LUIGI BERZOLARI

Sulle normali delle varietà algebriche

E' ben noto come, sia in un piano [1] che nello spazio ordinario S_3 di 3 dimensioni [2], il numero delle normali di una curva algebrica passanti per un punto generico del piano o dell'S_3 è espresso dalla somma dell'ordine e della classe della curva.

R. STURM [3] ha assegnato la somma $n+r+m$ come numero delle normali condotte per un punto generico ad una superficie algebrica *priva di singolarità*, di ordine n, di rango r, e di classe m, ed ha soggiunto che *molto probabilmente* il risultato è valido per una superficie algebrica dotata di singolarità qualunque.

In questa Nota mi propongo il problema generale di determinare il numero delle normali condotte per un punto generico ad una varietà algebrica irriducibile, a quante si vogliano dimensioni e con singolarità qualsiasi [4].

1. - Sia V_k^n una varietà algebrica di dimensione k e di ordine n, appartenente ad uno spazio lineare S_r di r dimensioni.

L'ordinaria metrica di S_2 e S_3 si estende notoriamente all'S_r, assumendosi un iperpiano χ come *iperpiano improprio* (luogo di tutti gli *spazi impropri* di S_r) e fissando in χ, come *assoluto* di S_r, una quadrica non specializzata Θ ad $r-2$ dimensioni [5].

Due spazi *propri*, cioè non situati in χ, di S_r, sono allora *paralleli* quando si appartengono (in particolare coincidono) le loro tracce su χ; mentre sono *ortogonali* quando si appartengono ciascuna di esse e lo spazio polare reciproco dell'altra rispetto a Θ.

Per ogni punto P, proprio o improprio, di S_r passa un unico spazio S_{r-m} ortogonale a un dato S_m proprio ($m \geqslant 1$): è lo spazio congiungente P con l'S_{r-m-1} polare rispetto a Θ della traccia di S_m su χ. Fa eccezione il solo caso in cui P sia il punto improprio di una retta S_1 (propria) ortogonale ad S_m; perchè allora *tutti* gli S_{r-m} passanti per S_1, o paralleli ad S_1, sono ortogonali ad S_m. Si noti che, escluso tale caso, quando P è improprio anche l'S_{r-m} per P ortogonale all'S_m risulta improprio.

In tutto il seguito si supporrà la varietà V_k^n dotata di singolarità qualunque: però irriducibile e senza speciali relazioni con la quadrica-assoluto Θ e con l'iperpiano improprio χ; in particolare la V_k^n è da ritenere non tangente a χ, cioè priva di spazi S_k tangenti impropri.

(1) V. ad es. F. SEVERI, Trattato di geometria algebrica, vol. I, parte 1ª, pag. 43 e 129-130, Bologna (1926).

(2) V. K. ROHN und L. BERZOLARI, Algebraische Raumkurven und abwickelbare Flächen, in Encykl. der math. Wissensch., art. III C 9, n. 49.

(3) Ueber Fusspunkts-Curven und-Flächen, Normalen und Normalebenen, Math. Ann. 6, pag. 241-263.

(4) Sulle proprietà generali delle varietà algebriche vedasi F. SEVERI, Introduzione alla geometria algebrica; geometria numerativa (litogr.), pag. 62 e segg., Roma (1948).

(5) In particolare tale quadrica potrà essere l'*assoluto euclideo*, comune a tutte le sfere di S_r.

2. - Se P è un punto semplice di V^n_k, μ un iperpiano passante per l'S_k tangente a V^n_k in P, e M il polo di μ (ossia della traccia di μ su χ) rispetto a Θ, la retta PM (la unica per P ortogonale a μ) è *una normale* in P a V^n_k; e, variando μ nella stella di centro S_k, descrive *lo spazio* S_{r-k} *normale in* P *a* V^n_k, cioè (n. 1) l'S_{r-k} per P ortogonale ad S_k.

Gli ∞^k spazi S_{r-k} normali alla varietà V^n_k nei suoi punti riempiono l'S_r ambiente: onde un punto generico O di S_r appartiene ad un certo numero $\varphi(k, n, r)$ di tali spazi.

Allo scopo di determinare questo numero, che è pure quello delle rette per O normali a V^n_k, giova supporre, come è lecito, che O sia un punto improprio O* (non però dell'assoluto Θ): allora tra le normali per O* a V^n_k alcune sono proprie, cioè normali ciascuna a V^n_k in un punto che, a differenza di O*, non giace su χ; mentre altre risultano improprie perchè normali a V^n_k in punti impropri (n. 1). Se ξ è il numero delle prime ed η quello delle seconde, si ha:

$$\xi+\eta=\varphi(k, n, r) \tag{1}$$

3. - Sia ν una retta uscente dal punto improprio O* (n. 2) e normale a V^n_k in un punto P proprio. Gli spazi S_k ed S_{r-k}, rispettivamente tangente e normale (n. 2) a V^n_k in P, segano l'iperpiano improprio χ in due spazi S^*_{k-1} e S^*_{r-k-1} polari reciproci rispetto all'assoluto Θ, e poichè l'S_{r-k} passa per ν, e quindi per O*, anche l'$S^*_{r-k-1} \equiv$ $\equiv (\chi\, S_{r-k})$ passa per O*: donde segue che l'S^*_{k-1} deve giacere nell'S^*_{r-2} polare di O* (6).

Inversamente, se lo spazio S^*_{k-1}, traccia su χ di un S_k tangente a V^n_k in un punto proprio P, sta in S^*_{r-2}, il suo polare S^*_{r-k-1} rispetto a Θ contiene O*, quindi l'$S_{r-k} = PS^*_{r-k-1}$ normale a V^n_k in P passa per O*.

Si conclude che tanti sono gli spazi S_{r-k} (e quindi le rette S_1) normali a V^n_k *in punti propri* e passanti per il punto improprio O*, quanti sono gli spazi S_k tangenti a V^n_k e incidenti ad un dato S^*_{r-2} secondo un S_{k-1}.

Ora, più generalmente, sulla varietà V^n_k, i punti ove l'S_k tangente incontra un generico spazio $S_{r-k+i-2}$ secondo un S_{i-1}, riempiono una varietà, di dimensione $k-1$; il cui ordine coincide con un noto carattere ρ_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ di V^n_k introdotto dal Severi (7) con la denominazione di *i-esima classe* della V^n_k.

Dunque *il numero* ξ *delle normali proprie della varietà* V^n_k *passanti per un punto improprio* O* *eguaglia l'ultima classe* ρ_k *di* V^n_k.

4. - Sia ora ν^* una retta (impropria) per O* normale a V^n_k in un punto improprio P*. Ciò significa (n. 1) che se S^*_{k-1} è la traccia, su χ, dell'S_k tangente a V^n_k in P* (8),

(6) Si noti che questa illazione non sarebbe legittima se fosse P improprio: perchè allora l'S_{r-k} normale a V^n_k in P sarebbe pure improprio (n. 1), e quindi potrebbe passare per O* senza che per O* passasse lo spazio polare, rispetto a Θ, dell'S^*_{k-1}.

(7) Severi, Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e singolarità proiettive, Mem. dell'Acc. di Torino [2], 52, pag. 61-118, n. 1 (1902).

(8) E quindi mai appartenente a χ, per l'ipotesi (n. 1) che non esistano contatti tra χ e V^n.

e S^*_{r-k-1} è lo spazio polare di S^*_{k-1} rispetto a Θ [9], lo spazio $P^*S^*_{r-k-1}$, cioè (n. 2) l'S^*_{r-k} normale a V^n_k in P^*, passa per ν^* e quindi per O^*.

Ne consegue che (in χ) tale spazio S^*_{r-k} e lo spazio S'_{k-2}, sezione di S^*_{k-1} con l'iperpiano χ' polare di O^* rispetto a Θ, sono polari reciproci rispetto alla quadrica Θ stessa. Ma allora [10] lo spazio S'_{k-2} suddetto e la traccia S'_{r-k-1} di S^*_{r-k} su χ' risultano polari reciproci rispetto alla quadrica Θ' sezione di χ' con Θ; cosicchè, se si fa della metrica proiettiva entro χ, assumendovi come iperpiano improprio χ' [11] e come quadrica-assoluto Θ' [12], si conclude che lo spazio normale in P^* alla varietà V^n_{k-1} sezione di V^n_k con χ [13] coincide con S^*_{r-k}: infatti l'S^*_{k-1}, tangente a V^n_{k-1} in P^* ha per traccia su χ' l'S'_{k-2}, il cui spazio polare rispetto a Θ è l'S'_{r-k-1}; e infine $P^*S'_{r-k-1} = S^*_{r-k}$.

Inversamente, se (entro χ) è S'_{r-k} uno spazio per O^* normale a V^n_{k-1} in un punto P^*, dev'essere (conservate le precedenti notazioni) $S'_{r-k} = P^*S'_{r-k-1} = O^*S'_{r-k-1}$; e quindi l'$S'_{r-k}$ avendo [10] per spazio polare rispetto a Θ l'S'_{k-r}, coincide con l'S^*_{r-k} normale a V^n_k in P^*.

Pertanto gli spazi normali impropri di dimensione $r-k$ che per un generico punto improprio O^* possono condursi alla varietà V^n_{k-1}, appartenente ad S_r, sono tutti e soli quelli per O^* normali alla varietà V^n_{k-1} traccia di V^n_k sull'iperpiano improprio χ di S_r: quando come quadrica-assoluto entro χ si assuma la sezione dell'assoluto Θ di S_r con l'iperpiano polare di O^* rispetto a Θ.

Ne deriva [14], che *in S_r il numero η delle normali improprie di V^n_k uscenti dal punto improprio* O^* *eguaglia il numero $\varphi(k-1, n; r-1)$ delle normali* (n. 2) *alla varietà V^n_{k-1}, passanti per un punto generico del suo spazio ambiente* $S_{r-1} = \chi$.

5. - Per i risultati dei n. 3 e 4, le (1) del n. 2 forniscono la formula ricorrente:

$$\varphi(k, n; r) = \varrho_k + \varphi(k-1, n; r-1), \tag{2}$$

dove, come già si è stabilito (n. 3), ϱ_k designa la k-ma classe di V^n_k, mentre i numeri (delle normali per un punto generico) indicati dai simboli $\varphi\,(k, n; r)$ e $\varphi\,(k-1, n; r-1)$, si riferiscono rispettivamente alla varietà V^n_k e alla V^n_{k-1} sua sezione iperpiana generica.

[9] Spazio che, a differenza di S^*_{k-1}, non contiene P^*; altrimenti S^*_{k-1}, sarebbe tangente a Θ in P^*, cioè la sezione di V^n_k con l'iperpiano improprio χ sarebbe un punto di contatto P^* con l'assoluto Θ: contro l'ipotesi (n. 1) che V^n_k sia priva di speciali relazioni con Θ.

[10] Basta osservare che se in un S_t due spazi S_h ed $S_{h'}$, con $h \geq h'$, e $h+h'=t-1$, sono polari reciproci rispetto ad una quadrica Φ, un generico iperpiano τ per $S_{h'}$, sega l'S_h in un S_{h-1}, che è lo spazio polare di $S_{h'}$, rispetto alla quadrica Φ' sezione di Φ con τ. Inversamente, se su τ si hanno gli spazi S_{h-1} ed $S_{h'}$, polari reciproci rispetto ad una quadrica Φ di τ, ed è Φ una generica quadrica di S_t passante per Φ', mentre è T il polo di τ rispetto a Φ, si ha che gli spazi $S_h = T\,S_{h-1}$ ed $S_{h'}$, sono polari reciproci rispetto a Φ.

[11] Che per la genericità di O^* in χ è un generico iperpiano di χ.

[12] Che è una sezione iperpiana generica dell'assoluto Θ di S_r.

[13] Evidentemente priva di speciali relazioni con χ' e Θ', come per ipotesi (n. 1) accade della V_k rispetto a Θ.

[14] Tenute presenti le note [11], [12] e [13].

Dalla definizione stessa (richiamata nel n. 3) delle successive k classi di una V_k algebrica, si deduce che l'ultima classe della varietà V^n_{k-j} sezione di V^n_k con un generico spazio S_{r-j} coincide con la $(k-j)$-esima classe ρ_{k-j} della V^n_k.

Applicando allora la (2) alla V^n_{k-1} e ad una sua sezione iperpiana generica V^n_{k-2} (cioè alla sezione di V^n_k con un generico S_{r-2}), si ha

$$\varphi(k-1,\ n;\ r-1)=\rho_{k-1}+\varphi(k-2,\ n;\ r-2);$$

quindi analogamente:

$$\varphi(k-2,\ n;\ r-2)=\rho_{k-2}+\varphi(k-3,\ n;\ r-3);$$

e così via sino all'eguaglianza:

$$\varphi(2,\ n;\ r-k+2)=\rho_2+\varphi(1,\ n;\ r-k+1)$$

Se ne deduce:

(3) $$\varphi(1,\ n;\ r-k+1)+\varphi(k,\ n;\ r)=\sum_{i=2}^{k}\rho_i\,,$$

dove $\rho_2,\dots\ \rho_3,\dots,\rho_k$ sono le successive classi, a partire dalla seconda, della *stessa varietà* V^n_k.

6. - Nella (3) il simbolo $\varphi(1,\ n,\ r-k+1)$ indica il numero delle normali alla curva V^n_1, sezione di V^n_k con un generico spazio $\pi\equiv S_{r-k+1}$, passanti per un punto O genericamente fissato in π.

Sia Γ_n la curva, d'ordine n, proiezione di V^n_1 da O sull'iperpiano improprio χ_o di π. Un punto generico H_o di Γ_n individua il punto H di V^n_1 situato sulla retta OH_o; e l'iperpiano S_{r-k} normale a V^n_1 in H interseca la Γ_n in n punti, uno qualunque H_o' dei quali è omologo di H_o in una corrispondenza T.

La traccia su χ_o degli iperpiani (propri) normali alla V^n_1 costituiscono un inviluppo polare reciproco, rispetto all'assoluto Θ_o di π, della curva luogo delle tracce, su χ_o, delle tangenti di V^n_1; ne segue che la classe di tale inviluppo eguaglia l'ordine di tale luogo, cioè il primo rango di V^n_1, che è pure (nn. 5 e 3) la prima classe ρ_1 della varietà V^n_k.

Per un generico punto H_o' di Γ_n passano allora ρ_1 iperpiani del suddetto inviluppo, quindi altrettanti iperpiani normali a V^n_1 ciascuno in un punto: che da O si proietta in un punto H_o di Γ_n.

La corrispondenza T, su Γ_n, tra H_o e H_o' ha dunque gli indici ρ_1 ed n, e siccome il gruppo degli n omologhi di H_o varia quando H_o descrive Γ_n, entro la serie lineare delle sezioni iperpiane di Γ_n, la T è a valenza nulla: onde possiede $n+\rho_1$ punti uniti. Ma se $H_o=H_o'$ è uno di questi, esiste su V^n_1 un punto H tale che l'iperpiano normale in H a V^n_1 e la retta OH si appartengono; per cui OH è una delle normali per O alla V^n_1. Si conclude che:

(4) $$\varphi\ (1,\ n;\ r-k+1)=\rho_1+n.$$

A questa stessa conclusione si perviene più rapidamente supponendo O improprio, cioè su χ_0; e osservando che allora per O passano ρ_1 iperpiani *propri* normali alla V_1^n (ciascuno in un punto proprio) e inoltre gli n iperpiani normali alla curva V_1^n nei suoi punti impropri (intersezioni con χ_0): iperpiani che coincidono tutti (n. 1) con quello improprio χ_0.

7. - Dalle relazioni (3) e (4) si deduce infine il teorema generale seguente:

Il numero delle normali che per un punto generico possono condursi ad una varietà algebrica irriducibile, di dimensione k *e comunque dotata di singolarità, ma priva di speciali relazioni con l'iperpiano improprio e con la quadrica assoluta del suo spazio ambiente, eguaglia la somma del suo ordine e delle sue successive* k *classi secondo il* Severi.

8. - Si può notare che l'ultima classe ρ_k (n. 3) della varietà V_k^n non è altro che il numero degli iperpiani di un fascio generico *tangenti* alla V_k^n stessa, quindi contenenti un suo S_k tangente se $k<r-1$.

Dal n. 3 risulta allora che:

In S_r *il numero delle normali* (proprie) *di una varietà algebrica* (15) *parallele ad una data retta è eguale al numero dei suoi iperpiani tangenti passanti per un generico* S_{r-2}.

E dal n. 7:

Se V_i *e* V_j, *di dimensioni* i *e* j *con* $i<j$, *sono due sezioni spaziali generiche di una varietà algebrica* V (15), *la differenza tra i numeri delle loro normali passanti per un punto generico del rispettivo spazio di appartenenza eguaglia la somma delle successive classi di* V *dalla* i*-esima (inclusa) alla* j*-ma (inclusa).*

9. - Supponendo k=1, dal n. 7 segue che:

Il numero delle normali, per un punto generico del suo spazio di appartenenza, ad una curva (15) *di ordine* n *e di genere* p *è*

$$3n+2p-2-\Sigma\,(\alpha-1),$$

la somma estendendosi a tutti i rami superlineari della curva.

E supponendo $k=2$:

In S_r, *il numero delle normali per un punto generico ad una superficie* V_2^n *d'ordine* n (15) *è*

$$n+\rho_1+\rho_2,$$

dove ρ_1 *indica il primo rango delle sezioni iperpiane di* V_2^n *e* ρ_2 *il numero degli iperpiani tangenti di* V_2^n *passanti per un generico* S_{r-2} (16).

Si supponga infine, nel teorema del n. 7, $k=r-1$, e si osservi che la classe i-esima ρ_i di una ipersuperficie V_{r-1} è l'ordine (n. 3) della varietà V_{r-i-1} luogo dei punti di

(15) Per la quale prescindendo dalla dimensione, si sottintendono le ipotesi precisate nell'enunciato del n. 7.

(16) Ossia il numero degli S_r tangenti di V_2^n che segano ciascuno secondo una retta un generico S_{r-2}.

contatto degli iperpiani tangenti alla V_{r-1} condotti per un generico S_{i-r}. Risulta allora che:

Nello spazio S_r *ad* r *dimensioni da un punto generico escono*

$$m + n + \sum_{i=1}^{r-2} \rho_i$$

rette normali ad una ipersuperficie [15] V^n_{r-1} *di ordine* n *e classe* m, *se* ρ_i *è la classe della sua sezione con un generico spazio* S_{i+1} (i=1, 2,..., r—2).

Se la V^n_{r-1} è generica tra le forme di ordine n, si ha:

$$m = n\,(n-1)^{r-1},\quad \rho_i = n\,(n-1)^i,$$

quindi:

Il numero delle normali che per un punto generico possono condursi ad una ipersuperficie V^n_{r-1} *di* S_r, *generale nel suo ordine* n *e priva di speciali relazioni con l'assoluto di* S_r, *è*

$$n \sum_{i=0}^{r-1} (n-1)^i,$$

ossia 2r *se* n=2, *e*

$$\frac{n}{n-2}\left[(n-1)^r - 1 \right]$$

se n≠2.

10. - Secondo un teorema del Severi [17], l'intersezione, di dimensione $h = k + k' - r$ $(k + k' > r)$, di una varietà di V_k, di ordine ρ_0 e classi $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ con una varietà $V'_{k'}$, di ordine ρ'_0 e classi $\rho'_1, \rho'_2, \ldots, \rho'_{k'}$, ha la sua t-esima classe μ_t espressa dalla formula

$$\mu_t = \sum_{s=0}^{t} \rho'_s\, \rho_{t-s}$$

Ne deriva (nn. 7 e 8) la proposizione:

Date in S_r, *con qualunque singolarità ma in posizione mutua generica e senza speciali relazioni con l'assoluto, due varietà* V^n_k *e* $V^{n'}_{k'}$, *di rispettive classi* ρ_i (i=1, 2,...k) *e* ρ'_j (j=1, 2,..., k'), *si supponga* k+k'>r *e si consideri la loro intersezione* $V^{nn'}_h$ (con h=k+k'—r). *Allora, posto* $\rho_0 = n$ *e* $\rho'_0 = n'$, *il numero delle normali alla varietà* $V^{nn'}_h$ *passanti per un punto generico di* S_r *è eguale a*

$$\sum_{i=0}^{h} (\rho_0\, \rho'_i + \rho_1\, \rho'_{i-1} + \cdots + \rho_i\, \rho'_0),$$

mentre quello delle normali (proprie) a $V^{nn'}_h$ *parallele ad una retta generica è*

$$\sum_{i=0}^{h} \rho_i\, \rho'_{h-i}\,.$$

11. - Applicando il teorema del n. 10 al caso dell'intersezione di due forme generiche, si deve porre:

$$\rho_i = (n-1)^i \;,\; \rho'_j = n'\,(n'-1)^j\,,$$

e risulta che:

[17] Memoria citata nella nota [7], n. 12.

In S_r, *il numero* $\Phi^{(r)}_{n,n'}$ *delle normali che si possono condurre per un punto generico alla varietà* $V^{nn'}_{r-2}$ *intersezione di due ipersuperfici generali nei loro ordini* n, n' *e in posizione generica, anche rispetto alla quadrica-assoluto, è dato dalla formula:*

$$\Phi^{(r)}_{n,n'} = n\,n' \sum_{\mu=0}^{r-2} \sum_{\lambda=0}^{\mu} (n-1)^{\lambda}\ (n'-1)^{\mu-\lambda},$$

ossia:

$$\Phi^{(r)}_{n,n'} = \frac{n\,n'}{n-n'}\left[\frac{(n-1)^r}{n-2} - \frac{(n'-1)^r}{n'-2}\right] + \frac{n\,n'}{(n-2)\,(n'-2)}$$

se $n \neq n'$, $n \neq 2$ *e* $n' \neq 2$.

Se, invece, è $n = n' \neq 2$, *si ha:*

$$\Phi^{(r)}_{n,n} = \frac{n^2}{(n-2)^2}\left[(r-1)\,(n-1)^r - r\,(n-1)^{r-1} + 1\right];$$

mentre se $n' = 2$ *e* $n \neq 2$ *è*

$$\Phi^{(r)}_{n,2} = \frac{2\,n}{(n-2)^2}\left[(n-1)^r - r\,(n-2) - 1\right];$$

ed è infine:

$$\Phi^{(r)}_{2,2} = 4\binom{r}{2}$$

se $n = n' = 2$.