(\nu_1+\dots+\nu_j)} \tag{5,12}$$

$$\bar{\varphi}_{p_1}(\xi,\nu)\dots\bar{\varphi}_{p_i}(\xi,\nu)=\sum_{0\,k_1<k_2<\dots<k_i}^{\infty}\varpi_{k_1,\dots,k_i}\,a_{k_1}\dots a_{k_i}\,\xi^{\sum\limits_{s=1}^{i}([k_s,p_s]+1)!}\,\nu^{k_1+\dots+k_i} \tag{5,13}$$

Per la totale convergenza già dimostrata delle (3,14), (3,3) e (3,11), come le serie ora scritte anche la serie multipla loro prodotto può considerarsi come serie di funzioni della ξ (che in sostanza sono delle semplici potenze della ξ) totalmente convergente per $|\xi|=1$ ed il cui termine generico è il seguente:

$$\frac{\varpi_{\nu_1,\dots,\nu_j}\varpi_{k_1,\dots,k_i}}{\varpi_{h_1,\dots,h_n}}\,\alpha_1^{\nu_1}\dots\alpha_j^{\nu_j}\,a_{k_1}\dots a_{k_i}\,\frac{\xi^{\sum\limits_{s=1}^{j}[\nu_s,q_s]!+\sum\limits_{s=1}^{i}([k_s,p_s]+1)!-V_{h_1,\dots,h_n}-1}}{\beta^{-(h_1+\dots+h_n)}(\nu\beta)^{\nu_1+\dots+\nu_j}\,\nu^{-(k_1+\dots+k_i)}} \tag{5,14}$$

Si tenga presente che si è supposto $i+j=2n$ e si osservi che per quanto si è dimostrato al n. 2, se il numero intero:

$$\sum_{s=1}^{j}[\nu_s,q_s]!+\sum_{s=1}^{i}([k_s,p_s]+1)!-V_{h_1,\dots,h_n}$$

è nullo, cioè se si verifica [cfr. la (3,15)]:

$$\sum_{s=1}^{j}[\nu_s,q_s]!+\sum_{s=1}^{i}([k_s,p_s]+1)!=\sum_{s=1}^{n}\left\{[h_s,n]!+([h_s,n]+1)!\right\} \tag{5,15}$$

tutti i fattoriali del primo membro della (5,15), in numero di $2n$, debbono essere uguali a quelli che formano il secondo, quindi necessariamente dovrà aversi [cfr. anche quanto si è detto per la (3,18)]:

$$\begin{aligned}[][\nu_s,q_s]&=[h_s,n]\\ [k_s,p_s]+1&=[h_s,n]+1\end{aligned} \tag{5,16}$$

dalle quali si ricava pure, per la corrispondenza biunivoca tra i numeri $[k, h]$ e le coppie ordinate (k, h) ricordata alla fine del n. 2:

$$
\begin{aligned}
&v_s = h_s \qquad q_s = n \\
&k_s = h_s \qquad p_s = n
\end{aligned}
\tag{5,17}
$$

che portano di conseguenza

$$
j = i = n
\tag{5,18}
$$

Si può allora trarre una prima importante conclusione: *il prodotto simmetrico* (5,9) *è nullo se gli indici* j *ed* i *non sono entrambi eguali ad* n, (perchè infatti in questo caso l'esponente della ξ nella (5,14) non può mai essere uguale a -1).

Supposte quindi soddisfatte le (5,18), per le (5,17) si deduce che dei termini (5,10) ve ne è *uno solo* diverso da zero e cioè quello per cui si ha:

$$
\begin{aligned}
&q_1 = q_2 = \dots = q_j = n \\
&p_1 = p_2 = \dots = p_i = n
\end{aligned}
\tag{5,19}
$$

e per la (3,20) il suo valore è:

$$
r^{2n^2}\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\dots\varphi(\alpha_n)
\tag{5,20}
$$

In conclusione (per $j+i=2n$):

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{d\xi}{\xi}\,\Theta_n\left(\frac{1}{\xi},\beta\right)\Psi_1\left(\frac{\alpha_1}{\nu\beta},\xi,r\right)\dots\Psi_1\left(\frac{\alpha_j}{\nu\beta},\xi,r\right)\overset{-1}{\varphi}(\xi,\nu,r) = \\
&\qquad = \begin{cases} r^{2n^2}\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\dots\varphi(\alpha_n) & \text{per } j = i = n \\ 0 & \text{in ogni altro caso} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{5,21}
$$

6. - Indicatrice generale del funzionale polinomiale $G_n[\varphi(t)]$. — Calcoliamo il funzionale $G_n[\varphi(t)]$ sulla particolare varietà analitica $\Psi_1 = \Psi_1\left(\frac{t}{\nu\beta},\xi,r\right)$ la cui espressione è data dalla (5,1), si otterrà la funzione:

$$
\overline{u}_n(\xi,\lambda,r) = G_n\left[\Psi_1\left(\frac{t}{\lambda},\xi,r\right)\right] = \overset{\circ}{F}{}^{(n)}[y_n(t);\overset{\circ}{\alpha}_1,\overset{\circ}{\alpha}_2,\dots,\overset{\circ}{\alpha}_n]\Psi_1\left(\frac{\overset{\circ}{\alpha}_1}{\lambda},\xi,r\right)\Psi_1\left(\frac{\overset{\circ}{\alpha}_2}{\lambda},\xi,r\right)\dots\Psi_1\left(\frac{\overset{\circ}{\alpha}_n}{\lambda},\xi,r\right)
\tag{6,1}
$$

dove è $\lambda = \nu\beta$.

Dalle (5,21) e (4,2) si ricava immediatamente per $j+i=2n$:

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{d\xi}{\xi}\,\Theta_n\left(\frac{1}{\xi},\beta\right)\overline{u}_j(\xi,\nu\beta,r)\overset{-1}{\varphi}(\xi,\nu,r) = \begin{cases} r^{2n^2}G_n[\varphi(t)] & \text{per } j = i = n \\ 0 & \text{in ogni altro caso} \end{cases}
\tag{6,2}
$$

Confrontando la (6,2) con la (4,2) si vede che (per $j = i = n$) la funzione $\overline{u}_n$ gode della stessa proprietà «indicatrice» della u_n, infatti permette di ottenere $G_n[\varphi(t)]$, a meno del coefficiente r^{2n^2} con le stesse operazioni richieste dalla u_n, soltanto che ora al posto della preparata n^{esima} φ_n s'impiega la *preparata generale* $\overset{-}{\varphi}$. Inoltre tenendo anche conto che la $\overline{u}_n$ non viene ottenuta calcolando G_n su una varietà che dipende da n, come accade per la u_n, verrà chiamata *indicatrice generale* del funzionale polinomiale omogeneo G_n.

7. - La funzione Θ. — Mediante le funzioni Θ_n definite dalla (3,14) si formi la serie:

$$\Theta(X, \xi, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} X^n \Theta_n(\xi, \beta) \tag{7,1}$$

dove si ponga inoltre $\Theta_0 = 1$ ed $X = r\varepsilon^2$.

Si osservi poi che dalla (3,14) si ricava per $|\xi| = 1$ e $\beta < 1$

$$|\Theta_n(\xi, \beta)| \leqslant \left(\frac{1}{1-\beta}\right)^n \tag{7,2}$$

quindi la (7,1) converge totalmente per:

$$\frac{|X|}{1-\beta} \leqslant L_0 < 1 \tag{7,3}$$

Perchè sia soddisfatta la (7,3) basterà prendere $|\varepsilon| = 1$ ed r tale che:

$$|r| \leqslant L_0(1-\beta) \tag{7,4}$$

Si costruisca poi la serie geometrica

$$\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \tilde{\varphi}^l(\xi, \nu, r) \tag{7,5}$$

e dato che dalla (5,5) si ricava:

$$|\tilde{\varphi}(\xi, \nu, r)| \leqslant |\Psi_2 \varphi|_{\max \text{ su } C} \tag{7,6}$$

e dalle (5,2) e (3,4)

$$|\Psi_2| \leqslant \left(\frac{|r|}{1-|r|}\right)\left(\frac{1}{1-\nu/R}\right) \tag{7,7}$$

perciò se indichiamo con M' il massimo di $|\varphi|$ sulla circonferenza C che figura nella (5,5) si ottiene in definitiva:

$$|\tilde{\varphi}(\xi, \nu, r)| \leqslant \frac{M'|r|}{(1-|r|)(1-\nu/R)} \tag{7,8}$$

Se allora nella serie (7,5) prendiamo $|\varepsilon| = 1$ ed r in modo che:

$$\frac{M'|r|}{(1-|r|)(1-\nu/R)} \leqslant L_1 < 1 \tag{7,9}$$

cioè

$$|r| \leqslant \frac{L_1}{M'}(1-|r|)(1-\nu/R)$$

ovvero

$$|r| \leqslant \frac{L_1(1-\nu/R)}{M' + L_1(1-\nu/R)} \tag{7,10}$$

detta serie *geometrica* converge totalmente e la sua somma è la funzione:

$$\frac{1}{1-\varepsilon\tilde{\varphi}(\xi, \nu, r)} \tag{7,11}$$

8. - Espressione in forma finita di un funzionale analitico non lineare. — Consideriamo ora la varietà analitica:

$$y_0(t) + \varepsilon\, \Psi_1\left(\frac{t}{\nu\beta}, \xi, r\right) \tag{8,1}$$

nella quale la funzione Ψ_1 è quella già definita al n. 5 con la (5,1) dalla quale espressione si ricava:

$$|\Psi_1| \leqslant \sum_{q=1}^{\infty} |r|^q \left|\Psi_{1,q}\left(\frac{t}{\nu\beta}, \xi\right)\right| \tag{8,2}$$

e dalla (3,3)

$$(8,3) \qquad |\Psi_{1,q}| \leqslant \frac{1}{1-\bar{\rho}/\nu\beta}$$

e sostituendo nella (8,2) si trova:

$$(8,4) \qquad |\Psi_1| \leqslant \frac{|r|}{(1-|r|)(1-\bar{\rho}/\nu\beta)}$$

Se allora prendiamo $|\varepsilon|=1$ ed r tale che per $|t| \leqslant \bar{\varrho}$ e $|\xi|=1$ risulti

$$\left|\varepsilon\, \Psi_1\left(\frac{t}{\nu\beta}, \xi, r\right)\right| < \sigma$$

cioè per la (8,4)

$$(8,5) \qquad |r| < \frac{\sigma(1-\bar{\rho}/\nu\beta)}{1+\sigma(1-\bar{\rho}/\nu\beta)}$$

allora la varietà analitica (8,1) ha tutta una parte (regolare) in comune con l'intorno $(\bar{A}, \sigma)$ di $y_0(t)$ che contiene l'intorno (A', σ) ed è interno all'intorno più ampio (A, σ) e quindi ivi il funzionale F è regolare e sviluppabile in serie di Fantappiè (cfr. n. 1).

Chiamando con u il valore assunto da F su questa varietà, si avrà per la (6,1):

$$(8,6) \qquad u(\varepsilon,\xi,\lambda,r) = F\left[y_0(t) + \varepsilon\Psi_1\left(\frac{t}{\lambda},\xi,r\right)\right] = F[y_0(t)] + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^j}{j!}G_j\left[\Psi_1\left(\frac{t}{\lambda},\xi,r\right)\right] =$$

$$= F[y_0(t)] + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^j}{j!}\bar{u}_j(\xi,\lambda,r)$$

con $\lambda = \nu\beta$.

La funzione u ora definita verrà detta l'*indicatrice locale* (cfr. *Premessa*) del funzionale F per l'intorno (A', σ) di $y_0(t)$.

Come ora vedremo, nota la u, mediante un numero finito di operazioni si può determinare il valore di F per ogni funzione $y(t)$ di detto intorno.

Nella *Premessa* si è già accennato che in generale la u non può essere impiegata per calcolare F ovunque nella regione funzionale di definizione H; uno dei casi di eccezione ci è dato quando H è *lineare* (vedi n. 9).

Da quanto sopra trova giustificazione l'aggettivo *locale* dato all'indicatrice u.

Eseguiamo ora il prodotto funzionale simmetrico della funzione Θ, definita con la (7,1), per la funzione $\dfrac{u(\varepsilon,\xi,\nu\beta,r)}{1-\varepsilon\bar{\varphi}(\xi,\nu,r)}$ rispetto alle variabili ε e ξ.

Tenendo presente gli sviluppi (7,1), (8,6) e (7,5) otterremo integrando termine a termine [C_2 è la circonferenza (0,1) del piano complesso ε]:

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_1}\frac{d\xi}{\xi}\int_{C_2}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\Theta\left(\frac{r}{\varepsilon^2},\frac{1}{\xi},\beta\right)\frac{u(\varepsilon,\xi,\nu\beta,r)}{1-\varepsilon\bar{\varphi}(\xi,\nu,r)} =$$

$$(8,7) \qquad = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_1}\frac{d\xi}{\xi}\int_{C_2}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^{j+l}}{j!}\left(\frac{r}{\varepsilon^2}\right)^n\Theta_n\left(\frac{1}{\xi},\beta\right)\bar{u}_j(\xi,\nu\beta,r)\bar{\varphi}^l(\xi,\nu,r) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{d\xi}{\xi}\Theta_n\left(\frac{1}{\xi},\beta\right)\sum_{j=0}^{2n}\frac{1}{j!}\bar{u}_j(\xi,\nu\beta,r)\bar{\varphi}^{2n-j}(\xi,\nu,r)$$

dove si è posto $\bar{u}_0 = F\,[y_0(t)]$.

Si osservi ora che per soddisfare contemporaneamente le (7,4), (7,11) e (8,5) basta prendere

$$|r| \leqslant r_o \ (<1)$$

essendo r_o un numero minore del minore dei tre numeri:

$$L_o(1-\beta);\ \frac{L_1(1-\nu/R)}{M'+L_1(1-\nu/R)}\ ;\ \frac{\sigma(1-\bar{\rho}/\nu\beta)}{1+\sigma(1-\bar{\rho}/\nu\beta)}$$

Dalla (6,2) si ricava poi:

$$\text{(8,8)} \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{d\xi}{\xi}\,\theta_n\left(\frac{1}{\xi}\,,\,\beta\right)\sum_{j=o}^{2n}\bar{u}_j(\xi,\nu\beta,r)\bar{\varphi}^{2n-j}(\xi,\nu,r)=\begin{cases} r^{2n^2}G_n[\varphi(t)] \text{ per } n \geqslant 1 \\ F[y_o(t)] \text{ per } n = o\end{cases}$$

e sostituendo nella (8,7) si trova infine:

$$\text{(8,9)} \qquad \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C_1}\frac{d\xi}{\xi}\int_{C'}\frac{d\xi}{\xi}\,\theta\left(\frac{r}{\varepsilon^2}\,,\frac{1}{\xi}\,,\,\beta\right)\frac{u(\varepsilon,\xi,\nu\beta,r)}{1-\varepsilon\varphi(\xi,\nu,r)}=F[y_o(t)]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{n+2n^2}}{n!}G_n[\varphi(t)]$$

Troviamo così uno sviluppo del tutto simile a quello (1,11) del quale volevamo calcolare la somma, con la sola differenza che in questo ora trovato, il termine $(n+1)^{\text{esimo}}$ ha per coefficiente la potenza r^{n+2n^2} che invece non compare nella (1,11).

Si osservi però che lo sviluppo (8,9) è una serie di potenze di r che converge per $r=1$, coincidendo in fatti per questo valore con lo sviluppo (1,11) e quindi convergerà pure per $|r|<1$ ed anzi per un noto teorema di Abel converge uniformemente in ogni settore di vertice in $r=1$, di apertura inferiore a 180° e tutto interno alla circonferenza (0,1).

Considerando quindi la somma della serie (8,9) come funzione della r, possiamo prolungarla analiticamente dal cerchio $|r| \leqslant r_o$, dove ora soltanto è nota, a tutto il cerchio $|r| < 1$ ed anche in $r=1$.

Questo prolungamento può eseguirsi in *termini finiti* [cfr. nota [11]] come si è mostrato in un altro lavoro [12].

Infatti indicando con $P_o(r,\mu)$ la funzione

$$\text{(8,10)} \qquad P_o(r,\mu)=\sum_{k=o}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\mu^{k^2}}{r^{k+1}}$$

si trova con facile dimostrazione:

$$F\,[y(t)]=F\,[y_o(t)+\varphi(t)]=$$

$$\text{(8,11)} \qquad =\frac{\partial}{\partial\mu}\Big|_{\mu=1}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}dr P_o(r,\mu)\left(F[y_o(t)]+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{n+2n^2}}{n!}G_n[\varphi(t)]\right)$$

dove con C_2 si è indicata una circonferenza (O,R_2) con $R_2 \leqslant r_o$ e dove la derivazione rispetto a μ deve pensarsi eseguita lungo un cammino (per esempio lungo l'asse reale) interno e non tangente alla circonferenza (0,1) del piano μ.

In definitiva sostituendo nella (8,11) il primo membro della (8,9) si ottiene per il

[12] Cfr. M. Carafa, loc. cit., n. 1.

funzionale F, calcolato in un punto qualunque $y(t)$ dell'intorno (A', σ) di $y_o(t)$, l'espressione seguente *in forma finita*:

$$F\,[y(t)] = F\,[y_o(t) + \varphi(t)] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta}_{\mu=1} \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{C_2} dr \int_{C_1} \frac{d\xi}{\xi} \int_{C_2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\, P_o(r, \mu)\, \Theta\left(\frac{r}{\varepsilon^2}, \frac{1}{\xi}, \beta\right) \frac{u(\varepsilon, \xi, \nu\beta, r)}{1 - \varepsilon\bar{\varphi}(\xi, \nu, r)} \tag{8,12}$$

E' così dimostrato che: *basta conoscere l'indicatrice locale* u, *valore del funzionale* F *sulla particolare varietà analitica* $y_o(t) + \varepsilon \Psi_1$, *per potere ottenere* F *in un punto qualunque dell'intorno* (A', σ) *di* $y_o(t)$ *mediante un numero finito di integrazioni definite ed una derivazione ed impiegando le particolari funzioni*, $P_o, \Theta, \Psi_1, \Psi_2$ *che essendo indipendenti dal funzionale* F *e da ogni altro elemento variabile ad esso relativo, possono ritenersi funzioni note.*

Dalla (8,12) si deduce anche che il funzionale F si ottiene applicando alla funzione:

$$\frac{u(\varepsilon, \xi, \nu\beta, \nu)}{1 - \varepsilon\bar{\varphi}(\xi, \nu, r)} \tag{8,13}$$

un *funzionale lineare* Z completamente *indipendente* da F e dalle funzioni $y_o(t)$ ed $y(t)$ e cioè il funzionale (indicando con $g\,(\varepsilon, \xi, r)$ una generica funzione del campo di definizione di Z):

$$Z[g(\varepsilon,\xi,r)] = \frac{\partial}{\partial \beta}_{\mu=1} \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{C_2} dr \int_{C_1} \frac{d\xi}{\xi} \int_{C_2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\, P_o(r, \mu)\, \Theta\left(\frac{r}{\varepsilon^2}, \frac{1}{\xi}, \beta\right) g(\varepsilon,\xi,r)$$

La (8,12) può quindi scriversi più semplicemente così:

$$F\,[y(t)] = Z\left[\frac{u(\varepsilon,\xi,\nu\beta,r)}{1 - \varepsilon\bar{\varphi}(\xi,\nu,r)}\right] \tag{8,14}$$

Analogamente dalla (5,5) si ricava che la funzione $\bar{\varphi}$ è il risultato dell'applicazione alla funzione $\varphi(t) = y(t) - y_o(t)$ di un particolare *funzionale analitico lineare* Q *indipendente* da F e dalle funzioni y_o ed y, si scriverà perciò:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{t}\, \psi_2\left(\frac{\nu}{t}, \xi, r\right) [y(t) - y_o(t)]\, dt = Q[y(t) - y_o(t)] \tag{8,15}$$

Sostituendo quindi nella (8,14), avremo:

$$F\,[y(t)] = Z\left[\frac{u(\varepsilon,\xi,\nu\beta,r)}{1 - \varepsilon Q[y(t) - y_o(t)]}\right] \tag{8,16}$$

Si può così affermare che: *in un intorno* $(A'\sigma)$ *di un qualunque punto* $y_o(t)$ *della sua regione di definizione un funzionale analitico non lineare può rappresentarsi mediante un particolare funzionale lineare* Z *applicato alla funzione prodotto dell'indicatrice locale* u [*relativa al punto* $y_o(t)$] *per la funzione* $1/(1 - \varepsilon\bar{\varphi})$ *della* $\bar{\varphi}$, *la quale ultima è a sua volta un particolare funzionale analitico lineare* Q *della differenza* $y(t) - y_o(t)$

Dalla (8,12) ovvero dalla (8,16), si vede anche che la non linearità di $F[y]$ rispetto alla y dipende esclusivamente dalla non linearità della funzione di $\bar{\varphi}$

$$\frac{1}{1-\varepsilon\bar{\varphi}}=\frac{1}{1-\varepsilon Q[y-y_0]}$$

si può cioè dire, in maniera poco rigorosa ma espressiva: *la non linearità di un funzionale analitico non è sostanzialmente diversa da quella di una funzione.*

Quanto precede vale per la rappresentazione del funzionale F in un intorno (A', σ) di y_0; dato però che la varietà analitica $y_0+\varepsilon\Psi_1$ su cui occorre calcolare F per avere l'indicatrice locale u dipende da y_0 (ed è anzi un *cono* di centro y_0, essendo formata da rette al variare del parametro ε che ivi figura linearmente) ma non dai vari intorni (A', σ) di y_0 che si considerano, con la condizione che siano interni alla regione di definizione del funzionale, si può dire che l'*indicatrice locale* dipende soltanto dalla funzione y_0, oltre che da F, e potremo anzi chiamarla più generalmente *indicatrice locale di* F *nell'intorno di* y_0.

In altri termini l'*indicatrice locale* serve per calcolare tutto un elemento del funzionale di centro y_0 e cioè la somma della serie di Fantappiè per tutte le funzioni di un qualunque intorno (A', σ) di y_0, in cui il funzionale F sia regolare.

E' poi interessante notare l'analogia che corre tra la ben nota formula di Cauchy per le funzioni analitiche e la (8,16), infatti come in detta formula operando *linearmente* sui valori di una data funzione calcolati lungo una curva chiusa C (*insieme ad una dimensione*) si ottiene il valore della stessa funzione in ogni punto della regione luogo dei punti interni a C (*insieme a due dimensioni*) così nella (8,16) ovvero (8,12) operando *linearmente* sui valori u che F assume sopra una varietà analitica ad *un numero finito di dimensioni* ed avente un pezzo regolare in comune con un intorno (A', σ) di una funzione y_0, si ottiene il funzionale F in ogni altro punto dell'intorno (A', σ) (*insieme ad infinite dimensioni*).

9\. - Espressione di un funzionale analitico trascendente intero. — Nel caso di un funzionale analitico trascendente intero [13] lo sviluppo di Fantappiè (1,7) è per definizione convergente in *ogni* intorno (A, σ) di un qualunque punto y_0 della regione di definizione H alla quale, data l'arbitrarietà di σ, dovrà appartenere pertanto anche tutto l'intorno lineare (A) [14] della stessa funzione y_0 e perciò anche, in particolare, la funzione identicamente nulla in A.

Nel caso in cui y_0 sia regolare in un cerchio A' contenente A (od eventualmente coincidente con A) dato che l'intorno lineare (A') appartiene ad (A) (o vi coincide) per

[13] Cfr. F. A., pag. 194.

[14] Si fa osservare che in generale un intorno lineare (A) non esaurisce tutta la regione funzionale H in cui è definito un funzionale trascendente intero, contrariamente a quanto si potrebbe essere indotti a credere dal fatto che per detti funzionali lo sviluppo in serie di Fantappiè è unico.

Infatti, per esempio, il funzionale « *prodotto funzionale simmetrico di una funzione* $y(t)$ *per se stessa* », che è un particolare funzionale trascendente intero (polinomiale omogeneo del 2° ordine) è definito in una regione funzionale ben più ampia di un semplice intorno (o regione) lineare, come mostrerò in un prossimo lavoro.

quanto si è ora detto, si può rappresentare con la (8,16) un funzionale F trascendente intero nell'intorno lineare (A′) di y_0 impiegando una qualsiasi delle possibili *indicatrici locali* e per semplicità noi prenderemo proprio quella relativa alla suddetta funzione identicamente nulla in A′, ottenendosi ovunque in (A′).

$$
\text{(9,1)} \qquad F[y(t)] = Z\left[\frac{F\left[\varepsilon\Psi_1\left(\frac{t}{\sqrt{\beta}}, \xi, r\right)\right]}{1 - \frac{\varepsilon}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{1}{t}\Psi_r\left(\frac{\nu}{t}, \xi\right) y(t)\,dt}\right] = Z\left[\frac{u}{1-\varepsilon Q[y]}\right]
$$

In questo caso la funzione *indicatrice* per l'intorno lineare (A′):

$$
\text{(9,2)} \qquad u = F\left[\varepsilon\Psi_1\left(\frac{t}{\sqrt{\beta}}, \xi, r\right)\right]
$$

è una trascendente intera di ε.

Si fa poi notare che la (9,1) è valida anche nel caso di un funzionale analitico F qualunque, la cui regione di definizione H coincida con un intorno (o regione) lineare (A′). Per questi funzionali la funzione u permette di ottenere in *forma finita* [mediante la (9,1)] il valore di F ovunque in H e può chiamarsi perciò soltanto l'*indicatrice* di F in perfetto accordo con quanto (cfr. *Premessa*) si verifica per i funzionali analitici *lineari* che infatti fanno parte della più estesa classe di detti funzionali analitici definiti in una regione lineare.