SULLA CONVERGENZA E SOMMABILITÀ DELLE SERIE DI HERMITE[1]

Memoria di G. OTTAVIANI

In un precedente lavoro[2] mi sono occupato del problema di determinare delle limitazioni per i polinomi di HERMITE più restrittive delle limitazioni finora trovate, sfruttando le quali posso ora ricavare, secondo quanto dissi nell'introduzione di tale lavoro, dei criteri sufficienti di convergenza e sommabilità più generali di quelli esistenti.

Richiamo brevemente quanto ci occorre di tale lavoro.

Il KOGBETLIANTZ in una sua Memoria[3] aveva determinato la seguente disuguaglianza valida per i polinomi di HERMITE:

$$\text{(I)} \qquad H_n(x) = O\left(e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\sqrt{2^n n!}}{\sqrt[4]{n}}\right) \qquad \text{per } n \to \infty \text{ e per qualsiasi } x,$$

e servendosi di essa aveva studiato la convergenza e la sommabilità delle serie di HERMITE.

Io ho dimostrato che tale disuguaglianza non è esatta per x qualsiasi, ma che vale per $|x| \leq \sqrt{kn}$, con $k < 2$, e per $|x| > \sqrt{kn}$ l'ho sostituita con altre limitazioni da me trovate. La limitazione

$$\text{(II)} \qquad H_n(x) = O\left(e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\sqrt{2^n n!}}{\sqrt[4]{n} \cdot \sqrt[4]{1 - \frac{x^2}{2n}}}\right)$$

1) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

2) G. OTTAVIANI, *Sulla convergenza e sommabilità delle serie di Hermite, disugualianze fondamentali per i polinomi di Laguerre ed Hermite.* « Ann. della R. Scuola Norm. Super. di Pisa », n. 1, 1938: le formule di questo lavoro le indicheremo con numero d'ordine compreso tra parentesi quadre.

3) E. KOGBETLIANTZ, *Recherches sur la sommabilité des séries d'Hermite.* « Ann. de l'École Norm. Supér. de Paris », 1932.

che ha per campo di validità

$$|x| \leq \sqrt{2n}\left(1 - \frac{1}{n^{2/3}}\right)$$

è dedotta dall'espressione assintotica

$$\text{(III)} \qquad H_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{2^n n!} \sqrt[4]{\frac{2}{n\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{1 - \frac{x^2}{2n}}} \left\{ \cos\left[\varphi(x, n) + \frac{n\pi}{2}\right] + \right.$$
$$\left. + O\left[\frac{1}{(nx^2)^{1/12} \sqrt[4]{1 - \frac{x^2}{2n}}}\right] \right\}$$

valida nello stesso intervallo, con

$$\varphi(x, n) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{2n+1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{2n+1}} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{\sqrt{2n+1}}.$$

Tale espressione assintotica ha un campo di validità più esteso di quello della formula assintotica di Féjer-Perron

$$\text{(III')} \qquad H_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{2^n n!} \sqrt[4]{\frac{2}{n\pi}} \left\{ \cos\left[x\sqrt{2n} + \frac{n\pi}{2}\right] + O\left(\frac{x^3}{\sqrt{n}}\right) \right\},$$

valida per $x = o(n^{1/6})$.

Le altre limitazioni sono

$$\text{(IV)} \qquad H_n(x) = O\left(\frac{e^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{2^n n!}}{n^{1/12}}\right),$$

valida per x qualsiasi, ma utile soprattutto nell'intorno dei punti $x = \pm \sqrt{2n}$

$$\text{(V)} \qquad H_n(x) = O\left(e^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{2^n n!} \frac{\sqrt[4]{n}}{x^2 - 2n}\right) \qquad \text{per } |x| > \sqrt{2n}$$

$$\text{(VI)} \qquad H_n(x) = O\left(e^{\frac{x^2}{2}(1-\varepsilon)} \frac{\sqrt{2^n n!}}{\sqrt[4]{n}}\right) \qquad \text{per } |x| > \sqrt{k_1 n}\,, \text{ con } k_1 > 2.$$

Dalla (I) il Kogbetliantz ha ricavato la corrispondente limitazione per i polinomi di Laguerre, cioè la [15] (come abbiamo già detto, le formule del lavoro citato [2]) sono indicate con numero d'ordine compreso tra parentesi quadre), ma per essa si ripete esattamente quanto ho detto della (I); va sostituita così dalle formule [17], . . . , [21] dalle quali ho anzi ricavato le limitazioni scritte per i polinomi di Hermite, i quali sono un caso particolare dei polinomi di Laguerre.

Nel presente lavoro mi sono anzitutto occupato delle condizioni sufficienti di convergenza delle serie di HERMITE (§ 1) ed ho così corretto, utilizzando le limitazioni dette, il criterio di KOGBETLIANTZ, che dice ora esser sufficiente per la convergenza delle serie di tipo h in un punto di continuità o di discontinuità di prima specie di $f(x)$ l'esistenza dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)| \frac{du}{1+|u|^{2/h}}$$

oppure dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)| \frac{du}{1+|u|}$$

se $f(x)$ è limitata in tutto l'intervallo $(-\infty, \infty)$.

Ho poi dimostrato che la funzione $f(x) = x$ non ha lo sviluppo di tipo b convergente, mentre una qualsiasi funzione monotona per $|x| \to \infty$ ma dell'ordine di grandezza al più di x^α, con $\alpha < 1$, converge in ogni punto di continuità o di discontinuità di prima specie; ho dato infine vari altri criteri, tra i quali notevole quello che impone le condizioni

$$f(u) = o(|u|^{1/h}) \quad , \quad f'(u) = o(|u|) \quad (|u| \to \infty)$$

per la conseguenza uniforme della serie di tipo b a $f(x)$ in ogni intervallo finito.

Quindi utilizzando le limitazioni trovate ho esteso un criterio di M. JACOB sopra l'integrazione per serie (§ 2).

Sono passato poi a studiare (§ 3) la sommabilità (C, δ), $\delta > 0$, delle serie di HERMITE, per la quale ho corretto il risultato di KOGBETLIANTZ, imponendo però ora solo la condizione

$$f(u) = o(|u|^{2\delta}) \quad (|u| \to \infty)$$

per la sommabilità (C, δ) della serie di HERMITE di tipo b di $f(x)$.

Dopo avere esteso gli analoghi criteri dati per la convergenza e per l'integrazione per serie, ho considerato pure le condizioni al finito ed ho dimostrato che la condizione di LEBESGUE

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |\varphi(t)|\, dt = 0, \quad \text{con} \quad \varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2\Phi(x)$$

è sufficiente perchè la serie di HERMITE della funzione $f(x)$, la quale soddisfi a una qualsiasi delle condizioni all'infinito date per la sommabilità, sia sommabile (C, δ), con $\delta > 0$, ed abbia per somma $\Phi(x)$.

Questa condizione, invece, non è sufficiente per la convergenza ($\delta = 0$): infatti, come sappiamo, c'è l'equiconvergenza, nelle condizioni al finito, tra serie di HERMITE e serie trigonometrica di FOURIER, e per questa occorre aggiungere un'altra condizione, secondo il teorema di LEBESGUE.

§ 1: CONVERGENZA DELLE SERIE DI HERMITE.

1) Le funzioni

$$f_n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}, \tag{1}$$

dove $H_n(x)$ è il polinomio di HERMITE di ordine n, costituiscono un sistema di funzioni ortogonali a due a due e normalizzate nell'intervallo $(-\infty, \infty)$.

Data una funzione $f(x)$, definita nell'intervallo $(-\infty, \infty)$ e integrabile in ogni intervallo finito, possiamo considerare la sua serie di FOURIER relativa al sistema (1)

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} f(u) H_n(u)\, du \text{ [4]}. \tag{2}$$

La serie (2) la diremo, secondo CHARLIER, serie di HERMITE di tipo h della funzione $f(x)$.

La serie di HERMITE di tipo h della funzione $e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)$ è

$$e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} f(u) H_n(u)\, du .$$

Allora la serie

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} f(u) H_n(u)\, du \tag{3}$$

la diremo, secondo CHARLIER, serie di tipo H della funzione $f(x)$.

Studieremo le condizioni da imporre alla funzione $f(x)$ per la convergenza o sommabilità della serie di tipo H dalle quali si deducono subito, come è evidente, le corrispondenti condizioni per la serie di tipo h. E per quelle correggeremo prima il teorema di KOGBETLIANTZ basato sulla disuguaglianza (I), che abbiamo dimostrata non vera per x qualsiasi, e poi daremo degli altri criteri.

4) Evidentemente la $f(x)$ deve render convergenti gli integrali scritti; quindi, per es., $f(x) = O\left(e^{k\frac{x^2}{2}}\right)$ per $|x| \to \infty$, con $k < 1$.

Considleriamo la somma parziale n–esima della serie (3). Possiamo metterla nella forma seguente

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} f(u)\, S_n^{(0)}(x, u)\, du$$

in cui è

$$(4) \qquad S_n^{(0)}(x, u) = \sum_{m=0}^{n} \frac{H_m(x)\, H_m(u)}{2^m\, m!\, \sqrt{\pi}} = \frac{H_{n+1}(x)\, H_n(u) - H_n(x)\, H_{n+1}(u)}{2^{n+1}\, n!\, (u - x) \sqrt{\pi}} \text{ [5]}.$$

Mediante le [3] si ricava la nota formula di approssimazione assintotica

$$(5) \qquad S_n^{(0)}(x, u) = \frac{e^{\frac{x^2 + u^2}{2}}}{\pi} \left\{ \frac{\operatorname{sen}(u - x)\sqrt{2n}}{u - x} + \frac{\vartheta_n(u, x)}{\sqrt{n}} \right\} \qquad |u|, |x| \leq A$$

con $\vartheta_n(u, x)$ limitata uniformemente per u, x variabili in un intervallo finito e per $n \to \infty$, ed integrabile.

Allora per $n \to \infty$ si ha

$$(6) \qquad \int_{-a}^{a} e^{-u^2} f(u)\, S_n^{(0)}(x, u) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} e^{\frac{x^2 - u^2}{2}} f(u)\, \frac{\operatorname{sen}(u - x)\sqrt{2n}}{u - x}\, du + o(1)$$

in cui è a una costante positiva arbitrariamente grande ma finita.

Ma l'integrale del secondo membro gode delle stesse proprietà dell'integrale di DIRICHLET della somma parziale della serie trigonometrica di FOURIER della funzione $f(x)$.

Quindi per le funzioni $f(x)$ tali che per $n \to \infty$ risulti

$$\int_{a}^{\infty} e^{-u^2} f(u)\, S_n^{(0)}(x, u)\, du = o(1) \quad , \quad \int_{-\infty}^{-a} = o(1)$$

possiamo dire che il loro sviluppo in serie di polinomi di HERMITE si comporta in un punto x, a distanza finita, come la serie trigonometrica di FOURIER di una funzione che coincide con la $f(x)$ in un intorno comunque piccolo di x.

In particolare, se x è un punto di continuità o di discontinuità di prima specie di $f(x)$, la serie (3) converge a $\dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$; e se $f(x)$ è continua e a variazione limitata in (α, β), allora si ha la convergenza uniforme a $f(x)$ in un qualsiasi intervallo interno ad (α, β).

5) Per questa e per le altre formule dei polinomi di HERMITE utilizzate v. per es.: G. VITALI e G. SANSONE, *Moderna Teoria delle funzioni di var. reale*, parte II, cap. IV; Zanichelli, Bologna, 1936.

Per la (4) e per la (I), valida in particolare per x finito, possiamo anche dire:

Se $f(x)$ è tale che per $n \to \infty$ risulti

$$(7) \qquad \int_{a}^{\infty} \frac{e^{-u^2} f(u)}{u-x} \mathrm{H}_n(u)\, du = o\left(\frac{\sqrt{2^n n!}}{\sqrt[4]{n}}\right) \quad ; \quad \int_{-\infty}^{-a} = o\left(\frac{\sqrt{2^n n!}}{\sqrt[4]{n}}\right)$$

con a arbitrariamente grande ma finito, la sua serie di HERMITE *si comporta in un punto x come la serie trigonometrica di* FOURIER *della funzione stessa.*

2. La condizione sufficiente di convergenza di KOGBETLIANTZ, cioè la esistenza dei due integrali:

$$(8) \qquad \int_{a}^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}} |f(u)|}{u}\, du \quad ; \quad \int_{-\infty}^{-a} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}} |f(u)|}{|u|}\, du ,$$

ottenuta dalla (7) sostituendo ad $\mathrm{H}_n(u)$ il suo valore maggiorante dato dalla (I), va modificata nel seguente modo:

se si fanno ipotesi solo sulla integrabilità di $f(x)$ (cioè la $f(x)$ può essere pure infinita) basta che siano convergenti gli integrali

$$(9) \qquad \int_{a}^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}} |f(u)|}{u^{2/3}}\, du \quad , \quad \int_{-\infty}^{-a} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}} |f(u)|}{|u|^{2/3}}\, du ,$$

come segue subito sostituendo le limitazioni (I), (IV), con il punto di divisione $\pm\sqrt{n}$, nella (7).

Se supponiamo però che sia, per $|x| \to \infty$,

$$(10) \qquad f(x) = O\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)$$

allora basta la convergenza degli integrali (8). Infatti, posto

$$(\alpha) \qquad a_1 = \sqrt{2n(1-\varepsilon)} \quad , \quad a_2 = \sqrt{2n - 2\sqrt{n}} ,$$

$$a_3 = \sqrt{2n + 2\sqrt{n}} \quad , \quad a_4 = \sqrt{2n(1+\varepsilon)} ,$$

si ha

$$\int_{a}^{\infty} \frac{e^{-u^2} f(u)}{u-x} \mathrm{H}_n(u)\, du = \int_{a}^{a_1} + \int_{a_1}^{a_2} + \int_{a_2}^{a_3} + \int_{a_3}^{a_4} + \int_{a_4}^{\infty} .$$

Per la condizione (10) si vede subito che gli ultimi tre integrali sono dell'ordine di grandezza di $o\left(\frac{\sqrt{2^n n!}}{\sqrt[4]{n}}\right)$ per $n \to \infty$: basta utilizzare rispettivamente le limitazioni (IV), (V), (VI); il secondo integrale, utilizzando la (II) risulta dell'ordine di grandezza di

$$\mathrm{O}\left(\frac{\sqrt{2^n\,n!}}{\sqrt[4]{n}}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}\,|f(u)|}{(u-x)\sqrt[4]{1-\frac{u^2}{2n}}}\,du\right)=\mathrm{O}\left(\frac{\sqrt{2^n\,n!}}{\sqrt[4]{n}\,\sqrt{n}}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{du}{\sqrt[4]{1-\frac{u^2}{2n}}}\right)$$

e, con la sostituzione $1-\frac{u^2}{2n}=t$,

$$=\mathrm{O}\left(\frac{\sqrt{2^n\,n!}}{\sqrt[4]{n}}\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\varepsilon}\sqrt{t}\,dt\right)=\mathrm{o}\left(\frac{\sqrt{2^n\,n!}}{\sqrt[4]{n}}\right);$$

che infine il primo integrale sia dell'ordine di grandezza di $\mathrm{o}\left(\frac{\sqrt{2^n\,n!}}{\sqrt[4]{n}}\right)$, nel caso in cui valga la condizione (8), si ottiene maggiorando in esso $H_n(u)$ mediante la (II).

Possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

Se una funzione $f(x)$ definita in $(-\infty,\infty)$ è integrabile in ogni intervallo finito, è, per $|x|\to\infty$, dell'ordine di grandezza di $\mathrm{O}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$ ed inoltre rende convergente l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}\,|f(u)|\,\frac{du}{1+|u|}$$

la sua serie di HERMITE *di tipo* H (3) *converge in ogni punto di continuità o di discontinuità di prima specie di $f(x)$ a $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.*

Alle due condizioni all'infinito dette si può sostituire l'unica condizione della convergenza dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}\,|f(u)|\,\frac{du}{1+|u|^{2/3}}.$$

Si deduce immediatamente il corrispondente criterio per le serie di tipo h:

La serie di HERMITE (2) *converge in ogni punto di continuità o di discontinuità di prima specie di $f(x)$ a $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, se $f(x)$ rende convergente l'integrale*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|\,\frac{du}{1+|u|^{2/3}}$$

oppure se è limitata in tutto l'intervallo $(-\infty, \infty)$ *e rende convergente l'integrale*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)| \frac{du}{1+|u|}.$$

3. Osservazione. — Il Kogbetliantz nella Memoria citata nella nota 3) ha dimostrato che la funzione di x:

$$f(x) = \frac{\pi x}{|x|} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \frac{H^2_{\varphi(m)+1}(x)}{2^{2\varphi(m)} \varphi(m)!} \quad , \quad \text{con} \quad \varphi(m) = 2^{m^2}$$

ha lo sviluppo in serie di Hermite (3) non convergente per $x = 0$.

Però la funzione non risulta, contrariamente a quanto dice il Kogbetliantz, dell'ordine di grandezza di $e^{\frac{x^2}{2}}$: infatti la limitazione (I) mediante la quale il Kogbetliantz ricava $f(x) = O\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)$ non è valida per x qualsiasi in $(-\infty, \infty)$, ma, come dicono le limitazioni (II), . . . (VI), solo per $|x|$ esterno all'intervallo

$$I_m \equiv \left\{ \sqrt{kn} \, . \, \sqrt{2n}\left(1 + \frac{h}{\sqrt{n}}\right) \right\} \quad , \quad \text{con} \quad n = 2\varphi(m) + 1$$

dove è $k < 2$ e dove h è una costante arbitraria.

Fissato allora un valore di x, tutti i termini della funzione possono maggiorarsi mediante la (I), eccettuato al più uno, dato da quel valore di m il cui intervallo I_m contiene x. Ce ne è al più uno, perchè gli intervalli I_m sono esterni l'uno all'altro, e quindi x può essere contenuto al più in uno. Quel termine occorre maggiorarlo con la (IV), ed essendo in I_m $\frac{n^{1/6}}{m^2} = O\left(\frac{x^{1/3}}{\log^{2/3} x}\right)$, se segue che è

$$f(x) = O\left\{ \frac{e^{\frac{x^2}{2}} |x|^{1/3}}{\log^{2/3} |x|} \right\} \qquad \text{per} \quad |x| \to \infty.$$

4. Diamo ora qualche criterio di convergenza nel caso in cui non esistano finiti gli integrali (8):

a) Se è $f(x) = f(0) + \int_0^x \varphi(x)\,dx$ (con $\varphi(x)$ definita nell'intervallo $(-\infty, \infty)$ ed integrabile in qualsiasi intervallo finito) *e risulta*

$$\varphi(x) = o\left(e^{\frac{x^2}{2}} x\right) \tag{11}$$

$\left(\text{da cui segue } f(x) = o\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)\right)$ *allora lo sviluppo* (3) *converge a* $f(x)$ *uniformemente in qualsiasi intervallo finito.*

Infatti si ha, integrando per parti,

$$(\beta) \qquad \int_a^\infty \frac{f(u)}{u-x} e^{-u^2} H_n(u)\, du = \left[\frac{f(u)}{u-x} e^{-u^2} H_{n-1}(u)\right]_{u=a}^{\infty} + $$

$$+ \int_a^\infty \left[\frac{f(u)}{u-x}\right]' e^{-u^2} H_{n-1}(u)\, du ,$$

essendo

$$\int^\infty e^{-u^2} H_n(u)\, du = - e^{-u^2} H_{n-1}(u) ;$$

quindi, per a sufficientemente grande e per $n \to \infty$, si ottiene

$$(\beta)' \qquad \int_a^\infty \frac{f(u)}{u-x} e^{-u^2} H_n(u)\, du = \int_a^\infty \frac{\varphi(u)}{u-x} e^{-u^2} H_{n-1}(u)\, du + o\left(\frac{\sqrt{2^n\, n!}}{\sqrt[4]{n}}\right)$$

poichè la (IV) permette di scrivere

$$\int_a^\infty \frac{f(u)}{(u-x)^2} e^{-u^2} H_{n-1}(u)\, du = o\left(\frac{\sqrt{2^n\, n!}}{n^{1/12}\sqrt{n}} \int_a^\infty \frac{du}{u^2}\right).$$

Ora l'intervallo (a, ∞) lo possiamo spezzare nei seguenti intervalli:

$$(\alpha)' \qquad (a, a_2) \quad ; \quad (a_2, a_3) \quad ; \quad (a_3, a_4) \quad ; \quad (a_4, \infty)$$

dove a_2, a_3, a_4 sono i valori indicati nella (α).

Maggiorando in ciascuno di essi l'integrale del secondo membro di (β), mediante la (11) e le varie formule di limitazione di $H_n(x)$, segue che per a abbastanza grande si può rendere

$$\int_a^\infty \frac{e^{-u^2} H_n(u)}{u-x} f(u)\, du$$

piccolo quanto si vuole; si procede analogamente per l'integrale tra $-\infty, -a$. Allora, poichè $f(x)$ è assolutamente continua in ogni intervallo finito, il teorema è dimostrato completamente.

b) Se integriamo (β) per parti prendendo come fattore differenziale $H_n(u) \dfrac{du}{u-x}$, e notando che è

$$\int_a^u H_n(u) \frac{du}{u-x} = \left[\frac{-H_{n+1}(u)}{2(n+1)(u-x)}\right]_a^u -$$

$$- \frac{1}{2(n+1)} \int_a^u H_{n+1}(u) \frac{du}{(u-x)^2} = O\left\{\frac{|H_{n+1}|}{(n+1)u} + \frac{|H_{n+2}|}{(n+1)(n+2)}\right\},$$

dove H_{n+1}, H_{n+2} indicano il massimo valore che i due polinomi assumono in (a, u), si dimostra che *la serie* (3) *converge uniformemente a* $f(x)$ *in ogni intervallo finito se risulta*

$$f(x) = \mathrm{O}(e^{kx^2}), \quad \text{con} \quad k < 1, \quad \text{e} \quad [e^{-x^2} f(x)]' e^{\frac{x^2}{2}} = \mathrm{o}(|x|).$$

Alla seconda condizione si può sostituire la condizione dell'integrabilità in $(-\infty, \infty)$ di $\left| [e^{-x^2} f(x)]' \dfrac{e^{\frac{x^2}{2}}}{1 + |x|^{5/3}} \right|$, come si verifica spezzando l'intervallo (a, ∞) in tre parti con i punti di divisione $\sqrt{n}$, $\sqrt{3n}$, e usando per H_{n-1}, H_{n+2} le limitazioni (I), (IV), (VI) nei tre intervalli.

Questo criterio è più generale del criterio di convergenza uniforme di STONE[6], il quale esige la integrabilità di

$$\left[(e^{-x^2} f(x))' e^{\frac{x^2}{2}} \right]^2.$$

c) Se $f(x)$ *è definita in* $(-\infty, \infty)$, *è derivabile e soddisfa le condizioni*

$$e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) = \mathrm{o}\left(\left| x^{\frac{1}{3}} \right| \right), \quad \left[e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) \right]' = \mathrm{o}(|x|) \qquad (|x| \to \infty), \tag{12}$$

allora la serie (3) *converge uniformemente a* $f(x)$ *in ogni intervallo finito.*

Spezziamo l'intervallo (a, ∞) nelle quattro parti $(\alpha)'$ del criterio *a*). L'integrale

$$\int e^{-u^2} f(u) \, \mathrm{H}_n(u) \frac{du}{u - x} \tag{γ}$$

esteso all'ultima parte risulta, a causa della (VI) e della prima delle (12), dell'ordine di grandezza di $\mathrm{o}\left(\dfrac{\sqrt{2^n n!}}{\sqrt[4]{n}} \right)$ per $n \to \infty$; l'integrale (γ) esteso alla terza parte, mediante la (V) e la prima delle (12), risulta

$$\mathrm{o}\left(\sqrt{2^n n!} \sqrt[4]{n} \int_{a_3}^{a_4} \frac{u^{1/3} \, du}{(u - x)(u^2 - 2n)} \right) = \mathrm{o}\left(\frac{\sqrt{2^n n!}}{n^{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}}} \int_{a_3}^{a_4} \frac{d(u^2 - 2n)}{u^2 - 2n} \right) =$$

$$= \mathrm{o}\left(\frac{\sqrt{2^n n!}}{\sqrt[4]{n}} \right) \qquad \text{per} \quad n \to \infty.$$

6) Vedi, per es., G. SANSONE, loc. cit. 5), nota (3), § 7.

L'integrale (γ) esteso alla seconda parte, mediante la (IV) e la prima delle (12), risulta dell'ordine di grandezza di

$$O\left(\frac{\sqrt{2^n n!}}{n^{1/12}}\int_{a_2}^{a_1}\frac{|f(u)|\,e^{-\frac{u^2}{2}}}{u-x}\,du\right)=o\left(\frac{\sqrt{2^n n!}}{\sqrt[4]{n}}\right)$$

essendo

$$a_1-a_2=\sqrt{2n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}-\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)<\sqrt{2n}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\,.$$

Rimane infine l'integrale esteso alla prima parte. Usando qui la formula di approssimazione assintotica (III) si ha che esso è eguale a

$$(\delta)\qquad \sqrt{2^n n!}\,\sqrt[4]{\frac{2}{n\pi}}\int_0^{a_2}\frac{f(u)\,e^{-\frac{u^2}{2}}\cos\left[\varphi(u,n)+\frac{n\pi}{2}\right]}{(u-x)\sqrt[4]{1-\frac{u^2}{2n}}}\,du+$$

$$+\,O\left(\frac{\sqrt{2^n n!}}{\sqrt[4]{n}}\int_0^{a_2}\frac{|f(u)|\,e^{-\frac{u^2}{2}}}{(u-x)\,(nu^2)^{1/12}}\,\frac{du}{\sqrt{1-\frac{u^2}{2n}}}\right).$$

Consideriamo l'integrale contenuto nel secondo termine: spezzandolo in due con il punto di divisione $a_1=\sqrt{2n(1-\alpha)}$ si ha che esso è maggiorato da

$$O\left\{\frac{\sqrt{2^n n!}}{\sqrt[4]{n}}\left[o\left(\frac{1}{n^{1/12}}\int_0^{a_1}\frac{du}{u^{1-\frac{1}{6}}}\right)+o\left(\frac{1}{n^{1/2}}\int_{a_1}^{a_2}\frac{du}{\sqrt{1-\frac{u^2}{2n}}}\right)\right]\right\}=o\left(\frac{\sqrt{2^n n!}}{\sqrt[4]{n}}\right),$$

come si ottiene con la sostituzione: $1-\frac{u^2}{2n}=t$ nel secondo integrale. Passiamo infine al primo integrale della (δ). Integrando per parti, e notando che è

$$\int_0^u\cos\left[\varphi(u,n)+\frac{n\pi}{2}\right]du=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{2n+1}}}\right)\qquad (u\leq a_2)$$

(mediante la sostituzione $\varphi(u,n)=t$: la funzione $t'(u)=\sqrt{2n+1}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{2n+1}}$ risulta monotona e si può applicare il secondo teorema della media) si ha che esso è maggiorato da

$$O\left(\frac{\sqrt{2^n n!}}{\sqrt[4]{n}}\,\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{a_2}\left|\left[\frac{f(u)\,e^{-\frac{u^2}{2}}}{(u-x)\sqrt[4]{1-\frac{u^2}{2n}}}\right]'\right|\frac{du}{\sqrt{1-\frac{u^2}{2n+1}}}\right).$$

Se noi eseguiamo la derivazione, vediamo che i termini relativi alla derivazione del denominatore, integrati, dànno tutti dei termini dell'ordine di grandezza di $o\left(\frac{\sqrt{2^n n!}}{\sqrt[4]{n}}\right)$; rimane quindi il termine

$$O\left(\frac{\sqrt{2^n n!}}{\sqrt[4]{n}} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_a^{a_2} \left| \left(f(u)\, e^{-\frac{u^2}{2}} \right)' \right| \frac{du}{u \cdot \left(1 - \frac{u^2}{2n+1}\right)^{3/4}} \right) + o\left(\frac{\sqrt{2^n n!}}{\sqrt[4]{n}}\right).$$

Se maggioriamo questo integrale mediante la seconda condizione delle (12) ed eseguiamo l'integrale così ottenuto, si verifica che il termine scritto è dell'ordine di grandezza di $o\left(\frac{\sqrt{2^n n!}}{\sqrt[4]{n}}\right)$ e quindi ne risulta il teorema.

Questo criterio è particolarmente adatto per le serie di HERMITE di tipo h (alle quali si passa da quelle di tipo H considerando appunto in queste la funzione $e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) = f_1(x)$). Mentre infatti il criterio generale (2) richiede che $f_1(x)$ tenda a zero per $|x| \to \infty$, ma abbastanza rapidamente in modo che $|f_1(x) : x|$ sia integrabile, questo criterio ci dice che $f_1(x)$ può tendere pure all'infinito, per $|x| \to \infty$, purchè tenda meno rapidamente di $|x|^{1/3}$, e la sua derivata meno rapidamente di $|x|$. Esempi di funzioni che soddisfano questo criterio: per es., $f_1(x) = x^\alpha \operatorname{sen} ax^r$ con $\alpha < \frac{1}{3}$ e $\alpha + r < 2$.

d) Possiamo estendere il criterio *c*) nel seguente modo:

Sia $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, *dove è* $f_2(x)$ *monotona tendente a zero per* $|x| \to \infty$, *ed* $f_1(x) = O\left(e^{\frac{x^2}{2}} |x|^{1/3}\right)$, *con* $\left(f_1(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = O(|x|)$: *allora lo sviluppo* (3) *converge a* $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ *in ogni punto di continuità o di discontinuità di prima specie di* $f(x)$.

La dimostrazione non varia; solo, quando si considera l'integrale (γ) esteso all'intervallo (a, a_2), si porta fuori del segno di integrale $f_2(x)$ mediante il secondo teorema della media: ed è, per a grande ad arbitro, $f_2(a) = o(1)$; si ragiona poi su $f_1(x)$ come si è fatto per $f(x)$.

e) *La funzione* $e^{\frac{x^2}{2}} x$ *non ha lo sviluppo* (3) *di tipo* H *convergente e quindi la funzione* x *non ha lo sviluppo* (2) *di tipo* h *convergente.*

Dimostriamo infatti che la somma parziale n-esima $f_n(x)$ della serie (3) non ha limite per $n \to \infty$. Si ha

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} u S_n^{(0)}(x, u)\, du = x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} S_n^{(0)}(x, u)\, du +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} (u - x)\, S_n^{(0)}(x, u)\, du.$$

Il primo integrale rappresenta la somma parziale n-esima dello sviluppo in serie di tipo H della funzione $e^{\frac{x^2}{2}}$, sviluppo convergente uniformemente a $e^{\frac{x^2}{2}}$ per x finito. Applicando inoltre la (4) nell'ultimo integrale si ottiene

$$f_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}} x[1 + o(1)] + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{H_{n+1}(x) H_n(u) - H_n(x) H_{n+1}(u)}{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}} du .$$

Supponendo, per es., n dispari $= 2m - 1$, e ricordando che $H_n(u)$ è pari o dispari a seconda che sia pari o dispari n, si ottiene

$$f_{2m-1}(x) = e^{\frac{x^2}{2}} x[1 + o(1)] - \frac{H_{2m-1}(x)}{2^{2m}(2m-1)! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} H_{2m}(u) du .$$

Dalla formula

$$(13) \qquad e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) = 2 \frac{d}{dx} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} H_{n-1}(x) \right] + 2(n-1) e^{-\frac{x^2}{2}} H_{n-2}(x) ,$$

la quale si ricava subito dalla formula ricorrente dei polinomi di HERMITE, si ottiene, con procedimento ricorrente e per $n = 2m$, ed integrando inoltre tra $-\infty, \infty$,

$$(13)' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_{2m}(x)\, dx = \sum_{p=1}^{m} 2^p \frac{(2m-1)!!}{(2m+1-2p)!!} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} H_{2m+1-2p}(x) \right]_{-\infty}^{\infty} +$$
$$+ 2^m (2m-1)!! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}\, 2^m (2m-1)!!$$

Quindi

$$f_{2m-1}(x) = e^{\frac{x^2}{2}} x[1 + o(1)] - \sqrt{2} \frac{H_{2m-1}(x)}{2^m (2m-2)!!}$$

e questo termine, per la (III)', non ha limite per $m \to \infty$, ma oscilla indefinitamente tra i due estremi $e^{\frac{x^2}{2}} \left(x \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)$.

f) Una funzione $f(x)$, *definita in* $(-\infty, \infty)$ *ed integrabile in ogni intervallo finito, è sviluppabile in serie di* HERMITE (2) *di tipo h, convergente a* $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ *in ogni punto di continuità o di discontinuità di prima specie di* $f(x)$, *se, per* $|x| \geq a$, *con a arbitrariamente grande,*

1) *è del tipo* $f(x) = |x|^\alpha \varphi(x)$, *con* $\alpha < 1$ *e* $\varphi(x)$ *funzione monotona limitata;*

2) *oppure è monotona e dell'ordine di grandezza al più di* $|x|^\alpha$, *con* $\alpha < 1$.
Basta dimostrare, per il teorema del n. 1, che è, per $n \to \infty$,

$$S_n = \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2^n n!}} \int_a^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} f(u) \frac{H_n(u)}{u-x} du = o(1).$$

Nella prima ipotesi si ha

$$S_n = \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2^n n!}} \int_a^\infty \frac{u^{\frac{1+\alpha}{2}}}{u-x} \varphi(u) \frac{e^{-\frac{u^2}{2}} H_n(u)\, du}{u^{\frac{1-\alpha}{2}}}.$$

La prima funzione sotto il segno di integrale, per a sufficientemente grande, è monotona decrescente nell'intervallo (a, ∞); allora essa e la funzione $\varphi(u)$ possono portarsi fuori del segno d'integrale mediante il secondo teorema della media e si ottiene, supponendo per es. $\varphi(u)$ crescente,

$$S_n = \frac{a^{\frac{1+\alpha}{2}}}{a-x} \varphi(\infty) \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2^n n!}} \int_{a+\xi_1}^{\xi_2} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}} H_n(u)\, du}{u^{\frac{1-\alpha}{2}}}.$$

Ma alla fine di questo numero dimostreremo che per $n \to \infty$ vale la relazione

$$I_n = \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2^n n!}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}} H_n(u)\, du}{u^\varepsilon} = o(1) \tag{14}$$

con $0 < \varepsilon < 1$, e che tale limite vale uniformemente anche se β_1 e β_2 variano al variare di n. Il criterio risulta quindi dimostrato. Nella seconda ipotesi, detto b un numero > 1, si ha

$$S_n = \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2^n n!}} \sum_{i=0}^\infty \int_{ab^i}^{ab^{i+1}} \frac{u}{u-x} \frac{1}{u^{\alpha+\frac{1-\alpha}{2}}} f(u) \frac{e^{-\frac{u^2}{2}} H_n(u)\, du}{u^{\frac{1-\alpha}{2}}}.$$

Nell'intervallo generico (ab^i, ab^{i+1}) è la funzione $\frac{u}{u-x}$ monotona e limitata ed $f(u)$ e $\frac{1}{u^{\alpha+\frac{1-\alpha}{2}}}$ monotone; quindi applicando il secondo teorema della media e notando che $\frac{f(u_1)}{u_2^\alpha}$ risulta limitato se u_1 e u_2 si trovano nel medesimo intervallo (ab^i, ab^{i+1}), si ottiene

$$|S_n| \leq K \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2^n n!}} \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{[ab^i]^{\frac{1-\alpha}{2}}} \left| \int_{ab^i+\xi_i}^{ab^{i+1}-\xi'_i} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}} H_n(u)}{u^{\frac{1-\alpha}{2}}} du \right|$$

in cui è K una conveniente costante. Da questa limitazione si ricava, a causa della (14),

$$\mathrm{S}_n = o\left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(ab^i)^{\frac{1-\epsilon}{2}}}\right] \quad \text{per} \quad n \to \infty\,;$$

ed essendo la serie scritta convergente (serie geometrica di ragione < 1) ne segue il teorema.

g) Dimostriamo ora la validità della (14).

Se β_1 e β_2 si mantengono in modulo minori di $n^{1/8}$, per $n \to \infty$, il limite risulta subito verificato, potendosi applicare lo sviluppo asintotico (III)′ di $\mathrm{H}_n(x)$:

$$\mathrm{I}_n = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\cos\left(u\sqrt{2n} + \frac{n\pi}{2}\right)}{u^\epsilon}\, du + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} u^{\frac{1}{2}-\epsilon}\, du\right) =$$

$$= \frac{1}{(2n)^{\frac{1}{2}-\epsilon}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\beta_1\sqrt{2n}}^{\beta_2\sqrt{2n}} \frac{\cos\left(u + \frac{n\pi}{2}\right)}{u^\epsilon}\, du + \mathrm{O}\left\{\frac{\left[u^{\frac{1}{2}-\epsilon}\right]_{\beta_1}^{\beta_2}}{\sqrt{n}}\right\} = o(1) \quad \text{per} \quad n \to \infty\,;$$

si ha lo stesso risultato se β_1 e β_2 si mantengono in modulo maggiori di $\sqrt{kn}$, con $k > 2$, a causa della limitazione (VI) che dà

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{O}\left(\int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}\sigma}}{u^\epsilon}\, du\right) = o(1) \quad \text{per} \quad n \to \infty\,.$$

Possiamo quindi supporre il campo di integrazione di I_n interno all'intervallo $\left(n^{1/8}, \sqrt{kn}\right)$. In tal caso, per il teorema della media si ha

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{n^{\epsilon/8}} \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2^n\, n!}} \int_{\beta_1}^{\beta_2'} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{H}_n(u)\, du = \frac{1}{n^{\epsilon/8}} \mathrm{J}_n\,, \quad \text{con} \quad \beta_2' < \beta_2\,.$$

Noi ora dimostreremo che l'integrale J_n per $n \to \infty$ tende all'infinito dell'ordine di grandezza di $\log n$; così la (14) sarà dimostrata completamente.

Supponiamo n dispari $= 2m + 1$. Allora dalla (13), con procedimento ricorrente, integrando tra β_1 e β_2' si ottiene

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2'} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{H}_{2m+1}(x)\, dx = 2^{m+1}(2m)!! \sum_{p=0}^{m} \frac{1}{2^p (2p)!!} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{H}_{2p}(x)\right]_{\beta_1}^{\beta_2'} =$$

$$= 2^{m+1}(2m)!! \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \left[e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{L}_p^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x^2)\right]_{\beta_1}^{\beta_2'}$$

$$\mathrm{J}_{2m+1} = \sqrt[4]{2m+1} \sqrt{\frac{2(2m)!!}{(2m+1)!!}} \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \left[e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{L}_p^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x^2)\right]_{\beta_1}^{\beta_2'}.$$

Il termine $\sqrt[4]{2m+1}\sqrt{\frac{2(2m)!!}{(2m+1)!!}}$ tende a $\sqrt[4]{2\pi}$ (formula di WALLIS) e quindi è limitato; la sommatoria $S_m(x) = \sum_{p=0}^{m} (-1)^p e^{-\frac{x^2}{2}} L_p^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x^2)$, se si applica la formula

$$e^{-\frac{x}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^{-\frac{x}{2}\frac{1+z}{1-z}}}{(1-z)^{\alpha+1} z^{n+1}} dz \quad ^{7)}$$

in cui c è una curva chiusa qualsiasi, racchiudente l'origine ma non il punto 1, unico punto singolare della funzione generatrice, si può mettere sotto la forma

$$S_m(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^{-\frac{x^2}{2}\frac{1+z}{1-z}}}{\sqrt{1-z}}\left(\sum_0^m \frac{(-1)^p}{z^{p+1}}\right) dz =$$

$$= \frac{(-1)^m}{2\pi i}\int_c \frac{e^{-\frac{x^2}{2}\frac{1+z}{1-z}}}{\sqrt{1-z}\,(1+z)\,z^{m+1}} dz + \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^{-\frac{x^2}{2}\frac{1+z}{1-z}}}{\sqrt{1-z}\,(1+z)} dz.$$

Se la curva c esclude pure il punto -1, allora il secondo integrale è nullo (la funzione integranda è regolare entro il campo racchiuso da c). Prendiamo per tale curva la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, sostituita nell'intorno dei punti ± 1 da due archetti di raggio $\frac{1}{m}$ e centro nei punti stessi, in modo da escluderli. Indichiamo con c_1 e c_2 le due parti (superiore ed inferiore) nelle quali viene ad essere spezzata la circonferenza, con c_3 l'archetto avente il centro nel punto -1 e con c_4 l'archetto avente il centro nel punto $+1$.

Sull'arco c_1 si ha $z = e^{i\vartheta}$, con

$$2 \text{ arc sen} \frac{1}{2m} \leq \vartheta \leq \pi - 2 \text{ arc sen} \frac{1}{2m};$$

$$\left|\frac{e^{-\frac{x^2}{2}\frac{1+z}{1-z}}}{z^{m+1}}\right| = 1, \quad \text{essendo} \quad R\left[\frac{1+z}{1-z}\right] = 0; \left|\frac{1}{(1+z)\sqrt{1-z}}\right| = \frac{1}{2\cos\frac{\vartheta}{2}\sqrt{2\,\text{sen}\frac{\vartheta}{2}}}.$$

Allora l'integrale relativo all'arco c_1 è maggiorato da

7) Tale formula si ottiene esprimendo il coefficiente di z^n dello sviluppo in serie di potenze di z della funzione generatrice $\frac{e^{-\frac{x}{2}\frac{1+z}{1-z}}}{(1-z)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} L_n^{(\alpha)}(x)\cdot z^n$ mediante l'integrale di CAUCHY.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\,\mathrm{arc\,sen}\frac{1}{2m}}^{\pi-2\,\mathrm{arc\,sen}\frac{1}{2m}}\frac{d\vartheta}{2\cos\frac{\vartheta}{2}\sqrt{2\,\mathrm{sen}\frac{\vartheta}{2}}}<\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-2\,\mathrm{arc\,sen}\frac{1}{2m}}\frac{d\vartheta}{2\cos\frac{\vartheta}{2}\sqrt{2\,\mathrm{sen}\frac{\vartheta}{2}}}\leq$$

$$\leq\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-2\,\mathrm{arc\,sen}\frac{1}{2m}}\frac{-d\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)}{\cos\frac{\vartheta}{2}}=O(\log m).$$

La stessa disuguaglianza si dimostra per l'integrale relativo all'arco c_2.

Per c_3 e c_4: si ha $R\left[\frac{1+z}{1-z}\right]>0$ per $|z|<1$, quindi è $\left|e^{-\frac{x^2}{2}\frac{1-z}{1+z}}\right|\leq 1$;
$\frac{1}{|z|^{m+1}}\leq\frac{1}{\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m+1}}\rightarrow e$; inoltre:

su c_3: $\left|\frac{1}{\sqrt{1-z}}\right|<1$, $\left|\frac{1}{1+z}\right|=m$, e l'integrale risulta limitato, essendo l'arco c_3 di lunghezza $<\frac{\pi}{m}$;

su c_4: $\left|\frac{1}{1+z}\right|<1$, $\left|\frac{1}{\sqrt{1-z}}\right|=\sqrt{m}$ e l'integrale tende a zero, essendo l'arco c_4 di lunghezza $<\frac{\pi}{m}$.

Quindi J_n, per n dispari, è dell'ordine di grandezza di $\log n$.

Se è n pari $=2m$, integrando per parti si ottiene

$$J_{2m}=\frac{\sqrt[4]{2m}}{\sqrt{2^{2m}(2m)!}}\int_{\beta_1}^{\beta_2'}e^{-\frac{u^2}{2}}H_{2m}(u)\,du=\frac{\sqrt[4]{2m}}{\sqrt{2^{2m}(2m)!}}\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}H_{2m+1}(u)}{2(2m+1)}\right]_{\beta_1}^{\beta_2'}-\frac{1}{2(2m+1)}\int_{\beta_1}^{\beta_2'}e^{-\frac{u^2}{2}}H_{2m+1}(u)\,u\,du\right\}.$$

Portando fuori del segno d'integrale la funzione monotona u, mediante il teorema della media, e notando che è $\beta_2'\leq\sqrt{2km}$, si ottiene $J_{2m}=O(J_{2m+1})$ e quindi anche per n pari J_n è dell'ordine di grandezza di $\log n$.

Il primo termine dell'ultimo membro tende a zero per $m\rightarrow\infty$, a causa della (IV).

5. Calcoliamo ora, come esempio, gli sviluppi in serie delle funzioni $e^{\frac{x^2}{2}}$, $e^{\frac{x^2}{2}}\cos x$, i quali per il criterio *c*) convergono uniformemente, in ogni intervallo finito, alle funzioni stesse.

a) Per la funzione $e^{\frac{x^2}{2}}$ si ha

$$e^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{2^n\, n!\, \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} H_n(u)\, du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n}(x)}{2^{2n}\,(2n)!\, \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} H_{2n}(u)\, du$$

essendo $H_n(u)$ dispari per n dispari.

Utilizzando la relazione (13)′ si ottiene

$$e^{\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n\,(2n)!} H_{2n}(x) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{H_{2n}(0)\, H_{2n}(x)}{2^{2n}\,(2n)!}$$

che è lo sviluppo cercato.

b) Sviluppo della funzione $e^{\frac{x^2}{2}} \cos x$:

$$e^{\frac{x^2}{2}} \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{2^n\, n!\, \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} H_n(u) \cos u\, du.$$

I termini di indice dispari sono nulli, essendo $\cos u$ pari.

Calcoliamo l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} H_n(u) \cos u\, du\,;$$

esso è il coefficiente di $\frac{z^n}{n!}$ dello sviluppo in serie di potenze di z della funzione

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} H_n(u) \cos u\, du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2} - z^2 - 2uz} \cos u\, du =$$

$$= e^{z^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(u+2z)^2}{2}} \cos u\, du = e^{z^2} \cos 2z \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos t\, dt = \sqrt{\frac{2\pi}{e}}\, e^{z^2} \cos 2z.$$

Sviluppando in serie di potenze di z abbiamo

$$\varphi(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{e}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{e}} \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \frac{1}{p!\,(2n-2p)!}\, 2^{2n-2p}$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} H_{2n}(u) \cos u\, du = \sqrt{\frac{2\pi}{e}} (-1)^n \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{(2n)!}{p!\,(2n-2p)!}\, 2^{2n-2p} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{e}} (-1)^n H_{2n}(1)$$

essendo la sommatoria del secondo membro l'espressione del polinomio $H_{2n}(x)$, calcolata per $x = 1$. Quindi

$$e^{\frac{x^2}{2}} \cos x = \sqrt{\frac{2}{e}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{H_{2n}(1)\, H_{2n}(x)}{2^{2n}(2n)!}.$$

In modo analogo si trova

$$e^{\frac{x^2}{2}} \operatorname{sen} x = \sqrt{\frac{2}{e}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{H_{2n+1}(1)\, H_{2n+1}(x)}{2^{2n+1}(2n+1)!}.$$

§ 2: Integrabilità delle serie di Hermite.

6. M. Jacob [8] ha dimostrato il seguente teorema di integrazione per serie: data una funzione $f(x)$ definita in $(-\infty, \infty)$, integrabile in ogni intervallo finito e tale che sia convergente l'integrale

$$(15) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{u^2}{2}}}{1+|u|} |f(u)|\, du$$

e considerata la sua serie di Hermite di tipo A (secondo Charlier)

$$(16) \qquad f(x) \sim \sum_{0}^{\infty} \frac{e^{-x^2} H_n(x)}{2^n\, n!\, \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, H_n(u)\, du$$

si ha che questa serie è integrabile termine a termine tra $-\infty, \bar{x}$ e che la somma vale proprio l'integrale di $f(x)$

$$(16)' \qquad \int_{-\infty}^{\bar{x}} f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\bar{x}} e^{-x^2} H_n(x)\, dx \frac{1}{2^n\, n!\, \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, H_n(u)\, du,$$

la convergenza risultando uniforme in ogni tratto finito.

Questo criterio può essere migliorato, utilizzando per $H_n(x)$ le disuguaglianze trovate. E precisamente, *alla condizione* (15) *può sostituirsi una delle seguenti*:

$$(15)_1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{u^2}{2}}}{1+|u|^{5/3}} |f(u)|\, du \text{ convergente}; \qquad (15)_2 \quad f(x) = o\left(e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot |x|\right)$$

per $|x| \to \infty$.

8) M. Jacob, « Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari », 1931, n. 3. Egli considera i polinomi di Hermite definiti dalla relazione $\overline{H}_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$ e bisogna far quindi i dovuti cambiamenti; inoltre considera l'integrale di Stieltjes.

Quindi per il risultato citato nel n. 3, si può affermare che esistono delle funzioni il cui sviluppo in serie di HERMITE non è convergente, ma che integrato termine a termine converge all'integrale della funzione stessa.

Per la dimostrazione consideriamo la somma parziale n-esima della serie (16)'

$$S_n(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du \int_{-\infty}^{\bar{x}} e^{-x^2} S_n^{(o)}(x, u)\, dx$$

in cui si è posto, secondo il solito,

$$S_n^{(o)}(x, u) = \sum_{\infty}^{n} \frac{H_m(x) H_m(u)}{2^m m! \sqrt{\pi}} = \frac{H_{n+1}(x) H_n(u) - H_n(x) H_{n+1}(u)}{2^{n+1} n! (u - x) \sqrt{\pi}}. \tag{4}$$

Indicando con X un numero grande ad arbitrio, maggiore del modulo del valore $\bar{x}$ considerato o degli estremi dell'intervallo in cui varia $\bar{x}$, possiamo scrivere

$$S_n(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{-X} f(x)\, du \int_{-\infty}^{\bar{x}} e^{-x^2} S_n^{(o)}(x, u)\, dx + \int_{-X}^{X} + \int_{X}^{\infty} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Consideriamo l'integrale contenuto nella funzione integranda di I_1

$$\int_{-\infty}^{\bar{x}} e^{-x^2} S_n^{(o)}(x, u)\, dx = 1 - \int_{\bar{x}}^{\infty} e^{-x^2} S_n^{(o)}(x, u)\, dx.$$

Se poniamo in I_1 l'espressione del secondo membro, il termine $\int_{-\infty}^{-X} f(x)\, du$ si può rendere piccolo a piacere, prendendo X arbitrariamente grande; nel secondo integrale gli intervalli di variabilità della $x : \bar{x}, \infty$, e della $u : -\infty, -X$ non hanno punti a comune.

Sostituendo a $S_n^{(o)}$ la (4), si ha

$$\int_{\bar{x}}^{\infty} e^{-x^2} S_n^{(o)}(x, u)\, dx = \frac{H_n(u)}{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}} \int_{\bar{x}}^{\infty} \frac{e^{-x^2} H_{n+1}(x)}{u - x}\, dx -$$

$$- \frac{H_{n+1}(u)}{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}} \int_{\bar{x}}^{\infty} \frac{e^{-x^2} H_n(x)}{u - x}\, dx.$$

Integrando per parti si ha ad esempio per il primo integrale

$$\int_{\bar{x}}^{\infty} \frac{e^{-x^2} H_{n+1}(x)}{u - x}\, dx = - \frac{e^{-\bar{x}^2} H_n(\bar{x})}{u - \bar{x}} - \int_{\bar{x}}^{\infty} \frac{e^{-x^2} H_n(x)}{(u - x)^2}\, dx$$

e maggiorando il primo termine mediante la (II) ed il secondo mediante le (II), (IV), (spezzando l'integrale in due parti, mediante il punto $\sqrt{n}$), si ha, per $n \to \infty$ e per $|u|$ sufficientemente grande,

$$\int_{\bar{x}}^{\infty} e^{-x^2} S_n^{(0)}(x, u)\, dx = O \left\{ \frac{|H_n(u)|}{|u| \sqrt{2^n n!} \sqrt[4]{n}} + \frac{|H_{n+1}(u)|}{|u| \sqrt{2^{n+1}(n+1)!} \sqrt[4]{n}} \right\}.$$

Sostituendo questa maggiorazione in I_1, in cui spezziamo l'intervallo di integrazione in due parti mediante il punto $-2\sqrt{n}$, ed utilizzando nel primo intervallo la (VI) e nel secondo la (IV), risulta

$$I_1 = O\left(\int_{-\infty}^{-2\sqrt{n}} |f(u)| \frac{e^{\frac{u^2}{2}(1-\sigma)}}{|u|} du \right) + O\left(\int_{-2\sqrt{n}}^{-X} |f(u)| \frac{e^{\frac{u^2}{2}}}{|u|\, n^{1/3}} du \right) + o(1)$$

e quindi per la $(15)_1$ risulta, per X arbitrariamente grande,

$$I_1 = o(1) \qquad \text{per} \quad n \to \infty.$$

Se invece spezziamo l'intervallo $(-\infty, -X)$ con i punti a_i di (β), in modo da utilizzare le varie disuguaglianze trovate per i polinomi di HERMITE, e teniamo conto della $(15)_2$, analogamente a quanto abbiamo fatto nel primo criterio di convergenza per le serie di HERMITE, risulta

$$I_1 = o(1) \qquad \text{per} \quad n \to \infty.$$

Ragionando in modo analogo per I_3, si ha che valendo una qualsiasi delle (15) risulta, per $n \to \infty$,

$$S_n(\bar{x}) = \int_{-X}^{X} f(u)\, du \int_{-\infty}^{\bar{x}} e^{-x^2} S_n^{(0)}(x, u)\, dx + o(1).$$

Nell'integrale rispetto ad u i limiti sono finiti; allora passando al limite per $n \to \infty$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} S_n(\bar{x}) = \int_{-X}^{X} f(u)\, du \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\bar{x}} e^{-x^2} S_n^{(0)}(x, u)\, dx = \int_{-X}^{\bar{x}} f(u)\, du$$

essendo

17) $$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\bar{x}} e^{-x^2} S_n^{(0)}(x, u)\, dx \begin{cases} = 0 & (u > \bar{x}) \\ = \frac{1}{2} & (u = \bar{x}) \text{ [9]}. \\ = 1 & (u < \bar{x}) \end{cases}$$

9) Vedi E. KOGBETLIANTZ, loc. cit. 3), pp. 182-183.

L'inversione dei simboli di integrale e limite è lecita, esistendo il limite dell'espressione detta, per un corollario del teorema di VITALI sull'integrazione per serie.

Ma X è arbitrariamente grande, ossia è

$$\left| \int_{-X}^{\bar{x}} f(u)\, du - \int_{-\infty}^{\bar{x}} f(u)\, du \right| \leq \varepsilon$$

con $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere; quindi

$$\lim_{n \to \infty} S_n(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{\bar{x}} f(u)\, du$$

ed il teorema risulta così dimostrato.

§ 3: SOMMABILITÀ DELLE SERIE DI HERMITE CON LE MEDIE DEL CESARO.

7. Ricordiamo: data una serie: $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, convergente o no, si dice che essa è sommabile (C, δ) quando esiste il limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{A_n^{(\delta)}} \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta)} u_m$$

in cui è

$$A_n^{(\delta)} = \binom{n+\delta}{n} = \frac{\Gamma(n+\delta+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\delta+1)} \sim \frac{n^\delta}{\Gamma(\delta+1)}$$

con δ numero reale maggiore di -1.

Se una serie è sommabile (C, δ), è sommabile (C, b) con $b < \delta$.

Il problema della sommabilità delle serie di HERMITE con le medie del CESARO è stato già studiato da KOGBETLIANTZ, che ha dato il seguente criterio:

In ogni punto di continuità o di discontinuità di prima specie della funzione $f(x)$, integrabile in ogni intervallo finito, la serie di HERMITE (3) è sommabile (C, δ), $\delta \geq 0$, con somma

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$$

purchè esista finito l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} |f(u)| \frac{du}{1 + |u|^{1+2\delta}} \quad (18)$$

[10].

10) E. KOGBETLIANTZ, loc. cit. 3), p. 180.

Per $\delta = 0$ si ha il criterio di convergenza già detto.

Nella dimostrazione il KOGBETLIANTZ usa la disuguaglianza [15] in tutto l'intervallo $(0, \infty)$ mentre abbiamo visto che essa non è vera; occorre quindi correggere la condizione (18), analogamente a quanto abbiamo fatto per il criterio di convergenza.

Si ottiene in tal modo il seguente criterio:

In ogni punto di continuità o di discontinuità di prima specie della funzione $f(x)$, integrabile in ogni intervallo finito, la serie di Hermite (3) *è sommabile* (C, δ), $\delta \geqq 0$, *con somma*

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$$

purchè esista finito l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} |f(u)| \frac{du}{1+|u|^{2\delta+\frac{2}{3}}} \tag{18$_1$}$$

oppure purchè l'ordine di grandezza di $f(u)$ per $|u| \to \infty$ sia

$$f(u) = o\left(e^{\frac{u^2}{2}} \cdot |u|^{2\delta}\right) \qquad (|u| \to \infty). \tag{18$_2$}$$

Richiamo brevemente la dimostrazione del KOGBETLIANTZ, correggendola come si è detto.

La somma (C, δ) della somma parziale n-esima della serie (3) è

$$f_n^{(\delta)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} f(u) \, S_n^{(\delta)}(x, u) \, du \tag{19}$$

con:

$$S_n^{(\delta)}(x, u) = \frac{1}{A_n^{(\delta)}} \sigma_n^{(\delta)}(x, u) = \frac{1}{A_n^{(\delta)}} \sum_{m=0}^{n} A_{n-m}^{(\delta)} \frac{H_m(x) H_m(u)}{2^m m! \sqrt{\pi}}. \tag{20}$$

Di $\sigma_n^{(\delta)}(x, u)$ esistono la seguente espressione assintotica:

$$\sigma_n^{(\delta)}(x, u) = \frac{e^{\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} L_n^{\left(\delta+\frac{1}{2}\right)}(d^2) \left[1 + O\left(\frac{d}{\sqrt{n}}\right)\right] + \tag{21}$$

$$+ (-1)^n \frac{e^{\frac{d^2}{2}}}{2^{\delta+\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}} L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(s^2) \left[1 + O\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

con

$$2d^2 = (u-x)^2 \quad ; \quad 2s^2 = (u+x)^2$$

e la seguente espressione esatta [11]:

$$\text{(22)} \qquad \sigma_n^{(\delta)}(x,u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} L_m^{\left(\delta+\frac{1}{2}\right)}(d^2) \cdot L_{n-m}^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(s^2).$$

Maggiorando la (22) mediante la [21], si ottiene

$$(22)_1 \qquad S_n^{(\delta)}(x,u) = O\left(e^{\frac{d^2+s^2}{2}(1-a)}\right) = O\left(e^{\frac{u^2}{2}(1-a)}\right)$$

relazione valida per x finito e per $d^2, s^2 \geqq k_1 n$, con $k_1 > 4$, cioè per $|u| \geqq \sqrt{kn}$ con $k > 2$.

La (21), se consideriamo la condizione $(18)_1$, può essere maggiorata per x finito ed $x + \varepsilon \leqq u \leqq \sqrt{2n(1-a)}$ $(0 < a < 1)$, dove ε è un numero arbitrario > 0, mediante la [18]:

$$(21)_1 \qquad S_n^{(\delta)}(x,u) = O\left\{\frac{|\sigma_n^{(\delta)}(x,u)|}{n^\delta}\right\} = O\left\{\frac{e^{\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{n^\delta}} \frac{1}{|u-x|^{\delta+1}}\right\}$$

e per x finito e $\sqrt{2n(1-a)} \leqq |u| \leqq \sqrt{kn}$ mediante la [19]:

$$(21)_2 \qquad S_n^{(\delta)}(x,u) = O\left(\frac{e^{\frac{u^2}{2}}}{n^{\delta+\frac{1}{2}}}\right).$$

Mediante tali formule si dimostrano allora, nell'ipotesi che valga la condizione $(18)_1$, le limitazioni

$$\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} e^{-u^2} f(u)\, S_n^{(\delta)}(x,u)\, du = o(1) \quad ; \quad \int_{x+\varepsilon}^{\infty} = o(1).$$

Se consideriamo invece la condizione $(18)_2$ si dimostrano queste stesse limitazioni spezzando gli intervalli $(x+\varepsilon, \sqrt{kn})$, $(-\sqrt{kn}, x-\varepsilon)$ nei vari intervalli

11) Kogbetliantz, loc. cit. (3), form. (60) e quella che segue la (63).

Se x, n sono limitate, la (21) prende la seguente forma, facile a ricavare dalla dimostrazione del Kogbetliantz

$$(21') \qquad \sigma_n^{(\delta)}(x,u) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} L_n^{\left(\delta+\frac{1}{2}\right)}(d^2) + f(n,\delta)$$

dove $f(n,\delta)$ è una funzione avente l'ordine di grandezza non superiore a quello della più piccola delle funzioni: $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{n^{\frac{\delta-1}{2}}}{|d|^\delta}$, come si ricava maggiorando i termini della (21), fuorchè il primo, con la [15] e la [21'].

di validità delle limitazioni [18], [19], [20] e procedendo in modo analogo a quanto abbiamo fatto per correggere il criterio di KOGBETLIANTZ per la convergenza della serie (3).

Così in ambedue i casi si ottiene

$$f_n^{(\delta)}(x) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(u)\, e^{-u^2} S_n^{(\delta)}(x, u)\, du + o(1).$$

Ma dal limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2} S_n^{(\delta)}(x, u)\, du = \lim_{n\to\infty} \int_{x}^{\infty} e^{-u^2} S_n^{(\delta)}(x, u)\, du = \frac{1}{2}\ ^{12)}. \tag{23}$$

si ricava facilmente, per un punto x di continuità o di discontinuità di prima specie di $f(x)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} e^{-u^2} f(u)\, S_n^{(\delta)}(x, u)\, du = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2};$$

il teorema risulta così dimostrato.

8. Nel caso in cui si studi la sommabilità (C, δ), con δ intero > 0, si possono facilmente estendere i criteri dati ai nn. 4) e 6), utilizzando la relazione del KOGBETLIANTZ

$$\sigma_n^{(\delta)}(x, u) = \frac{G_n^{(\delta+1)}(x, u)}{[2(u-x)]^{\delta+1}} - \sum_{m=1}^{\left[\frac{\delta+1}{2}\right]} \frac{c_{\delta, m}\, \sigma_n^{(\delta-m)}(x, u)}{[2(u-x)]^{2m}}\ ^{13)} \tag{24}$$

con

$$G_n^{(k)}(x, u) = \frac{1}{2^n\, n!\, \sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} H_{n+k-i}(x) \cdot H_{n+i}(x), \tag{24'}$$

$$c_{\delta, m} = \frac{(-2)^m\, \Gamma(\delta+2)}{m!\, \Gamma(\delta-2m+2)}\ ^{14)}.$$

Così, per es., al criterio c) corrisponde il seguente criterio:

Se la funzione $f(x)$ è definita nell'intervallo $(-\infty, \infty)$, derivabile, e soddisfa le seguenti condizioni:

$$(25)_1 \quad f(x) = o\left(x^{2\delta+\frac{1}{3}}\right) \qquad (25)_2 \quad f'(x) = o\left(x^{2\delta+1}\right) \quad \text{per } |x| \to \infty,$$

12) Vedi la (17).

13) $\left[\frac{\delta+1}{2}\right]$ indica il massimo intero contenuto in $\frac{\delta+1}{2}$.

14) KOGBETLIANTZ, loc. cit. 3), form. (70).

allora la serie di Hermite (2) *di tipo h ha la somma* (C, δ) *convergente a* $f(x)$, *uniformemente in ogni intervallo finito.*

Siccome il termine $\int_{-a}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}} f(u)\, S_n^{(\delta)}(x, u)\, du$, con a arbitrariamente grande, converge uniformemente a $f(x)$ in ogni intervallo interno a $(-a, a)$, rappresentando la somma (C, δ) di $\int_{-a}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}} f(u)\, S_n^{(0)}(x, u)\, du$, così basta dimostrare che il termine

$$I_n = \frac{1}{A_n^{(\delta)}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} f(u)\, \sigma_n^{(\delta)}(x, u)\, du$$

tende a zero uniformemente per $n \to \infty$.

Sostituendo l'espressione (24) a $\sigma_n^{(\delta)}(x, u)$, e ancora di nuovo ai $\sigma_n^{(\delta - m)}$ fino ad ottenere i termini $\sigma_n^{(0)}(x, u)$, il termine I_n viene ad esser formato dal termine principale

$$\frac{1}{A_n^{(\delta)}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} f(u) \frac{G_n^{(\delta+1)}(x, u)}{[2(u - x)]^{\delta+1}}\, du =$$

$$= \frac{1}{2^n\, n!\, \sqrt{\pi}\, A_n^{(\delta)}} \sum_{i=0}^{\delta+1} (-1)^i \binom{\delta+1}{i} H_{n+i}(x) \int_a^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}} f(u)\, H_{n+\delta+1-i}(u)}{[2(u - x)]^{\delta+1}}\, du$$

più la somma di un numero finito di termini del tipo

$$\frac{1}{A_n^{(\delta)}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} f(u) \frac{G_n^{(\delta+1-m)}(x, u)}{[2(u - x)]^{\delta+1+m+k}}\, du \qquad \text{con} \quad 0 \leq k$$

più la somma di un numero finito di termini del tipo

$$\frac{1}{A_n^{(\delta)}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} f(u) \frac{\sigma_n^{(0)}(x, u)}{[2(u - x)]^{2\delta+k}}\, du \qquad \text{con} \quad 0 \leq k.$$

Questi ultimi termini tendono a zero per $n \to \infty$ e la tendenza a zero è uniforme al variare di x in un intervallo finito: infatti essi diventano, per il secondo teorema della media applicato alla funzione monotona e decrescente (se supponiamo $x > 0$) $\left(\frac{u}{u - x}\right)^{2\delta+k}$,

$$\left(\frac{a}{a - x}\right)^{2\delta+k} \frac{1}{A_n^{(\delta)}} \int_a^{b} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{f(u)}{u^{2\delta+k}}\, \sigma_n^{(0)}(x, u)\, du \qquad \text{con} \quad a < b$$

e l'integrale tende a zero per $n \to \infty$, come è stato dimostrato nel criterio c) del n. 4 applicato alla funzione $f_1(u) = \frac{f(u)}{u^{2\delta+1}} = o(u^{1/3})$; $f_1(u) = o(x)$; inoltre è $\frac{1}{A_n^{(\delta)}} \cong \frac{\delta!}{n^\delta} = o(1)$.

Il termine i–esimo della somma che forma il termine principale, se x varia in un intervallo finito, è maggiorato uniformemente, mediante la (I) applicata a $H_{n+i}^{(x)}$, da

$$A \frac{\sqrt[4]{n+\delta+1-i}}{\sqrt{2^{n+\delta+1-i}(n+\delta+1-i)!}} \frac{1}{\sqrt{n^\delta}} \left| \int_a^\infty \frac{e^{-\frac{u^2}{2}} f(u) H_{n+\delta+1-i}(u)}{[2(u-x)]^{\delta+1}} du \right|$$

in cui è A una opportuna costante.

Si spezzi questo termine in due parti mediante il punto di divisione $\sqrt{k_1 n}$ ($k_1 > 2$) nell'integrale. Nel secondo termine si può usare per $H_{n+\delta+1-i}(u)$ la limitazione (VI), ottenendo la maggiorazione

$$O\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^\delta}} \int_{\sqrt{k_1 n}}^\infty e^{-\frac{\alpha u^2}{2}} \frac{|f(u)|}{u^{\delta+1}} du \right\} = o(1).$$

Anche il primo termine tende a zero, come è stato dimostrato nel criterio c) applicato alla funzione $f_2(u) = \frac{f(u)}{u^{2\delta}} = o(u^{1/3})$: infatti per il secondo teorema della media si ha

$$A \frac{\sqrt[4]{n+\delta+1-i}}{\sqrt{2^{n+\delta+1-i}(n+\delta+1-i)!}} \frac{1}{\sqrt{n^\delta}} \int_a^{\sqrt{k_1 n}} e^{-\frac{u^2}{2}} f_2(u) \frac{u^{2\delta}}{[2(u-x)]^{\delta+1}} H_{n+\delta+1-i}(u)\, du =$$

$$= \frac{A}{2} \sqrt{k_1^\delta} \left[\frac{\sqrt{k_1 n}}{2(\sqrt{k_1 n} - x)} \right]^\delta \cdot \frac{\sqrt[4]{n+\delta+1-i}}{\sqrt{2^{n+\delta+1-i}(n+\delta+1-i)!}} \int_{a+\xi}^{\sqrt{k_1 n}} e^{-\frac{u^2}{2}} f_2(u) \frac{H_{n+\delta+1-i}(u)}{u-x} du.$$

Così il termine principale, somma di un numero finito di questi termini, tende a zero per $n \to \infty$ e a maggior ragione tendono a zero gli altri termini non considerati. Il teorema risulta così dimostrato.

9. Limitiamoci ad enunciare il criterio corrispondente al criterio f): *Una funzione* $f(x)$, *definita in* $(-\infty, \infty)$ *ed integrabile in ogni intervallo finito ha lo sviluppo in serie di Hermite* (2) *di tipo h sommabile* (C, δ) (δ *intero* > 0) *con somma* $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ *in ogni punto di continuità o di discontinuità di* 1ª *specie di* $f(x)$ *se per* $|x| \geq a$, *con a arbitrariamente grande, è monotona e dell'ordine di grandezza al più di* $x^{2\delta+\alpha}$, *con* $\alpha < 1$.

10. Ci siamo finora occupati, nello studio della convergenza o della sommabilità del CESARO dello sviluppo in serie di HERMITE di una funzione $f(x)$, soprattutto delle condizioni all'infinito della $f(x)$: nell'intorno del punto in cui si somma la serie abbiamo finora supposto l'esistenza dei limiti

$$f(x+0) \quad , \quad f(x-0) .$$

Vediamo se tali ipotesi possono essere estese o sostituite da altre.

Per la convergenza, si ha l'equivalenza tra serie di HERMITE e serie trigonometrica di FOURIER della funzione $f(x)$ (nelle condizioni al finito); quindi, per esempio, posto

$$\varphi(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2\,\Phi(x_0)$$

in cui $\Phi(x_0)$ è un opportuno valore, se si ha

$$\lim_{h \to \infty} \frac{1}{h} \int_0^h |\varphi(t)|\, dt = 0 , \tag{27}$$

$$\lim_{h \to \infty} \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{t} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{h}\, dt = 0 \tag{28}$$

ed è soddisfatta una qualsiasi delle condizioni all'infinito che abbiamo dato, la serie di HERMITE calcolata per $x = x_0$ converge a $\Phi(x_0)$ [15].

11. Se si studia invece la sommabilità (C, δ), $\delta > 0$, non si ha più l'equivalenza delle condizioni al finito; però, analogamente a quanto avviene nelle serie trigonometriche, vale il seguente teorema:

Data la funzione $f(x)$, definita in $(-\infty, \infty)$ ed integrabile in ogni intervallo finito, sia soddisfatta una qualsiasi delle condizioni all'infinito (per es. sia

$$f(x) = o\left(e^{\frac{u^2}{2}} |u|^{2\delta}\right) \qquad \text{per} \quad |u| \to \infty \quad \text{e per un valore} \quad \delta > 0);$$

inoltre in un punto x sia soddisfatta la condizione (27); *allora la serie di* HERMITE (3) *di $f(x)$ è sommabile* (C, δ) *nel punto detto e la sua somma vale* $f(x)$ [16].

15) Vedi, per. es., TONELLI, *Serie Trigonometriche*, Bologna, Zanichelli, 1928; *Teorema di Lebesgue*, pag. 287.

16) Tale teorema per $\delta = 1$ è stato dimostrato da KOROUS («Rozpr. Ceskè Akad.», t. 37, 1928) secondo il quale quindi l'ipotesi (27) assicura la sommabilità $(C, 1)$ della serie di HERMITE, mentre essa, come ora dimostriamo, assicura la sommabilità (C, δ) con $\delta > 0$ qualsiasi.

Per quanto abbiamo detto, indicata con $f_n^{(\delta)}(x)$ la somma (C,δ) della somma parziale n-esima della serie di HERMITE di $f(x)$, si ha, per $n \to \infty$,

$$f_n^{(\delta)}(x) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} e^{-u^2} f(u)\, S_n^{(\delta)}(x, u)\, du + o(1).$$

Inoltre si ha, come sappiamo,

$$1 = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} e^{-u^2} S_n^{(\delta)}(x, u)\, du + o(1)$$

e quindi

$$f_n^{(\delta)}(x) - \Phi(x) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} e^{-u^2} [f(u) - \Phi(x)]\, S_n^{(\delta)}(x, u)\, du + o(1) =$$

$$= \int_0^{\varepsilon} e^{-(x+u)^2} [f(x+u) - \Phi(x)]\, S_n^{(\delta)}(x, x+u)\, du +$$

$$+ \int_0^{\varepsilon} e^{-(x-u)^2} [f(x-u) - \Phi(x)]\, S_n^{(\delta)}(x, x-u)\, du + o(1).$$

Bisogna dimostrare che la somma di questi due integrali tende a 0 per $n \to \infty$.

Osserviamo innanzi tutto che si può scrivere

$$D = \left| \int_0^{\varepsilon} [f(x-u) - \Phi(x)] [e^{-(x-u)^2} - e^{-(x+u)^2}]\, S_n^{(\delta)}(x, x-u)\, du \right| \leq$$

$$\leq a \int_0^{\varepsilon} u\, |f(x-u) - \Phi(x)| \cdot |S_n^{(\delta)}(x, x-u)|\, du.$$

Ma per la (21)', e per la [21]': $L_n^{(\alpha)}(x) = o(n^\alpha)$ valida per $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ e per x limitato si ricava

(29)$_1$ $$|S_n^{(\delta)}(x, u)| \leq T\sqrt{n} \qquad \text{per } x, u \text{ finiti;}$$

dalla (21)' e dalla [15] si ricava

(29)$_2$ $$|S_n^{(\delta)}(x, x-u)| \leq \frac{T'}{\sqrt{n^\delta}\, u^{\delta+1}}\ ; \ |S_n^{(\delta)}(x, x+u)| \leq \frac{T'}{\sqrt{n^\delta}\, u^{\delta+1}} \qquad \text{per } x, u \text{ finiti,}$$

dove T e T' sono delle opportune costanti.

Allora si ha

$$D \leq Ta\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} u\,|f-\Phi|\,du + \tag{30}$$

$$+\frac{T'a}{\sqrt{n^\delta}}\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\varepsilon}\frac{|f-\Phi|}{u^\delta}\,du \leq Ta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}|f-\Phi|\,du + T'a\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\varepsilon}|f-\Phi|\,du$$

e questo termine si può rendere piccolo a piacere, prendendo ε abbastanza piccolo.

Inoltre si ha, dalla (21)',

$$S_n^{(\delta)}(x,x+u)-S_n^{(\delta)}(x,x-u)=O\left\{\frac{1}{n^\delta}\left[\left|e^{\frac{(2x+u)^2}{4}}-e^{\frac{(2x-u)^2}{4}}\right|\cdot\left|L_n^{\left(\delta+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right|+f(n,\delta)\right]\right\}=$$

$$=O\left\{\frac{1}{n^\delta}\left[u\left|L_n^{\left(\delta+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right|+|f(n,\delta)|\right]\right\}$$

e per la [21]'

$$S_n^{(\delta)}(x,x+u)-S_n^{(\delta)}(x,x-u)=O\left(u\sqrt{n}\right)$$

per qualsiasi valore finito di u; inoltre per la [15]

$$S_n^{(\delta)}(x,x+u)-S_n^{(\delta)}(x,x-u)=O\left(\frac{1}{\sqrt{n^\delta u^\delta}}\right).$$

Allora

$$\int_0^{\varepsilon} e^{-(u+x)^2}[f(x-u)-\Phi(x)]\cdot[S_n^{(\delta)}(x,x+u)-S_n^{(\delta)}(x,x-u)]\,du=$$

$$=O\left(\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}u\,|f-\Phi|\,du+\frac{1}{\sqrt{n^\delta}}\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\varepsilon}\frac{|f-\Phi|}{u^\delta}\,du\right)=o(1).$$

Questa relazione e la (30) ci dicono che la differenza tra i due termini

$$\int_0^{\varepsilon} e^{-(u-x)^2}\,[f(x-u)-\Phi(x)]\,S_n^{(\delta)}(x,x-u)\,du \quad ,$$

$$\int_0^{\varepsilon} e^{-(u+x)^2}\,[f(x-u)-\Phi(x)]\,S_n^{(\delta)}(x,x+u)\,du$$

si può rendere piccola a piacere; quindi possiamo scrivere

$$f_n^{(\delta)}(x)-\Phi(x)=\int_0^{\varepsilon} e^{-(u+x)^2}\,\varphi(u)\,S_n^{(\delta)}(x,x+u)\,du+o(1).$$

Mediante le (29) si ricava

$$f_n^{(\delta)}(x) - \Phi(x) = O\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} |\varphi(u)| \cdot |S_n^{\delta}(x, x+u)|\, du + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\varepsilon} |\varphi(u)| \cdot |S_n^{(\delta)}(x, x+u)|\, du\right) + o(1) =$$

$$= O\left(\sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} |\varphi(u)|\, du + \frac{1}{\sqrt{n^{\delta}}} \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\varepsilon} \frac{|\varphi(u)|}{u^{\delta+1}}\, du\right) + o(1).$$

Per la (27), quando $n \to \infty$, il primo termine tende a o; inoltre, integrando per parti il secondo integrale, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{n^{\delta}}} \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\varepsilon} \frac{|\varphi(u)|}{u^{\delta+1}}\, du = \frac{1}{\sqrt{n^{\delta}}} \left[\frac{\psi(u)}{u^{\delta+1}}\right]_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\varepsilon} + \frac{\delta+1}{\sqrt{n^{\delta}}} \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\varepsilon} \frac{\psi(u)}{u^{\delta+2}}\, du$$

in cui si è posto $\psi(u) = \int_0^u |\varphi(u)|\, du$.

Ma è $\frac{\psi(u)}{u} = o(1)$ per $u \to 0$; quindi il primo termine tende a o per $n \to \infty$; inoltre, indicando con $k(\varepsilon)$ il massimo di $\frac{\psi(u)}{u}$ in $(0, \varepsilon)$, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{n^{\delta}}} \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\varepsilon} \frac{\psi(u)}{u^{\delta+2}}\, du \leq \frac{k(\varepsilon)}{\sqrt{n^{\delta}}} \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\varepsilon} \frac{du}{u^{\delta+1}} = k(\varepsilon)\left[\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta \varepsilon^{\delta} \sqrt{n^{\delta}}}\right].$$

Quindi risulta, essendo $k(\varepsilon) = o(1)$ per $\varepsilon \to 0$,

$$f_n^{(\delta)}(x) - \Phi(x) = o(1) \quad \text{per} \quad n \to \infty, \quad \text{cioè} \ \lim_{n \to \infty} f_n^{(\delta)}(x) = \Phi(x) \quad \text{c. v. d.}$$

L'ipotesi che sia $\delta > 0$ l'abbiamo utilizzata nell'integrazione di $\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\varepsilon} \frac{du}{u^{\delta+1}}$: per $\delta = 0$ infatti si otterrebbe $\log u$ e $k(\varepsilon) \log \frac{1}{\sqrt{2n}}$ tende all'infinito per $n \to \infty$.