

Teoria analitica delle perturbazioni del V satellite di Giove.

Memoria del dott. ing. G. ARMELLINI

(presentata dal Socio E. MILLOSEVICH, ed approvata dal Socio V. VOLTERRA)

INTRODUZIONE

Mentre la teoria dei primi quattro satelliti di Giove, cominciata contemporaneamente (anno 1766) dal LAGRANGE (1) e dal BAILLY (2), sviluppata dal LAPLACE (3) e perfezionata dal SOULLART (4), forma uno dei capitoli più eleganti e più completi della Meccanica celeste; quella dei nuovi satelliti, che in verità presenta ostacoli di gran lunga maggiori, resta ancora quasi completamente da trattare.

Io ho cercato di colmare questa lacuna, e nella presente Memoria espongo la prima parte del mio studio relativa al quinto satellite.

Prima però d'intraprendere la trattazione, sarà utile di rivedere brevemente ciò che è stato scritto fino ad oggi sull'argomento, onde informare il lettore dello stato attuale della questione.

Il V satellite di Giove fu scoperto dal BARNARD a Lick (Mount Hamilton, California) il 9 settembre 1892, ed osservato in appresso a più riprese, principalmente da lui stesso e dai suoi assistenti (5).

F. COHN, basandosi sulle osservazioni dell'anno 1893 principalmente, ne ricavò, con i noti metodi dell'astronomia matematica, gli elementi dell'orbita (6); il che più tardi, fecero con maggiore esattezza, E. E. DOBBIN ed il BARNARD stesso (7).

(1) LAGRANGE, *Oeuvres complètes*, tom. VI.

(2) BAILLY, *Essai sur la théorie des quatre satellites de Jupiter*.

(3) LAPLACE, *Mécanique Céleste*, tom. IV.

(4) SOULLART, *Memoire of the Royal Astronomical Society*, tom. XLV ed *Astr. Nachr.* 2214. Non cito per brevità i bei lavori di BESSEL e di DAMOISSEAU, nè i primissimi tentativi di Newton nei suoi *Principia Mathematica Philosophica Naturalis* (lib. III, prop. 29).

(5) Sopra queste osservazioni, per la maggior parte micrometriche, molte delle quali non ancora discusse, cfr. *Astronomical Journal*, nn. 367, 580, 586, 598 e 615 ecc.; *Monthly Notices*, LV; *Astr. Nachr.*, 4329 ecc.

(6) F. COHN, *Bestimmung der Bahnelemente des 5^{ten} Jupitersatelliten*, *Astr. Nachr.*, 2403.

(7) BARNARD, *On the fifth satellite of Jupiter*, *Astr. Journal* 544; E. E. DOBBIN, *Orbit of the fifth satellite of Jupiter*, *ibid.*, 562; ved. anche *Astr. Nachr.*, CXLII.

Il confronto dei calcoli con l'osservazione, mostrò subito che la linea degli apsi ha un rapidissimo movimento di rotazione; fenomeno che il TISSERAND riconobbe dovuto alla forma ellissoidica molto accentuata che Giove presenta: e ciò in due brevissime Note, nelle quali però egli esamina la questione solo assai superficialmente (*).

Una trattazione veramente completa e, per quanto è possibile, esauriente, della presente questione, manca ancora del tutto; ed è quel che io ho tentato di fare nella presente Memoria. Mi piace a questo proposito di far notare fin d'ora che, poichè la massa del satellite è, allo stato attuale della scienza astronomica, del tutto incognita, io ho fondato i miei calcoli sull'ipotesi (pienamente giustificata dall'osservazione) che essa sia estremamente piccola. Una prima applicazione delle formole da me trovate al calcolo numerico delle perturbazioni ha dato risultati che concordano mirabilmente coll'osservazione: io spero che l'accordo continui ad essere perfetto anche nelle Effemeridi del satellite, che, fondandomi su queste formole, ho intenzione di pubblicare fra breve.

(*) *Comptes Rendus*, tom. CXVII, pag. 1024; e tom. CXIX, pag. 5. Si consulti anche una comunicazione di H. STRAUZ, *Sitzungsberichte Wiener Ac.*, XI, 8, 1866.

CAPITOLO I.

Perturbazioni prodotte dall'attrazione del Sole.

Ogni satellite di Giove è soggetto a tre classi di perturbazioni diverse; e cioè:

- I. Perturbazioni originate dall'attrazione solare.
- II. Perturbazioni originate dall'attrazione degli altri satelliti.
- III. Perturbazioni originate dalla forma di Giove.

Prendendo per unità il semidiametro equatoriale del pianeta, la distanza media del V satellite dal centro di Giove è 2,546 circa; vale a dire, dei 26 satelliti del sistema planetario, che noi conosciamo, esso è, relativamente, il più vicino all'astro da cui dipende. Questa grande vicinanza ci fa subito intuire due fatti; e cioè:

a) Le perturbazioni cagionate dallo schiacciamento polare di Giove saranno gravissime, considerata anche la massa enorme e la forma ellissoidica, molto accentuata, del pianeta.

b) Le perturbazioni cagionate dal Sole e dagli altri satelliti saranno, in confronto trascurabili. Dimostrerò queste asserzioni, esaminando il problema con grande accuratezza.

Cominciamo dall'osservare che il Sole intanto perturba il moto relativo del satellite intorno a Giove, in quanto che, in un dato istante, imprime accelerazioni differenti, sia per grandezza, sia per direzione, al baricentro di Giove e a quello del satellite.

Ora, trascurando in un primo calcolo sommario le piccole eccentricità ed inclinazioni, la massima differenza, per grandezza, delle due accelerazioni ha luogo quando il satellite è in congiunzione o in opposizione col Sole rispetto a Giove; la massima differenza per direzione ha luogo all'incirca quando esso è in quadratura.

Esaminiamo brevemente questi due casi tipici, supponendo le orbite circolari e giacenti in uno stesso piano; ciò che in realtà ha luogo con grande approssimazione. Nelle congiunzioni e nelle opposizioni, il Sole, Giove ed il satellite si trovano, nell'ipotesi fatta, sopra una linea retta; le accelerazioni che il Sole imprime nell'unità di tempo ai due baricentri coincidono quindi in direzione, ma sono di grandezza differente.

E precisamente, denotando con J_s e J_j le accelerazioni imprime dal Sole a Giove ed al satellite, e con j l'accelerazione impressa nello stesso tempo da Giove al satellite, abbiamo, per la legge di NEWTON,

$$(1) \quad \frac{J_s - J_j}{j} = \frac{Mr^2}{m} \left(\frac{1}{e_s^2} - \frac{1}{e_j^2} \right),$$

dove M è la massa solare, m quella di Giove; e_s e e_j sono le distanze del Sole da Giove e dal satellite e r la distanza del pianeta dal satellite. Ma, a cagione della congiunzione o dell'opposizione, tra e_s e e_j ed r passa la relazione $e_s - e_j = r = 0$, dove il segno superiore vale per la congiunzione, e l'inferiore per l'opposizione; r è poi uguale a circa e_j sen $47''$.

Eliminando quindi e , ed r , ed adottando per $\frac{M}{m}$ il valore dato dal LEVERRIER, che è uno dei più esatti, troviamo, trascurando piccole quantità,

$$(2) \quad \frac{J_2 - J_1}{j} = \frac{M}{m} \operatorname{sen}^2 47'' \left\{ 1 - \frac{1}{(1 - \operatorname{sen} 47'')^2} \right\} = \mp 0,000\ 000\ 020$$

donde enunciando il risultato possiamo dire:

Nelle congiunzioni e nelle opposizioni, il Sole, in tanto perturba il moto relativo del V satellite intorno a Giove, in quanto che diminuisce la forza, con cui Giove attira il satellite, di un cinquantamilionesimo del suo valore.

Consideriamo ora il caso in cui il satellite sia in quadratura col Sole rispetto a Giove; se decomponiamo la J , in due componenti, una, J_{11} , parallela all'accelerazione che il Sole imprime in un dato istante t al baricentro di Giove, l'altra, J_{22} , normale alla stessa e diretta quindi verso il pianeta, avremo $J_{11} = J_j$ (trascurando il quadrato di $\operatorname{sen} 47''$ ed essendo, nelle quadrature, con grande approssimazione, $e = e_j$).

Poichè quindi noi studiamo solo le perturbazioni che il Sole imprime al moto relativo del satellite rispetto a Giove, potremo trascurare insieme J_j e J_{11} , e considerare il satellite nelle quadrature come sollecitato, oltre che dall'attrazione di Giove, anche da una seconda attrazione complementare, capace d'imprimerli nell'unità di tempo l'accelerazione J_{22} . Ora abbiamo con grande approssimazione:

$$(3) \quad \frac{J_{22}}{j} = \frac{Mr^2 \operatorname{sen} 47''}{m e_j^2} = 0,000\ 000\ 013;$$

cioè:

Nelle quadrature, il Sole, in tanto perturba il moto relativo del V satellite intorno a Giove, in quanto che aumenta la forza, con cui Giove attira il satellite, di circa un centomillesimo della sua entità.

Da quanto si è detto risulta che il Sole non può cagionare perturbazioni periodiche apprezzabili nel moto del V satellite tanto più che la durata di una sua rivoluzione è brevissima; non è lo stesso però delle perturbazioni secolari, che, col veggere del tempo, potrebbero acquistare un valore sensibile.

Per calcularle, prendiamo come piano di riferimento il piano dell'eclittica media di un dato anno, e chiamiamo con $a e n \varphi \omega s$ le semiasse maggiore, l'eccentricità, il movimento medio, l'inclinazione, la longitudine del nodo ascendente, del periastro e dell'epoca del V satellite; le stesse lettere con l'indice s si riferiscono al s^{mo} satellite; le corrispondenti maiuscole indichino gli elementi dell'orbita di Giove. Ciò posto, è evidente che, essendo il sistema Sole-Terra-Luna analogo al sistema Sole-Giove-V satellite, per calcolare le perturbazioni secolari in parola noi non dovremo far altro che trasportare al nostro caso la forma della funzione perturbatrice di DEXLAUNAY per la teoria della luna, dopo averla spogliata dei termini periodici (*).

(*) V. TISSERAND, *Traité de Méc. Céle.*, tom. III.

Avremo quindi:

$$(4) \quad H = \frac{a^2 N^2}{4} \left\{ 1 + \frac{3}{2} (e^2 + E^2) - \frac{3}{2} (\varphi^2 + \Phi^2) \right\} + \text{term. di ord. sup. al } 2^{\circ};$$

donde le equazioni fondamentali ridotte cioè:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{da}{dt} = -\frac{1}{na^2 e} \frac{\partial H}{\partial \omega} & \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{na^2 e} \frac{\partial H}{\partial e} \\ \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{na^2 \varphi} \frac{\partial H}{\partial \varphi} & \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{na^2 \varphi} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \\ \frac{da}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial H}{\partial e} & \frac{de}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial H}{\partial a} + \frac{e}{2na^2} \frac{\partial H}{\partial e} + \frac{\varphi}{2na^2} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \end{cases}$$

diverranno:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{da}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = 0 & \frac{d\omega}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} = \frac{3}{4} \frac{N^2}{n} \\ \frac{de}{dt} = -\frac{N^2}{n} \left\{ 1 + \frac{3}{2} (e^2 + E^2) - \frac{3}{2} (\varphi^2 + \Phi^2) + \frac{3}{8} (\varphi^2 - e^2) \right\}. \end{cases}$$

Adottiamo ora, per le quantità che compariscono in queste equazioni, i valori seguenti, che sono, fino ad ora, i più esatti:

$$\begin{array}{ll} N = 299'', 1284 & n = 722'', 68 \\ \Phi = 1^{\circ} 18' 41'' & \varphi = 2^{\circ} 20' 23'' \\ E = 0,0482519 & e = 0,00208 \end{array}$$

dove le inclinazioni sono riferite all'eclittica dell'anno 1900,0. Con brevi calcoli numerici, avremo i risultati seguenti:

I) *L'attrazione solare non cagiona perturbazioni secolari apprezzabili nel semiasse maggiore, nell'eccentricità e nell'inclinazione dell'orbita del V satellite di Giove.*

II) *La linea degli apsidì ha un movimento secolare diretto, cagionato dall'attrazione solare, di circa 0'',942 all'anno; e quella dei nodi uno eguale di intensità, ma di senso contrario.*

III) *La longitudine dell'epoca ha un movimento secolare negativo, di 1'',36 all'anno; cioè, in causa dell'attrazione solare, il satellite viene a trovarsi ogni anno nella sua orbita in una posizione di 1'',36 meno avanzata, in confronto a quella che avrebbe se il Sole non esistesse.*

Data la tenuità delle perturbazioni studiate, io ho adottato questo metodo di soluzione così semplice; potevamo però tenerne un altro, certamente più complicato per il calcolo effettivo, ma preferibile dal punto di vista analitico.

Poiché il Sole, Giove, ed il V satellite si muovono poco discosti da un piano, il relativo problema dei tre corpi si scinderà approssimativamente in due; un primo problema piano che dà il moto delle proiezioni, ed un secondo obliquo che permette di definire i leggeri spostamenti dal piano di riferimento.

Cominciamo ad occuparci del primo.

Riferiamoci ad un sistema di coordinate mobili, prendendo per origine Giove, per asse ξ la retta che unisce Giove col Sole (o più esattamente con la proiezione del centro solare sul piano di riferimento passante per Giove), e per asse delle η la perpendicolare alle ξ . Le equazioni del moto piano del satellite (tenendo conto soltanto delle perturbazioni solari) ed usufruendo della sua piccola distanza da Giove in confronto di quella di Giove dal Sole, si riducono con alcuni calcoli a:

$$\begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\frac{d\eta}{dt} + \xi \left[\frac{1}{(z^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} - 3 + \frac{2}{1+M} \right] = 0 \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\frac{d\xi}{dt} + \eta \left[\frac{1}{(z^2 + \eta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{1+M} \right] = 0. \end{cases}$$

nello stabilire le quali è stato supposto che l'orbita di Giove sia esattamente circolare, è stata presa come unità di massa quella di Giove (*); le unità di tempo e di lunghezza sono state scelte in modo che risulti $\mu = 1$, $f = (\text{coef. attrattivo}) = 1$.

Ciò posto, HILL ha insegnato a formare delle soluzioni periodiche di queste equazioni con un periodo prestabilito. Supponendo, ciò che ha luogo con molta approssimazione, che il moto del satellite sia periodico, noi avremo con questo mezzo la traiettoria descritta dalla sua proiezione sul piano di riferimento; confrontandolo con un'ellisse, sarebbe facile dedurne le perturbazioni degli elementi piani (secondo la denominazione del POINCARÉ) prodotta dall'attrazione solare.

Passando quindi dal problema piano al problema obliquo, un teorema del professore LEVI-CIVITA (*), si assicura dell'esistenza del moto medio dei nodi e ci dà il modo di calcolarlo ecc.

Io non ho fatto uso di queste formole, e mi sono servito del vecchio metodo di DELAUNAY soltanto perchè, trattandosi di perturbazioni estremamente piccole, era bene adoperare i mezzi più semplici.

(*) Ved. CHARLES, *Die Mechanik des Himmels* II Band, pag. 187, § 5: *Periodische Lösungen in der Umgebung der Massen.*

(*) *Sur les équations linéaires à coefficients et sur le moyen mouvement de nosse lunaires*, Ann. de l'École Normale Supérieure, tom. 28, 1911. In questa Memoria, l'illustre matematico dimostra rigorosamente l'esistenza del movimento medio dei nodi in quel caso particolare del problema dei tre corpi che si pone a fondamento della teoria della Luna.

Più tardi un'allievo dello stesso prof. LEVI-CIVITA, la signora L. TREVIANI, estenderà il precedente teorema, mantenendo però sempre l'ipotesi che i tre corpi si muovano in prossimità del piano invariabile; e dava le formole per il calcolo del moto medio dei nodi, supponendo conosciuta la soluzione periodica del problema piano corrispondente.

Ved. *Sul moto medio dei nodi nel problema dei tre corpi*, Atti del R. Istituto Veneto, tom. LXXI.

Sarebbe molto importante che gli astronomi testassero l'applicazione dei metodi dati dal LEVI-CIVITA, al calcolo delle perturbazioni degli asteroidi.

CAPITOLO II.

Perturbazioni prodotte nel moto del V satellite
dall'attrazione degli altri satelliti di Giove.

Veniamo ora alle perturbazioni prodotte dai satelliti compagni.

La brevissima durata di una rivoluzione del V satellite ($11^h 57^m 22^s,68$), congiunta alla grande prossimità con Giove, la cui massa è assolutamente preponderante ci mostra, senza bisogno di calcoli, l'esiguità delle perturbazioni periodiche ordinarie; dobbiamo quindi soltanto ricercare quelle a lungo periodo, se esistono, e le perturbazioni secolari.

Ricordiamo, ora, che i movimenti medi n_1, n_2, n_3 dei primi tre satelliti sono legati pressochè esattamente da una relazione lineare, omogenea, a coefficienti interi e piccoli in valore assoluto; cioè:

$$(7) \quad n_1 - 3n_2 + 2n_3 = 0.$$

Ciò posto, se noi svolgiamo la funzione perturbatrice R, relativa ad uno qualunque di questi satelliti, nella forma ordinaria ⁽¹⁾ tenendo conto delle perturbazioni prodotte dagli altri due, avremo:

$$(8) \quad R = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{ijk} \cos \{ i(n_1 t + \epsilon_1) + j(n_2 t + \epsilon_2) + k(n_3 t + \epsilon_3) \}.$$

dove i, j, k sono numeri interi; sostituendo nelle formole che danno le perturbazioni del semiasse maggiore, si otterrà:

$$(9) \quad \Delta a_i = \frac{2}{n_i a_i} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{ijk}^0}{in_1 + jn_2 + kn_3} \operatorname{sen} \{ i(n_1 t + \epsilon_1) + \dots \} \\ [C_{ijk}^0 = i C_{ijk} \quad C_{ijk}^0 = j C_{ijk} \quad C_{ijk}^0 = k C_{ijk}].$$

Le sommatorie, che teoricamente andrebbero estese per tutti i valori interi di i, j, k (escluso il sistema $i = j = k = 0$), praticamente si limitano a valori numericamente piccoli, giacchè, al di là, i coefficienti divergono assolutamente trascurabili.

Ora, la relazione accennata tra n_1, n_2, n_3 ci mostra che, nel caso dei primi tre satelliti, alcuni termini diverranno nella nostra sommatoria estremamente grandi, giacchè alcuni dei denominatori sono prossimi a 0; donde l'esistenza di notevoli

⁽¹⁾ Per dimostrare che R ha la forma qui assegnata, i trattati classici adoperano calcoli lunghissimi. Credo quindi utile di segnalare una Nota dell'egregio prof. Levi-Civita, *Sulla forma dello sviluppo della funzione perturbatrice*, Atti del R. Istituto Veneto, tom. LX, p. II, dove il chiaro autore ne dà una dimostrazione semplicissima. A simili risultati giunse più tardi il Poincaré nelle sue *Leçons de Mec. Cel.*, tom. I, pp. 84-89 e 102-109.

perturbazioni a lungo periodo (¹), analoghe a quella classica, scoperta dal LAPLACE, tra Giove e Saturno.

Vediamo se esiste qualche relazione simile alla (7), a coefficienti interi e piccoli, che legghi il moto medio del V satellite con quello degli altri; specialmente del primo che è a lui il più vicino.

Esaminando le tavole dei movimenti medi si scopre, senza difficoltà, l'eguaglianza approssimata seguente, che è l'unica degna di essere notata:

• Due volte il movimento medio del V satellite è uguale a circa sette volte il movimento medio del I •.

Chiamando quindi con B_{11} la funzione perturbatrice relativa all'attrazione del I satellite sul V, fermiamo la nostra attenzione sui termini in cui comparisce il (²)

$$\cos(2n - 7n_1) t;$$

i quali, come è noto dalla teoria generale, verranno moltiplicati per quantità della forma:

$$e_1^\alpha e^{2-\alpha} \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5).$$

Nell'espressione del Δa , calcolata secondo l'equazione (9) compariranno perciò fattori della forma:

$$\frac{e_1^\alpha e^{2-\alpha}}{2n - 7n_1},$$

ed è appunto dalla maggiore e minor grandezza di questi fattori, che possiamo riconoscere l'entità delle perturbazioni.

Essendo $e_1 < e$, la maggiore delle quantità da esaminare sarà:

$$\frac{e^\alpha}{2n - 7n_1},$$

la quale, sostituendo per n ed n_1 i loro valori, e prendendo per unità di tempo il giorno solare medio, e per unità di angolo il grado, da un valore del tutto trascurabile.

L'esiguità di tale risultato ci mostra fin da ora che è inutile proseguire nell'esame di questa perturbazione.

Possiamo quindi affermare che:

Nel movimento del V satellite di Giove mancano perturbazioni importanti a lungo periodo.

Non resta quindi che esaminare le perturbazioni secolari prodotte dall'attrazione dei satelliti compagni.

Ricordiamo a tale scopo il noto teorema di GAUSS (³), secondo il quale potremo distribuire la massa di ognuno dei corpi perturbatori lungo ciascun elemento infini-

(¹) V. Tisserand, *Traité de mécanique céleste*, tom. I, pag. 199.

(²) Id. id., tom. I, chapitre XVIII: *Développement de la fonction perturbatrice*. Trattandosi, non di calcolare le perturbazioni a lungo periodo, ma di mostrarne l'inesistenza, abbiamo trascurato sotto il segno cos i termini che l'autore indica con le lettere u e u' .

(³) *Determination attractionis quae in punctum quodvis positionis data exerceret planeta, si eius massa per totam orbitem, ratione temporis quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dispersita* (GAUSS, *Werke*, III, 331).

tesimo ds della propria ellisse, proporzionalmente al tempo dt che il corpo stesso impiega a descriverlo.

Operando in tal modo, potremo considerare il V satellite come attratto da sette anelli ellittici, ottenuti materializzando le orbite dei restanti sette satelliti; la massa di ognuno di questi anelli sarà uguale a quella del corrispondente satellite, mentre la densità lineare varierà da punto a punto, secondo la legge citata.

Seguendo in parte l'elegante procedimento dell'HALPHEN ⁽¹⁾, prendiamo per origine la posizione del V satellite, in un istante qualunque: e sia

$$(10) \quad \frac{x^2}{G_1^2} - \frac{y^2}{G_2^2} - \frac{z^2}{G_3^2} = 0 \quad [i = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8]$$

l'equazione di uno qualunque dei sette coni del 2° ordine che dall'origine proiettano gli anelli ellittici ora nominati, riferito agli assi principali.

Costruiamoci ora una terna cartesiana ortogonale qualsiasi xys , avente per origine il V satellite; e siano $\lambda_i \mu_i \nu_i$ gli angoli $G_{1i}x, G_{2i}y, G_{3i}z$.

Chiamiamo con h_i la perpendicolare abbassata dall'origine stessa sopra il piano dell'anello i^{mo} , e con $x_{is} y_{is} z_{is}$ le coordinate del centro di Giove; indicando con S_i l'area dell'anello di posto i , e con XYZ le componenti della forza attrattiva esercitata complessivamente dagli anelli sul V satellite situato nell'origine, avremo le espressioni (dove l'accento indica che nelle sommatorie va escluso il termine corrispondente ad $i = 5$):

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= -x_5 \sum_{i=1}^{5} \frac{m_i}{S_i h_i} G_{1i} G_{2i} G_{3i} \cos \lambda_i \int_0^\pi \frac{\cos^3 \alpha \, d\alpha}{\{G_{1i} + G_{2i} \sin^2 \alpha + G_{3i} \cos^2 \alpha\}^{\frac{3}{2}}} \\ Y &= -y_5 \sum_{i=1}^{5} \frac{m_i}{S_i h_i} G_{1i} G_{2i} G_{3i} \cos \mu_i \int_0^\pi \frac{\sin^3 \alpha \, d\alpha}{\{G_{1i} + G_{2i} \sin^2 \alpha + G_{3i} \cos^2 \alpha\}^{\frac{3}{2}}} \\ Z &= -z_5 \sum_{i=1}^{5} \frac{m_i}{S_i h_i} G_{1i} G_{2i} G_{3i} \cos \nu_i \int_0^\pi \frac{d\alpha}{\{G_{1i} + G_{2i} \sin^2 \alpha + G_{3i} \cos^2 \alpha\}^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right.$$

Sarà inutile ricordare al lettore che, applicando il metodo di GAUSS, trascuriamo solo le perturbazioni delle perturbazioni; cioè le perturbazioni cagionate nel moto del V satellite, dalle perturbazioni degli altri; quantità certamente evanescenti.

Per maggiori spiegazioni sopra la grande esattezza del metodo, rimandiamo il lettore alle opere dell'HILL ⁽²⁾ e del CALLANDREAU ⁽³⁾.

In particolare scegliamo come asse delle x la perpendicolare condotta al raggio vettore del V satellite sul piano dell'orbita nel senso del moto; come asse delle y il prolungamento del raggio vettore stesso, e come asse delle z la perpendicolare condotta dal satellite al piano della sua orbita, verso l'emisfero boreale.

⁽¹⁾ HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*. Deuxième partie, pp. 310 e segg. Noi seguiamo solo in parte l'elegantissima soluzione dell'HALPHEN.

⁽²⁾ HILL, *On Gauss's method of computing secular perturbations*, *Astronomical papers* I.

⁽³⁾ CALLANDREAU, *Calcul des variations séculaires des éléments des orbites*, *Annales de l'observatoire de Paris*, tom. XVIII.

Indicando con X, Y, Z le componenti delle forze così riferite, le equazioni di GAUSS per le perturbazioni secolari degli elementi potranno scriversi (1):

$$(12) \left\{ \begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{na^2 \sqrt{1-e^2}}{2(m+\mu)\pi} \int_0^{2\pi} (Y \sin v + X \cos u + X_1 \cos v) dl \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{na}{2\pi(m+\mu)\sqrt{1-e^2}} \int_0^{2\pi} Z_1 r \cos \beta dl \\ \text{sen } \varphi \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{na}{2\pi(m+\mu)\sqrt{1-e^2}} \int_0^{2\pi} Z_1 r \text{sen } \beta dl \\ e \frac{d\omega}{dt} &= 2e^2 \text{sen}^2 \varphi \frac{d\vartheta}{dt} + \\ &\quad + \frac{na^2 \sqrt{1-e^2}}{m+\mu} \int_0^{2\pi} (-Y_1 \cos v + X_1 \left[1 + \frac{r}{p} \right] \text{sen } v) dl \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{d\omega}{dt} + 2\sqrt{1-e^2} \text{sen}^2 \frac{\varphi}{2} \frac{d\vartheta}{dt} - \frac{2na}{m+\mu} \int_0^{2\pi} Y_1 r dl, \end{aligned} \right.$$

dove $m, \mu, p, r, v, u, \beta$ indicano rispettivamente la massa di Giove e del satellite (*), il parametro della sua orbita non perturbata, il raggio vettore, la longitudine media e vera, l'anomalia eccentrica e l'argomento di latitudine.

Per ogni valore di l le X, Y, Z , assumeranno valori diversi, ed a ciò appunto si riferisce il segno d'integrazione; X, Y, Z , si otterranno dalle XYZ con trasformazioni lineari. Queste formole possono essere grandemente semplificate nel nostro caso; osservando che solo il 1° satellite, per la sua relativa vicinanza, è suscettibile di produrre perturbazioni secolari apprezzabili, e che l'orbita che esso descrive è presso che circolare e giacente nello stesso piano dell'orbita del V satellite.

Avremo quindi, con facili calcoli,

$$(14) \quad X_1 = Z_1 = 0 \quad Y_1 = \frac{m_1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{[(\alpha + a_1)^2 \cos^2 \alpha + (\alpha - a_1)^2 \text{sen}^2 \alpha]^{\frac{3}{2}}}$$

formola che potevamo ricavare anche direttamente, e dalla quale, con grandissima approssimazione, risulta:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{de}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\omega}{dt} = 0 \\ e_1 - e_0 = -\frac{na^2 m_1}{m} (\epsilon - \epsilon_0) \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{[(\alpha + a)^2 \cos^2 \alpha + (\alpha - a)^2 \text{sen}^2 \alpha]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right.$$

(*) TISSERAND, op. cit., tom. I, pag. 435-439.

(*) Sarà bene il notare che noi possiamo svolgere interamente la teoria del V satellite senza conoscere la sua massa μ e solo supponendo che essa sia estremamente piccola: analogamente sappiamo calcolare l'orbita di una cometa, ignorandone interamente la massa. Basta nelle (12) trascurare μ di fronte ad m .

Prendendo con DOMOISEAU (*) e BESSEL (†) 0.000016877 per il valore del rapporto $\frac{m_2}{m}$, ricaviamo i risultati seguenti:

I. *Le perturbazioni a breve e lungo periodo, cagionate sul V satellite di Giove dall'attrazione degli altri satelliti, sono evanescenti.*

II. *Questa attrazione non produce perturbazioni secolari apprezzabili nell'inclinazione, nell'eccentricità, nella longitudine del nodo ascendente e del perigiove.*

III. *La longitudine media viene invece ogni anno diminuita di $0^{\circ}40'45''.3$; cioè in virtù di questa attrazione, il satellite, ogni anno, si trova di $0^{\circ}40'45''.3$ più arretrato nella sua orbita.*

Termineremo questo capitolo, facendo un'osservazione di grandissima importanza.

Lo scopo della presente trattazione è, sopra tutto, di giungere alla costruzione esatta delle effemeridi del satellite; cioè di tavole le quali ci diano, per ogni valore del tempo, le sue coordinate micrometriche rispetto al centro di Giove.

Notiamo ora che l'orbita apparente del satellite è, approssimativamente, una ellisse estremamente allungata (a causa della debole inclinazione dell'orbita stessa su quella di Giove e sull'eclittica) e tanto piccola che il suo semiasse maggiore non giunge al minuto primo.

Eccettato quindi il caso eccezionale in cui si debbano confrontare osservazioni separate da lunghi intervalli di tempo, potremo senza tema di errare, trascurare le deboli perturbazioni trovate ora e nel capitolo precedente.

Non è invece così per quelle dovute allo schiacciamento polare di Giove, le quali, come vedremo, sono fortissime e debbono essere perciò esattamente calcolate per la compilazione ordinaria delle effemeridi.

Fondandomi su tali concetti dividerò la restante trattazione in due parti.

Nella prima, che abbraccerà i capitoli III IV e V, io darò delle formole che saranno con vantaggio adoperate dagli astronomi nei casi ordinari; servendoci di esse troviamo il movimento perturbato del satellite con l'uso di funzioni ellittiche di WEIERSTRASS, e quindi per mezzo delle serie \mathcal{P} Jacobiane, a rapidissima convergenza. Avremo così un metodo facile, rapido ed assai approssimato per il calcolo ordinario delle effemeridi stesse.

Nella seconda parte, formata dai capitoli seguenti al IV, darò altre formole esattamente, ma anche più complicate, da adoperarsi nei casi eccezionali in cui l'intervallo tra le due osservazioni che si vogliono confrontare, sia molto ampio.

Si dovrà allora tener conto anche delle perturbazioni secolari; cagionate dall'attrazione del Sole e del primo satellite; e saranno quindi molto utili i risultati ottenuti in questi due primi capitoli.

(*) DOMOISEAU, *Tables des quatre satellites de Jupiter.*

(†) BESSEL, *Bestimmung der Jupiters Masse.*

CAPITOLO III.

Espressione delle coordinate perturbate in funzioni ellittiche di Weierstrass.

Poichè, come abbiamo visto, le perturbazioni prodotte nel moto del V satellite dall'attrazione del Sole e degli altri satelliti, sono assai leggiere rispetto a quelle gravissime prodotte dallo schiacciamento polare di Giove, potremo, per tempi non eccessivamente lunghi, far astrazione dalle prime.

Allora ci sarà facile di esprimere le coordinate del satellite per mezzo di funzioni ellittiche, seguendo il procedimento che passiamo ad esporre.

Noi non conosciamo la distribuzione delle densità nell'interno del pianeta Giove: sappiamo solo la sua massa totale m , e conosciamo la forma della sua superficie esterna (prossimamente ellissoidica) che possiamo supporre di equilibrio.

Allora, secondo un noto teorema di STOKES (*), il potenziale newtoniano V di Giove sarà perfettamente determinato in tutti i punti esterni e superficiali. Secondo le osservazioni, questa superficie è un ellissoide rotondo: prendiamo come unità di lunghezza il suo semi-asse equatoriale, e chiamiamo con b ($b < 1$) quello polare.

Prendiamo una terna di assi ortogonali xyz , scegliendo come piano xy il piano equatoriale e come asse z l'asse polare, il valore di V nel punto xyz è dato dalla formula seguente, dovuta al prof. PIZZETTI (**):

$$(16) \quad V = f \left(m + \frac{2}{3} \pi \beta b \right) \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} S}{\sqrt{1-b^2}} - \frac{2\pi\beta b}{(1-b^2)^{3/2}} (S - \operatorname{arc} \operatorname{tg} S) z^2 - \\ - \frac{\pi\beta b}{(1-b^2)^{3/2}} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} S - \frac{S}{1+S^2} \right) (x^2 + y^2),$$

dove f indica la densità media e si è posto:

$$(17) \quad S = \sqrt{\frac{1-b^2}{b^2 + \lambda}}$$

in cui λ è la radice maggiore dell'equazione:

$$(18) \quad \frac{z^2}{b^2 + \lambda} + \frac{x^2 + y^2}{1 + \lambda} = 1;$$

(*) *Mathematical and physical papers*, II, 104. Notiamo che la dimostrazione originaria di STOKES lascia alquanto a desiderare: una dimostrazione più semplice ed elegante è quella conclusissima del POINCARÉ: ved. Tisserand, op. cit., tom. II, pag. 234.

(**) *Sull'espressione della gravità alla superficie del geode*, Note I e II, Rend. Lincei, 1894, ser. II, pp. 167-200.

e quindi, per note teorie algebriche sopra le coordinate ellittiche, è quantità certamente reale.

Ciò posto, abbiamo, con facili passaggi, indicando con δ l'angolo che il raggio vettore del satellite forma col piano equatoriale di Giove,

$$(19) \quad S = \frac{\sqrt{1-b^2}}{r} \left\{ 1 + \frac{1-b^2}{2r^2} \cos^2 \delta + \frac{(1-b^2)^2}{8r^4} \cos^4 \delta (7 \cos^2 \delta - 4) + \dots \right\};$$

da cui ricaviamo:

$$(20) \quad V = \frac{f m}{r} + \frac{3 f m}{10 r^3} (1-b^2) \left(\frac{1}{8} - \sin^2 \delta \right) + \dots$$

Ricordiamo, ora, che il V satellite di Giove si muove con grandissima approssimazione nel piano equatoriale del pianeta: se quindi trascuriamo z^2 di fronte ad $x^2 + y^2$ le equazioni del moto saranno con molta approssimazione:

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -f m x \left\{ \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(1-b^2)}{10(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} \right\} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = -f m y \left\{ \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(1-b^2)}{10(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} \right\} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = -f m z \left\{ \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(1-b^2)}{10(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} \right\}. \end{cases}$$

delle quali le prime due, che ci danno il moto della proiezione P_1 del satellite sul piano equatoriale di Giove, sono integrabili separatamente dalla 3^a.

Prendendo per polo il centro del pianeta, e chiamando con ϱ e ψ le coordinate polari del punto P, nel piano ora nominato, abbiamo gli integrali primi:

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{d\varrho}{dt} \right)^2 + \varrho^2 \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 - \frac{a_1}{\varrho} - \frac{a_2}{\varrho^2} = h \\ \varrho^2 \frac{d\psi}{dt} = c, \end{cases}$$

dove per brevità è stato posto:

$$(23) \quad a_1 = f m \quad a_2 = \frac{3 f m (1-b^2)}{10};$$

da cui ricaviamo:

$$(24) \quad \begin{cases} t - t_0 = \int_{r_0}^{\varrho} \frac{\varrho^2 d\varrho}{\sqrt{2h\varrho^2 + 2a_1\varrho^3 - c^2\varrho^4 + 2a_2\varrho}} \\ \psi - \psi_0 = c \int_{r_0}^{\varrho} \frac{d\varrho}{\sqrt{2h\varrho^2 + 2a_1\varrho^3 - c^2\varrho^4 + 2a_2\varrho}} \end{cases}$$

Il radicale va preso col segno + quando P, si allontana dal pianeta; va invece preso col segno — quando P, si avvicina al pianeta; nei due punti di massimo e minimo il radicale si annulla avendosi $\frac{d\varrho}{dt} = \frac{d\varrho}{d\psi} = 0$.

Le due funzioni integrande possono quindi nell'intervallo di integrazione direnre infinite d'ordine 4; ma ciò non ostante, per noti teoremi di calcolo, gli integrali restano finiti e determinati.

Per eseguire le quadrature, passando dalla variabile ϱ ad una ausiliare ε legata a ϱ dalla relazione:

$$(25) \quad \varepsilon = \frac{6a_2}{12s + c^2},$$

e ponendo

$$(26) \quad \frac{c_1}{12} - a_1 a_2 = g_1, \quad -\frac{h}{2} a_1^2 - \frac{a_1 a_2 c^2}{12} + \left(\frac{c^2}{6}\right)^2 = g_2,$$

dove g_1 e g_2 sono funzioni omogenee di grado 2° e 3° nelle 4 quantità a_1, a_2, c^2, h , abbiamo:

$$(27) \quad \psi = \varepsilon \int \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_1}} \quad t = 36 a_1^2 \int \frac{ds}{(12s + c^2)^2 \sqrt{4s^3 - g_2 s - g_1}}.$$

Facciamo ora $s = p(u|g_1, g_2)$, dove col simbolo $p(u|g_1, g_2)$ indichiamo la nota funzione ellittica di WEIERSTRASS, definita dagli invarianti g_1, g_2 ; le (27) diverranno:

$$(28) \quad \psi = cu + \varepsilon, \quad t = 36 a_1^2 \int \frac{du}{[12p(u) + c^2]^2};$$

avendo riguardo alla notissima equazione fondamentale a cui soddisfa la $p(u)$:

$$[p'(u)]^2 = 4[p(u)]^3 - g_2 p(u) - g_1.$$

Per eseguire la quadratura nel modo più semplice, cerchiamo i poli (*) della funzione integranda. Osserviamo intanto che, essendo la $p(u)$ funzione ellittica del secondo ordine, esisteranno in ogni parallelogramma fondamentale due punti γ_1 e γ_2 tali che

$$(29) \quad 12p(\gamma_1) = 12p(\gamma_2) = -c^2;$$

in γ_1 e γ_2 cadranno quindi due poli della funzione da integrare. E precisamente, poichè c è finita e determinata, γ_1 e γ_2 saranno punti regolari per la $p(u)$; svilup-

(*) V. JORDAN, *Cours d'Analyse*, vol. II; e BIANCHI, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche*, Pisa, Spoerri, 1901.

pando quindi in serie nell'intorno di γ_1 , e ponendo per brevità $u - \gamma_1 = v$, avremo:

$$(30) \quad 12 p(\gamma_1 + v) = -c^2 + 12 v p'(\gamma_1) + \frac{12}{2!} v^2 p''(\gamma_1) + \dots$$

quindi, in un intorno di γ_1 , la funzione $\frac{1}{[12 p(u) + c^2]^2}$ diverrà:

$$(31) \quad \frac{1}{v^2} \frac{1}{\left[12 p'(\gamma_1) + \frac{12}{2!} v p''(\gamma_1) + \dots \right]^2},$$

cioè: nel punto γ_1 , essa avrà un polo di 2° ordine, col coefficiente $\frac{1}{[12 p'(\gamma_1)]^2}$: analogamente avverrà per il punto γ_2 .

Ricordiamo, ora, che due funzioni ellittiche, aventi gli stessi poli con i medesimi termini principali, non possono differire che di una costante: donde, per proprietà notissime,

$$(32) \quad \frac{1}{[12 p(u) + c^2]^2} = \frac{p(u - \gamma_1)}{[12 p'(\gamma_1)]^2} + \frac{p(u - \gamma_2)}{[12 p'(\gamma_2)]^2} + \alpha.$$

Per determinare la costante incognita α , ricordiamo, che in virtù della relazione tra la $p(u)$ e la sua derivata, si ha:

$$(33) \quad [p'(\gamma_1)]^2 = [p'(\gamma_2)]^2 = \lambda^2,$$

dove λ^2 è una quantità conosciuta: vedremo che, essendo λ immaginario puro, λ^2 è negativo. Ciò posto, poichè il primo membro della (32) si annulla per $u = 0$, avremo per il valore di α , data la parità della $p(u)$,

$$(34) \quad \alpha = -\frac{p(\gamma_1)}{(12 \lambda)^2} - \frac{p(\gamma_2)}{(12 \lambda)^2} = \frac{1}{6} \left[\frac{c}{12 \lambda} \right]^2,$$

donde, dopo alcune riduzioni, otteniamo:

$$(35) \quad 36 a^2 \int \frac{du}{[12 p(u) + c^2]^2} = \frac{a^2}{4 \lambda^2} \int \left[p(u - \gamma_1) + p(u - \gamma_2) + \frac{c^2}{6} \right] du.$$

Ma, per definizione, la $\zeta(u)$ è legata alla $p(u)$ dalla relazione $p(u) = -\zeta'(u)$; donde, integrando,

$$(36) \quad \zeta = \text{cost} - \left(\frac{a_1}{2 \lambda} \right)^2 \left\{ \zeta(u - \gamma_1) + \zeta(u - \gamma_2) - \frac{c^2}{6} u \right\}.$$

Non resta che da calcolare la 3° coordinata x ; servendoci della relazione ora

trovata tra la t e la u , troviamo

$$-fms \left\{ \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(1 - \delta^2)}{10(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} \right\} = \\ = -fms \left\{ 1 + 3(1 - \delta^2) \frac{[12p(u) + c^2]^2}{360 a_2^2} \right\} \frac{[12p(u) + c^2]^2}{216 a_2^2}.$$

e poichè si ha:

$$\frac{dt}{du} = \frac{a_2^2}{2\lambda^2} \left\{ p(u - \gamma_1) + p(u - \gamma_2) + \frac{c^2}{6} \right\}$$

$$\frac{d^2t}{du^2} = \frac{a_2^2}{2\lambda^2} \left\{ p'(u - \gamma_1) + p'(u - \gamma_2) \right\};$$

da cui:

$$\frac{d^2t}{dt^2} = \frac{\frac{d^2t}{du^2} \left\{ p(u - \gamma_1) + p(u - \gamma_2) \right\} - \frac{dt}{du} \left\{ p'(u - \gamma_1) + p'(u - \gamma_2) \right\}}{\left(\frac{a_2^2}{2\lambda^2} \right)^2 \left\{ p(u - \gamma_1) + p(u - \gamma_2) + \frac{c^2}{6} \right\}^2}$$

risulterà infine:

$$(37) \quad \frac{d^2t}{du^2} + U_1 \frac{dt}{du} + U_2 t = 0,$$

dove per brevità abbiamo posto:

$$(38) \quad U_1 = \frac{-p'(u) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{du^2} \log [p(u) + c^2]}{p(u) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{du^2} \log [p(u) + c^2] - \frac{c^2}{12}},$$

$$(39) \quad U_2 = \frac{a_2^2 f m}{\lambda^4} \left[-p(u) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{du^2} \log [p(u) + c^2] - \frac{c^2}{12} \right] \times \\ \times \left[\frac{(12p(u) + c^2)^2}{6a_2} + \frac{1 - \delta^2}{10} \frac{(12p(u) + c^2)^2}{6a_2} \right],$$

cioè: la s è legata alla variabile u da un'equazione differenziale lineare omogenea del 2° ordine, a coefficienti doppiamente periodici.

È bene insistere sopra di ciò, giacchè, dopo l'ammirabile teoria del GYLDEN sopra le orbite intermedie, in cui ha tanta parte l'equazione di LAMÉ, è questo uno dei casi rarissimi in cui equazioni lineari, a coefficienti doppiamente periodici, entrano nello studio delle perturbazioni dei moti celesti.

Applicando il teorema di FUCHS (*), vediamo che l'integrale generale non è sviluppabile in serie di potenze ascendenti di u , nell'intorno dell'origine; non possiamo perciò applicare i noti metodi del PICARD e dell'HALPHEN per integrare la proposta (**).

Osserviamo però che, data la piccolezza di x , basta per l'astronomia averne un valore sufficientemente approssimato; riservando quindi lo studio e la discussione di questa equazione ad una Nota separata, supporre per ora l'orbita del satellite piana, donde risulterà:

$$x = e \operatorname{sen}(\psi - \vartheta_1) \operatorname{tg} \varphi_1,$$

dove ϑ_1 e φ_1 indicano la longitudine del nodo ascendente e l'inclinazione, riferita non più all'eclittica ma al piano dell'equatore di Giove.

Riassumendo, abbiamo le seguenti equazioni:

I. — Equazioni della traiettoria.

$$\begin{aligned} x &= e \cos(\psi - \vartheta_1) = \frac{6a_2}{12p(u) + c^2} \cos(cu + c_1 - \vartheta_1) \\ y &= e \operatorname{sen}(\psi - \vartheta_1) = \frac{6a_2}{12p(u) + c^2} \operatorname{sen}(cu + c_1 - \vartheta_1) \\ z &= e \operatorname{sen}(\psi - \vartheta_1) \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{6a_2}{12p(u) + c^2} \operatorname{sen}(cu + c_1 - \vartheta_1) \operatorname{tg} \varphi_1. \end{aligned}$$

II. — Equazione del tempo.

$$t = \operatorname{cost} - \left(\frac{a_2}{2\lambda}\right)^2 \left\{ \zeta(u - \gamma_1) + \zeta(u - \gamma_2) - \frac{c^2}{6} u \right\}.$$

OSSERVAZIONE. — Nello scrivere le equazioni ora date noi abbiamo determinato l'asse x , che era sottoposto alla sola condizione di giacere sul piano equatoriale di Giove, facendolo coincidere con la retta comune intersezione del piano ora nominato con quello dell'orbita; è inutile dire che questa retta ha un lento moto di rotazione che determineremo nei capitoli seguenti. Intanto osserviamo che, poichè la x è piccolissima, nel comporre le *Effemeridi* potremo ritenere che il moto avvenga esattamente sul piano equatoriale di Giove; scelta allora, una volta per sempre, la retta (ora fissa) da cui si contano le anomalie ψ , le equazioni parametriche dell'orbita sono:

$$(40) \quad e = \frac{6a_1^2}{12px + c^2}, \quad \psi = cu + c_1,$$

e quella dei tempi è la II. Di esse ci occuperemo nei due capitoli seguenti.

(*) Ved. JORDAN, *Cours d'analyse*, III, 177; HALPHEN, op. cit., II, 535.

(**) JORDAN, op. cit., III, pp. 276 e seg.; HALPHEN, op. cit., II, pp. 542 e seg. Come si sa, il PICARD ha studiato il caso in cui l'integrale generale è uniforme in tutto il piano complesso; l'HALPHEN quello in cui i rapporti degli n integrali particolari (se n è l'ordine dell'equazione differenziale lineare a coefficienti doppiamente periodici) sono uniformi.

CAPITOLO IV.

Campo di variabilità della u
e discussione delle equazioni dal lato della realtà.

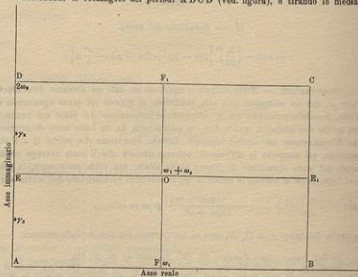
Poichè nelle (40) u è una quantità complessa, mentre q e ψ sono necessariamente reali, s'impone una discussione di queste equazioni dal lato della realtà e la ricerca del campo dentro cui dovremo far variare la u per ottenere tutti i punti dell'orbita, e solo i punti dell'orbita.

Cominciamo dall'osservare che g_1 e g_2 sono quantità reali, e costruiamoci il discriminante dell'equazione di 3° grado in s , che compare sotto il segno di radice: ricorrendo ai valori numerici vedremo che nel nostro caso esso è negativo. Chiamando quindi, con WEIESTRASS, e_1, e_2, e_3 le radici dell'equazione $4s^3 - g_1s - g_2 = 0$, per teorie note potremo dire: *il parallelogramma fondamentale dei periodi della $p(u)$ è, nel nostro caso, un rettangolo: e_1, e_2, e_3 sono quantità reali* (*).

Uno dei periodi $2\omega_1$ sarà quindi reale, e l'altro, $2\omega_2$, immaginario puro: ω_1 e ω_2 soddisfano alle

$$(41) \quad p(\omega_1) = e_1 \quad p(\omega_2) = e_2 \quad p(\omega_1 + \omega_2) = e_3.$$

Costruendo il rettangolo dei periodi ABCD (ved. figura), e tirando le mediane



(*) Ved. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche*, pag. 307 e seg.

EE, ed FF, intersecantisi nel punto centrale O, sappiamo che la $p(u)$ è reale tanto sui due assi quanto su EE, ed FF, (1): in particolare, se partiamo da A col valore $p(u) = +\infty$ e percorriamo il perimetro del rettangolo AFOE, in modo da lasciare l'area alla sinistra, la $p(u)$ andrà sempre decrescendo: nel punto F avremo $p(u) = \epsilon_1$; nel punto O, $p(u) = \epsilon_2$; nel punto E, $p(u) = \epsilon_3$; ed infine torneremo in A col valore $-\infty$. Poichè, mancando il coefficiente della 2^a potenza di s , la somma delle tre radici è nulla, la minore, ϵ_3 è certamente *negativa*, e la maggiore, ϵ_1 , certamente *positiva*.

Cerchiamo ora la posizione dei punti γ_1 e γ_2 ; poichè, come è noto, la ζu di WEIERSTRASS ha un polo di 1^a ordine nell'origine, e quindi il secondo membro dell'equazione del tempo diviene ∞ per $u = \gamma_1$, e per $u = \gamma_2$, si comprende l'importanza della ricerca. Intanto, essendo nei punti γ_1 e γ_2 la $p(u)$ reale e negativa, essi non potranno cadere che sui lati o sulle mediane del piano. Ricordando che nel nostro caso, la $p(u)$ assume valori coniugati in punti simmetrici rispetto alle mediane, è facile vedere che γ_1 e γ_2 non appartengono al lato AB, poichè da A ad F la $p(u)$ è certamente positiva variando da $+\infty$ ad ϵ_1 , e da F a B si mantiene ancora positiva tornando a crescere da ϵ_1 a $+\infty$. Esaminiamo le mediane FF₁ ed EE₁; se i due punti potessero cadervi, essi sarebbero disposti simmetricamente rispetto ad O: quindi, per quanto è stato detto, dovrebbe essere data la realtà delle $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$:

$$(42) \quad \epsilon_1 > \epsilon_2 > -\frac{\epsilon^2}{12} > \epsilon_3,$$

oppure

$$(43) \quad \epsilon_1 > -\frac{\epsilon^2}{12} > \epsilon_3 > \epsilon_2.$$

Ora è facile vedere che l'equazione $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$ non ammette radici reali minori di $-\frac{\epsilon^2}{12}$.

Infatti, ricordando l'espressione di g_2 e g_3 , e sostituendo per s il valore $-\frac{\epsilon^2}{12}$ il primo membro diviene:

$$(44) \quad -\frac{4\epsilon^6}{12^3} + \left(\frac{\epsilon^4}{12} - a_1 a_3\right) \frac{\epsilon^2}{12} + \frac{h a_1^2}{2} + \frac{a_1 a_2 \epsilon^2}{12} - \left(\frac{\epsilon^2}{6}\right)^3 = \frac{h}{2} a_1^3;$$

e poichè, nel nostro caso, trattandosi di un satellite, la costante delle forze vive h è certamente negativa, ne concluderemo che per $s = -\frac{\epsilon^2}{12}$, come per $s = -\infty$, il polinomio $4s^3 - g_2 s - g_3$ è negativo. Donde l'equazione studiata:

I) O non avrà alcuna radice reale minore di $-\frac{\epsilon^2}{12}$;

II) O ne avrà due minori di $-\frac{\epsilon^2}{12}$.

(1) Ved. BIANCHI, op. cit., pag. 369 ecc.

E poichè, nel nostro caso, le radici sono reali, nell'ipotesi II) dovrebbe per il noto teorema di ROLLE cadere tra esse almeno una radice reale della derivata, cioè dell'equazione:

$$(45) \quad 12s^2 - g_2 = 12s^2 - \frac{c^2}{12} + \sigma_1 a_2 = 0,$$

la quale, essendo a_1 e a_2 positivi, non può avere radici minori di $-\frac{c^2}{12}$. La II) va quindi esclusa, e non resta che la I, come possibile. C. d. d.

Le ineguaglianze (42) e (43) sono perciò assurde, donde: *I punti γ_1 e γ_2 debbono necessariamente appartenere al lato AD ed essere simmetricamente disposti rispetto ad E: sarà, cioè,*

$$(46) \quad \gamma_2 = 2\omega_2 - \gamma_1.$$

Non abbiamo naturalmente esaminato i lati BC e CD perchè questi fanno parte dei parallelogrammi adiacenti.

Ciò posto, ricordando che nel moto fisico del satellite (che, come è stato detto, qui supponiamo avvenire esattamente nel piano equatoriale di Giove) la ϱ varia tra due valori ϱ_1 e ϱ_2 , radici reali consecutive del polinomio del 4° grado contenuto sotto al segno di radice nelle equazioni (24), è facile il vedere che la $p(u)$ deve variare tra e_1 ed e_2 oppure tra e_2 ed e_1 ; e poichè, nel secondo caso, per infiniti valori di u la ψ sarebbe immaginaria, il che ripugna all'interpretazione meccanica dell'equazione, dobbiamo riguardare come unico campo di variabilità il segmento OE e i suoi omologhi; ciò che ora esamineremo più da vicino.

Partiamo dal punto E: quando u è in E, prendendo la $p(u)$ il valore e_1 , cioè il minimo valore di cui è suscettibile, la ϱ avrà il massimo valore possibile.

Al punto E corrisponde dunque l'apogiove.

Contemporaneamente la ψ diverrà:

$$(47) \quad \psi = c\omega_2 + c_1;$$

e se vogliamo prendere per origine delle anomalie ψ , questa posizione del satellite, deve aversi $c_1 = -c\omega_2$.

Man mano che la u si allontana da E andando verso O, la $p(u)$ aumenta, e quindi ϱ diminuisce, cioè il satellite si avvicina al perigiove. In questo punto ϱ assume il valore minimo $\frac{6a_2}{12e_2 + c^2}$ e ψ diviene uguale a $c\omega_1$. Quindi:

Al punto O corrisponde il perigiove.

Il semiperiodo reale ω , della funzione ellittica $p(u|g_2, g_1)$, moltiplicato per la costante delle aree c , dà l'angolo di cui ruota il raggio vettore quando il satellite va dal perigiove all'apogiove, e viceversa.

Se non esistessero perturbazioni, quest'angolo sarebbe uguale a π .

Ciò posto, se vogliamo tener conto soltanto della e , possiamo far tornare indietro il punto u da O verso E : in questo caso, il campo di variabilità della u sarebbe il segmento EO .

Se invece vogliamo tener conto anche della ψ , continuiamo a far avanzare la u : nel punto E , avremo un nuovo apogiove, distante, dal primo, di $2\omega_1$; poi troveremo un nuovo perigiove, e così di seguito.

Il campo di variabilità della u è quindi la retta parallela all'asse reale e distante da esso di ω_1 .

In particolare, cominciando a contare le posizioni dall'apogiove E , abbiamo la seguente

TABELLA.

u	e	ψ	Posizione
ω_1	$\frac{6a_2}{12e_2 + e^2}$	0	Apogiove
$\omega_1 + \omega_1$	$\frac{6a_2}{12e_2 + e_2}$	$c\omega_1$	Perigiove
$2\omega_1 + \omega_1$	$\frac{6a_2}{12e_2 + e^2}$	$2c\omega_1$	Apogiove
$3\omega_1 + \omega_1$	$\frac{6a_2}{12e_2 + e^2}$	$3c\omega_1$	Perigiove ecc.

Esaminiamo ora l'equazione del tempo: prendendo per istante iniziale quello in cui $\psi = 0$, cioè il momento in cui il satellite è all'apogiove, abbiamo

$$(48) \quad t = \left(\frac{a_2}{2\lambda}\right)^3 \left\{ \frac{c^2}{6} (u - \omega_1) - \zeta(u - \gamma_1) - \zeta(u + \gamma_1 - 2\omega_1) \right\};$$

ed è facile il vedere che questa espressione si conserva reale e priva di singolarità quando la u varia sulla retta assegnata.

Troviamo il tempo T impiegato dal satellite per andare dall'apogiove al perigiove successivo. Ponendo nella (48) $u = \omega_1 + \omega_1$, avremo

$$(49) \quad T = \left(\frac{a_2}{2\lambda}\right)^3 \left\{ \frac{c^2}{6} \omega_1 - 2\zeta(\omega_1) \right\}.$$

Questa formola ci dà la semidurata di una rivoluzione anomalistica del V satellite di Giove.

Troviamo ancora il moto diurno della linea degli apsi. Come abbiamo visto, il raggio vettore del V satellite, quando quest'ultimo va da un apogiove al successivo, descrive l'angolo $2c\omega_1$: lo spostamento angolare degli apsi durante una rivoluzione anomalistica è quindi $2c\omega_1 - 2\pi$.

Prendendo per unità di tempo l'ora solare media, che, data l'estrema velocità del satellite, è qui conveniente, e servendoci dell'espressione (48), abbiamo, per misura dello spostamento diurno cercato,

$$(50) \quad a = 48 \frac{c \omega_1 - \pi}{\left(\frac{d_2}{2\lambda}\right)^2 \left\{ \frac{c^2}{6} \omega_1 - c(\omega_1) \right\}}$$

CAPITOLO V.

Trasformazione delle formole date col mezzo di serie \wp di Jacobi a rapida convergenza per il calcolo pratico dell'Effemeridi.

Prendiamo come unità di lunghezza il semidiametro equatoriale di Giove, come unità di tempo l'ora solare media, e come unità di massa quella di un volume unitario di acqua distillata a $+4C$.

I valori, finora più attendibili, degli elementi ellittici a e n del V satellite, sono quelli calcolati da E. E. DOBSON (*) per l'epoca 1903 sett. 8,25, e cioè:

$$a = 2,546 \quad c = 0,00308 \quad n = \frac{723^{\circ},6816}{24}$$

Quanto al valore b del semidiametro polare di Giove, adotteremo quello da me trovato (**), e cioè:

$$b = 0,93775.$$

Con questi dati possiamo ricavare valori approssimati per c ed h , trascurando in un primo calcolo le perturbazioni ed adoperando le note formole (†)

$$(51) \quad c = na^2 \sqrt{1 - c^2} \quad h = \frac{f/m}{2a};$$

ben inteso che confrontando nelle Effemeridi i valori ottenuti con le osservazioni faremo a queste quantità le necessarie correzioni, per ottenere valori iniziali più esatti, secondo il metodo delle approssimazioni successive, tanto usato in astronomia.

(*) E. E. DOBSON, op. cit.

(**) ARMELLINI, *Determinazione matematica dello schiacciamento polare di Giove*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1912, 1° sem., 234. Questa quantità è stata da me dedotta tenendo conto sia delle osservazioni dirette, sia delle perturbazioni secolari del perigee del V satellite. In sostanza quindi le perturbazioni del perigee del V satellite ci danno il valore esatto dello schiacciamento polare di Giove: questo valore, una volta trovato, ci spiega tutte le altre perturbazioni degli altri elementi. È insomma una applicazione del metodo classico della fisica, di risalire da un fenomeno alla causa; e, una volta trovata questa causa, di spiegare con essa tutti gli altri fenomeni dipendenti.

(†) V. TIERBERAND, op. cit., I, pag. 99 e seg.

Le quantità a, a_1 sono facili a calcolarsi, conoscendosi la massa m e la forma di Giove: scritta quindi l'equazione di 3° grado in s ,

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

e risoluta, avremo, per i valori delle tre radici:

$$e_1 = 1,91314 \quad e_2 = -0,95660 \quad e_3 = -0,95654.$$

Il massimo ed il minimo valore di q sono quindi:

$$q_{\max} = \frac{6a_2}{12e_1 + e^2} = 2,5538 \quad ; \quad q_{\min} = \frac{6a_2}{12e_3 + e^2} = 2,5381;$$

cioè in perfetto accordo con le osservazioni.

Ciò posto, adoperando il procedimento classico di WEIERSTRASS (*), formiamoci le quantità:

$$(52) \quad X_1 = \frac{1}{\sqrt{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)}}, \quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{(e_2 - e_3)(e_1 - e_2)}}, \\ X_3 = \frac{1}{\sqrt{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)}};$$

dalle quali ponendo:

$$(53) \quad q = \frac{1}{2} \frac{X_2 - ie^{\frac{\pi i}{2}} X_1}{X_3 + ie^{\frac{\pi i}{2}} X_1},$$

dove i indica l'unità immaginaria ed e la base dei logaritmi naturali, otteniamo:

$$q = 0,0000012966.$$

Costruiamoci ora le serie \wp Jacobiane cioè:

$$(54) \quad \wp_1(q/v) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2\pi n v$$

$$\wp_1(q/0) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2}$$

$$(55) \quad \wp_2(q/v) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \operatorname{sen}(2n+1)\pi v$$

$$\wp_2(q/0) = 0$$

(*) Ved. JORDAN, *Cours d'analyse*, II, pag. 420, cap. VI.

$$(56) \quad \mathcal{P}_s(q/v) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)v} \cos(2n+1)\pi v \quad \mathcal{P}_s(q/0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)v}$$

$$(57) \quad \mathcal{P}_s(q/v) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{nv} \cos 2n\pi v \quad \mathcal{P}_s(q/0) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{nv}$$

Di queste funzioni, le \mathcal{P} con argomento 0 sono perfettamente conosciute e, dato il piccolo valore di q , sono espresse nel nostro caso da serie rapidamente convergenti.

Ciò posto, note formole della teoria delle funzioni ellittiche ci danno per valori dei periodi $2\omega_1$ e $2\omega_2$ i seguenti:

$$(58) \quad 2\omega_1 = -i\pi X_s \mathcal{P}_s(q/0) \mathcal{P}_s(q/0) = 1.85090$$

$$(59) \quad 2\omega_2 = \frac{2\omega_1 i}{\pi} \log_e q = 7.9966 i.$$

Servendoci di questi valori, la formola (50) ci dà, per lo spostamento diurno della linea degli apsidi, la quantità:

$$\alpha = 2^\circ 26' 50''$$

che è in perfetto accordo con le osservazioni (*).

È facile ora avere le quantità γ_1 e $\gamma_2 = 2\omega_2 - \gamma_1$. Indicando infatti con s^2 un'incognita ausiliaria data dalla relazione

$$(60) \quad q \left(s^2 + \frac{1}{s^2} \right) = \frac{\mathcal{P}_s(1/0) - \mathcal{P}_s(q/0) \sqrt{\frac{c^2 + 12\epsilon_2}{c^2 + 12\epsilon_1}}}{\mathcal{P}_s(q/0) + \mathcal{P}_s(q/0) \sqrt{\frac{c^2 + 12\epsilon_2}{c^2 + 12\epsilon_1}}}$$

avremo, per noti teoremi sulle funzioni ellittiche,

$$(61) \quad \gamma_1 = \frac{\omega_1}{\pi i} \log_e s^2 + 2m\omega_1$$

$$\gamma_2 = 2\omega_2 - \gamma_1$$

Applicando ora le note formole che ci danno il radicale $\sqrt{p(u) - e}$, e la $\zeta(u)$ in funzione delle \mathcal{P} Jacobiane, abbiamo infine le equazioni trasformate

$$(62) \quad e = \frac{6a_1}{c^2 + 12\epsilon_1 + \frac{3}{\omega_1^2} \left(\frac{\mathcal{P}_s(q/0) \mathcal{P}_s\left(q/\frac{\omega_1}{2\omega_1}\right)}{\mathcal{P}_s(q/0) \mathcal{P}_s\left(q/\frac{\omega_1}{2\omega_1}\right)} \right)^2}$$

(*) Ved. Astronomical Journal, n. 562.

$$(68) \quad \psi = c(u - \omega_1)$$

$$(64) \quad t = \left(\frac{a_1}{2\lambda}\right)^2 \left\{ \frac{c^2}{6} (u - \omega_2) + 2\gamma_1 - \frac{1}{2\omega_2} \left[4\gamma_1 \omega_1 \left(\frac{u - \gamma_1}{2\omega_2} + \frac{u + \gamma_1}{2\omega_1} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mathcal{J}'_1 \left(\frac{u - \gamma_1}{2\omega_2} \right)}{\mathcal{J}_1 \left(\frac{u - \gamma_1}{2\omega_2} \right)} + \frac{\mathcal{J}'_1 \left(\frac{u + \gamma_1}{2\omega_1} \right)}{\mathcal{J}_1 \left(\frac{u + \gamma_1}{2\omega_1} \right)} \right] \right\}$$

dora, al solito, con γ_1, γ_2 , abbiamo indicato i semiperiodi di 2^a specie: $\gamma_1 = \zeta(\omega_1)$, $\gamma_2 = \zeta(\omega_2)$.

Abbiamo scritto la (64) sotto questa forma evitando alcune riduzioni immediate, per mostrare come essa dipenda dagli argomenti $u - \gamma_2$ ed $u - \gamma_1$.

Per mezzo delle equazioni ora trovate, adattatissime al calcolo numerico, sarà facile di comporre le Effemeridi del V satellite, con vantaggio maggiore che non se adoperassimo i metodi classici.

Queste equazioni parametriche che ci danno i valori del raggio vettore e , dell'anomalia vera ψ (contata però da una posizione iniziale dell'apogio, e non dal perigio) e del tempo corrispondente t al variare della u , possono essere utilmente confrontate con quelle ordinariamente impiegate per il calcolo di una posizione in un'orbita ellittica.

Anche qui, indicando con r il raggio vettore, con v l'anomalia vera e con t il tempo si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} r = a(1 - e \cos \lambda) \\ \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \\ t = \frac{\lambda - e \operatorname{sen} \lambda}{n} + \operatorname{cost}; \end{array} \right.$$

cioè r, v, n, t sono date in funzione di un parametro λ (anomalia eccentrica).

Le equazioni (62), (63) e (64) non presentano al calcolo numerico difficoltà maggiori di queste ora date; col metodo da me usato ho quindi ricondotto il problema del moto perturbato allo stesso grado di semplicità del moto non perturbato.

Osserviamo ancora una cosa; le (62), (63) e (64) sono state stabilite sapendo, come abbiamo già visto nei primi capitoli, che le perturbazioni prodotte dallo schiacciamento polare di Giove sono di gran lunga preponderanti alle altre, e che il satellite si muove con grandissima approssimazione nel piano equatoriale del pianeta.

Ora altri satelliti si trovano nelle stesse condizioni; ad es. i due di Marte, il I di Saturno ecc.; possiamo dunque estendere anche ad essi la teoria ora esposta, ed applicare al calcolo delle loro effemeridi le stesse formole, cambiando solo, come è naturale, le costanti determinative.

Ciò ha luogo tanto più esattamente in quanto che, come il V satellite di Giove, anche questi ultimi presentano un'eccentricità piccolissima.

Così per Fobos (*) $e = 0,03208$; per Deimos (**) $e = 0,00574$; per Mimas (*) $e = 0,016$ ecc.

È dubbio se le formole possono applicarsi anche ad Ariel ed Umbriel, i primi due satelliti di Urano, giacchè ancora non sappiamo, con assoluta certezza, l'angolo foemato dalle loro orbite col piano equatoriale del pianeta (*).

Esse non sono invece esattamente applicabili al satellite di Nettuno, per cui l'angolo ora nominato è di 16° almeno (**).

CAPITOLO VI.

Perturbazioni degli elementi ellittici.

Qualora si volesse calcolare una sola posizione del satellite, separata dalla posizione iniziale da un assai esteso intervallo di tempo, adoperando le formole ora date, potrebbe commettersi qualche lieve errore proveniente dall'omissione del quadrato della x , su cui esse sono fondate. In tal caso si farà uso delle formole più generali che ora daremo e che sono basate sulla teoria classica delle perturbazioni.

Poichè, come abbiamo visto, si ha con grandissima approssimazione $V = \frac{f_m}{r} + \frac{3f_m(1-\beta^2)}{10} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 d \right)$, abbiamo, per il valore della funzione perturbatrice H, tenendo conto solo dello schiacciamento polare di Giove:

$$(65) \quad H = \frac{3f_m(1-\beta^2)}{10r^3} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 d \right).$$

Supponiamo ora, come si farà sempre in seguito, che nell'istante iniziale la longitudine media del satellite sia nulla; ed eliminiamo dalla (65) l'angolo δ che, essendo estremamente piccolo, potremo confondere col seno.

A tale scopo, chiamando con Θ o Φ la longitudine del nodo ascendente e l'inclinazione del piano equatoriale di Giove sull'eclittica media di una data epoca,

(*) ARAPH HALL, *Observations and orbits of the satellites of Mars.*

(**) *Id.*, *Id.*

(*) H. STRUVE, *Astr. Nachr.*, n. 2983.

(*) SIMON NEWCOMB, *The Uranian and Neptunian systems.*

(*) H. STRUVE, *Beobachtungen des Neptunstrahlens am 30-zölligen Pulkowaer Refractor. Mémoires de l'Académie J. des Sciences de Saint Petersburg*, tom. XLII, n. 4. Ved. anche la bella monografia di F. W. DYSON, *Discussion of the observations of the satellite of Neptune, made at the Royal Observatory of Greenwich in the years 1902-1903-1904.* Monthly Notices of the R. Astronomical Society, vol. 65.

avremo, pressochè esattamente, dati i piccoli valori delle inclinazioni e dell'eccentricità:

$$(66) \quad \delta = g \operatorname{sen}(nt - \vartheta) - \Phi \operatorname{sen}(nt - \Theta).$$

Per eliminare ora le potenze negative di r che entrano in H , ricordiamo gli sviluppi dovuti a CAUCHY ed HANSEN (*), secondo i quali, chiamando con λ un numero intero positivo, si ha

$$(67) \quad \left(\frac{r}{a}\right)^{-\lambda} = \frac{1}{2} G_{\lambda}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} G_{\lambda}^{(n)} \cos n\pi t,$$

dove si è posto:

$$(68) \quad \frac{1}{2} G_{\lambda}^{(0)} = 1 + \frac{(\lambda-1)\lambda}{(1)^2} \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{(\lambda-1)\lambda+1}{(1.2)^2} (\lambda+2) \left(\frac{e}{2}\right)^4 + \dots$$

$$(69) \quad G_{\lambda}^{(n)} = 2 \sum_{j=0}^{\lambda-n} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2}{1.2\dots j} \frac{(\lambda-1)\lambda\dots(\lambda+j-2)}{1.2\dots j} \left(\frac{e}{2}\right)^{i+j} N_{-i,j},$$

dove i, j sono numeri naturali e dove col simbolo $N_{-i,j}$ intendiamo quelle speciali quantità conosciute in meccanica celeste col nome di *numeri di CAUCHY*.

Questi numeri sono in generale nulli, il che semplifica molto le grandezze G , tranne nel caso in cui la differenza $i+j$ sia pari: e allora i loro valori sono dati da apposite tabelle (*). Valendoci di queste tabelle, ed eseguendo i calcoli, abbiamo:

$$(70) \quad H = \frac{3n^2(1-b^2)}{10} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} g^2 + \frac{1}{2} + e \cos \right. \\ \left. \cos(nt - \omega) + \frac{3}{2} e^2 \cos 2(nt - \omega) + \frac{1}{2} g^2 \cos 2(nt - \vartheta) \right. \\ \left. + \Phi g [\cos(\Theta - \vartheta) - \cos(2nt - \Theta - \vartheta)] \right\} + \\ + \text{termini d'ordine superiore al 2°}.$$

Per mezzo di questa espressione, le equazioni fondamentali delle perturbazioni di-
vengono:

$$(71) \quad \frac{da}{dt} = 0$$

$$(72) \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{3n(1-b^2)}{10a^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} \varphi} \times \\ \times \{ 1 - g + g \cos 2(nt - \vartheta) + \Phi \cos(\Theta - \vartheta) - \Phi \cos(3nt - \vartheta - \Theta) \}$$

(*) HANSEN, *Entwicklung der negativen Potenzen* ecc., Act. Scz. IV.

(*) THIERAND, op. cit., I, 256.

$$(73) \quad \frac{da}{dt} = \frac{3n(1-b^2) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{10a^2 \sqrt{1-e^2}} \times \\ \times \{-\varphi + \varphi \cos 2(nt - \vartheta) + \Phi \cos(\Theta - \vartheta) - \Phi \cos(2nt - \vartheta - \Theta)\} \\ + \frac{3n(1-b) \sqrt{1-e^2}}{10a^2} \left\{ 1 + \frac{\cos(nt - \omega)}{e} + 3 \cos 2(nt - \omega) \right\}$$

$$(74) \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{3n(1-b^2)}{a^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} \varphi} \{ \varphi^2 \operatorname{sen} 2(nt - \vartheta) + \Phi \varphi \operatorname{sen}(\Theta - \vartheta) \} - \\ - \frac{3n(1-b^2) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{10a^2 \sqrt{1-e^2}} \{ e \operatorname{sen}(nt - \omega) + 3e^2 \operatorname{sen} 2(nt - \omega) \}$$

$$(75) \quad \frac{de}{dt} = -\frac{3n(1-b^2) \sqrt{1-e^2}}{10a^2} \{ \operatorname{sen}(nt - \omega) + 3e \operatorname{sen} 2(nt - \omega) \}$$

$$(76) \quad \frac{de}{dt} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial H}{\partial n} +$$

$$\frac{3n(1-b^2) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{10a^2 \sqrt{1-e^2}} \{-\varphi + \varphi \cos 2(nt - \vartheta) + \Phi \cos(\Theta - \vartheta) - \Phi \cos(2nt - \vartheta - \Theta)\} + \\ + \frac{3n \sqrt{1-e^2}}{10a^2} \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{10a^2} (1-b^2) \left\{ 1 + \frac{\cos(nt - \omega)}{e} + 3 \cos 2(nt - \omega) \right\}.$$

L'integrazione di queste equazioni differenziali si farà con i noti metodi di approssimazione successiva, sostituendo dapprima nel secondo membro i valori non perturbati degli elementi e quadrando; poi tornando a sostituire i valori così ottenuti e quadrando di nuovo, e così di seguito fino a quel grado di approssimazione che si giudica conveniente.

CAPITOLO VII.

Integrazioni dell'equazioni differenziali nella forma ridotta.

Leggi delle perturbazioni della linea dei nodi e dell'inclinazione.

Cerchiamo di ottenere delle equazioni in termini finiti che con grande approssimazione ci rappresentino le leggi delle perturbazioni degli elementi ellittici del V satellite; potremo allora fare utili discussioni e confronti con quelle già note relative ai primi quattro satelliti.

Intanto cominceremo dall'osservare che le equazioni differenziali ora trovate, divengono più semplici, se noi (astruendo dal lentissimo moto di rotazione dell'asse

del pianeta) prendiamo come piano di riferimento quello dell'equatore di Giove: avremo allora $\Phi = 0$.

Per non confondere, indicheremo con l'indice 1, i valori degli elementi così riferiti (ciò che è possibile, giacché ora non può avvenire alcun equivoco con quelli del 1° satellite che non entrano in questo capitolo); e traendo partito dai debolissimi valori di ε e di φ , sopprimiamo alcuni termini di secondaria importanza.

Le equazioni differenziali delle perturbazioni dei primi cinque elementi potranno allora scriversi:

$$(77) \quad \frac{da}{dt} = 0$$

$$(78) \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{3n(1-b^2)}{10a^2} \{ \cos 2(nt - \varphi_1) - 1 \}$$

$$(79) \quad \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{3n(1-b^2)}{10a^2} \left\{ 1 + \frac{\cos(nt - \omega_1)}{\varepsilon} \right\}$$

$$(80) \quad \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{3n(1-b^2)}{10a^2} \varphi, \text{ sen } 2(nt - \varphi_1)$$

$$(81) \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = - \frac{3n(1-b^2)}{10a^2} \text{sen}(nt - \omega_1)$$

sistema che ora passiamo ad integrare.

La (77) ci dà subito:

$$(82) \quad a = \text{costante}$$

cioè:

L'asse maggiore dell'orbita del V satellite di Giove è esente da perturbazioni: il movimento medio n risulta perciò costante.

Valendoci di questa proprietà porremo in seguito:

$$(83) \quad \frac{3n(1-b^2)}{10a^2} = k^2$$

dove k^2 è una costante positiva.

Facciamo ora

$$(84) \quad x = \text{tg}(nt - \varphi_1)$$

la (78) diverrà con tale sostituzione:

$$(85) \quad \frac{dx}{dt} = (n + 2k^2)x^2 + n$$

donde, integrando e regolando la costante arbitraria in modo da avere $(\varphi_1)_{t=0} = 0$, otteniamo:

$$(86) \quad \varphi_1 = nt - \text{arc} \left\{ \text{tg} = \sqrt{\frac{n}{n+2k^2}} \text{tg}(t\sqrt{n^2+2nk^2}) \right\}.$$

Possiamo semplificare molto questa equazione ricordando che, data la forma di Giove, $1 - k^2$ e quindi k^2 è certamente una quantità piccola.

Infatti sviluppando in serie abbiamo:

$$(87) \quad \sqrt{n^2+2nk^2} = n \left\{ 1 + \frac{k^2}{n} + \dots \right\}$$

$$(88) \quad \sqrt{\frac{n}{n+2k^2}} = 1 - \frac{k^2}{n} + \dots$$

donde:

$$(89) \quad \frac{\text{tg}(\varphi_1 - nt)}{\text{tg}(nt + k^2 t)} = \frac{k^2}{n} - 1$$

la quale essendo k^2 piccolo ed n assai grande mostra che l'angolo $\varphi_1 + kt$ si conserva sempre assai prossimo a 0.

Ricordando ora la formula:

$$(90) \quad \text{tg} A + \text{tg} B = \frac{\text{sen}(A+B)}{\cos A \cos B}$$

abbiamo con alcuni passaggi:

$$(91) \quad \frac{\text{sen}(\varphi_1 + k^2 t)}{\cos(\varphi_1 - nt) \cos(n + k^2) t} = \frac{k \text{sen}(n + k^2) t}{n \cos(n + k^2) t}$$

la quale, poichè come si è visto $\varphi_1 + k^2 t$ è molto piccolo, sostituendo il seno con l'arco e risolvendo dà subito:

$$(92) \quad \varphi_1 = -k^2 t + \frac{k^2}{2n} \text{sen} 2(n + k^2) t$$

semplificazione a cui volevamo giungere, e che ha il vantaggio di una facile interpretazione geometrica. Abbiamo così le seguenti:

Leggi delle perturbazioni della linea dei nodi del V satellite col piano equatoriale di Giove:

1) Con grandissima approssimazione questa linea ha un leggero movimento secolare retrogrado proporzionale al tempo. Il coefficiente di proporzionalità è $-k^2$.

II) Questo movimento è accompagnato da uno periodico proporzionale al seno del doppio della distanza angolare del satellite dal nodo stesso; e la cui massima ampiezza è $\frac{k^2}{2n}$.

III) La durata di una semirivoluzione draconitica, cioè il tempo per passare da un nodo all'altro, è dato da $\frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 2nk^2}}$.

Nello scrivere la (78) noi abbiamo trascurato il quadrato dell'eccentricità anche nei termini secolari; senza di ciò si sarebbe avuto:

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{k^2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} |\cos 2(nt - \vartheta_1) - 1|$$

equazioni che possiamo integrare con grande approssimazione.

In generale si suole in simili casi in meccanica celeste considerare la ϵ come una costante; ed è questo il metodo classico.

Io voglio indicare una via anche più approssimata; facciamo:

$$y = \operatorname{tg} \left(\frac{nt - \vartheta_1}{2} \right)$$

$$B = b_4 = \frac{n}{n + 2k^2\lambda_1}$$

$$b_1 = b_3 = \frac{4n + 16k^2}{n + 2k^2\lambda_1}$$

$$b_2 = \frac{6n + 2k^2\lambda_1}{n + 2k^2\lambda_1}$$

dove λ_1 è una costante positiva opportunamente scelta.

Poichè, come vedremo nel capitolo seguente, l'eccentricità è data con grande approssimazione in funzione del tempo dalla formola:

$$\epsilon = \lambda_1 \left\{ 1 - \frac{4k^2}{n\lambda_1} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} (n - k^2) t \right\}$$

con calcoli alquanto lunghi ma elementari, trascurando come sempre si è fatto, le potenze di ϵ superiori alla 2^a, riconduciamo la nostra equazione differenziale alla quadratura seguente:

$$\frac{2t}{n} + \operatorname{cost} = \int \frac{y^2 + B}{y^4 + b_1 y^3 + b_2 y^2 + b_3 y + b_4} dy.$$

Per eseguirlo ci occorre studiare le quattro radici dell'equazione:

$$f(y) = y^4 + b_1 y^3 + b_2 y^2 + b_3 y + b_4.$$

Poichè i coefficienti sono tutti positivi è facile vedere che essa non ammette alcuna radice reale positiva; vediamo se ha radici reali negative.

Posto $y = 0$, abbiamo $f(y) = b_4 > 0$.

Diamo ad y il valore -1 ; avremo

$$f(-1) = 1 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 = \frac{4k^3}{\pi + 2k^2\lambda_1} |\lambda_1 - 8|.$$

Ora λ_1 è il massimo valore che l'eccentricità del satellite può assumere: si ha quindi certamente $\lambda_1 < 1$, e perciò:

$$f(-1) = \frac{4k^3}{\pi + 2k^2\lambda_1} |\lambda_1 - 8| < 0.$$

Tra 0 e -1 la $f(y)$ ha quindi un numero dispari di radici reali negative. Vedremo che si tratta di una sola radice.

Posto $y = -\infty$ prevale il termine y^4 e quindi $f(y)$ è di nuovo positiva.

Tra -1 e $-\infty$ la $f(y)$ ha ancora un numero dispari di radici reali negative.

Riassumendo questa breve analisi possiamo fare solamente due ipotesi sulla realtà delle radici, e cioè:

- 1) Le quattro radici sono tutte reali.
- 2) Due di esse sono reali e due complesse coniugate.

Per decidere quale di queste due ipotesi possibili si verifica, costruiamoci la Risolvente dell'equazione stessa. È noto infatti che data un'equazione di 4° grado e costruita la risolvente che è di 3°, se quest'ultima ha tutte le radici reali, quelle della proposta sono o tutte reali o tutte complesse; se all'opposto una sola delle radici della risolvente è reale, quelle della proposta sono due reali e due complesse.

Se ora poniamo

$$z = \frac{y + 4b_2}{24},$$

la risolvente della $f(y)$ sarà

$$z^3 + pz + q = 0,$$

dove abbiamo posto:

$$p = \frac{48}{[2k^2\lambda_1 + \pi]} [nk^2(384 - 48\lambda_1) + k^4(768 - 4\lambda_1)].$$

Essendo $\lambda_1 < 1$ e perciò $p > 0$, la risolvente non può certamente avere le sue tre radici reali.

Concludendo perciò, possiamo asserire che « la $f(y)$ ha due radici reali negative $-u$ e $-v$ comprese la prima tra 0 e -1 , la seconda tra -1 e $-\infty$; e due complesse coniugate $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$ ».

Valendoci di questo risultato abbiamo,

$$\frac{nt}{2} + \text{cost} = \int \left(\frac{u_1}{y+u} + \frac{v_1}{y+v} + \frac{\alpha_1 + i\beta_1}{y-\alpha-i\beta} + \frac{\alpha_1 - i\beta_1}{y-\alpha+i\beta} \right) dy,$$

dove u, v, α, β , sono date risolvendo un sistema di quattro equazioni lineari. Conoscendo quindi i valori numerici di α, α, c, h sarà dedurre $u, v, \alpha, \beta, u_1, v_1, \alpha_1, \beta_1$; riguarderemo quindi queste otto costanti come note.

Integrando si ha:

$$\frac{nt}{2} + \text{cost} = \log \{(y+u)^m (y+v)^n\} + 2\alpha_1 \log \sqrt{y-\alpha}^2 + \beta^2 + 2\beta_1 \arctg \frac{\beta}{y-\alpha};$$

cioè, tornando alle antiche variabili e supponendo che nell'istante t_0 la longitudine del nodo ascendente (contata sempre nel piano equatoriale di Giove) sia $(\mathcal{D}_1)_0$, avremo:

$$\frac{n}{2} \frac{t-t_0}{2} = \log \left[\frac{\left\{ \text{tg} \frac{nt - \mathcal{D}_1}{2} + u \right\}^m \left\{ \text{tg} \frac{nt - \mathcal{D}_1}{2} + v \right\}^n \left\{ \left(\text{tg} \frac{nt - \mathcal{D}_1}{2} - \alpha \right)^2 + \beta^2 \right\}^{m_1}}{\left\{ \text{tg} \frac{nt_0 - (\mathcal{D}_1)_0}{2} + u \right\}^m \left\{ \text{tg} \frac{nt_0 - (\mathcal{D}_1)_0}{2} + v \right\}^n \left\{ \left(\text{tg} \frac{nt_0 - (\mathcal{D}_1)_0}{2} - \alpha \right)^2 + \beta^2 \right\}^{m_1}} \right] + 2\beta_1 \left[\arctg \left(\text{tg} \frac{\beta}{\text{tg} \frac{nt_0 - (\mathcal{D}_1)_0}{2} - \alpha} \right) - \arctg \left(\text{tg} \frac{\beta}{\text{tg} \frac{nt - \mathcal{D}_1}{2} - \alpha} \right) \right].$$

Questa equazione implicita che lega la \mathcal{D} al tempo è molto più esatta, di quella che si avrebbe avuta se avessimo adoperato i metodi classici.

L'equazione (80) separate le variabili può scriversi:

$$(93) \quad \frac{d\mathcal{D}_1}{\mathcal{D}_1} = -k^2 \sin 2(nt - \mathcal{D}_1) \cdot dt$$

cioè

$$(94) \quad \frac{d\mathcal{D}_1}{\mathcal{D}_1} = -k^2 \sin 2 \left\{ \arctg \left(\sqrt{\frac{n}{n+2k^2}} \text{tg} \sqrt{n^2 + 2nk^2} t \right) \right\} \cdot dt$$

la quale può porsi, in virtù dell'identità $\sin 2 \arctg \alpha = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$ sotto la forma:

$$(95) \quad \frac{d\mathcal{D}_1}{\mathcal{D}_1} = -2k^2 \sqrt{\frac{n}{n+2k^2}} \frac{\text{tg}(\sqrt{n^2+2nk^2})}{1 + \frac{n}{n+2k^2} \text{tg}^2(t\sqrt{n^2+2nk^2})} dt;$$

quest'ultima, se prendiamo la variabile ausiliare

$$(96) \quad y = \text{tg}(t\sqrt{n^2+2nk^2})$$

donde

$$(97) \quad dy = \sqrt{n^2 + 2nk^2} (1 + \operatorname{tg}^2 t \sqrt{n^2 + 2k^2 n}) dt$$

diviene:

$$(98) \quad \frac{n + 2k^2}{2k^2} \frac{dy}{y} = \frac{2k}{n + 2k^2} \left\{ \frac{ny}{n + 2k^2 + ny^2} - \frac{y}{1 + y^2} \right\} dy.$$

L'integrazione è ora immediata e dà:

$$(99) \quad \frac{y^2}{\alpha^2} = \frac{n + 2k^2 + ny^2}{(n + 2k^2)(1 + y^2)}$$

dove con α indichiamo la costante arbitraria.

Da essa abbiamo con passaggi elementari, che è inutile trascrivere:

$$(100) \quad y = \alpha \sqrt{\cos^2 t (\sqrt{n^2 + 2nk^2}) + \frac{n}{n + 2k^2} \operatorname{sen}^2 t (\sqrt{n^2 + 2nk^2})}.$$

Ricordando che l'origine dei tempi è stata scelta in modo da avere $\mathcal{D}_{L\omega} = 0$, ed ancora (cap. V) in modo che la longitudine media iniziale sia nulla, abbiamo le seguenti:

Leggi delle perturbazioni dell'inclinazione dell'orbita del V satellite sul piano equatoriale di Giove:

I) L'inclinazione, data dalla formola (97), non ha perturbazioni secolari ma solo periodiche.

II) In particolare la durata di un periodo è $\frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 2nk^2}}$, cioè precisamente uguale a quella di una semirivoluzione draconitica del V satellite.

III) L'inclinazione è massima quando il satellite è ai nodi; minima quando esso è a 90° dai nodi.

IV) Il rapporto tra il valore massimo ed il valore minimo dell'inclinazione è dato dalla costante $\sqrt{1 + \frac{2k^2}{n}}$.

CAPITOLO VIII.

Integrazione delle equazioni differenziali nella forma ridotta.

Leggi delle perturbazioni della linea degli apsidi, dell'eccentricità e della longitudine dell'epoca.

Veniamo ora alle perturbazioni della longitudine del perigeo. Riprese le due equazioni:

$$(101) \quad \frac{d\omega_1}{dt} = k^2 \left\{ 1 + \frac{1}{e} \cos(nt - \omega_1) \right\}, \quad \frac{de}{dt} = -k^2 \operatorname{sen}(nt - \omega_1)$$

se dalla prima ricaviamo il valore di ε , differenziamo e paragoniamo con la seconda, otteniamo:

$$(102) \quad \sin(nt - \omega_1) = \left(n - \frac{d\omega_1}{dt} \right) \frac{\sin(nt - \omega_1)}{\frac{d\omega_1}{dt} - k^2} + \frac{\cos(nt - \omega_1)}{\left(\frac{d\omega_1}{dt} - k^2 \right)^2} \frac{d^2\omega_1}{dt^2}$$

Per integrare questa equazione, posto per brevità $nt - \omega_1 = x$ ed $n - k^2 = p$ abbiamo con facili trasformazioni:

$$(103) \quad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} \left(p - \frac{dx}{dt} \right) \operatorname{tg} x + \left(p - \frac{dx}{dt} \right)^2 \operatorname{tg} x = 0$$

la quale facendo $\frac{dx}{dt} = y$ diviene:

$$(104) \quad dy + (p - y) \left(\frac{p - 2y}{y} \right) \operatorname{tg} x \cdot dx = 0$$

dove, quadrando ed indicando con q la costante arbitraria, otteniamo:

$$(105) \quad q^2 \cos^2 x = \frac{(y - p)^2}{2y - p}$$

Prima di andare innanzi cerchiamo di determinare q .

Facciamo $x = nt - \omega_1 = 0$ indichiamo con y_0 il valore che ne risulta per y . Avremo dalla (105):

$$(106) \quad q^2 = \frac{(y_0 - p)^2}{2y_0 - p}$$

Ma si ha:

$$(107) \quad y_0 = \left[\frac{d}{dx} (nt - \omega_1) \right]_{x=0} = \left[n - \frac{d\omega_1}{dt} \right]_{x=0}$$

Ora la prima delle (101) da, quando si ponga $nt - \omega_1 = 0$,

$$(108) \quad y_0 = n - k^2 - \frac{k^4}{\varepsilon}$$

dove:

$$(109) \quad \varepsilon^2 = \frac{k^4}{n\varepsilon^2 - k^2(\varepsilon^2 + 2\varepsilon)}$$

che ci dà il valore cercato: per ε si dovrà adottare naturalmente il valore che assume l'eccentricità quando $nt - \omega_1 = 0$, cioè quando la longitudine media del satellite (data da nt per la scelta fatta sull'origine dei tempi al cap. V) è uguale a quella del perigee.

Posto ora $\cos^2(nt - \omega_1) = u$, abbiamo:

$$(110) \quad \dot{q}^2 u = - \frac{\left[p + \frac{du}{dt} \frac{1}{2\sqrt{u-u^2}} \right]^2}{p + \frac{1}{\sqrt{u-u^2}} \frac{du}{dt}}$$

da cui ricaviamo dopo alcuni passaggi che è inutile trascrivere:

$$(111) \quad p dt = \frac{du}{2\sqrt{u-u^2}} + \frac{q du}{2\sqrt{(1-u)(q^2 u + p)}}$$

da cui, integrando e riponendo per p il valore $u - k^2$ abbiamo:

$$(112) \quad (n - k^2)t = \text{cost} - \text{arc} \left[\text{tg} = \sqrt{\frac{1-u}{u}} \right] - \\ - \text{arc} \left[\text{tg} = \sqrt{\frac{1-u}{u + \frac{n-k^2}{q^2}}} \right]$$

la quale dà infine, passando dalla variabile ausiliaria u all'antica ω_1 , e chiamando con $\omega_{1,0}$ il valore iniziale di ω_1 ,

$$(113) \quad \omega_1 - \omega_{1,0} = k^2 t - \text{arc} \left\{ \text{tg} = \frac{\text{sen}(nt - \omega_1)}{\sqrt{\cos^2(nt - \omega_1) + \frac{n-k^2}{q^2}}} \right\} - \\ - \text{arc} \left\{ \text{tg} = \frac{\text{sen}(\omega_{1,0})}{\sqrt{\cos^2(\omega_{1,0}) + \frac{n-k^2}{q^2}}} \right\}.$$

Essendo $\frac{n-k^2}{q^2}$ quantità positiva il radicale al denominatore sarà sempre reale.

Non discuteremo questa equazione giacchè del moto del perigee è stato già parlato nel cap. IV.

Riprese ancora le equazioni:

$$(114) \quad \frac{d\omega_1}{dt} = k^2 \left\{ 1 + \frac{1}{e} \cos(nt - \omega_1) \right\}, \quad \frac{de}{dt} = -k \text{sen}(nt - \omega_1)$$

differenziando la seconda abbiamo:

$$(115) \quad \frac{d^2 e}{dt^2} = -k^2 \cos(nt - \omega_1) \left\{ n - k^2 - \frac{k^2}{e} \cos(nt - \omega_1) \right\}$$

e poichè la seconda stossa da:

$$(116) \quad \cos(nt - \omega_1) = \sqrt{1 - \sin^2(nt - \omega_1)} = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \left(\frac{de}{dt}\right)^2}$$

abbiamo, sostituendo questo valore nella (115) l'equazione:

$$(117) \quad \frac{d^2 e}{dt^2} = -k^2 \left\{ n - k^2 - \frac{k^2}{e} \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \left(\frac{de}{dt}\right)^2} \right\} \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \left(\frac{de}{dt}\right)^2}$$

di secondo ordine nell'eccentricità, che ora si tratta d'integrare.

A tale scopo eseguiamo la trasformazione:

$$(118) \quad \frac{de}{dt} = x$$

avremo:

$$(119) \quad x \frac{dx}{de} = \frac{k^4}{e} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) - (n - k^2) k^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{k^2}}$$

posto ancora $u^2 = k^4 - \left(\frac{de}{dt}\right)^2 = k^4 - x^2$ avremo infine l'equazione lineare

$$(120) \quad \frac{du}{de} + \frac{u}{e} - n + k^2 = 0,$$

donde integrando

$$(121) \quad u = \frac{1}{2} (n - k^2) e - \frac{c_1}{e},$$

dalla quale, posto $e^2 = y$, ricaviamo:

$$(122) \quad t = \int \frac{dy}{\sqrt{-(n - k^2) y^2 + 4[k^2 + (n - k^2) c_1] y - 4c_1}}.$$

Prima di andare innanzi osserviamo che, se k^2 fosse nullo, essendo e costante ed $u = \frac{de}{dt} = 0$ ci risulterebbe $c_1 = -\frac{1}{2} n e^2$; data quindi la natura del fenomeno fisico essendo nel nostro caso k^2 piccolissima, c_1 risulterà positiva.

Ciò posto le radici del radicando contenuto nella (122) sono certamente reali, e poichè il primo e l'ultimo termine hanno ugual segno, ed il termine medio segno contrario, ambedue positive.

Indicandole per brevità con λ_1' e λ_2' avremo, eseguendo la quadratura, riponendo per y il suo valore e^2 , e chiamando con e_0 il valore di e per $t = t_0$:

$$(123) \quad t - t_0 = -\frac{2}{n - h^2} \arccos \left(\operatorname{tg} = \sqrt{\frac{\lambda_1' - e^2}{e^2 - \lambda_2'}} \right) + \frac{2}{n - h^2} \arccos \left(\operatorname{tg} = \sqrt{\frac{\lambda_1' - e_0^2}{e_0^2 - \lambda_2'}} \right).$$

Devendo il secondo membro essere reale concluderemo:

I) *L'eccentricità dell'orbita del V satellite di Giove è sempre compresa fra due limiti fissi λ_1 e λ_2 che non può mai oltrepassare: in conseguenza l'ellisse istantanea che il satellite descrive si allontana e si avvicina alternativamente alla forma circolare.*

Poichè si ha:

$$(124) \quad \frac{de}{dt} = -h^2 \operatorname{sen}(nt - \omega_1) \quad \frac{d\omega_1}{dt} = -h^2 \left(n - \frac{d\omega_1}{dt} \right) \cos(nt - \omega_1)$$

e $\frac{d\omega_1}{dt}$ è certamente assai piccolo di fronte ad n avremo senza difficoltà la seguente seconda legge:

II) *L'eccentricità del V satellite di Giove raggiunge il valore massimo λ_1 nell'istante in cui esso è alla minima distanza da Giove, ed il valore minimo λ_2 nell'istante in cui esso è alla massima distanza da Giove.*

La durata di un periodo è quindi uguale a quella di una rivoluzione anomalistica.

Prendiamo ora l'equazione differenziale dell'epoca,

$$(125) \quad \frac{de_1}{dt} = 6h^2 \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \varphi_1^2 + \frac{1}{2} \varphi_2^2 + e \cos(nt - \omega_1) - \frac{4}{3} e^2 \cos 2(nt - \omega_1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \varphi_1^2 \cos 2(nt - \varphi_1) \right\} + 3h^2 nt \left\{ -e \operatorname{sen}(nt - \omega_1) + \right. \\ \left. + \frac{8}{3} e^2 \operatorname{sen} 2(nt - \omega_1) - \varphi_1^2 \operatorname{sen} 2(nt - \varphi_1) \right\}.$$

Se ora sostituiamo nel secondo membro per φ_1 , φ_2 , e ω_1 i loro valori trovati in funzione del tempo, il secondo membro diviene una funzione T cognita di t e si ha quadrando:

$$(126) \quad e_1 - e_{t=0} = \int_0^t T dt.$$

La complicazione della $T(t)$ impedisce l'uso dei mezzi analitici e rende più vantaggiose le quadrature meccaniche o grafiche. Ciò non ostante sarà assai facile enun-

ciare le seguenti leggi delle perturbazioni secolari dell'epoca, ricavate trascurando in T i termini periodici:

I) *Indipendentemente dall'eccentricità e , e dall'inclinazione φ_1 , l'epoca ϵ , ha una perturbazione secolare di senso diretto, proporzionale al tempo e data dall'espressione $2k^2t$.*

II) *L'eccentricità dell'orbita del V satellite aumenta questa perturbazione secolare, aggiungendone per suo conto un'altra anche essa di senso diretto, proporzionale al tempo e data prossimamente dalla formola $3k^2e_m^2t$, dove e_m è l'eccentricità non perturbata.*

III) *L'inclinazione φ , dell'orbita del V satellite sul piano equatoriale di Giove, diminuisce invece questa perturbazione secolare, generandone una di senso retrogrado che si sottrae dalla prima e che è data dall'espressione $-3k^2\varphi_m^2t$, dove φ_m indica l'inclinazione non perturbata.*

Trovati i valori della longitudine del nodo ϑ_1 , di quella del perigee ω_1 , di quella dell'epoca ϵ , e dell'inclinazione φ_1 , riferiti al piano equatoriale di Giove, basta usare formole elementari, su cui non c'indagheremo, per avere gli stessi elementi ϑ , ω e φ riferiti però all'ecclittica.

Se vogliamo aggiungere a queste perturbazioni considerevolissime prodotte dallo schiacciamento polare di Giove, quelle assai leggieri dovute all'attrazione solare e degli altri satelliti, che noi abbiamo studiato nei primi due capitoli.

Il problema che ci eravamo proposti è quindi completamente risoluto, ed a cagione della via particolare che abbiamo seguita, le formole date sono più esatte e più semplici di quelle che si sarebbero avute seguendo i metodi classici.

INDICE DELLA MEMORIA

	PAG.
INTRODUZIONE	99
CAPITOLO I. — Perturbazioni prodotte dall'attrazione del Sole	101
• II. — Perturbazioni prodotte nel moto del V satellite dall'attrazione degli altri satelliti di Giove	103
• III. — Espressione delle coordinate perturbate in funzioni ellittiche di WEIERSTRASS	110
• IV. — Campo di variabilità della w e discussione delle equazioni dal lato della realtà	116
• V. — Trasformazione delle formole date col mezzo di serie ϕ di JACOBI a rapida convergenza per il calcolo pratico delle Effemeridi	120
• VI. — Perturbazioni degli elementi ellittici	124
• VII. — Integrazioni delle equazioni differenziali nella forma ridotta. Leggi delle perturbazioni della linea dei nodi e dell'inclinazione	126
• VIII. — Integrazioni delle equazioni differenziali nella forma ridotta. Leggi delle perturbazioni della linea degli apsid, dell'eccentricità e della longitudine dell'epoca	132