

Sull'applicazione del metodo isostatico
alla riduzione delle misure di gravità.

Memoria di G. CASSINIS

(con due tavole).

(presentata dal Socio E. MILLOSEVICH, e approvata dal Socio G. LORENZONI)

§ 1.

Generalità.

L'applicazione del metodo isostatico allo studio completo delle anomalie della gravità è dovuta a J. F. HAYFORD, il quale ne ha fatto l'oggetto di una importante Memoria (*).

Richiamiamo brevemente le ipotesi fondamentali del metodo.

Sia σ una qualsiasi delle superficie parallele internamente al geode, e si consideri una porzione s di σ limitata da un contorno qualunque chiuso e di cui l'area sia S . Si indichi inoltre con M la massa totale racchiusa nello spazio limitato inferiormente da s , lateralmente dalle infinite normali a σ nei punti del contorno di s e superiormente dalla superficie topografica dei continenti o dalla superficie libera dei mari a seconda che s si trova sotto uno dei continenti o sotto un oceano.

Ciò premesso, la prima delle ipotesi che servono di base al metodo isostatico può enunciarsi così: *Esiste una superficie σ , la quale gode della proprietà che la massa M , corrispondente a un determinato valore dell'area S , è costante, qualunque siano la forma di s e la sua posizione su σ .* Una tale superficie dicesi di *compensazione isostatica*, e si chiama analogamente *profondità di compensazione isostatica* il valore H della profondità al disotto del livello del mare che le corrisponde.

In conseguenza di questa ipotesi, al disotto di un continente, a partire dal livello del mare e fino alla superficie di compensazione, dovrà riscontrarsi una deficienza di densità mentre al disotto di un oceano, a partire dal fondo e fino alla superficie di compensazione, si avrà un eccesso di densità.

La seconda supposizione consiste nel ritenere che queste *deficienze o eccessi di densità sianò costanti lungo ogni verticale*. In altre parole: se per es. si tratta di

(*) *The effect of topography and isostatic compensation upon the intensity of gravity* (Comptes Rendus de l'Ass. Géod. Internat. 1910, pp. 265 e segg.).

una porzione di continente di altezza media H_1 , sul livello del mare e di densità media Θ_1 , la densità di compensazione isostatica corrispondente, a partire dal livello del mare e fino alla profondità di compensazione H ($H < 0$), ha il valore costante (negativo)

$$\Delta\Theta = \Theta_1 \frac{H_1}{H};$$

se invece si tratta di una porzione di oceano di profondità media H_2 ($H_2 < 0$) e di densità $\Theta_2 = 1,03$, la densità di compensazione isostatica corrispondente a partire dal fondo dell'oceano e fino alla profondità H , ha il valore costante (positivo)

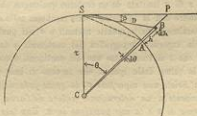
$$\Delta\Theta = (\Theta_2 - \Theta_1) \frac{H_2}{H - H_2}.$$

S 2.

Formola fondamentale.

Per effettuare i calcoli in base a queste supposizioni, l'HAYFORD stabilisce una formola sulla quale crediamo opportuno ritornare per completare il suo metodo e renderlo matematicamente rigoroso senza introdurre altre ipotesi fisiche (*).

Si sostituisca al geoido una superficie sferica di raggio R e sia $r = R + H$, la distanza del punto di stazione S dal centro C della sfera terrestre (v. figura).



Sia inoltre B un punto qualunque situato alla distanza $r + h$ ($h \geq 0$) dal centro C e P il punto di intersezione del raggio CB con l'orizzonte di S . Se indichiamo con k la costante dell'attrazione e adottiamo le notazioni della figura, la componente secondo la verticale di S della forza newtoniana esercitata sull'unità di massa in S dall'elemento di massa dm posto in B , a meno del segno, che stabiliremo opportunamente più avanti, è data dalla relazione

$$(1) \quad df = k \frac{dm \sin \beta}{D^2},$$

nella quale intenderemo tutte le grandezze espresse in unità [C. G. S.].

(*) Lec. cit., pag. 271.

Si effettui la decomposizione della sfera in n spicchi uguali per mezzo di n semipiani passanti per SC e tali che l'angolo compreso tra due successivi sia uguale a $\frac{2\pi}{n}$. Sia θ la distanza angolare di B rispetto a S e si consideri come elemento

di volume quello generato dalla rotazione dell'angolo $\frac{2\pi}{n}$ intorno a SC del rettangolo $(r+h)d\theta dh$, corrispondente agli incrementi infinitesimi $d\theta$ e dh dell'angolo θ e dell'altezza h ; se la materia supposta intorno a B ha la densità costante δ , si ottiene

$$dm = \frac{2\pi r}{n} \delta (r+h)^2 \operatorname{sen} \theta dh d\theta.$$

Inoltre dal triangolo SBP si ricava

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{2(r+h) \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} - h}{D}$$

e dal triangolo SBA,

$$D^2 = 4r(r+h) \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + h^2;$$

per cui, sostituendo nella (1), la forza elementare df assume la forma

$$(2) \quad df = \frac{2\pi k}{n} \delta (r+h)^2 \frac{2(r+h) \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} - h}{\left[4r(r+h) \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + h^2\right]^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sen} \theta dh d\theta.$$

Questa relazione vale qualunque sia il segno di h , cioè tanto se l'elemento di massa dm si considera al di sopra che al di sotto della superficie sferica che passa per S assunta come superficie di riferimento. L'elemento di forza df si annulla per

$$h = \frac{r}{\cos \theta} - r$$

e cambia di segno quando h cresce algebricamente al di sopra di questo limite.

Ponendo nella formula (2)

$$(3) \quad y = \frac{h}{r}, \quad x = \operatorname{sen} \frac{\theta}{2},$$

può scriversi più semplicemente

$$(4) \quad df = \frac{4\pi k \delta r}{n} (1+y)^2 \frac{2x^2(1+y) - y}{[4x^2(1+y) + y^2]^{\frac{3}{2}}} dy d(x^2).$$

Se ora facciamo variare θ tra i limiti θ_1 e θ_2 e h tra i limiti h_1 e h_2 (per il momento, come i precedenti, completamente arbitrari), otteniamo uno dei *compartimenti* nei quali l'HAYFORD suddivide la crosta terrestre. Supponendo che la densità δ (sulla quale nemmeno facciamo per ora ipotesi particolari) sia costante entro tutto il compartimento, la componente verticale dell'attrazione totale esercitata da questo sull'unità di massa in S ha il valore

$$(5) \quad f = \frac{4\pi k \delta r}{a} \int_{y_1}^{y_2} dy \cdot (1+y)^2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{2x^2(1+y) - y}{[4x^2(1+y) + y^2]^{\frac{3}{2}}} d(x^2)$$

$$\left(y_1 = \frac{h_1}{r_1}, y_2 = \frac{h_2}{r_2}; x_1 = \operatorname{sen} \frac{\theta_1}{2}, x_2 = \operatorname{sen} \frac{\theta_2}{2} \right).$$

Nella Memoria citata l'HAYFORD ottiene per il d/f un'espressione analogà alla (2) (per quanto sotto un aspetto un po' più complicato), nella quale il dm non è sostituito nella sua forma esplicita. Però Egli rinuncia a eseguire la quadratura (5) e pur trovando « grossolano e inelegante » (1) il suo procedimento, calcola per ogni compartimento il valore di f come prodotto della costante k e della massa totale m per la media dei valori di $\frac{\operatorname{sen} \beta}{D^2}$ determinati in molti punti del compartimento.

A parte l'eleganza, che non si può raggiungere neanche effettuando la quadratura, perchè i risultati sono sempre piuttosto complicati, il metodo seguito dall'HAYFORD porta, come è ovvio, a un grande dispendio di tempo, perchè non può ritenersi abbastanza preciso se i valori determinati per $\frac{\operatorname{sen} \beta}{D^2}$ non sono in numero molto rilevante. È perciò che ho pensato di eseguire *rigorosamente* la quadratura (5), tanto più che la cosa è ridotta abbastanza semplice per merito delle sostituzioni (3).

Poniamo

$$(6) \quad T = 4x^2(1+y) + y^2,$$

$$J = \int \frac{2x^2(1+y) - y}{T^{\frac{3}{2}}} d(x^2).$$

L'integrazione si effettua con facili trasformazioni e da

$$J = \frac{y + 2x^2}{2\sqrt{T}},$$

e quindi

$$(1+y)^2 J = \frac{y^2 + 2(1+x^2)y^2 + (1+4x^2)y + 2x^2}{2\sqrt{T}}.$$

Questa quantità deve essere limitata tra $x = x_1$ e $x = x_2$, moltiplicata per dy e integrata rispetto a y tra i limiti y_1 e y_2 . L'integrale indefinito, eseguito ope-

(1) Loc. cit., pag. 371.

rando termine a termine sul secondo membro della relazione precedente, può mettersi sotto la forma

$$(7) \quad F(x, y) = \frac{1}{6} \{ y^2 + (3 - 2x^2)y + 2(1 - 6x^2)(1 - x^2) + 1 \} \sqrt{T} - \\ - 2x^2(1 - x^2)(1 - 2x^2) \log_2 \{ y + 2x^2 + \sqrt{T} \};$$

e quindi il valore della componente verticale all'attrazione esercitata su S dalla massa corrispondente a un compartimento è

$$(8) \quad f = \frac{4\pi k \delta r}{n} [\{ F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) \} - \{ F(x_2, y_1) - F(x_2, y_2) \}].$$

A questo risultato si poteva giungere anche calcolando il potenziale v dell'azione esercitata sull'unità di massa posta in S dalla massa che corrisponde a un compartimento, e derivandolo rispetto alla direzione SC. L'elemento di massa dm sopra considerato dà luogo al potenziale

$$dv = k \frac{dm}{D} = \frac{2\pi k \delta (r+h) \sin \theta \, dh \, d\theta}{D};$$

e quindi il potenziale totale è

$$v = \frac{2\pi k \delta}{n} \int_{h_1}^{h_2} (r+h)^2 \, dh \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin \theta \, d\theta}{D} \\ = \frac{2\pi k \delta}{n} \left[\int_{h_1}^{h_2} \frac{r+h}{r} D \, dh \right]_{\theta_1}^{\theta_2}.$$

È conveniente effettuare la derivazione rispetto a r prima di seguire la seconda quadratura; si ottiene allora

$$f = - \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{2\pi k \delta}{n r^2} \left[\int_{h_1}^{h_2} (r+h)^2 \frac{r+h-r \cos \theta}{D} \, dh \right]_{\theta_1}^{\theta_2},$$

dalla quale integrando e effettuando le note sostituzioni, si deduce immediatamente la (8).

§ 3.

Formule derivate dalla fondamentale.

La formula (8) racchiude come caso particolare l'espressione dell'attrazione esercitata da uno strato sferico omogeneo e dall'intera sfera omogenea sopra un punto non interno. Per ottenere l'attrazione esercitata dallo strato omogeneo racchiuso tra le sfere di raggi $r+h_1$ e $r+h_2$ ($h_1, h_2 \leq 0$), bisogna fare $n=1$; $\theta_1=0$, $\theta_2=\pi$, ossia $x_1=0$, $x_2=1$ e tenere ben presente che y_1 o y_2 sono negativi e che i ra-

dicali \sqrt{T} devono esser sempre presi in valore assoluto, Si ha allora

$$f = \frac{4}{3} \pi k \delta r \{ (y_2 + 1)^2 - (y_1 + 1)^2 \}.$$

Da questa espressione si ricava subito l'attrazione esercitata dall'intera sfera di raggio R sul punto esterno S, osservando che in tal caso si ha

$$y_1 = -1, \quad y_2 = -1 + \frac{R}{r}.$$

Ne risulta la formula ben nota

$$f = \frac{4}{3} \pi k \delta R \frac{R^2}{r^2}.$$

Dalla (8) si deduce anche agevolmente la formula che dà l'attrazione esercitata da un cilindro circolare retto su un punto del suo asse. Supponiamo θ abbastanza piccolo perchè si possa ritenere

$$x = \text{sen } \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2},$$

e sostituiamo nella (7) questo valore in luogo di x e $\frac{h}{r}$ in luogo di y . Osserviamo che nel nostro caso la distanza del punto B dalla verticale di S ha il valore

$$d = (r + h)\theta = \theta r \left(1 + \frac{h}{r} \right),$$

e quindi che in luogo del prodotto $r^2 \theta^2$ si può sostituire $d^2 \left(1 - 2 \frac{h}{r} \right)$ trascurando gli altri termini dello sviluppo perchè h è piccolo rispetto a r . Eseguendo le sostituzioni, la (7) assumerà la forma seguente

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{6r} \left[\frac{h^2}{r^2} + \left\{ 3 - \frac{d^2}{r^2} \left(1 - 2 \frac{h}{r} \right) \right\} \frac{h}{r} + \right. \\ & + 2 \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{d^2}{r^2} \left(1 - 2 \frac{h}{r} \right) \right\} \left\{ 1 - \frac{d^2}{4r^2} \left(1 - 2 \frac{h}{r} \right) \right\} + 1 \right] \sqrt{d^2 \left(1 - \frac{h}{r} \right) + h^2} - \\ & - \frac{d^2}{2r^2} \left(1 - 2 \frac{h}{r} \right) \left\{ 1 - \frac{d^2}{4r^2} \left(1 - 2 \frac{h}{r} \right) \right\} \left\{ 1 - \frac{d^2}{2r^2} \left(1 - 2 \frac{h}{r} \right) \right\} \times \\ & \times \log_2 \frac{2}{r} \left[h + \frac{d^2}{r} \left(1 - 2 \frac{h}{r} \right) + \sqrt{d^2 \left(1 - \frac{h}{r} \right) + h^2} \right]. \end{aligned}$$

Per avere l'attrazione esercitata su S dalla porzione di strato cilindrico limitato da due piani assiali formanti tra loro l'angolo $\frac{2\pi}{n}$, dalle due superficie cilindriche di raggi d_1 e d_2 e dai due piani orizzontali alle altezze h_1 e h_2 rispetto a S, bisogna

limitare l'espressione precedente tra h_1 e h_2 , poi tra d_1 e d_2 , sostituire il risultato nella parentesi quadra della (8) e passare al limite per $r = \infty$. Il passaggio al limite si può eseguire subito dopo effettuata la prima limitazione (previa moltiplicazione per r). Si ottiene allora

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r[F]_{h_1}^{h_2} = \sqrt{d_1^2 + h_1^2} - \sqrt{d_2^2 + h_1^2},$$

e quindi

$$(9) \quad \lim f = \frac{2\pi k d}{n} \left\{ (\sqrt{d_1^2 + h_1^2} - \sqrt{d_2^2 + h_1^2}) - (\sqrt{d_1^2 + h_2^2} - \sqrt{d_2^2 + h_2^2}) \right\}.$$

La formula che dà l'attrazione esercitata da una porzione di cilindro su un punto del suo asse, si ricava immediatamente da questo ponendo $d_1 = 0, n = 1$.

Allo scopo di eseguire con maggior rapidità i calcoli relativi a zone sufficientemente lontane dal punto di stazione, si può ottenere dalla (8) una formula approssimata molto semplice.

Si può scrivere

$$T = 4x^2 \left[1 + \left(1 + \frac{y}{4x^2} \right) y \right],$$

e quindi, supponendo y piccolo rispetto a x , si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{T} &= 2x \left[1 + \left(1 + \frac{y}{4x^2} \right) \frac{y}{2} - \left(1 + \frac{y}{4x^2} \right)^2 \frac{y^2}{8} + \left(1 + \frac{y}{4x^2} \right)^3 \frac{y^3}{16} - \dots \right] \\ &= 2x \left[1 + \frac{y}{2} - \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \frac{y^2}{8} - \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \frac{y^3}{16} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Arrestiamo lo sviluppo all'ultimo termine scritto e sostituiamo questo valore di \sqrt{T} nel secondo membro della relazione (7). L'argomento del logaritmo diventa

$$4x(1+x) \left[1 + \frac{y}{2x} + \frac{1-x}{8x^2} y^2 - \frac{1-x}{16x^2} y^3 \right];$$

per cui il logaritmo stesso può spezzarsi nella somma di due logaritmi dei quali il primo dipende soltanto dalla variabile x . Questo termine, moltiplicato per il coefficiente $-2x^2(1-x^2)(1-2x^2)$, dà ancora un termine che dipende solamente da x e che possiamo fare a meno di prendere in considerazione, perchè sparisce eseguendo la limitazione della F tra y_1 e y_2 . Il secondo termine della espressione di F si riduce quindi al seguente

$$-2x^2(1-x^2)(1-2x^2) \log_e \left[1 + \frac{y}{2x} + \frac{1-x}{8x^2} y^2 - \frac{1-x}{16x^2} y^3 \right].$$

I termini che seguono il primo nell'argomento del logaritmo danno una somma inferiore all'unità, per cui il logaritmo stesso può svilupparsi in serie secondo le potenze

intero e positive di questa somma. Arrestando lo sviluppo ai termini in y^3 , si ottiene per la quantità sopra scritta il valore

$$(10) \quad -xy(1-x^2)(1-2x^2) \left[1 - \frac{7}{4} - \frac{1-3x^2}{24x^2} y^3 \right].$$

Si eseguiscano le riduzioni opportune nel primo termine del secondo membro della (7), sempre trascurando i termini contenenti potenze di y superiori alla terza e quelli contenenti la sola x ; e infine si sostituisca in luogo del secondo termine della (7) l'espressione (10); si otterrà facilmente

$$F = \frac{1}{2} xy \left[1 + \frac{1+3x^2}{4x^2} y + \frac{5+3x^2}{24x^2} y^3 \right].$$

Tutte le volte che il termine $\frac{y^3}{4x^2}$ è trascurabile rispetto all'unità, si può dunque ritenere

$$(11) \quad F = \frac{1}{2} xy \left[1 + \frac{1+3x^2}{4x^2} y \right].$$

§ 4.

Riassunto delle formule da usare.

Le formule ottenute si possono riunire nell'unica seguente

$$(1) \quad f = -\frac{4\pi k R d}{s} \left[[F(\xi, h)]_{\xi_1}^{\xi_2} \right]_{h_1}^{h_2},$$

nella quale k è la costante dell'attrazione universale; ξ rappresenta una delle variabili d, θ ; h è la quota relativa contata a partire dalla superficie di livello passante per il punto di stazione, positivamente verso l'esterno e negativamente verso l'interno della Terra; è infine il segno $-$ è stato introdotto per una ragione che vedremo tra poco (¹).

Nei casi in cui può applicarsi la formula dei cilindri, si ha:

$$F(\xi, h) = F(d, h) = \frac{1}{2R} \sqrt{d^2 + h^2},$$

(¹) In questa e nelle formule successive si è sostituito il raggio terrestre R in luogo del raggio $r = R + H$, corrispondente al punto di stazione. La sostituzione è lecita, perché, data la piccolezza di H , rispetto a R , l'errore relativo commesso per esempio nella valutazione del fattore esterno del secondo membro della (1) è trascurabile: infatti esso è dato dal rapporto $\frac{H}{R+H}$, che per il massimo valore $H_1 = 5 \text{ Km}$ è inferiore a $\frac{1}{1250}$. Analogamente per i rapporti $\frac{h}{R}$.

e quindi:

$$(a) \quad f = -\frac{2\pi k\delta}{n} \left[\sqrt{d_1^2 + h^2} - \sqrt{d_1^2 + h^2} \right]_{h_1}^{h_2};$$

quando invece si può applicare la formula approssimata (11), si ha:

$$F(\xi, h) = F(\theta, h) = \frac{1}{2} \frac{h}{R} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{1 + 3 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} \frac{h}{R} \right),$$

e quindi

$$(b) \quad f = -\frac{2\pi k\delta}{n} \left[h \operatorname{sen} \frac{\theta_2}{2} \left(1 + \frac{1 + 3 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta_2}{2}}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta_2}{2}} \frac{h}{R} \right) - \right. \\ \left. - h \operatorname{sen} \frac{\theta_1}{2} \left(1 + \frac{1 + 3 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta_1}{2}}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta_1}{2}} \frac{h}{R} \right) \right]_{h_1}^{h_2};$$

e infine nel caso generale si ha:

$$F(\xi, h) = F(\theta, h) = \frac{1}{6} \left\{ \frac{h^2}{R^2} + \left(3 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) \frac{h}{R} + \right. \\ \left. + 2 \left(1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) \left(1 - 6 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) + 1 \right\} \sqrt{T} - \\ - \frac{2}{\mu} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) \left(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right) \log \left\{ \frac{h}{R} + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + \sqrt{T} \right\},$$

dove μ è il modulo dei logaritmi decimali, e T ha il valore

$$T = 4 \left(1 + \frac{h}{R} \right) \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + \frac{h^2}{R^2},$$

e quindi

$$(c) \quad f = -\frac{4\pi k R \delta}{n} \left[[F(\theta, h)]_{h_1}^{h_2} \right];$$

Tutti i radicali che compariscono in queste formule devono esser presi in valore assoluto.

§ 5.

Calcolo delle correzioni.

Le formule precedenti servono per il calcolo delle correzioni da applicare al valore osservato della gravità in S per tener conto della forma topografica della superficie terrestre e della compensazione isostatica.

Suddivisa la superficie della Terra in compartimenti trapezoidali nel modo sopra detto, per il calcolo delle correzioni relative a ogni compartimento devono considerarsi due casi distinti:

- 1) Compartimento tutto situato sotto un continente;
- 2) Compartimento tutto situato sopra un oceano.

Nel caso 1) si procede così: sia H_1 (> 0) l'altezza media del compartimento sul livello del mare (misurata positivamente verso l'esterno della Terra) e $\Theta_1 = 2,67$ la densità media del massiccio continentale; sia inoltre H_2 l'altezza sul livello del mare del punto di stazione S.

Ricordando che le quote relative h (e quindi i limiti h_1 e h_2 delle formule del paragrafo precedente) sono misurate a partire dalla superficie di livello passante per il punto di stazione S, positivamente verso l'esterno e negativamente verso l'interno della Terra, la correzione topografica relativa al compartimento si ottiene ponendo nelle (a), (b), (c):

$$h_1 = -H_2, \quad h_2 = H_1 - H_2, \quad \delta = \Theta_1;$$

la correzione isostatica, dovuta a materia distribuita con la densità costante (negativa) $\Theta_2 \frac{H_1}{H}$ dal livello del mare fino alla profondità di compensazione H (< 0), si ottiene invece ponendo nelle (a), (b), (c):

$$h_1 = H - H_2, \quad h_2 = -H_2, \quad \delta = \Theta_2 \frac{H_1}{H}.$$

Riguardo al segno col quale le correzioni così calcolate devono essere applicate al valore osservato della gravità, noteremo che, p. es. nel caso topografico, la (8) del § 2 dà la componente dell'attrazione esercitata dalla massa (positiva) che si considera col segno + quando essa agisce da S verso il centro della Terra (cioè nello stesso senso secondo il quale agisce la gravità in S). Le correzioni dovranno quindi applicarsi col segno contrario a quello che risulta dalla (8) e derivate; o meglio ci converrà, per ottenerle ogni volta in valore e segno, cambiare addirittura quest'ultimo nelle formule da usare. Ciò rende ragione del segno — introdotto nella (1), la quale, lo ripetiamo, dà le correzioni da applicarsi al valore osservato della gravità in S col segno che loro compete (*).

(*) A differenza di quanto fa l'HAYMOND, noi preferiamo applicare le correzioni al valore osservato della gravità in modo da ottenere una quantità paragonabile con quella che risulta dalla formula di HALMAYR del 1901.

Nel caso 2) il procedimento per il calcolo delle correzioni è il seguente. Sia H_1 (< 0) la profondità media del compartimento rispetto al livello del mare (misurata negativamente verso l'interno della Terra) e $\Theta_1 = 1,03$ la densità media del mare; sia ancora H_2 la quota del punto di stazione S. La *correzione topografica* relativa al compartimento si può calcolare osservando che in tutto lo spazio occupato dalle acque si ha un difetto di densità $\Theta_2 - \Theta_1 = -1,64$, e quindi nelle (a), (b), (c) bisognerà porre

$$h_1 = H_1 - H_2, \quad h_2 = -H_2, \quad \delta = \Theta_2 - \Theta_1;$$

la *correzione isostatica*, dovuta a materia distribuita con la densità costante (positiva) $(\Theta_1 - \Theta_2) \frac{H_1}{H - H_2}$ dal fondo del mare, corrispondente alla profondità H_1 (< 0), fino alla profondità di compensazione H (< 0), si otterrà invece ponendo nelle (a), (b), (c)

$$h_1 = H - H_2, \quad h_2 = H_1 - H_2, \quad \delta = (\Theta_1 - \Theta_2) \frac{H_1}{H - H_2}.$$

In questo modo si ottiene la gravità che si avrebbe qualora la Terra fosse ridotta in condizione isostatica, cioè fossero tolti i continenti e al disotto di essi fosse aggiunto uno strato di profondità H e di densità $\delta = \Theta_1 \frac{H_1}{H}$, e così pure fossero riempiti i mari con materia di densità $\Theta_1 = 1,03$ e al disotto del loro fondo fosse tolto uno strato di profondità $H - H_2$ e di densità $\delta = (\Theta_1 - 1,03) \frac{H_2}{H - H_2}$. Questa condizione, diremo così *isostatica*, supposta dall'HAYFORD è però diversa da quella considerata dall'HELMERT, il quale suppone che tutta la Terra sia ricoperta da un mare della profondità di Km 3,5 (1).

§ 6.

Valori numerici e costruzione delle tabelle.

Il calcolo delle espressioni f , eseguito applicando le formole (a), (b), (c), è cosa molto lunga, tanto più che esso deve essere ripetuto per un gran numero di compartimenti onde avere con qualche sicurezza la correzione totale relativa fatta in S. Per rendere più spedito il computo di questa correzione ho costruito delle tabelle che danno i valori delle espressioni

$$-4\pi k R \left[[F(\xi, h)]_{R_1}^2 \right],$$

(1) Die Schwerkraft und die Massenverteilung der Erde (Encyklop. der Math. Wiss. Bd VI: B Heft 2, pag. 140).

corrispondenti a 39 zone nelle quali ho diviso la superficie terrestre e a un certo numero di valori (positivi e negativi) della *quota relativa* h .

Le tabelle I e II servono per il computo delle correzioni topografica e isostatica tra $\theta = 0$ e $\theta = 1^\circ$ e sono calcolate con la formula dei cilindri (a) (*); le tabelle III e IV servono per lo stesso computo tra $\theta = 1^\circ$ e $\theta = 180^\circ$ e son calcolate in parte con la formula approssimata (b) e in parte con la formula completa (c).

A questo proposito osserviamo che la formula (b) può applicarsi, come si è visto, tutte le volte che il termine

$$\frac{g^2}{4s^2} = \frac{h^2}{4R^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}$$

è trascurabile rispetto all'unità, ciò che noi riterremo avvegnà quando esso è inferiore a 0,01. Tra θ e h dovrà allora passare la relazione

$$\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} > \frac{5h}{R}.$$

Nel caso della correzione topografica il massimo valore assoluto di h supera raramente i 10 Km (*), quindi la formula (b) si può applicare da $\theta = 1^\circ$ in poi; limiti ben più elevati si troverebbero per la correzione isostatica per la quale ho ritenuto opportuno adoperare la formula completa (c) da $\theta = 1^\circ$ in poi.

I valori delle quantità costanti che compariscono nei calcoli sono gli stessi usati dall'Hayford, e cioè

$$k = 6673 \cdot 10^{-11} \text{ [C. G. S.]}, \quad R = 637 \cdot 10^6 \text{ cm.}$$

Per la profondità della compensazione isostatica H , l'Hayford assume nella sua

(*) La curvatura della terra non ha effetto sensibile (nei nostri limiti di approssimazione) fino alla distanza $s = 111$ Km circa corrispondente a $\theta = 1^\circ$. Ciò si verifica immediatamente nel modo che segue. Sia $H_s = 0$, ma tutte intorno alla stazione fino alla distanza suddetta si elevi un altipiano di quota $H = 1$ Km. La correzione topografica relativa si può calcolare sommando tutti i numeri scritti nella linea corrispondente a $h = +1$ nelle tabelle I e II e moltiplicando quella somma per la densità δ della materia che costituisce l'altipiano: si ottiene così il valore

$$+ 4170 \delta \quad (\text{unità della } 5^{\text{a}} \text{ cifra decimale}).$$

Ma si può anche eseguire il calcolo rigoroso di tale correzione con la formula (c) che tiene conto della curvatura terrestre: si ottiene allora

$$+ 4138 \delta \quad (\text{unità della } 5^{\text{a}} \text{ cifra decimale}).$$

L'errore relativo commesso in questo caso limite con l'uso della formula dei cilindri è quindi inferiore a $\frac{1}{130}$, cioè trascurabile.

(*) Per una stazione a 4-5 Km sul livello del mare in corrispondenza a un compartimento di cui la profondità media sia di 5-6 Km.

Memoria il valore Km 113,7 derivante dai calcoli eseguiti nel 1906 (*), ma nota che gli ultimi calcoli del 1909, basati sopra un maggior numero di punti, accrescono questo valore fino a Km 122,2 (**). D'altra parte il prof. HELMERT da alcune formule relative alle anomalie della gravità in vicinanza delle coste dei continenti ha dedotto per H il valore Km 118,0 (†). Per eseguire i miei calcoli io ho adottato il valore medio degli ultimi risultati

$$H = -120 \text{ Km.}$$

il quale certo non deve essere molto lontano dal vero (*).

Come si nota subito osservando le tabelle, i valori di d prima e poi quelli di θ procedono secondo una legge empirica tale che, allontanandosi dal centro di stazione, l'ampiezza di ogni zona vada progressivamente crescendo. Non ho adottata la ripartizione dell' HAYFORD, perchè, essendo per necessità di cose basata sopra altri criteri, non soddisfaceva alle condizioni suesposte e procedeva alquanto saltuariamente. Per ogni zona il calcolatore dispone del numero n dei compartimenti che è in suo arbitrio aumentare a piacere in modo da poter determinare con la voluta precisione la quota media di ognuno.

Le colonne intestate con A contengono le differenze tra due valori successivi della funzione scritte nelle tabelle. Il numero dei valori di h preso in considerazione nelle varie tabelle dipende da due fatti: l'irregolarità dell'accrescimento delle funzioni e la precisione che è necessaria nella determinazione di h . Mano a mano che ci si allontana dal centro di stazione l'andamento delle funzioni diventa sempre più regolare e diminuisce la precisione necessaria nella determinazione di h (vedi più avanti), per cui il numero dei valori di h che compariscono nella tabella IV è notevolmente inferiore a quello della tabella I.

Una breve istruzione che precede le tabelle ne rende facile l'uso e inoltre una piccola tabella sussidiaria dà i valori della densità di compensazione in corrispondenza di vari valori dell'altezza (o della profondità) media dei compartimenti, e serve ad agevolare il calcolo dei prodotti delle quantità determinate precedentemente per il fattore $\frac{d}{h}$.

Infine noterò che, avendo introdotto nei calcoli tutte le grandezze espresse nel sistema [C. G. S.], anche i risultati sono nello stesso sistema e cioè, interpretando g come un'accelerazione, in $\frac{\text{cm}}{1000}$. La quinta cifra decimale è calcolata col solo scopo di avere con esattezza, nelle sottrazioni, la quarta cifra. Per ogni compartimento si

(*) *The Figure of the Earth and Isostasy from Measurements in the United States* (Coast and Geodetic Survey, 1909).

(**) *Supplementary Investigation in 1909 of the Figure of the Earth and Isostasy* (Coast and Geodetic Survey, 1910).

(†) *Die Schwerkraft und die Massenverteilung der Erde*, pag. 140.

(*) Sarebbe facile vedere che una differenza di 2--3 Km nel valore di H non ha influenza sensibile sul valore delle correzioni.

otterrà quindi, dalla somma algebrica delle due correzioni topografica e isostatica che gli sono relative, un certo numero di unità della quarta cifra decimale del cm. preceduto dal segno + o dal segno -. La somma algebrica di queste quantità, estesa a tutti i compartimenti in cui si è suddivisa la superficie terrestre, darà in valore e segno la correzione totale da apportare al valore osservato della gravità, correzione che si esprime solitamente in unità della terza cifra decimale del cm.

Dalle tabelle costruite, che non consentono la più grande speditezza nei calcoli, avrei potuto ottenerne altre del tipo di quelle usate dall' HAYFORD, tali che dessero addirittura la correzione totale (topografico-isostatica) relativa ai vari compartimenti. Ciò non ho fatto perchè ho voluto lasciare la possibilità di calcolare la correzione topografica totale separatamente dalla isostatica e inoltre perchè con le mie tabelle è possibile introdurre in calcolo, per le zone più prossime alla stazione, la densità che loro compete, la quale può essere notevolmente diversa dalla media adottata per tutta la crosta terrestre. Noterò infine che il tempo impiegato per il computo relativo a una stazione non risulta molto superiore a quello accennato dall' HAYFORD (*) quando si debbano effettuare successivamente i calcoli relativi a più stazioni.

§ 7.

Applicazione: anomalia della gravità a Roma.

Come applicazione di quanto precede ho eseguito il computo delle correzioni topografica e isostatica da applicarsi al valore della gravità determinato in Roma (S. Pietro in Vineoli) dai professori PISATI e PUCCI (*).

La suddivisione della superficie terrestre in zone sferiche, aventi per polo il punto di stazione si effettua ricorrendo a carte topografiche nelle immediate vicinanze della stazione, corografiche per distanze un po' più grandi, geografiche da quando il raggio dei cerchi limitanti le zone si avvicina a 1° in poi. Ora, se nei primi casi i cerchi sulla sfera si trasformano con grandissima approssimazione in cerchi sulla carta, lo stesso non avviene negli ultimi nei quali è necessario adoperare carte a scala piccola e rappresentazioni dell'intera superficie terrestre in proiezione di Mercatore o equivalente. Ma è facile tracciare per punti le curve corrispondenti ai cerchi in parola.

Siano infatti (φ_0, ω_0) le coordinate geografiche del punto di stazione e si supponga sempre la terra sferica. L'equazione del cerchio di centro S corrispondente

(*) 15 ore circa.

(*) V. BERNA, *Sulla lunghezza del pendolo semplice a secondi in Roma*. Memoria della R. Acc. dei Lincei, serie 5^a, vol. I, 1894.

alla distanza angolare θ , si può mettere sotto la forma

$$\cos(\omega - \omega_s) = \frac{\cos \theta}{\cos \varphi_s \cos \varphi} - \operatorname{tg} \varphi_s \operatorname{tg} \varphi;$$

invece l'equazione del cerchio massimo per S che forma l'angolo α col meridiano, è la seguente

$$\cos \varphi_s \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{sen} \varphi_s \cos(\omega - \omega_s) + \cot \alpha \operatorname{sen}(\omega - \omega_s).$$

Le coordinate dei punti di incontro delle due curve si ricavano facilmente dalle equazioni precedenti o meglio dalle altre

$$(II) \quad \begin{cases} \operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} \varphi_s \cos \theta \pm \cos \varphi_s \operatorname{sen} \theta \cos \alpha \\ \operatorname{sen}(\omega - \omega_s) = \pm \frac{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha}{\cos \varphi} \end{cases}$$

che loro equivalgono. In queste formule compariscono i parametri θ e α , dei quali il primo deve assumere i valori (compresi tra 1° e 180°) che sono riportati nelle tabelle III e IV. Dando a α un determinato valore e calcolando i valori di φ , ω che corrispondono a tutti i θ , noi possiamo costruire per punti sulla carta una curva che parte da S, passa per il punto antipodo S' e ritorna in S, cioè una curva che corrisponde a un cerchio massimo per S e quindi può servire per suddividere in compartimenti le zone determinate dai successivi valori di θ .

Servendomi delle formule (II) e dando a α successivamente i valori $0,22^\circ 30'$, 45° , $67^\circ 30'$, 90° , ... ho potuto tracciare i due sistemi di curve:

da $\theta = 1^\circ$ fino a $\theta = 3^\circ 56'$ sulla carta d'Italia 1:3000000 dell'atlante ANDREES;

da $\theta = 3^\circ 56'$ fino a $\theta = 8^\circ 50'$ sulla carta d'Europa 1:15000000 dell'atlante STIELER (v. tav. I);

da $\theta = 8^\circ 50'$ fino a $\theta = 180^\circ$ sulla carta in proiezione di Mercatore dello stesso atlante STIELER e su quella in proiezione equivalente dell'atlante ANDREES (v. tav. II).

Nei primi due casi le curve limitanti le varie zone ($\theta = \text{cost}$) si avvicinano ancora tanto a delle circonferenze che ho potuto sostituirle con queste ultime; invece le curve limitanti i compartimenti ($\alpha = \text{cost}$) cominciano ben più presto a scostarsi dalle rette uscenti da S e già sulla carta d'Europa 1:15000000 è sensibile la loro curvatura.

Con questo procedimento e dando a α i valori suddetti, ogni zona viene divisa in 16 compartimenti, numero più che sufficiente per ottenere una buona approssimazione nell'altezza (o profondità) media di ognuno. Noterò anzi, e questo può vedersi anche

dallo specchio che segue, che per le zone più prossime alla stazione (la cui area è molto piccola) e per le più lontane (nelle quali non ha importanza una esatta determinazione della quota media), il numero n dei compartimenti ha potuto essere ridotto senza discapito della precisione.

La quota media di ogni compartimento si determinò facendo la media aritmetica della quota più alta e della più bassa che in esso si trovavano (*): quando il compartimento era situato in parte sulla terra e in parte sul mare se ne tenne conto stimando le due frazioni di area corrispondenti e riducendo proporzionalmente le correzioni relative.

Come è ovvio la quota media deve essere determinata entro pochi metri in immediata vicinanza della stazione, e ciò è possibile in generale, quando si posseggono buone carte topografiche, data la piccolezza dei compartimenti. A grandi distanze, per esempio nelle ultime zone XVII, XVIII, XIX, un errore anche di 1-2 km non ha importanza se si ha di mira soltanto la correzione complessiva topografico-isostatica; ma se si vogliono prendere in considerazione separatamente le due correzioni bisogna procedere con maggiori cautele e aumentare il numero dei compartimenti rispetto a quello che sarebbe strettamente necessario per il calcolo della correzione complessiva. Naturalmente l'imperfetta conoscenza di ancora molte estese regioni della terra e del fondo dei mari porta a commettere degli errori che non è possibile, per ora, eliminare.

Nello specchio seguente è riassunto il computo delle correzioni da me fatto per Roma con l'indicazione delle carte usate per ogni zona.

(*) Analogamente a quanto fanno i geografi e a quanto fece lo STERNCK (*Die Schwerkraft in den Alpen* ecc. Mitth. des k. u. k. Militär-geogr. Institutes, Bd. XI, 1891, pag. 214).

*Calcolo delle correzioni topografica e isostatica relative alla stazione gravimetrica
dei prof. Pisani e Pucci in Roma.*

Quota della stazione $H_0 = 59$ metri.

n	Correzione			CARTE ADOPERATE	
	topografica	isostatica	totale		
(unità della 4a cifra decimale del $\frac{mm}{sec^2}$)					
1	1	- 5	0	- 5	Carta di Roma 1:5000 dell'Istituto Geogr. Militare.
2	1	- 12	0	- 12	
3	4	- 19	0	- 19	
4	4	- 8	0	- 8	
5	5	- 3	0	- 3	
6	8	- 2	0	- 2	Carta di Roma e dintorni 1:20000 dell'Istituto Cartografico Calzone.
7	8	- 1	0	- 1	
8	8	0	0	0	
9	8	0	0	0	
10	8	0	0	0	Carta d'Italia 1:100000 dell'Istituto Geogr. Militare.
11	8	0	0	0	
12	8	0	+ 1	+ 1	
13	8	0	+ 2	+ 2	
14	8	0	+ 2	+ 2	
15	8	0	+ 6	+ 6	Carta d'Italia 1:500000 dell'Istituto Geogr. Militare.
16	8	0	+ 14	+ 14	
17	8	+ 1	+ 22	+ 23	
18	8	+ 1	+ 29	+ 30	
19	16	+ 1	+ 39	+ 40	Carta d'Italia 1:1500000 dell'Atlante Andreea.
20	16	0	+ 37	+ 37	
I	16	- 1	+ 18	+ 17	
II	16	+ 2	- 18	- 16	Carta d'Italia 1:3000000 dell'Atlante Andreea.
III	16	+ 3	- 26	- 23	
IV	16	+ 2	- 13	- 11	
V	16	+ 1	- 6	- 5	
VI	16	- 5	+ 20	+ 15	Carta d'Europa 1:15000000 dell'Atlante Stieler (con frontata con la carta d'Europa 1:12000000 dell'Atlante Andreea e con le altre carte dei due Atlanti).
VII	16	- 6	+ 17	+ 11	Carta dell'intera superficie terrestre dell'Atlante Andreea (proiezione equivalente) (col concorso delle altre carte dei due Atlanti Stieler e Andreea).
VIII	16	- 10	+ 20	+ 10	
IX	16	- 8	+ 13	+ 5	
X	16	- 6	+ 8	+ 2	
XI	16	- 2	+ 3	+ 1	
XII	16	- 10	+ 11	+ 1	
XIII	16	+ 12	- 13	- 1	
XIV	8	+ 8	- 8	0	
XV	8	+ 24	- 24	0	
XVI	8	- 101	+ 101	0	
XVII	8	+ 169	- 169	0	
XVIII	4	+ 225	- 230	- 2	
XIX	1	+ 192	- 190	+ 2	
Somma		+ 445	- 334	+ 111	

Questo specchio mostra quanta importanza abbiano, sotto il punto di vista puramente topografico, le grandi masse acquee dell'emisfero opposto al nostro. Quando si volesse astrarre dall'ipotesi isostatica e effettuare la sola correzione topografica non è quindi lecito limitarsi a brevi distanze di 15 ÷ 20 km intorno alla stazione, ma bisogna estendere il computo a tutta la superficie terrestre.

Il valore ottenuto per la correzione totale ci consente di calcolare l'anomalia della gravità a Roma col nuovo metodo.

Il valore della gravità osservato è (*)	= 980,3429 $\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$
A esso bisogna applicare la correzione + 0,3086 (H, in km) per ridurlo a livello del mare, e la correzione topografico-isostatica sopra calcolata	= + 0,0182 + 0,0111
Si ottiene così il <i>valore calcolato</i> della gravità a Roma ridotta al livello del mare	g = 980,3722
Dalla formula di HELMERT del 1901	
$\gamma_s = 978,046 \{1 + 0,005302 \text{sen}^2 \varphi - 0,000007 \text{sen}^2 2\varphi\}$,	
nella quale si ponga $\varphi = 41^\circ.53'.35''$ (latitudine del luogo d'osservazione), si deduce il <i>valore teorico</i> della gravità a Roma e al livello del mare	$\gamma_s = 980,3512$
Ne risulta l' <i>anomalia locale</i>	$\Delta g = + 0,0210$

Le anomalie ottenute con i metodi finora in uso sono invece le seguenti (*):

$\Delta g' = + 0,0099$	col metodo del FAYE (tenendo conto della sola altezza della stazione sul mare),	
$\Delta g'' = + 0,0029$	col metodo di BOUGUER (che tiene conto di una parte della correzione topografica).	

L'anomalia che risulta col nuovo metodo è quindi alquanto superiore a quelle determinate con i metodi antichi, ma ciò non presenta niente di strano perchè si verifica anche per alcune stazioni considerate dall'HAYFORD, le quali si trovano in condizioni topografiche analoghe a quelle di Roma. I valori assoluti di queste anomalie sono del resto molto piccoli e non ci possono dare da soli una indicazione sulla bontà del metodo. La quale si manifesta, come ha mostrato l'HAYFORD sopra tutto per le stazioni in alta montagna, in vicinanza degli oceani e sugli oceani stessi, per le quali le anomalie ottenute con gli antichi metodi hanno dei valori molto grandi, che si riducono in modo notevole con l'applicazione dei principi ora svolti.

(*) V. ERINA, loc. cit., pag. 81.

(*) Id., pp. 83-84. I valori delle anomalie dati dal prof. ERINA sono stati modificati introducendo per la gravità teorica il valore γ_s ricavato dalla formula del prof. HELMERT del 1901.

TABELLE PER IL CALCOLO DELLE CORREZIONI TOPOGRAFICA E ISOSTATICA
DA APPORTARE AI VALORI OSSERVATI DELLA GRAVITÀ.

Uso delle tabelle.

Nelle seguenti tabelle h è la quota media (relativa) del compartimento che si considera contata a partire dalla superficie di livello che passa per il punto di stazione, positivamente verso l'esterno della Terra (§ 5).

L'intera superficie terrestre è stata divisa in 39 zone per mezzo di cerchi aventi per centro il punto di stazione. Ogni zona è rappresentata con un numero arabo (dall'1 al 20) finchè i raggi dei cerchi che la limitano (d_1 e d_2) sono espressi in km; con un numero romano (dall'I al XIX) quando i raggi dei cerchi che la limitano (θ_1 e θ_2) sono espressi in gradi.

Per avere in valore e in segno la correzione dovuta a un compartimento (frazione di zona) limitato alle altezze h_1 e h_2 ($h_1 < h_2$), la cui determinazione nei singoli casi è esposta nel § 5, si fa la differenza tra il numero delle tabelle, che corrisponde a h_2 e quello che corrisponde a h_1 (prendendo questi due numeri nella colonna relativa alla zona alla quale appartiene il compartimento) e la si moltiplica per $\frac{\delta}{n}$ dove δ è la densità e n il numero dei compartimenti in cui è stata divisa la zona. Per la correzione topografica si può prendere in media $\delta = 2.67$ quando il compartimento è continentale e $\delta = -1.64$ quando è oceanico; per la correzione isostatica si adoperano nei due casi i valori dati dal seguente specchietto, dove H_1 e H_2 sono le quote medie dei compartimenti rispetto al livello del mare (contate positivamente verso l'esterno, e $H = -120$ km è la profondità di compensazione isostatica.

I valori delle costanti che compariscono nelle formule sono i seguenti:

$$K \text{ (costante dell'attrazione) } = 6673.10^{-11} \text{ [C. G. S.]}$$

$$R \text{ (raggio terrestre) } = 637.10^6 \text{ cm.}$$

Valori delle densità di compensazione δ ($H = -120$ Km).

H_1	$\delta = 2,67 \frac{H_1}{H}$	H_2	$\delta = 1,64 \frac{H_2}{H - H_1}$	H_1	$\delta = 2,67 \frac{H_1}{H}$	H_2	$\delta = 1,64 \frac{H_2}{H - H_1}$
Km		Km		Km		Km	
+ 0,1	- 0,0022	- 0,1	+ 0,0014	+ 1,8	- 0,0400	- 1,8	+ 0,0251
2	44	2	27	2,0	- 0,0445	- 2,0	+ 0,0278
3	67	3	41	2	488	2	307
4	89	4	55	4	534	4	335
5	111	5	68	6	578	6	363
6	133	6	83	8	623	8	392
7	156	7	97	+ 3,0	- 0,0697	- 3,0	+ 0,0420
8	178	8	110	3	712	3	449
9	200	9	125	4	756	4	473
+ 1,0	- 0,0222	- 1,0	+ 0,0139	6	801	6	508
2	267	2	167	8	845	8	538
4	311	4	194	+ 4,0	- 0,0890	- 4,0	+ 0,0566
6	356	6	222	+ 5,0	- 0,1112	- 5,0	+ 0,0713

TABELLA I.

VALORI DI $-2\pi k \left[\sqrt{d_1^2 + d_2^2} - \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \right]$ ESPRESSI IN UNITÀ DELLA 5ª CIFRA DECIMALE DEL 360°

VALORI DI $\frac{1}{k}$	Numeri d'ordine o limiti delle zone										VALORI DI $\frac{1}{k}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$d_1 = 0,01$ $d_2 = 0,01$ Km.	$d_1 = 0,01$ $d_2 = 0,03$	$d_1 = 0,01$ $d_2 = 0,03$	$d_1 = 0,01$ $d_2 = 0,10$	$d_1 = 0,10$ $d_2 = 0,22$	$d_1 = 0,22$ $d_2 = 0,40$	$d_1 = 0,40$ $d_2 = 0,65$	$d_1 = 0,65$ $d_2 = 1,00$	$d_1 = 1,00$ $d_2 = 1,5$	$d_1 = 1,5$ $d_2 = 2,2$	$d_1 = 2,2$ $d_2 = 3,2$	
0,00	0	27	0	16	0	3	0	0	0	0	0,00
,02	32	5	16	35	5	12	5	0	0	0	,02
,04	37	47	31	84	19	14	3	1	0	0	,04
,06	39	58	41	85	35	23	7	5	2	1	,06
,08	39	64	5	114	59	34	12	8	4	2	,08
,10	40	67	5	138	83	39	20	11	7	3	,10
0,15	41	72	5	180	80	47	42	25	10	6	0,15
,20	41	75	5	202	135	41	72	34	27	11	,20
,25	42	77	1	220	173	48	106	36	42	18	,25
,30	42	78	1	269	219	57	142	39	60	26	,30
,35	42	79	1	296	260	67	181	41	80	35	,35
,40	42	80	1	318	297	74	230	47	103	47	,40
,45	42	81	0	326	321	81	257	50	128	59	,45
,50	42	81	0	351	360	89	293	54	155	72	,50
0,60	42	81	0	374	411	99	362	61	212	105	0,60
,70	42	82	0	391	451	109	423	68	274	139	,70
,80	42	82	0	404	484	119	476	75	328	178	,80
,90	42	82	0	419	513	129	523	82	375	223	,90
1,00	42	82	1	424	532	134	560	89	406	268	1,00
0	42	85	0	437	566	144	629	97	491	371	0

0.60	81	1	261	4	374	17	411	89	362	61	357	68	212	42	148	47	103	36	0.60
.70	82	0	265	4	381	18	451	133	422	53	355	65	274	41	155	50	119	38	.70
.80	83	0	269	4	404	11	484	82	476	74	430	62	338	34	247	58	178	30	.80
1.00	82	1	274	3	424	11	532	71	503	64	540	105	400	33	302	100	258	100	1.00
.2	85	0	277	3	437	9	566	58	629	32	641	83	501	116	482	128	371	116	.2
.4	86	0	279	3	446	1	592	30	681	41	726	72	707	135	605	119	481	117	.4
.6	87	0	281	1	453	0	612	13	732	35	798	61	813	97	734	117	598	119	.6
.8	88	0	282	1	459	4	627	12	735	25	859	51	905	84	841	118	717	120	.8
3.0	84	1	283	1	463	3	639	11	738	22	910	64	989	75	951	120	837	120	3.0
.2	84	1	284	1	466	3	650	9	805	19	954	76	1004	67	1084	121	956	117	.2
.4	84	1	285	0	469	3	659	1	834	16	992	88	1131	60	1150	94	1073	113	.4
.6	84	1	285	1	472	2	666	6	840	15	1025	99	1191	53	1240	103	1186	108	.6
.8	84	0	286	0	474	2	672	5	855	13	1054	111	1244	48	1323	117	1235	108	.8
3.0	84	1	286	1	476	4	677	12	868	23	1079	124	1292	30	1400	126	1400	126	3.0
.5	84	1	287	1	480	3	680	3	893	10	1122	137	1392	39	1568	139	1642	124	.5
4.0	84	1	288	1	483	3	697	6	912	19	1172	150	1471	65	1707	114	1856	137	4.0
.5	84	1	289	0	485	2	703	5	927	12	1203	163	1536	52	1831	126	2043	135	.5
5.0	84	1	289	1	487	2	708	9	938	12	1239	176	1588	61	1919	133	2208	135	5.0
6.0	84	1	290	1	489	2	717	5	956	13	1268	189	1669	70	2072	144	2476	141	6.0
7.0	84	1	291	0	491	1	729	4	969	16	1297	201	1727	80	2166	156	2637	146	7.0
8.0	84	1	291	1	492	1	736	3	973	8	1318	214	1772	90	2274	167	2853	152	8.0
9.0	84	1	292	0	493	1	739	3	987	0	1324	227	1808	100	2344	177	2990	158	9.0
10.0	84	1	292	1	494	1	732	3	993	0	1347	240	1836	111	2402	188	3101	161	10.0
120.0	84	1	293	0	503	0	754	0	1043	0	1438	253	2074	121	2890	201	4099	170	120.0
125.0	84	1	293	1	503	0	744	0	1043	0	1438	266	2075	132	2892	212	4102	181	125.0

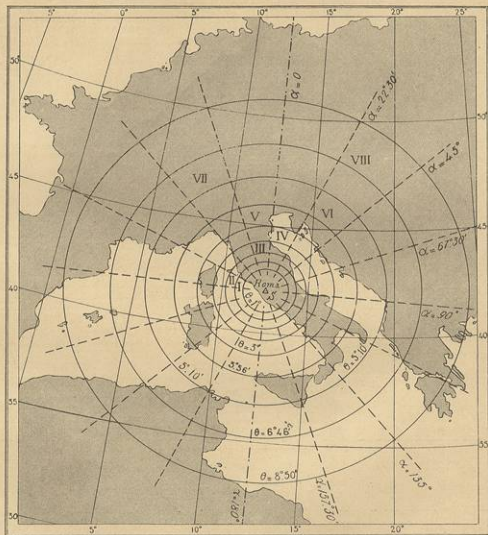
TABELLA II.

VALORI DI $-2\pi h \left[\frac{d_1}{d_2} + h \right] - \sqrt{d_1^2 + h^2}$ ESPRESSI IN UNITÀ DELLA 5ª CIFRA DECIMALE DEL $\frac{d_2}{d_1}$

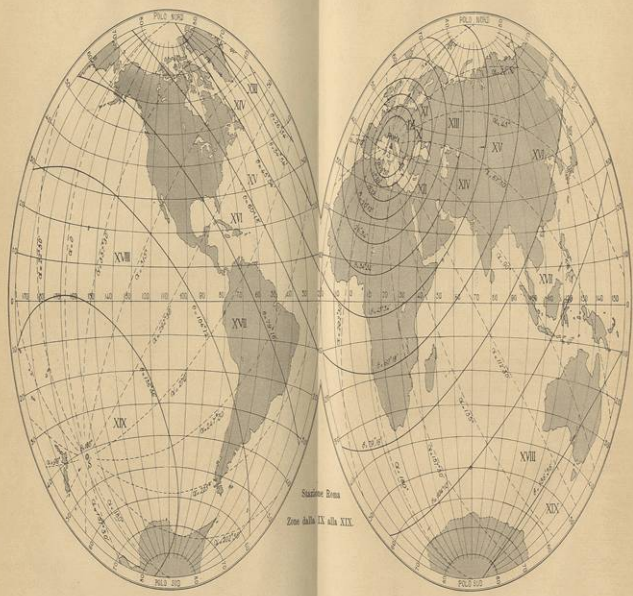
VALORI		Numeri d'ordine e limiti delle zone										VALORI	
in	II	12	13	14	15	16	17	18	19	20	in	19	20
1)	$d_1 = 3,2$ $d_2 = 4,6$	$d_1 = 4,6$ $d_2 = 8,8$	$d_1 = 6,8$ $d_2 = 10,0$	$d_1 = 10$ $d_2 = 14$	$d_1 = 14$ $d_2 = 20$	$d_1 = 20$ $d_2 = 28$	$d_1 = 28$ $d_2 = 40$	$d_1 = 40$ $d_2 = 56$	$d_1 = 56$ $d_2 = 78$	$d_1 = 78$ $d_2 = 110,0$	1)	$d_1 = 56$ $d_2 = 78$	$d_1 = 78$ $d_2 = 110,0$
$\frac{d_2}{d_1}$	$\frac{d_2}{d_1}$	$\frac{d_2}{d_1}$	$\frac{d_2}{d_1}$	$\frac{d_2}{d_1}$	$\frac{d_2}{d_1}$	$\frac{d_2}{d_1}$	$\frac{d_2}{d_1}$	$\frac{d_2}{d_1}$	$\frac{d_2}{d_1}$	$\frac{d_2}{d_1}$	$\frac{d_2}{d_1}$	$\frac{d_2}{d_1}$	$\frac{d_2}{d_1}$
0,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	0	0
0,25	18	8	6	4	2	2	3	4	1	0	0,25	0	0
0,50	36	18	12	6	3	3	6	1	0	0	0,50	0	0
0,75	54	27	18	9	4	4	9	2	1	0	0,75	0	0
1,0	72	36	24	12	6	6	12	3	2	1	1,0	0	0
1,25	90	45	30	15	7	7	15	4	3	2	1,25	0	0
1,50	108	54	36	18	9	9	18	5	4	3	1,50	0	0
1,75	126	63	42	21	10	10	21	6	5	4	1,75	0	0
2,0	144	72	48	24	12	12	24	7	6	5	2,0	0	0
2,25	162	81	54	27	13	13	27	8	7	6	2,25	0	0
2,50	180	90	60	30	14	14	30	9	8	7	2,50	0	0
2,75	198	99	66	33	15	15	33	10	9	8	2,75	0	0
3,0	216	108	72	36	16	16	36	11	10	9	3,0	0	0
3,25	234	117	78	39	17	17	39	12	11	10	3,25	0	0
3,50	252	126	84	42	18	18	42	13	12	11	3,50	0	0
3,75	270	135	90	45	19	19	45	14	13	12	3,75	0	0
4,0	288	144	96	48	20	20	48	15	14	13	4,0	0	0
4,25	306	153	102	51	21	21	51	16	15	14	4,25	0	0
4,50	324	162	108	54	22	22	54	17	16	15	4,50	0	0
4,75	342	171	114	57	23	23	57	18	17	16	4,75	0	0
5,0	360	180	120	60	24	24	60	19	18	17	5,0	0	0
5,25	378	189	126	63	25	25	63	20	19	18	5,25	0	0
5,50	396	198	132	66	26	26	66	21	20	19	5,50	0	0
5,75	414	207	138	69	27	27	69	22	21	20	5,75	0	0
6,0	432	216	144	72	28	28	72	23	22	21	6,0	0	0
6,25	450	225	150	75	29	29	75	24	23	22	6,25	0	0
6,50	468	234	156	78	30	30	78	25	24	23	6,50	0	0
6,75	486	243	162	81	31	31	81	26	25	24	6,75	0	0
7,0	504	252	168	84	32	32	84	27	26	25	7,0	0	0
7,25	522	261	174	87	33	33	87	28	27	26	7,25	0	0
7,50	540	270	180	90	34	34	90	29	28	27	7,50	0	0
7,75	558	279	186	93	35	35	93	30	29	28	7,75	0	0
8,0	576	288	192	96	36	36	96	31	30	29	8,0	0	0
8,25	594	297	198	99	37	37	99	32	31	30	8,25	0	0
8,50	612	306	204	102	38	38	102	33	32	31	8,50	0	0
8,75	630	315	210	105	39	39	105	34	33	32	8,75	0	0
9,0	648	324	216	108	40	40	108	35	34	33	9,0	0	0
9,25	666	333	222	111	41	41	111	36	35	34	9,25	0	0
9,50	684	342	228	114	42	42	114	37	36	35	9,50	0	0
9,75	702	351	234	117	43	43	117	38	37	36	9,75	0	0
10,0	720	360	240	120	44	44	120	39	38	37	10,0	0	0
120,0	5679	8786	12421	15102	21659	29668	39612	49211	58822	68433	53065	120,0	
121,0	5681	8790	12469	15116	21672	29700	39711	49260	58878	68491	53103	121,0	
122,0	5683	8794	12496	15130	21685	29741	39760	49308	58945	68548	53148	122,0	
123,0	5685	8798	12503	15144	21701	29781	39811	49356	59011	68604	53194	123,0	
124,0	5688	8801	12510	15158	21714	29823	39862	49404	59074	68661	53241	124,0	
125,0	5687	8804	12517	15169	21727	29829	39873	49411	59087	68670	53248	125,0	

TABELLA III.

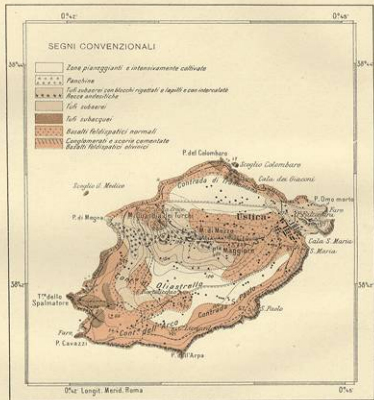
Valori h Km	Numeri d'ordine e limiti delle zone										Valori h Km
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	
	$\theta_1 = 1,00$ $\theta_2 = 1,20$	$\theta_1 = 1,20$ $\theta_2 = 1,44$	$\theta_1 = 1,44$ $\theta_2 = 2,16$	$\theta_1 = 2,16$ $\theta_2 = 3,24$	$\theta_1 = 3,24$ $\theta_2 = 5,40$	$\theta_1 = 5,10$ $\theta_2 = 6,48$	$\theta_1 = 5,10$ $\theta_2 = 6,48$	$\theta_1 = 6,48$ $\theta_2 = 8,50$	$\theta_1 = 8,50$ $\theta_2 = 11,41$	$\theta_1 = 11,41$ $\theta_2 = 15,42$	
+ 5,0	58	30	25	88	152	228	320	420	508	588	
+ 5,0	58	30	35	83	134	197	271	351	426	498	
+ 4,0	27	3	40	75	118	162	205	248	291	334	
+ 3,0	6	14	36	62	89	125	168	220	279	336	
+ 2,5	0	16	38	55	76	106	140	185	235	290	
+ 2,0	5	16	29	46	62	86	113	148	197	250	
+ 1,5	8	14	24	36	48	65	86	111	156	206	
+ 1,0	8	11	17	25	33	44	57	75	104	138	
+ 0,5	5	6	10	15	22	29	38	50	66	84	
+ 0,0	5	6	9	14	20	27	36	48	64	82	
- 0,5	7	8	11	14	20	27	36	48	64	82	
- 1,0	17	18	22	28	36	46	60	80	105	138	
- 1,5	29	34	38	44	55	70	90	114	148	190	
- 2,0	45	42	50	61	74	93	121	158	201	251	
- 2,5	69	56	66	80	100	130	182	243	304	375	
- 3,0	79	71	84	99	115	146	188	252	318	400	
- 4,0	109	109	121	139	161	198	248	312	396	500	
- 5,0	159	168	192	224	268	334	426	540	684	870	
- 6,0	244	254	294	358	444	564	720	900	1116	1380	
- 7,0	318	325	361	444	540	660	816	1008	1236	1500	
- 8,0	402	406	444	540	660	816	1008	1236	1500	1800	
- 9,0	495	495	540	660	816	1008	1236	1500	1800	2160	
- 10,0	597	472	451	472	450	450	450	450	450	450	
- 12,0	42218	35359	31926	28646	26280	23982	21870	19702	17670	15700	
- 12,0	42940	33781	32356	29045	24015	18888	13824	8922	4266	0	
- 12,0	43079	36972	33778	29446	21448	13924	8466	30148	16926	8466	
- 12,0	43507	36622	33300	29545	21374	13854	8466	30148	16926	8466	
- 12,0	43903	37045	33438	29545	21374	13854	8466	30148	16926	8466	
- 12,0	44358	37463	33641	29656	21374	13854	8466	30148	16926	8466	



Stazione Roma - Zone dalla I alla VIII.



SCHIZZO GEOLOGICO DELL'ISOLA DI USTICA



SCALA DI 1: 50,000

VALORI DI $-4\pi^2 R[F(\theta_2, \lambda) - F(\theta_1, \lambda)]$ ESPRESSI IN UNITÀ DELLA 5ª CIFRA DECIMALE DEL $\frac{GM}{80^2}$

Valore λ	Numeri d'ordine e limiti delle zone										Valore λ	
	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	X		
h	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,21$	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,24$	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,24$	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,24$	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,24$	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,24$	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,24$	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,24$	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,24$	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,24$	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,24$	
k	$\theta_1 = 15,22$ $\theta_2 = 26,31$	$\theta_1 = 15,22$ $\theta_2 = 26,34$	$\theta_1 = 15,22$ $\theta_2 = 26,34$	$\theta_1 = 15,22$ $\theta_2 = 26,34$	$\theta_1 = 15,22$ $\theta_2 = 26,34$	$\theta_1 = 15,22$ $\theta_2 = 26,34$	$\theta_1 = 15,22$ $\theta_2 = 26,34$	$\theta_1 = 15,22$ $\theta_2 = 26,34$	$\theta_1 = 15,22$ $\theta_2 = 26,34$	$\theta_1 = 15,22$ $\theta_2 = 26,34$	$\theta_1 = 15,22$ $\theta_2 = 26,34$	
k_m	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,24$	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,24$	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,24$	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,24$	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,24$	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,24$	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,24$	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,24$	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,24$	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,24$	$\theta_1 = 20,12$ $\theta_2 = 31,24$	
+ 5,0	897	136	1136	1886	2354	2843	3170	3382	3509	3555	3585	+ 5,0
+ 4,0	685	109	909	1569	1984	2274	2508	2684	2809	2892	2947	+ 4,0
+ 3,0	522	138	685	1132	1413	1706	1992	2184	2303	2386	2441	+ 3,0
+ 2,0	369	178	456	764	942	1137	1308	1468	1592	1685	1740	+ 2,0
+ 1,0	175	194	228	378	471	569	654	722	778	822	855	+ 1,0
0,0	0	138	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0
- 1,0	175	138	228	378	471	569	654	722	778	822	855	- 1,0
- 2,0	369	178	457	765	942	1137	1308	1468	1592	1685	1740	- 2,0
- 3,0	527	177	686	1133	1413	1706	1992	2184	2303	2386	2441	- 3,0
- 4,0	704	177	915	1312	1584	1874	2170	2374	2536	2666	2767	- 4,0
- 5,0	881	177	1145	1590	1890	2243	2570	2870	3170	3382	3509	- 5,0
- 6,0	1058	177	1375	1769	2168	2612	3004	3354	3664	3934	4175	- 6,0
- 7,0	1236	176	1606	2064	2547	3029	3466	3866	4236	4576	4876	- 7,0
- 8,0	1415	176	1837	2360	2926	3489	4026	4516	4970	5386	5766	- 8,0
- 9,0	1594	186	2069	2656	3285	3926	4569	5176	5740	6266	6756	- 9,0
- 10,0	1774	186	2301	2932	3784	4666	5536	6386	7206	7986	8726	- 10,0
- 120,0	24739	238	30130	37145	46465	57907	70483	84323	99512	116030	133677	- 120,0
- 121,0	25267	238	30404	37468	46861	58346	70939	84732	99966	116500	134077	- 121,0
- 122,0	25276	238	30678	37792	47258	58925	71616	85466	100766	117412	135066	- 122,0
- 123,0	25316	238	31118	38118	47635	59365	72093	85966	101266	117944	135565	- 123,0
- 124,0	25337	238	31296	38345	48052	59832	72539	86439	101739	118386	135844	- 124,0
- 125,0	25368	238	31500	38574	48449	60265	72987	86887	102207	118847	136238	- 125,0