

*Relazione sul conferimento del premio di matematica per l'anno 1925,
presentata dalla Commissione composta dei Soci: L. BIANCHI,
V. VOLTERRA e T. LEVI-CIVITA (relatore).*

L'attenzione della Commissione si è subito fissata sulle belle ricerche di geometria differenziale compiute nell'ultimo quinquennio dal prof. ENRICO BOMPIANI della R. Università di Bologna.

Anteriormente al quinquennio il BOMPIANI aveva studiato gli intorni differenziali d'ordine superiore al primo delle superficie e delle varietà rilevandone notevoli proprietà proiettive e collegandole alla teoria delle equazioni lineari alle derivate parziali. Questi studi egli ha ripreso recentemente traendo partito dalla nuova e completa teoria dell'applicabilità proiettiva delle superficie stabilita dal FUBINI, con cui tutto viene ricondotto all'analisi invariante di un certo numero di forme differenziali.

Sono penetranti e pregevoli i contributi del BOMPIANI tendenti a riconoscere il significato geometrico di queste forme e di altri enti ad esse subordinati, in particolare dell'elemento lineare proiettivo di FUBINI e della normale proiettiva da lui introdotta.

Tuttavia anche più cospicui appaiono i risultati conseguiti dal BOMPIANI durante il periodo in esame, nell'indirizzo metrico classico. Tali risultati si trovano ben lumeggiati nella memoria *Studi sugli spazi curvi*, inserita fra gli Atti del R. Istituto Veneto (T. LXXX, 1920-21, pp. 355-386, 859-859, 1113-1145) che la vostra Commissione propone di premiare.

L'autore vi ha ripreso con vedute originali lo studio delle varietà a due e a più dimensioni immerse in un assegnato spazio riemanniano V_n . In primo luogo, dato un punto P, un secondo punto vicinissimo P' e una direzione u uscente da P, egli considera la parallela u' ad u nel punto P', definita con riguardo allo spazio V_n , o *parallela ambientale*, nonchè la parallela superficiale u'_s costruita sulla superficie geodetica σ di polo P, che contiene la giacitura (PP' u).

Si sa (teorema di SEVERI) che u' e u'_s differiscono per infinitesimi d'ordine superiore al primo rispetto allo spostamento elementare PP'. Il BOMPIANI indaga il divario di secondo ordine mostrando che esso è caratterizzabile associando a K (curvatura gaussiana della superficie geodetica σ) un nuovo invariante J, il quale dipende dai simboli di Riemann di V_n in P, nonchè dalla giacitura (PP' u) e dalla direzione di trasporto PP'. Il comportamento di J in funzione della giacitura e della direzione suddette è illustrato geometricamente con grande

semplicità e fa naturalmente apparire come meritevoli di speciale considerazione quegli spazi V_n , in cui J risulta indipendente dalla direzione PP' ed eguale a K^2 qualunque sia la giacitura. Per questi spazi la coincidenza di u' e di u'' si estende al secondo ordine; proprietà interessante sotto l'aspetto geometrico ma che acquista ben maggiore rilievo quando si tenga conto delle condizioni esplicite equivalenti all'eguaglianza comprensiva $J=K^2$ per qualsiasi giacitura.

Tali condizioni consistono nell'annullarsi identico del tensore G_{ik} ($i, k=1, 2, \dots, n$) di EINSTEIN e generalizzano quindi, per qualunque spazio, le celebri equazioni gravitazionali dello spazio-tempo relativistico in assenza di tensore energetico; che sono appunto $G_{ik} = 0$ ($i, k = 0, 1, 2, 3$).

Rimane così implicitamente risolta (addirittura per n qualunque) la questione (già in precedenza posta, e studiata senza risultati conclusivi da vari matematici) di caratterizzare geometricamente le varietà einsteiniane: Esse sono tutte e sole quelle in cui, per qualsivoglia trasporto infinitesimo, risulta di 3° ordine almeno il divario fra le due parallele d'ambiente e di superficie.

La memoria del BOMPIANI fa in seguito intervenire il trasporto ciclico di PÉRRÈS, applicandolo a tutte le direzioni uscenti da un medesimo punto P . Un tale trasporto dà luogo ad un gruppo di rotazioni rigide legato intimamente alle proprietà di curvatura in P . In questa idea l'autore si è incontrato collo SCHOUTEN, ma lo studio approfondito del legame suaccennato, per un determinato ciclo σ , ciò che è lo stesso, per la corrispondente rotazione, appartiene interamente a lui.

Come si vede, associando all'assegnato V_n le sue varie giaciture (eventualmente in concorso con direzioni appartenenti alle giaciture stesse), il BOMPIANI ha ottenuto proprietà nuove che meglio rivelano la struttura degli spazi riemanniani.

Nell'ultima parte della memoria egli passa alle V_m (per $m > 2$) immerse in V_n , generalizzando dapprima in modo assai nitido e felice la nozione di direzioni coniugate e di asintotiche, nonché la seconda forma fondamentale, già introdotta dal BIANCHI per le ipersuperficie V_{n-1} . In questo caso tipico (che fa riscontro alle superficie dello spazio ordinario) la seconda forma fondamentale è ancora quadratica; per una V_m generica, il criterio del BOMPIANI porta al 4° grado; ma per $m=n-1$ si ha precisamente il quadrato della forma di BIANCHI. Dalla seconda forma scaturisce l'estensione dell'ordinaria teoria delle curvature ambientali e in particolare della curvatura media, la quale si annulla ogni qualvolta si tratta di varietà minime.

Tornando alle superficie ($m=2$), l'autore indica una applicazione notevole di questi suoi nuovi concetti dimostrando che, per le superficie d'area minima, è caratteristica (come nel caso dello spazio ordinario) ciascuna di queste due proprietà: avere curvatura media nulla; ammettere un doppio sistema coniugato, formato da linee isotrope.

Il valore intrinseco di questi vari risultati e i fecondi ravvicinamenti analitico-geometrici e fisici in essi contenuti giustificano, a quanto ci pare, la nostra designazione.

Chiediamo pertanto che il premio di matematica per l'anno 1925 venga assegnato al prof. ENRICO BOMPIANI della R. Università di Bologna.

La Commissione:

LUGI BIANCHI

VITO VOLTERRA

TULLIO LEVI-CIVITA (relatore).