Sull' inversione degl' integrali definiti.

Memoria del Socio SALVATORE PINCHERLE.

Il problema funzionale rappresentato dall'equazione

$$\int_{(l)} \alpha(x,t)\,\omega(t)\,dt = \varphi(x), \tag{I}$$

dove $\alpha(x,t)$ e $\varphi(x)$ sono funzioni date ed $\omega(t)$ è una funzione da determinarsi, è noto sotto il nome di « inversione di integrale definito ». La funzione $\alpha(x,t)$ è stata da me chiamata *funzione caratteristica* dell'equazione (I); dall'HILBERT [1], che ha chiamata la (I) equazione integrale lineare di prima specie, la $\alpha(x,t)$ è stata detta pernio (*Kern*). Il problema (I) è importante per sè e per le applicazioni cui dà luogo: non solo si presenta in questioni fondamentali nella teoria delle funzioni, nella meccanica e nella fisica matematica, non solo è strettamente legato a problemi di integrazione di equazioni alle differenze finite, di equazioni differenziali, alla ricerca di sviluppi in serie di determinata forma per una data funzione, ecc., ma è da questo problema che venne posta meglio in luce l'opportunità del calcolo che studia le operazioni distributive in quanto si applicano a funzioni. Sotto a questo punto di vista, l'equazione (I) può venire interpretata in un modo assai semplice: l'integrazione definita, che figura nel primo membro di (I), è una operazione funzionale determinata dalla sua funzione caratteristica e dalla linea (l) d'integrazione; questa operazione, che va eseguita sulla funzione $\omega(t)$, si indichi con $A(\omega)$: allora la equazione (I) non significa se non la ricerca del risultato, sulla funzione data $\varphi(x)$, dell'operazione inversa di A^{-1}.

Però, un'equazione della forma (I) non è sempre possibile; per accertarsene, basta ricordare un esempio che è stato citato altre volte: se $\alpha(x,t)$ è una funzione razionale intera in x di grado m, ed l è una linea finita, l'equazione (I) non può avere

[1] Götting. Nachrichten, 1904-05; lavori dove si trovano, per il campo reale, risultati dei più notevoli per la teoria e per le applicazioni delle equazioni funzionali delle forme (I) e (II).

soluzione se $\varphi(x)$ non è del pari una funzione razionale intera di grado m. Questo esempio mostra come, a differenza dell'equazione in $\omega(x)$:

$$\text{(II)} \qquad \omega(x) + \int_{(l)} \omega(t)\, \alpha(x, t)\, dt = \varphi(x)$$

che dall'HILBERT è stata detta equazione integrale lineare di seconda specie, la risoluzione dell'equazione (I) dipenda più da considerazioni qualitative che quantitative; da ciò ha forse origine il fatto che la risoluzione dell'equazione (II) si sia ottenuta, almeno per una classe assai estesa di casi [1], mentre ben poco avanzata è quella della equazione (I). Per questa si presenta infatti, come essenziale, un quesito della seguente forma: « Data una operazione A, caratterizzata dalla « forma del suo *Kern* $\alpha(x, t)$, quali sono le classi $\mathfrak{C}$ di funzioni (spazî funzionali « lineari) cui è applicabile l'operazione inversa A^{-1}? ». Oltre a ciò, vi è da chiedere se l'operazione A^{-1} sia o no univoca, e a quali spazî funzionali $\mathfrak{C}'$ appartengano i risultati di A^{-1} applicata alle funzioni della classe $\mathfrak{C}$; ma non si può dire che esistano, per ora, risposte generali a domande di simile natura.

Come si è detto, offre particolare interesse lo studio *qualitativo* dell'equazione (I) o la ricerca dell'operazione A^{-1}; è a questo lato della questione cui intendiamo di porre maggiormente attenzione. Trattandosi di porre in relazione, più che valori numerici, la *forma* di funzioni fra loro dipendenti, si intende come le ricerche funzionali che qui si presentano, a differenza di quelle dei lavori dell'HILBERT e della sua scuola, non offrino che una scarsa analogia con quelle che si hanno, ad esempio, nel calcolo delle variazioni o nello studio delle dipendenze che il VOLTERRA ha dette « funzioni di linee »; e come la particolarità della funzione caratteristica, della $\varphi(x)$ e della $\varpi(x)$ di essere analitiche e di appartenere a determinate classi, abbia qui una speciale importanza. È perciò che non è il caso già considerato da varî autori, ma non risoluto in generale, il caso cioè in cui $\alpha(x, t)$ e $\varphi(x)$ sono funzioni reali delle variabili reali x e t prese entrambe in un intervallo fisso, quello che al nostro punto di vista e per la risposta al quesito fondamentale formulato più sopra potrà avere la maggiore importanza: prevale invece per noi la considerazione della forma della funzione caratteristica, supposta analitica, ed a questa forma, come l'esempio testè ricordato dimostra luminosamente, è strettamente legata la possibilità o meno di risoluzione dell'equazione (I).

Sulla quale equazione, o sull'operazione $A(\varpi)$ che ne costituisce il primo membro, è da aggiungere una osservazione essenziale. Un'espressione

$$\text{(III)} \qquad \int_{(l)} \alpha(x, t)\, \varpi(t)\, dt$$

definisce, per un certo campo funzionale in cui possa variare arbitrariamente $\varpi(t)$

[1] Per opera specialmente di FREDHOLM; v. Acta Math., T. 27, pag. 365 (1903). Per un caso alquanto più speciale sono da ricordarsi i lavori del VOLTERRA (Atti dell'Accad. di Torino, 1896 e Annali di Mat., S. II, T. 25).

o per certi valori di un parametro s contenute in α, una determinata operazione; questa gode di particolari proprietà e ubbidisce a relazioni di cui alcune sono tali da caratterizzarla. Ma può avvenire che variando il campo funzionale in cui si trova ϖ, o variando il valore di s, l'integrale (III) cessi di avere significato: mentre con altra espressione di forma diversa, si avrebbe un'operazione che per ϖ o s nei campi primitivi, coincide con (III) e che nei campi nuovi, in cui (III) non vale, conserva le proprietà che caratterizzavano la A. In tal caso è ben ovvio il ricorso al noto principio di permanenza: è naturale di riguardare come entità a sè non l'espressione (III), ma l'operazione A in tutto il campo in cui esiste e in cui mantiene le sue proprietà, mentre l'integrale (III) non è, per così dire, che un modo contingente di rappresentarla. Viene da ciò che dei due problemi della risoluzione dell'equazione (I) e della ricerca dell'operazione A^{-1}, il secondo ha estensione maggiore del primo: e dal fatto che, in qualche caso, non si trovi una funzione che sostituita a $\varpi(t)$ in (I) ci fornisca la $\varphi(x)$, si deve concludere « che non esiste $A^{-1}(\varphi)$ in quel « campo funzionale che dà un senso all'integrale », ma non si può asserire « che in « campi in cui la *stessa* operazione A ammette rappresentazioni diverse, debba mancare necessariamente la $A^{-1}(\varphi)$ ».

In questa guisa l'entità « operazione funzionale » viene a riaccostarsi, dal punto di vista logico, a quella di « funzione analitica ». Anche all'ente *funzione analitica* possono competere varie forme di rappresentazione aritmetica più o meno contingenti, attraverso le quali l'ente funzione conservando le sue proprietà mantiene inalterata la propria individualità. Al lettore che sia alquanto familiare coi concetti informatori dell'opera *Sulle operazioni distributive* che ho pubblicata colla collaborazione del prof. U. Amaldi, questa analogia sembrerà assai naturale.

Codesto concetto di estensione di un'operazione al di là dei confini di validità dell'espressione che la rappresenta originariamente, si è presentata in certi casi nel modo il più naturale. Ad esempio, si può citare l'operazione di derivazione ad indice arbitrario, su cui ci tratterremo alquanto nel presente lavoro; ed è questa estensione che spiega la formula risolutiva nel noto problema d'inversione di Abel, che si troverà qui esteso al campo complesso.

La presente Memoria offre un contributo ben modesto allo studio del problema generale dell'inversione degli integrali definiti. Riservando ad una seconda parte lo studio del caso in cui la funzione caratteristica ammette come luogo delle sue singolarità una curva algebrica (argomento su cui non esiste letteratura, all'infuori di una breve Nota preventiva da me pubblicata or son vent'anni) [1] in questa prima Memoria considero un *Kern* che sia funzione della differenza $x-t$. Nel § I, codesto *Kern* è indicato con $\mathrm{a}(x-t)$; quivi $\mathrm{a}(x)$ e $\varphi(x)$ si suppongono appartenere alla classe delle funzioni regolari nell'intorno di $x=\infty$, ed il cammino d'integrazione è una linea chiusa: si vede allora come solo eccezionalmente la soluzione $\varpi(t)$ dell'equazione (I) possa essere pure regolare nell'intorno di $x=\infty$, e come generalmente essa appartenga alla classe delle cosidette *funzioni determinanti*, il cui ufficio ha in tutta questa teoria una notevole e spontanea importanza. Nel § II, il problema

[1] Rendiconti dell'Istituto Lombardo, 12 maggio 1887.

si generalizza per il caso in cui $\mathfrak{a}(x)$ e $\varphi(x)$ sono alla lor volta elementi della classe delle funzioni determinanti (di cui le funzioni regolari per $x=\infty$ sono solo casi particolari). Nel § III è introdotta un'operazione che, per le funzioni determinanti, non differisce essenzialmente dalla derivata d'indice s qualunque e nel § IV ne viene fatta l'applicazione all'inversione d'integrale definito in cui la funzione caratteristica è della forma $(x-t)^{-s-1}\mathfrak{a}(x-t)$, essendo $\mathfrak{a}$ una funzione determinante; tutto ciò nel caso di una linea d'integrazione infinita e chiusa, e nel § V ne è data l'estensione al caso di una linea d'integrazione infinita ed aperta, che richiede un esame preventivo del cosiddetto *problema dei momenti*. Infine nel § VI è studiato il caso dell'integrale esteso fra un termine fisso ed il punto variabile x, la funzione caratteristica essendo dapprima $(t-x)^{-s-1}$, come nel classico problema d'ABEL, poi $(t-x)^{-s-1}\mathfrak{p}(t-x)$, come nel detto problema generalizzato dal SONINE: differendo il caso da noi considerato da quelli noti, per il fatto che per la funzione data $\varphi(x)$ è supposta, e per la cercata $\varpi(t)$ è richiesta l'analiticità (il metodo essendo del resto estendibile anche al caso delle funzioni non analitiche) e che si trova il legame fra la forma analitica dell'una e dell'altra: inoltre non figura più l'ipotesi restrittiva della realità di s, che può essere per noi un numero complesso qualunque.

I.

1. Indicheremo con $\mathfrak{d}$ l'insieme o campo funzionale delle funzioni o rami di funzioni analitiche di x, regolari per $x=\infty$; per le quali cioè, per valori di x abbastanza grandi in modulo, vale uno sviluppo in serie di potenze intere negative di x; supporremo inoltre nullo il valore delle funzioni considerate per $x=\infty$. Ogni simile funzione sarà uno speciale elemento di $\mathfrak{d}$, ed $\mathfrak{d}$ costituirà evidentemente uno spazio lineare ad una infinità (numerabile) di dimensioni.

Per ogni elemento $\mathfrak{a}(x)$ di $\mathfrak{d}$ vale, per $|x|>r$, uno sviluppo convergente della forma

$$\mathfrak{a}(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{x^{\nu+1}}. \tag{1}$$

Se t indica una seconda variabile, $\mathfrak{a}(x-t)$ è regolare sotto alla condizione

$$|x|>r+|t|,$$

tanto come funzione di x che come funzione di $x-t$, e se t descrive una linea l i cui punti abbiano per modulo massimo r_1, $\mathfrak{a}(x-t)$ sarà regolare per tutti i punti di codesta linea, sotto alla condizione

$$|x|>r+r_1. \tag{2}$$

2. Sia l una linea nel senso di JORDAN, di lunghezza finita, semplice e chiusa. Sia $\mathfrak{f}(x)$ un secondo elemento di $\mathfrak{d}$, regolare in un intorno di $x=\infty$ che includa

tutti i punti della linea l, e sia

$$\mathbf{f}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{x^{\nu+1}} \tag{3}$$

lo sviluppo di $\mathbf{f}(x)$ convergente per $|x|$ abbastanza grande.

Consideriamo ora l'espressione

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} \mathbf{a}(x-t)\,\mathbf{f}(t)\,dt, \tag{4}$$

dove la linea l è percorsa nel senso convenuto come positivo; essa ha significato per tutti i valori di x soddisfacenti alla condizione (2) e rappresenta, nell'area determinata da quella condizione, un elemento $\mathbf{g}(x)$ di $\mathfrak{F}$.

Questa funzione $\mathbf{g}(x)$ rimane la stessa se la linea (l) si dilata in modo che ogni sua posizione (l_1) includa la precedente; in particolare si potrà assumere come linea (l) un cerchio di centro $x=0$ e raggio r_1 sotto la condizione che $\mathbf{f}(x)$ sia regolare al contorno e all'esterno di questo cerchio.

3. Secondo un concetto che ho già espresso da lungo tempo ed applicato in molte occasioni, la (4) si può riguardare come una operazione funzionale, definita dalla funzione $\mathbf{a}(x)$ che ne verrà detta f u n z i o n e c a r a t t e r i s t i c a; questa operazione si indicherà, per brevità, con $A(\mathbf{f})$. L'operazione A, eseguita su un elemento $\mathbf{f}$ dell'insieme $\mathfrak{F}$, produce dunque un elemento determinato $\mathbf{g}$ dello stesso insieme, e la scelta della linea (l) d'integrazione è arbitraria, nel senso che ad (l) si può sostituire una qualunque delle (l_1) di cui al paragrafo precedente.

All'espressione di $A(\mathbf{f})$ data dall'integrale definito

$$A(\mathbf{f}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} \mathbf{a}(x-t)\,\mathbf{f}(t)\,dt, \tag{a}$$

se ne possono sostituire altre di forma diversa. Così, se si sviluppa, nella (4), la $\mathbf{a}(x-t)$ per le potenze intere negative di $x-t$, il che è lecito per la condizione (2), indi si integra termine a termine, viene, per la formula di Cauchy:

$$A(\mathbf{f}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu a_\nu}{\nu!}\,\frac{d^\nu \mathbf{f}(x)}{dx^\nu}. \tag{b}$$

Se invece si sviluppa la $\mathbf{a}(x-t)$ per le potenze intere negative di x, il che è pure lecito sotto la stessa condizione (2), si ottiene lo sviluppo

$$\mathbf{a}(x-t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_0 t^\nu + \nu a_1 t^{\nu-1} + \binom{\nu}{2} a_2 t^{\nu-2} + \cdots + a_\nu}{x^{\nu+1}},$$

che moltiplicato per $\mathbf{f}(t)$ ed integrato termine a termine lungo la linea (l), dà, in virtù degli stessi teoremi di Cauchy, l'espressione di $A(\mathbf{f})$, convergente per $|x| > r + r_1$:

$$A(\mathbf{f}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_0 k_\nu + \nu a_1 k_{\nu-1} + \cdots + a_\nu k_0}{x^{\nu+1}}. \tag{c}$$

Quest'ultima forma ci dà lo sviluppo, nell'intorno di $x=\infty$, del risultato di $A(\mathbf{f})$, e si vede come esso sia simmetrico nelle due funzioni **a** ed **f** che gli hanno dato origine.

Si noti, dalla (c), che A(**f**) non può essere identicamente zero, a meno che non lo sia la **f**.

Si noti, infine, che l'operazione A è commutabile coll'operazione D di derivazione, e che due operazioni A, B del tipo (a), corrispondenti a due diverse funzioni caratteristiche $\mathbf{a}(x)$, $\mathbf{b}(x)$, sono commutabili fra di loro.

4. Ciò premesso, ci proponiamo il seguente problema d'inversione:

« A) Dato un elemento $\mathbf{g}(x)$ di $\mathfrak{F}$, esiste in $\mathfrak{F}$ stesso un elemento $\mathbf{f}(x)$ tale « da soddisfare all'equazione

$$A(\mathbf{f}) = \mathbf{g}\,? \text{ »} \tag{d}$$

Per le espressioni di A(**f**) alle quali si è accennato nel paragrafo precedente, questa questione equivale anche alle due seguenti:

« A') È possibile trovare in $\mathfrak{F}$ un integrale dell'equazione differenziale lineare « non omogenea, a coefficienti costanti e d'ordine infinito

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu a_\nu}{\nu!} \frac{d^\nu \mathbf{f}}{\partial x^\nu} = \mathbf{g}(x), \tag{e}$$

« essendo $\mathbf{g}(x)$ un elemento dato in $\mathfrak{F}$? ».

« A'') È possibile, g_ν essendo il coefficiente di $x^{-(\nu+1)}$ nello sviluppo di $\mathbf{g}(x)$ « per l'intorno di $x=\infty$, trovare soluzioni k_ν delle infinite equazioni lineari ad in- « finite incognite

$$a_0 k_\nu + \nu a_1 k_{\nu-1} + \binom{\nu}{2} a_2 k_{\nu-2} + \cdots + a_\nu k_0 = g_\nu \tag{f}$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots \infty),$$

« tali che il massimo limite di $|\sqrt[\nu]{k_\nu}|$ per $\nu = \infty$ non sia infinito? ».

5. Per dare risposta alle precedenti domande, conviene ricorrere alla teoria, che risale a Laplace e ad Abel e venne posteriormente perfezionata, specialmente dal Poincaré, delle funzioni generatrici e determinanti (¹); la quale teoria varrà anche a dare al problema d'inversione, espresso dalla equazione (d), le sue più naturali estensioni. Supporremo che il lettore conosca gli elementi, del resto assai semplici, di codesta teoria; ci basti ricordare che se $\varphi(u)$ è una funzione finita ed integrabile fra 0 ed ∞, per valori p. es. reali e positivi di u, e tale che per un valore $\bar{x}$ di x l'integrale

$$\mathbf{f}(x) = \int_0^\infty \varphi(u)\, e^{ux}\, dt \tag{5}$$

sia convergente, esso sarà convergente per ogni x tale che sia $R(x) > R(\bar{x})$ (²), e

(¹) V. p. es. in proposito la mia Memoria: *Sur les fonctions déterminantes*, negli Annali de l'Éc. Norm. Supérieure, ser. 3, tom. 22, 1905.

(²) Con $R(x)$ s'intenda *la parte reale* del numero complesso x.

rappresenterà sotto a questa condizione una funzione analitica regolare in ogni campo finito: per ogni regione cioè posta a destra della parallela all'asse immaginario del piano x condotto per il punto $\bar{x}$. Questa funzione analitica si dice la *determinante* di $\varphi(u)$, che ne viene detta la *generatrice*. Inversamente, la funzione generatrice viene espressa, in funzione della sua determinante, da

$$\varphi(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \mathbf{f}(x)\, e^{ux}\, dx, \tag{6}$$

dove u è reale e $k > \mathrm{R}(\bar{x})$.

Ricordiamo ancora che ogni funzione intera della forma

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu u^\nu}{\nu!} \tag{7}$$

dove, essendo m un numero positivo assegnabile, sia

$$|k_\nu| < m^\nu \tag{8}$$

ammette come determinante la funzione dell'insieme $\mathcal{J}$ rappresentata da

$$\sum \frac{k_\nu}{x^{\nu+1}}, \tag{9}$$

e, reciprocamente, che ogni funzione dell'insieme $\mathcal{J}$ ha per generatrice la funzione intera del tipo (7) formata col passare da (9) a (7). Le funzioni intere (7) i cui coefficienti verificano la condizione (8) sono dell'ordine *uno* ed eccezionalmente di ordine inferiore; e precisamente del tipo che dal PRINGSHEIM (¹) viene detto *normale*. Indicheremo con $\mathcal{G}$ l'insieme delle funzioni intere (7) per le quali è soddisfatta la condizione (8), equivalente (indicando le derivate mediante gli apici) a

$$|\varphi^{(\nu)}(o)| < m^\nu$$

e potremo dire che « gli elementi di $\mathcal{G}$ hanno per determinanti gli elementi di $\mathcal{J}$, « e questi hanno tutti, per generatrici, elementi di $\mathcal{G}$ ».

Inoltre, per il caso di una determinante $\mathbf{f}(x)$ appartenente ad $\mathcal{J}$, alla formula (6) si può sostituire l'altra

$$\varphi(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} \mathbf{f}(x)\, e^{ux}\, dx, \tag{6'}$$

dove (l) è una linea chiusa circondante il punto $x = 0$ e tutta compresa in quel intorno di $x = \infty$ in cui $\mathbf{f}(x)$ è regolare.

6. Riprendiamo ora l'equazione (d), ed indichiamo rispettivamente con $\alpha(u)$, $\varphi(u)$, $\gamma(u)$ le funzioni generatrici di $\mathbf{a}(x)$, $\mathbf{f}(x)$, $\mathbf{g}(x)$. Sostituendo in (a) per la $\mathbf{a}(x-t)$ la sua espressione

$$\mathbf{a}(x-t) = \int_0^\infty e^{-u(x-t)}\, \alpha(u)\, du, \tag{5'}$$

(¹) Math. Annalen, Bd. 58, pp. 262-264.

viene, dall'inversione evidentemente lecita delle integrazioni:

$$A(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-ux}\,\alpha(u)\int_{(l)} e^{ut}\,f(t)\,dt\,du$$

e per la (6')

$$A(f)=\int_0^\infty e^{-ux}\,\alpha(u)\,\varphi(u)\,du. \tag{10}$$

« L'operazione A produce dunque la funzione determinante del prodotto delle « generatrici di $a(x)$, $f(x)$ ».

Questa proprietà conferma la simmetria, già notata al § 3, del risultato di A rispetto alle due funzioni $a(x)$ ed $f(x)$. Indicando con G**f** l'operazione che, applicata ad **f**, ne dà la generatrice, la (10) si può esprimere simbolicamente mediante

$$\mathrm{Ga}\,.\,\mathrm{Gf}=\mathrm{G}A(f). \tag{10'}$$

Dalla (10), o dalla equivalente (10)', risulta subito la risposta alle domande fatte al § 4. Infatti, l'equazione (d) essendo equivalente a

$$\mathrm{Gg}=\mathrm{Ga}\,.\,\mathrm{Gf},\ \text{ o }\ \gamma(u)=\alpha(u)\,\varphi(u),$$

ne viene che la funzione f dovrà essere la determinante di $\frac{\gamma(u)}{\alpha(u)}$; ma gli elementi di $\mathfrak{J}$ sono dati da tutte e sole le funzioni determinanti degli elementi di $\mathfrak{S}$ (§ 5): onde segue che « le domande formulate al § 5 avranno risposta affermativa se e sol- « tanto se il quoziente $\gamma(u)/\alpha(u)$ apparterrà all'insieme $\mathfrak{S}$ ».

Ma è facile vedere che affinchè ciò accada, basta che $\gamma(u)$ sia divisibile per $\alpha(u)$, cioè che il quoziente predetto sia una funzione intera. Infatti, dalla proprietà (8) delle funzioni dell'insieme $\mathfrak{S}$, risulta ([1]) che $\gamma(u)$, $\alpha(u)$ sono di altezza (o genere) 1 o 0, e quindi, essendo q_ν le radici di $\alpha(u)$, q'_ν quelle di $\gamma(u)$, della forma

$$\alpha(u)=e^{cu}\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1-\frac{u}{q_\nu}\right)e^{\frac{u}{q_\nu}},\quad \gamma(u)=e^{c'u}\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1-\frac{u}{q'_\nu}\right)e^{\frac{u}{q'_\nu}}. \tag{11}$$

Se ora il quoziente $\frac{\gamma(u)}{\alpha(u)}$ è una funzione intera, le radici di $\alpha(u)$ saranno necessariamente tutte comprese fra quelle di $\gamma(u)$, da cui risulta, per le (11), che $\frac{\gamma(u)}{\alpha(u)}$ avrà la medesima forma e conseguentemente ([2]) che i coefficienti del suo sviluppo in serie soddisfaranno alla condizione (8).

([1]) Pringsheim, loc. cit., pag. 327.
([2]) Id., loc. cit., pag. 266.

Concludiamo dunque che « alle domande formulate al § 4 viene data risposta « affermativa se e solo se il quoziente $\frac{\gamma(u)}{\alpha(u)}$ è una funzione intera, nel quale caso essa appartiene all'insieme $\mathfrak{S}$ (¹) ».

7. L'inversione d'integrale definito espressa dall'equazione funzionale

$$(d') \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} \mathbf{a}(x-t)\,\mathbf{f}(t)\,dt = \mathbf{g}(x)$$

non è dunque possibile in generale mediante una funzione $\mathbf{f}(x)$ regolare nell'intorno di $x=\infty$. La condizione di possibilità risiede in una proprietà della funzione generatrice di $\mathbf{g}(x)$, quella che $\gamma(u)$ sia divisibile per $\alpha(u)$. La funzione $\mathbf{g}(x)$ deve così appartenere ad uno speciale insieme contenuto in $\mathfrak{d}$, e che indicheremo con $\mathfrak{d}_a$; è chiaro che questo insieme è lineare, cioè che se $\mathbf{g}(x)$ e $\mathbf{g}_1(x)$ hanno le loro generatrici divisibili per $\alpha(u)$, lo stesso è di $c\mathbf{g}+c_1\mathbf{g}_1$. Se $\mathbf{g}$ appartiene ad $\mathfrak{d}_a$, vi appartiene anche $\frac{d\mathbf{g}}{dx}$, poichè è, D essendo l'operazione di derivazione:

$$\mathrm{G}\mathrm{D}\mathbf{g} = -u\mathrm{G}\mathbf{g}\,;$$

più generalmente, se B è un'operazione analoga ad A, in cui $\beta(u)$ sia la generatrice della caratteristica, e se $\mathbf{g}$ apparterrà ad $\mathfrak{d}_a$, vi appartiene anche $\mathrm{B}(\mathbf{g})$ poichè è

$$\mathrm{GB}(\mathbf{g}) = \beta(u)\,\gamma(u).$$

Se $\mathbf{g}$, appartenente ad $\mathfrak{d}_a$, è sviluppabile in serie di potenze negative di x per $|x|>r'$ mentre $\mathbf{a}(x)$ lo è per $|x|>r$, la soluzione $\mathbf{f}(x)$ di (d') è sviluppabile fuori di un cerchio il cui raggio è al più $r'+r$.

Il solo caso in cui $\mathfrak{d}_a$ possa comprendere tutti gli elementi di $\mathfrak{d}$ è quello in cui è $\alpha(u)=e^{cu}$, nel quale caso è

$$\mathbf{a}(x) = \frac{1}{x-c}\,,\quad \mathbf{f}(x) = \mathbf{g}(x+c).$$

8. Se si limitasse la risoluzione dell'equazione (d) al caso ora considerato, il campo delle funzioni $\mathbf{g}(x)$ per le quali essa è possibile sarebbe così ristretto da far quasi perdere al problema qualsiasi interesse. Ma codesto interesse viene riacquistato dal fatto che è possibile di ampliare il campo di quelle funzioni, e ciò si può fare facilmente con una lieve modificazione dell'espressione (a) data per l'operazione A. Osserviamo a questo effetto che in quell'espressione si può sostituire, alla linea finita e chiusa d'integrazione, l'integrazione lungo una retta che sia tutta esterna al cerchio di centro o e di raggio $r+r_1$: questa equivalenza si scorge subito mediante un'ovvia applicazione del teorema di Cauchy. Considereremo, in particolare, codesta retta

(¹) Per quanto precede, possiamo esprimere questo fatto dicendo che $\gamma(u)$ è *divisibile* per $\alpha(u)$.

parallela all'asse immaginario, avendosi con ciò per $A(f)$ l'espressione:

$$(a') \qquad A(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} a(x-t)\, f(t)\, dt,$$

dove k è un numero positivo maggiore di $r + r_1$.

Ora questa espressione conserva un significato, ed insieme le sue proprietà essenziali, se si estende il campo delle funzioni $f(x)$ assumendole come funzioni analitiche non più regolari per $x = \infty$, ma solo regolari in tutto il semi-piano della variabile x definito da $R(x) > c$, dove c è un numero reale; ed inoltre supponendo che esse tendano a zero di ordine non inferiore al primo quando x tende all'infinito secondo una qualsivoglia direzione contenuta in quel semi-piano (¹). Indicheremo con $\mathfrak{D}$ l'insieme, evidentemente lineare, delle funzioni aventi queste proprietà, qualunque possa essere c; è chiaro che l'insieme $\mathfrak{d}$ è contenuto in $\mathfrak{D}$.

Le funzioni di $\mathfrak{D}$ ammettono una funzione generatrice. In altri termini, se $f(x)$ è un elemento di $\mathfrak{D}$, esiste la funzione $\varphi(u)$ della variabile reale u, finita e continua in ogni intervallo positivo $0 \ldots m$, data da

$$(6'') \qquad \varphi(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} f(x)\, e^{ux}\, dx,$$

cui corrisponde un numero c (ordine della funzione $\varphi(u)$) tale che per $R(x) > c$ è

$$(5'') \qquad f(x) = \int_0^\infty \varphi(u)\, e^{-ux}\, du \ (^2);$$

$\varphi(u)$ è la generatrice di $f(x)$, questa la determinante di $\varphi(u)$.

9. Noi considereremo dunque l'operazione A, sotto la forma (a'), estesa ad un elemento $f(x)$ dell'insieme $\mathfrak{D}$, supponendosi che sia $R(x) > r + k$. Tanto $a(x)$ che $f(x)$ ammettono funzioni generatrici, e come tali si può, nelle (a'), per $R(x-t) > r$, e quindi, poichè è $R(t) = k$, per $R(x) > r + k$, sostituire ad $a(x-t)$ l'espressione $(5')$; viene (cfr. § 6) invertendo le integrazioni, il che è evidentemente lecito sotto le ipotesi fatte:

$$A(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-ux}\, \alpha(u) \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{ut}\, f(t)\, dt\, du$$

e quindi, per la $(6'')$:

$$(10) \qquad A(f) = \int_0^\infty e^{-ux}\, \alpha(u)\, \varphi(u)\, du.$$

(¹) Si vedrà più avanti come questa seconda condizione non sia essenziale.

(²) V. la citata mia Memoria: *Sur les fonctions déterminantes*, nn. 20 e seg.; dove per un migliore riscontro conviene porre e^{-u} in luogo di t.

Questa espressione definisce, per $R(x) > r + k$, un elemento di $\mathfrak{D}$; e perciò, come al n. 6, « si ha, come risultato dell'operazione A su $\mathbf{f}$, la funzione determinante del « prodotto delle generatrici $\alpha(u)$, $\varphi(u)$ di $\mathbf{a}(x)$, $\mathbf{f}(x)$ rispettivamente ».

Si vede pure « che il risultato di A è simmetrico nelle due funzioni $\mathbf{a}$ ed $\mathbf{f}$ ».

10. È facile dimostrare, per una funzione $\mathbf{f}(x)$ dell'insieme $\mathfrak{D}$ data nel semipiano $R(x) > c$, la formula

$$\mathbf{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{\mathbf{f}(t)\, dt}{x - t}, \qquad (k > c \ , \ R(x) > k) . \tag{12}$$

Basta all'uopo prendere x entro il rettangolo avente per vertici i punti $k - ib$, $k' - ib$, $k' + ib$, $k + ib$, dove è $k' > k$, indi applicare la formula di Cauchy quando s'integri lungo il perimetro del rettangolo. Per le ipotesi fatte su $\mathbf{f}(x)$, quando b tende all'infinito, le parti dell'integrale relative ai lati $k - ib \dots k' - ib$ e $k' + ib \dots k + ib$ del rettangolo tendono a zero; l'integrazione estesa al contorno formato dal lato $k' - ib \dots k' + ib$ e dalla semicirconferenza avente questo lato come diametro e rivolto verso il lato positivo dell'asse reale mostra subito che anche l'integrale relativo al detto lato $k' - ib \dots k' + ib$ tende a zero per $b = \infty$; e da ciò segue la formula (12). Da questa si deduce poi, senza difficoltà,

$$\mathbf{f}^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k-i\infty} \frac{\mathbf{f}(t)\, dt}{(x - t)^{n+1}} . \tag{12'}$$

Ciò posto, se si sviluppa $\mathbf{a}(x - t)$ in serie di potenze intere negative di $x - t$, il che è lecito per $R(x) > r + k$ e permette anche l'integrazione termine a termine, viene da (12') l'espressione

$$A(\mathbf{f}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu a_\nu}{\nu!} \mathbf{f}^{(\nu)}(x) \tag{b}$$

per l'operazione A nel campo funzionale $\mathfrak{D}$.

11. Si può ora chiedere se, nello stesso modo che l'espressione (b) dell'operazione A si è estesa, dal campo $\mathfrak{J}$, a quello ben più ampio $\mathfrak{D}$, sia anche possibile una estensione dell'altra espressione (c) dell'operazione medesima. A questo effetto, aggiungiamo alle ipotesi fatte su $\mathbf{f}(x)$ (§ 8) l'altra, che la funzione $\varphi(u)$ ammetta nell'intervallo dei valori u reali e positivi, le derivate di tutti gli ordini, tutte di ordine non inferiore a c, cioè tali che tutti gl'integrali

$$\int_0^\infty e^{-ux} \varphi^{(n)}(u)\, du , \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

siano convergenti per $R(x) > c$. Sotto tale condizione, se si pone

$$\varphi^{(n)}(o) = k_n , \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

è noto (¹) che se x tende all'infinito parallelamente alla direzione dell'asse reale positivo, si ha

$$\lim_{x=\infty}\left(\mathbf{f}(x)-\frac{k_0}{x}-\frac{k_1}{x^2}-\cdots-\frac{k_n}{x^{n+1}}\right)x^{n+1}=0\,; \tag{13}$$

ciò si esprime, secondo il POINCARÉ (²), dicendo che lo sviluppo $\sum\frac{k_\nu}{x^{\nu+1}}$ rappresenta assintoticamente $\mathbf{f}(x)$, e si può indicare colla scrittura

$$\mathbf{f}(x)\sim\frac{k_0}{x}+\frac{k_1}{x^2}+\cdots+\frac{k_\nu}{x^{\nu+1}}+\cdots \tag{14}$$

In base a ciò, riprendiamo la funzione $\mathbf{g}(x)=\mathrm{A}(\mathbf{f})$, la cui funzione generatrice è $\alpha(u)\,\varphi(u)$. Le si potrà applicare la considerazione ora fatta, e poichè è

$$\varphi^{(n)}(o)=k_n\quad,\quad\alpha^{(n)}(o)=a_n,$$

verrà

$$\left(\frac{d^\nu}{du^\nu}\alpha(u)\,\varphi(u)\right)_{u=0}=a_0k_\nu+\nu a_1k_{\nu-1}+\binom{\nu}{2}a_2k_{\nu-2}+\cdots+a_\nu k_0\,.$$

Quindi si ha per $\mathbf{g}(x)$ lo sviluppo assintotico corrispondente a questo sistema di coefficienti; in altri termini, alla (c) del § 3 si sostituisce ora la

$$\mathrm{A}(\mathbf{f})\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_0k_\nu+\nu a_1k_{\nu-1}+\cdots+a_\nu k_0}{x^{\nu+1}}\,. \tag{c'}$$

12. Poichè l'operazione A, dapprima definita nell'insieme $\mathfrak{I}$, si estende, conservando le sue proprietà, all'insieme più ampio $\mathfrak{P}$, possiamo cercare se, quando manchi la soluzione dell'equazione (d) nel campo $\mathfrak{I}$, sia possibile invece in codesto campo più esteso $\mathfrak{P}$. Per quanto precede, se la soluzione di (d) è un elemento $\mathbf{f}$ dell'insieme $\mathfrak{P}$, detta $\varphi(u)$ la sua generatrice, dovrà essere

$$\alpha(u)\,\varphi(u)=\gamma(u)\,.$$

Onde « il problema proposto ammette una soluzione in $\mathfrak{P}$, quando il quoziente $\frac{\gamma(u)}{\alpha(u)}$ « sia insieme alle sue derivate di tutti gli ordini, finito e continuo per i valori reali « positivi di u e di ordine non superiore ad un numero assegnabile. La soluzione è « data dalla funzione determinante del detto quoziente. Soddisfatta questa condizione, « a) viene eseguita l'inversione d'integrale definito espressa da

$$\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathbf{a}(x-t)\,\mathbf{f}(t)\,dt=\mathbf{g}(x)\,;$$

(¹) V. p. es. la mia Nota: *Sugli sviluppi assintotici e le serie sommabili*, Rend. della R. Accademia dei Lincei, 15 maggio 1904.
(²) Acta Math., t. VIII, pag. 296.

« b) viene risoluta l'equazione differenziale lineare d'ordine infinito (e);

« c) viene risoluto il sistema (f) di infinite equazioni lineari ad infinite in-« cognite k_ν, per modo che le k_ν siano i coefficienti di uno sviluppo assintotico ».

13. Gli elementi dell'insieme $\mathfrak{D}$ sono soggetti alla condizione di essere regolari nel semi-piano a destra di una retta perpendicolare all'asse reale del piano x. Questa posizione speciale della retta non ha però nulla di essenziale; non vi è alcuna difficoltà a trasportare i risultati precedenti al caso di un insieme $\mathfrak{D}_\theta$ di funzioni $\mathbf{f}(x)$ date regolari nel semi-piano limitato da una retta l perpendicolare alla direzione di argomento θ. Per fissare quello dei due semipiani limitati da l di cui si intende discorrere, stabiliremo che sia quello posto dalla parte in cui vanno indefinitamente crescendo i segmenti sulla semi-retta di argomento θ uscente dall'origine, e lo diremo il semi-piano *in avanti* di l.

Sia c il segmento tagliato dalla retta l sulla semi-retta precedente; il semi-piano è il luogo dei punti $x = \xi + i\eta$ per i quali è

$$\xi \cos\theta + \eta \operatorname{sen}\theta > c.$$

Se è $k > c$, la parallela l' ad l di equazione

$$\xi \cos\theta + \eta \operatorname{sen}\theta = k \tag{15}$$

sarà il luogo dei punti dati da

$$x = e^{i\theta}(k - iv),$$

v essendo un parametro reale variabile. Se allora si forma

$$\varphi(\overline{u}) = -\frac{e^{i\theta}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(e^{i\theta}(k - iv))\, e^{\overline{u}e^{i\theta}(k-iv)}\, dv, \tag{16}$$

la funzione $\varphi(\overline{u})$ risulterà finita e continua per i punti della semi-retta $\overline{u}$ uscente dall'origine e di argomento $-\theta$, e si avrà inversamente:

$$\mathbf{f}(x) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} \varphi(\overline{u})\, e^{\overline{u}x}\, d\overline{u}; \tag{17}$$

c si dirà l'*ordine* di $\varphi(\overline{u})$ nella direzione $-\theta$.

Analogamente a ciò che si è fatto per l'insieme $\mathfrak{D}$, anche per una funzione $\mathbf{f}(x)$ di $\mathfrak{D}_\theta$ la $\varphi(\overline{u})$, definita da (16), verrà detta funzione **generatrice**, e la $\mathbf{f}(x)$ sarà la sua **determinante**. Qualunque sia θ, l'insieme $\mathfrak{D}_\theta$ contiene sempre l'insieme $\mathfrak{J}$; se $\mathbf{f}(x)$ è un elemento di questo, la $\varphi(\overline{u})$ non differisce dalla funzione intera già considerata (§ 5); solo nella (16) essa è calcolata, bene inteso, per i valori $\overline{u}$ posti sulla semiretta uscente dall'origine di argomento $-\theta$. L'operazione A, definita da (a) per le $\mathbf{f}(x)$ dell'insieme $\mathfrak{J}$, si estende all'insieme $\mathfrak{D}_\theta$ ponendo

$$\mathrm{A}(\mathbf{f}) = \int_{(l')} \mathfrak{a}(x - t)\, \mathbf{f}(t)\, dt$$

dove ora (l') è una retta la cui equazione è della forma (15); anche con questa definizione, la risoluzione dell'equazione

$$A(f) = g,$$

si ricondurrà alla formazione della funzione determinante di $\frac{\gamma(\bar{u})}{\alpha(\bar{u})}$; con ciò sarà anche risoluta l'equazione (d), e se il predetto quoziente ammette le derivate di tutti gli ordini, di ordine finito lungo la direzione $\bar{u}$, sarà anche ottenuto per f uno sviluppo assintotico, valido quando x tenda all'infinito nella direzione θ, in avanti.

14. La formula (16) definisce una funzione della variabile $\bar{u}$, il cui luogo è la semi-retta uscente dall'origine e di argomento $-\theta$. Può accadere in particolare che questa funzione risulti analitica; ne diremo z la variabile; e che sia regolare per tutto l'angolo compreso fra le semi-rette uscenti dall'origine e di argomenti $-\theta_1$ e $-\theta_2$ compresi fra 0 e 2π (si ruota nel senso positivo). Sia

$$\theta_2 < \theta < \theta_1;$$

sia inoltre $\varphi(z)$ di ordine inferiore a c su tutte le direzioni $-\theta$. Consideriamo allora, nel piano x, la retta l, perpendicolare alla semi-retta uscente dall'origine e di argomento θ_2 alla distanza c, indi facciamo ruotare la semi-retta ed insieme la sua perpendicolare l, fino a che la semi-retta abbia acquistato l'argomento θ_1. La linea l avrà così delimitata un'area che dirò T.

Si considerino ora gl'integrali

$$(18) \qquad \int_0^{\infty e^{-i\theta}} e^{-ux}\varphi(u)\,du \quad , \quad \int_0^{\infty e^{-i\theta'}} e^{-ux}\varphi(u)\,du,$$

$\theta_2 < \theta < \theta' < \theta_1$. Un'applicazione immediata del teorema di Cauchy mostra che questi integrali, per un punto x comune ai loro campi di convergenza, sono uguali; essi definiscono pertanto la stessa funzione determinante f, che sarà ora regolare in tutta l'area indicata con T (area di *sommabilità* secondo il Borel).

15. Torniamo ora al problema d'inversione espresso dall'equazione (d), g essendo sempre un elemento di $\mathfrak{Z}$. Abbiamo visto come codesta inversione sia ricondotta alla ricerca della funzione determinante del quoziente $\varphi(u) = \gamma(u):\alpha(u)$. Questo quoziente è una funzione analitica regolare in tutto il piano u, ad eccezione delle radici della funzione intera $\alpha(u)$; se $\bar{u}$ è una semi-retta uscente dall'origine di argomento $-\theta$, su cui non cada alcuna di queste radici, e sulla cui direzione $\varphi(u)$ sia di ordine finito c, la soluzione sarà trovata, essendo data dalla funzione determinante di $\varphi(u)$, in tutto il semipiano

$$\xi \cos\theta + \eta \operatorname{sen}\theta > c.$$

Se ciò accade su due semirette $\bar{u}$ ed $\bar{u}'$ di argomenti $-\theta$ e $-\theta'$ e c, c' sono gli ordini rispettivi, la funzione determinante ottenuta sarà la stessa se fra $\bar{u}$ ed $\bar{u}'$ non cade alcuna radice di $\alpha(u)$ e se l'ordine si mantiene finito in tutto l'angolo fra $\bar{u}$ ed $\bar{u}'$; se invece, ferma questa condizione, cadono fra $\bar{u}$ ed $\bar{u}'$ radici di $\alpha(u)$ in numero finito, l'applicazione del teorema di Cauchy mostra che i due integrali (18) rappresenteranno due funzioni diverse, la cui differenza sarà, $z_1, z_2, \ldots z_r$ essendo le radici di $\alpha(u)$ comprese nell'angolo $(\overline{u}, \overline{u}')$, della forma

$$\sum_{h=1}^{r} C_h e^{z_h x} \tag{19}$$

se queste radici sono semplici, e

$$\sum_h (c_{h0} + c_{h1} x + c_{h2} x^2 + \cdots) e^{z_h x}$$

se multiple.
Questa differenza è soluzione dell'equazione lineare di ordine infinito, omogenea

$$\sum \frac{(-1)^\nu a_\nu}{\nu!} \frac{d^\nu \mathbf{f}}{dx^\nu} = 0.$$

Tralasciamo il caso, non difficile a discutersi, in cui nell'angolo $\overline{u}, \overline{u}'$ cadano infinite radici di $\alpha(u)$; e riassumendo, vediamo come a risolvere l'equazione (d) col metodo indicato, la difficoltà sia ricondotta unicamente a « riconoscere se accade, « per qualche direzione, che l'o r d i n e di $\frac{\gamma(u)}{\alpha(u)}$ sia finito ». Di più, notando che è, per la (8)

$$|\gamma(u)| < e^{m|u|},$$

si conclude che basta « riconoscere finito, in qualche direzione, l'ordine di $\frac{1}{\alpha(u)}$ ».

II.

16. Il procedimento tenuto per risolvere l'equazione (d) suggerisce nel modo più naturale una ulteriore estensione. Fin qui, tanto la funzione caratteristica $\mathbf{a}(x)$ quanto la funzione data $\mathbf{g}(x)$ si erano supposte appartenere all'insieme $\mathfrak{J}$; si era visto che la soluzione non era generalmente possibile nell'insieme stesso, e sostituendo all'integrale (a) quello (a'), si era riconosciuto che sotto questa ultima forma, $\mathbf{f}(x)$ poteva essere anche assunta nel campo $\mathfrak{D}$ ben più esteso di $\mathfrak{J}$; in questo modo, veniva ampliato il campo di risoluzione dell'equazione (d) e dei problemi ad essa equivalenti. Ma sotto la forma (a'), nulla vieta che anche $\mathbf{a}(x)$ si prenda comunque nel campo $\mathfrak{D}$, e così anche $\mathbf{g}(x)$; talchè, con metodo identico a quello precedentemente tenuto, possiamo giungere ad enunciare i seguenti risultati:

« Sia data l'equazione funzionale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \mathbf{a}(x-t)\, \mathbf{f}(t)\, dt = (\mathbf{g}x), \tag{d''}$$

« dove $\mathbf{a}(x)$ e $\mathbf{g}(x)$ sono due funzioni date dell'insieme $\mathfrak{D}$. Sia $\mathbf{a}(x)$ regolare per « $R(x) > r$, $\mathbf{g}(x)$ per $R(x) > r_1$; sia, nell'equazione precedente, $R(x)$ maggiore del « maggiore fra i numeri r_1 ed $r + k$. Si domanda se l'equazione ammetta solu- « zione $\mathbf{f}(x)$ in $\mathfrak{D}$ ».

« A questo effetto, si indichino con $\alpha(u)$, $\gamma(u)$ le funzioni generatrici di $\mathbf{a}(x)$
« e $\mathbf{g}(x)$ e si formi il quoziente $\frac{\gamma(u)}{\alpha(u)}$. Se, lungo l'asse u reale positivo, codesto
« quoziente è finito, integrabile e d'ordine finito c, la funzione cercata $\mathbf{f}(x)$ sarà
« la funzione determinante, regolare per $\mathrm{R}(x) > c$, del quoziente precedente.

« Se $\alpha(u)$ ammette le derivate di tutti gli ordini, pure di ordine finito, $\mathbf{a}(x)$ am-
« mette uno sviluppo assintotico i cui coefficienti sono a_ν; allora insieme all'inver-
« sione (d'') è anche risoluta l'equazione (e) differenziale lineare d'ordine infinito.

« Se anche $\gamma(u)$ e $\frac{\gamma(u)}{\alpha(u)}$ ammettono tutte le derivate finite e d'ordine finito,
« anche $\mathbf{f}(x)$ ammette uno sviluppo assintotico, i cui coefficienti k_ν sono legati a
« quelli di $\mathbf{a}(x)$ e $\mathbf{g}(u)$ dalle relazioni (f).

« Se $\alpha(u)$, $\gamma(u)$ sono funzioni analitiche regolari in un angolo avente il vertice
« nell'origine, ed hanno insieme a $\frac{\gamma(u)}{\alpha(u)}$ le proprietà delle funzioni generatrici per
« tutte le direzioni contenute in quell'angolo, $\mathbf{a}(x)$, $\mathbf{g}(x)$ e la soluzione $\mathbf{f}(x)$ di (d)
« saranno regolari non solo in un semipiano $\mathrm{R}(x) > c$, ma in tutta un'area T quale
« è indicata al § 14. Se nell'angolo esiste un numero finito di radici di $\alpha(u)$, ed
« anche, sotto condizioni che è facile di stabilire, un numero infinito, si ottengono
« differenti soluzioni dell'equazione (d), la cui differenza è soluzione di $\mathrm{A}(\mathbf{f}) = 0$ ».

17. Sulle operazioni che abbiamo ora considerate si possono aggiungere alcune osservazioni.

Se A, B sono due operazioni aventi $\mathbf{a}(x)$ e $\mathbf{b}(x)$ come funzioni caratteristiche, determinanti di $\alpha(u)$ e $\beta(u)$, si ha immediatamente che la operazione AB è uguale a BA ed ha per funzione caratteristica la determinante del prodotto $\alpha(u)\,\beta(u)$.

Notando che la generatrice di $\frac{1}{x}$ è 1, si ha $\mathrm{A}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbf{a}(x)$.

Essendo C la operazione avente per caratteristica $\mathbf{g}(x)$, si ha dunque

$$\mathbf{g}(x) = \mathrm{C}\left(\frac{1}{x}\right);$$

onde, risoluta l'equazione

$$(g) \qquad \mathrm{A}(\mathbf{b}) = \frac{1}{x}$$

rispetto alla funzione incognita $\mathbf{b}$, la soluzione di

$$(d) \qquad \mathrm{A}(\mathbf{f}) = \mathbf{g}(x)$$

sarà data immediatamente da

$$(h) \qquad \mathbf{f} = \mathrm{C}(\mathbf{b}).$$

Pertanto, alla risoluzione della equazione (d) basta in generale quella della equazione del tipo (g); la soluzione di questa è una funzione $\mathbf{b}(x)$ che si può dire *associata* di $\mathbf{a}(x)$ e che, oltre a verificare la (g), dà ancora

$$B(a) = \frac{1}{x}.$$

La $\mathbf{b}(x)$ esiste sotto la condizione che $\frac{1}{\alpha(u)}$, che ne sarà la funzione generatrice, abbia le proprietà richieste più sopra ad essere tale. La formula (h) darà la soluzione generale del problema (d). Però, anche nel caso in cui questo non sia possibile in generale, per non essere $\frac{1}{\alpha(u)}$ dotata delle proprietà di funzione generatrice, pure potranno darsi speciali forme per $\mathbf{g}$ per le quali l'equazione (d) risulti possibile: ciò accadrà quando, essendo $\lambda(u)$ una funzione generatrice, sia

$$\gamma(u) = \alpha(u)\,\lambda(u),$$

o ciò che torna lo stesso, quando l'operazione C che ha $\mathbf{g}(x)$ come caratteristica possa mettersi sotto la forma $C = AL$, essendo L un'operazione dello stesso tipo di A.

---

18. Facciamo l'applicazione di quanto precede al caso in cui $\mathbf{a}(x)$ sia funzione razionale di x, nulla per $x = \infty$.

Indichiamo con $z_1, z_2, \ldots, z_p$ le radici del denominatore di $\mathbf{a}(x)$, che supporremo dapprima semplici; e sia

$$\mathbf{a}(x) = \sum_{n=1}^{p} \frac{c_n}{x - z_n}; \tag{1}$$

ne segue immediatamente, per la funzione generatrice, l'espressione

$$\alpha(u) = \sum_{n=1}^{p} c_n e^{z_n u} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu u^\nu}{\nu!}. \tag{2}$$

Qui è

$$a_\nu = c_1 z_1^\nu + c_2 z_2^\nu + \cdots + c_p z_p^\nu. \tag{3}$$

Supponiamo prima

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_p \neq 0. \tag{4}$$

La $\alpha(u)$ è allora diversa da zero per $u = 0$, e si ha per la sua reciproca lo sviluppo

$$\frac{1}{\alpha(u)} = \sum \frac{b_\nu u^\nu}{\nu!} \tag{5}$$

dove

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 b_\nu + \nu a_1 b_{\nu-1} + \binom{\nu}{2} a_2 b_{\nu-2} + \cdots + a_\nu b_0 = 0; \end{cases} \tag{6}$$

la serie (5) converge entro il cerchio di centro $u=0$ e di raggio eguale al minimo modulo ϱ delle radici di $\alpha(u)$.

L'inversione dell'integrale, espressa dall'equazione

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{A}(\mathrm{b}) = \int_{(l)} \mathrm{a}(x-t)\,\mathrm{b}(t)\,dt = \frac{1}{x},$$

sarà, per la teoria generale precedentemente esposta, data dalla funzione determinante della funzione analitica uniforme e meromorfa $\frac{1}{\alpha(u)}$. Si tratta di vedere lungo quali semirette θ uscenti dall'origine nel piano u, convenga eseguire l'integrazione

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{b}(x) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} \frac{e^{-ux}\,du}{\alpha(u)}$$

che ci darà la soluzione di (7).

19. A questo effetto, poniamo

$$u = re^{i\theta} \quad ; \quad z_n = \xi_n + i\eta_n ;$$

allora

$$\alpha(u) = \sum_{n=1}^{p} c_n\, e^{r(\xi_n \cos\theta - \eta_n \operatorname{sen}\theta) + ir(\xi_n \operatorname{sen}\theta + \eta_n \cos\theta)}.$$

Ora, la espressione $\xi_n \cos\theta - \eta_n \operatorname{sen}\theta$ rappresenta in valore e segno la lunghezza del segmento OP_n intercetto dalla perpendicolare condotta dal punto z_n alla semiretta uscente dall'origine e di argomento $-\theta$. Accadrà in generale che, fra i segmenti OP_n vi sia un massimo, nel senso che tutti i $p-1$ rimanenti gli siano inferiori; ciò cesserà di aver luogo solo quando la congiungente di due punti $z_n z_q$ risulti perpendidicolare a $-\theta$, e lasci tutti gli altri punti z_i dalla banda negativa. Questa eccezione si presenta solo per quelle direzioni $-\theta$ perpendicolari ai lati del poligono convesso che avendo i vertici in alcuni dei punti z_i, lascia tutti gli altri nel suo interno; le corrispondenti direzioni θ si diranno *singolari*. Supposta dunque la direzione θ non singolare, supponiamo che sia $\xi_1 \cos\theta - \eta_1 \operatorname{sen}\theta = \mathrm{OP}_1$ il massimo segmento intercetto su $-\theta$ dalle perpendicolari, e si scriva

$$\alpha(u) = e^{z_1 u}(c_1 + c_2\, e^{(z_2 - z_1)u} + \cdots + c_p\, e^{(z_p - z_1)u}).$$

Per r tendente all'infinito positivo, la parentesi qui scritta tende a c_1, e quindi $\alpha(u)$, lungo la semiretta θ, o non avrà radici o ne avrà un numero finito tutte a distanza finita. Le radici di $\alpha(u)$ vanno dunque addensandosi in numero infinito solo nel senso delle direzioni singolari. Se sulla semi-retta θ non v'è alcuna di tali radici, θ si prenderà senz'altro come linea d'integrazione in (8): infatti è

$$\frac{1}{\alpha(u)} = e^{-z_1 u}\,\delta(u)$$

dove $\delta(u)$ tende a c_1 per $r=\infty$, e l'integrale (8) dà la soluzione di (7) nel semipiano posto dalla banda positiva della perpendicolare condotta per $-z_1$ alla semiretta θ. Se sulla semi-retta θ vi è qualche radice η di $\alpha(u)$, basterà, nella linea d'integrazione, sostituire ad un piccolo segmento di θ, da $\eta-\varepsilon$ ad $\eta+\varepsilon$, la semicirconferenza di centro η ed avente come diametro quel segmento; ciò non altera in nulla la conclusione.

Le direzioni singolari, in numero finito, siano $\theta_1, \theta_2, \ldots$; a due θ_i, θ_{i+1} consecutive di queste corrisponde un'area $T_{i,i+1}$ limitata da due lati del poligono convesso di cui si è detto sopra, prolungati indefinitamente nel senso positivo, e da un arco di cerchio. La funzione $\mathfrak{b}(x)$ varia passando da un'area T alla successiva, per l'aggiunta di un integrale dell'equazione omogenea $A(\mathfrak{f})=0$. Entro una stessa T, può pure variare per l'aggiunta di un numero finito di termini della forma $ce^{\eta x}$. Entro l'area $T_{i,i+1}$ e per x tendente all'infinito secondo le direzioni comprese fra $-\theta_i$ e $-\theta_{i+1}$, $\mathfrak{b}(x)$ è rappresentata dallo sviluppo assintotico $\sum \frac{b_\nu}{x^{\nu+1}}$.

Supponiamo ora che la semi-retta θ ruoti intorno all'origine; fino a che essa non viene a coincidere con alcuna direzione singolare, la (8) rappresenterà, al variare di θ, uno stesso ramo della funzione analitica di x (§ 14) regolare in un area T se la semiretta non oltrepassa alcuna radice η di $\alpha(u)$ ed in caso contrario la funzione si aumenta per termini della forma $ce^{\eta x}$.

20. Il caso delle radici multiple del denominatore di $\mathfrak{a}(x)$ non presenta notevole differenza, bastando sostituire alle (2) l'espressione

$$\sum_{n=1}^{p} (c_{n,0} + c_{n,1}\, u + \cdots + c_{n,s-1}\, u^{s-1})\, e^{z_n u}$$

se la radice z_n è dell'ordine s di moltiplicità; le considerazioni svolte dianzi si mantengono senza modificazione.

21. Il caso in cui non fosse soddisfatta la (4), cioè in cui, essendo

$$c_1 + c_2 + \ldots c_p = 0$$

la $\alpha(u)$ fosse della forma

$$\alpha(u) = \frac{a_{m+1}\, u^{m+1}}{m+1!} + \frac{a_{m+2}\, u^{m+2}}{m+2!} + \cdots \qquad (a_{m+1} \neq 0)$$

richiede di essere esaminato particolarmente. La $\frac{1}{\alpha(u)}$ essendo allora infinita dell'ordine m per $u=0$, l'espressione (8) non ha più significato. Ma si osservi che ha significato invece l'integrale

$$\mathfrak{b}_1(t) = \int_0^{\infty e^{i\theta}} \frac{u^m e^{-ux}}{\alpha(u)}\, du$$

e questo dà, come si scorge immediatamente,

$$A(\mathfrak{b}_1) = \frac{(-1)^m\, m!}{x^{m+1}}.$$

Ma l'operazione A è commutabile (§ 3) coll'operazione di derivazione; ne viene che sarà

$$\mathrm{AD}^{-m}(\mathbf{b}_1) = \frac{1}{x},$$

e quindi la soluzione di (7) sarà data, nel caso che consideriamo, da

$$\mathbf{b}(x) = \mathrm{D}^{-m}(\mathbf{b}_1);$$

le costanti che nascono dall'integrazione si determineranno in modo che manchino i termini con potenze intere positive o nulle di x.

22. Avendosi ora l'equazione più generale

$$\mathrm{A}(\mathbf{f}) = \int_{(l)} \mathbf{a}(x-t)\,\mathbf{f}(t)\,dt = \mathbf{g}(x), \tag{9}$$

dove $\mathbf{a}(x)$ è una funzione razionale nulla per $x=\infty$ e $\mathbf{g}(x)$ è una funzione determinante, si indichi con C l'operazione del tipo (a) che ha $\mathbf{g}(x)$ come caratteristica. Si ha

$$\mathbf{g}(x) = \mathrm{C}\left(\frac{1}{x}\right)$$

e perciò, poichè A e C sono commutabili (§ 3), da

$$\mathrm{A}(\mathbf{b}) = \frac{1}{x},$$

si deduce

$$\mathrm{AC}(\mathbf{b}) = \mathbf{g}(x).$$

La soluzione di (9) è dunque data da $\mathbf{f}(x) = \mathrm{C}(\mathbf{b})$.

23. Si noti che l'equazione (9) che abbiamo così risoluta, equivale, se le radici del denominatore di $\mathbf{a}(x)$ sono distinte, all'equazione funzionale

$$\sum_{n=1}^{p} c_n\,\mathbf{b}(x-z_n) = \mathbf{g}(x), \tag{10}$$

e se quelle radici sono multiple, e z_n è dell'ordine s_n di moltiplicità, all'equazione

$$\sum_{n=1}^{p}\Big(c_{n0}\,\mathbf{b}(x-z_n) - c_{n1}\,\mathbf{b}'(x-z_n) + \cdots \\ \cdots + \frac{(-1)^{s_n-1}}{s_n-1\,!}\,c_{n,s_n-1}\,\mathbf{b}^{(s_n-1)}(x-z_n)\Big) = \mathbf{g}(x). \tag{10'}$$

Queste equazioni contengono, come caso particolare, le equazioni differenziali o alle differenze finite, lineari, a coefficienti costanti, non omogenee, i cui secondi membri sono elementi di $\mathfrak{J}$ o di $\mathfrak{D}$. In particolare, l'integrale logaritmico appartiene, come caso specialissimo e precisamente per $\mathbf{a}(x) = \frac{a + bx}{x^2}$, alle trascendenti introdotte nel presente studio.

III.

24. Sia $\varphi(u)$ una funzione della variabile reale u, data fra 0 e ∞, finita per ogni valore di u compreso fra questi limiti. Si supporrà che esista un numero reale c tale che ε essendo positivo arbitrariamente piccolo, $\varphi(u)\, e^{-(c+\varepsilon)u}$ tenda a zero per u tendente all'∞; e che per u tendente a 0, esiste un numero reale σ tale che per ε positivo arbitrariamente piccolo, $\varphi(u)\, u^{-\sigma+\varepsilon}$ tenda a zero. Siccome la prima condizione precedente, supposta soddisfatta per un c, lo sarà per tutti i c maggiori, e la seconda supposta soddisfatta per un σ, lo sarà per tutti i σ minori, conviene indicare con c il limite inferiore e con σ il limite superiore dei numeri che verificano rispettivamente la prima e la seconda condizione. Si può dire, per brevità, che $\varphi(u)$ è d'ordine σ per $u = 0$, e d'ordine esponenziale c per $u = \infty$.

Risulta da ciò che presi ε ed ε' positivi arbitrari, esisterà un numero assegnabile positivo m tale che sia

$$(1) \qquad |\varphi(u)\, e^{-(c+\varepsilon)u}\, u^{-\sigma+\varepsilon'}| < m$$

per tutti i valori reali positivi di u.

Aggiungeremo le ipotesi che $\varphi(u)$ sia integrabile in ogni tratto finito dell'intervallo $0 \ldots +\infty$, e che sia $\sigma > -1$.

25. Sotto tali ipotesi, è noto come l'espressione

$$(2) \qquad \mathbf{f}(x) = \int_0^{\infty} \varphi(u)\, e^{-ux}\, du$$

rappresenti una funzione o ramo di funzione analitica ad un valore, in tutto il semipiano $\mathrm{R}(x) > c$. Questa funzione, entro quel semipiano, e fuori nel caso che sia prolungabile, è detta la funzione determinante di $\varphi(u)$, e questa ne è la generatrice.

Tenuto conto della (1), si avrà

$$|\mathbf{f}(x)| < m \int_0^{\infty} e^{-u(\mathrm{R}(x)-c-\varepsilon)}\, u^{\sigma-\varepsilon'}\, du$$

ossia

$$(3) \qquad |\mathbf{f}(x)| < \frac{m\Gamma(\sigma - \varepsilon' + 1)}{(\mathrm{R}(x) - c - \varepsilon)^{\sigma-\varepsilon'+1}}\,:$$

ma è $\sigma + 1 > 0$; ne segue che « se x tende all'infinito secondo le direzioni com« prese fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, le estreme escluse, la $\mathbf{f}(x)$ tende a zero di un ordine che « non può essere inferiore a quello di $\mathrm{R}(x)^{-(1+\sigma)}$ che per tanto poco quanto si vuole ».

26. Ciò posto, considereremo l'espressione

$$\mathbf{f}_s(x) = \int_0^\infty \varphi(u)\, u^s e^{-ux}\, du . \tag{4}$$

Questa ha significato nello stesso semipiano $R(x) > c$, dove rappresenta, come la $\mathbf{f}(x)$, un ramo ad un valore di funzione analitica regolare; dippiù, è una funzione analitica della variabile s, regolare sotto la condizione

$$R(s) + \sigma + 1 > 0 .$$

La funzione $\mathbf{f}_s(x)$, che ha per generatrice la $u^s\varphi(u)$, si può riguardare come il risultato di un'operazione distributiva eseguita su $\mathbf{f}(x)$; indicherò codesta operazione col simbolo K_s, e porrò

$$\mathbf{f}_s(x) = K_s(\mathbf{f}) . \tag{5}$$

L'operazione K_s è la trasformata, mediante l'operazione G^{-1} che fa passare da una generatrice alla propria determinante, della moltiplicazione per u^s; si può cioè scrivere:

$$\mathbf{f}_s = G^{-1} u^s G . \mathbf{f}$$

ossia

$$K_s = G^{-1} u^s G .$$

Dall'osservazione alla fine del numero precedente, risulta che per le direzioni ivi indicate, la $\mathbf{f}_s(x)$ tende a zero quando x va all'infinito, di ordine inferiore a $R(s) + \sigma + 1$ per tanto poco quanto si vuole.

27. *a*) Dalla definizione dell'operazione K_s, risulta immediatamente che se s, s' ed $s + s'$ sono tali che la loro parte reale sia superiore a $-\sigma - 1$, sarà

$$K_s K_{s'} = K_{s+s'} ; \tag{6}$$

inoltre le K_s, $K_{s'}$ sono fra loro invertibili.

b) È chiaro che per s intero positivo, la K_s non differisce che per il fattore $(-1)^s$ dallo $\frac{d^s\mathbf{f}}{dx^s}$, che indichiamo con D^s; onde

$$K_s\mathbf{f} = (-1)^s D^s\mathbf{f} \quad , \quad (s = 0, 1, 2, \ldots) ; \tag{7}$$

e da questa formula stessa risulta che se σ è positivo, per tutti gl'interi m inferiori a $\sigma + 1$ si ha

$$K_{-m}\mathbf{f} = (-1)^m D^{-m}\mathbf{f} ,$$

dove le determinazioni delle costanti d'integrazione sono fissate dalla condizione verificata per $K_s\mathbf{f}$, di tendere a zero per x tendente all'infinito secondo convenienti direzioni.

28. Alle ipotesi fatte su $\varphi(u)$ aggiungiamo ora quella che essa sia continua ed ammetta le derivate dei primi r ordini in tutto l'intervallo $0 \cdots + \infty$; inoltre

il numero c introdotto al § 24 valga per le suddette derivate, cioè le

$$\varphi^{(n)}(u)\, e^{-(c+1)u} \quad (n = 0, 2, \ldots, r)$$

tendano a zero per $u = \infty$; infine la $\varphi(u)$ e le sue derivate abbiano un valore finito per $u = 0$. La

$$\psi(u) = \varphi(u) - \varphi(0) - \varphi'(0)\, u - \cdots - \varphi^{(r-1)}(0) \frac{u^{r-1}}{r-1!}$$

sarà una funzione finita, continua nell'intervallo allo $0 \ldots \infty$, e l'integrale

$$\mathbf{g}_s(x) = \int_0 u^s\, \psi(u)\, e^{-ux}\, du$$

avrà significato e rappresenterà una funzione analitica regolare di x per $\mathrm{R}(x) > c$; inoltre, poichè $\psi(u)$ tende a zero d'ordine r per $u = 0$, avrà pure significato di funzione analitica regolare di s per $\mathrm{R}(s) > -r-1$. Sostituendo in $\mathbf{g}_s(x)$ per $\psi(u)$ la sua espressione si ottiene

$$\mathbf{g}_s(x) = \mathbf{f}_s(x) - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\Gamma(s+k+1)\, \varphi^{(k)}(0)}{k!\, x^{s+k+1}},$$

ossia

$$\mathbf{f}_s(x) = \mathbf{g}_s(x) + \frac{\Gamma(s+1)}{x^s} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(s+1) \ldots (s+k)}{1 . 2 \ldots k} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{x^{k+1}}. \tag{8}$$

Questa espressione mostra come, sotto le ipotesi del presente numero, la $\mathbf{f}_s(x)$ sia regolare nel piano s non solo per $\mathrm{R}(s) > -1$, come risulterebbe dalla espressione (4), ma per $\mathrm{R}(s) > -r-1$, ad eccezione dei valori $s = -1, -2, \ldots -r$ per ciascuno dei quali essa ammette un polo del prim'ordine in forza delle proprietà della funzione Γ. Dalle stesse proprietà si deduce senza difficoltà che il residuo di $\mathbf{f}_s(x)$, come funzione di s, è dato nel punto $s = -(n+1)$ da

$$\frac{1}{n!}\left(\varphi^{(n)}(0) - n\varphi^{(n-1)}(0)\, x + \binom{n}{2} \varphi^{(n-2)}(0)\, x^2 - \cdots + (-1)^n \varphi(0)\, x^n\right).$$

29. La formula (8) ha una notevole importanza. Mentre l'espressione (4) in forma d'integrale definito e nell'ipotesi di $\varphi(u)$ finita per $u = 0$, non ha alcun significato per $\mathrm{R}(s) \leq -1$, la (8) mostra come — sotto le ipotesi del numero precedente — l'espressione (4) definisca, nella regione $\mathrm{R}(s) > -1$, una funzione analitica di s che è continuabile analiticamente in tutta la striscia parallela all'asse immaginario e compresa fra

$$-r-1 < \mathrm{R}(s) < -1,$$

eccettuati i poli $s = -1, -2, \ldots -r$; in tale modo l'operazione K_s è applicabile ad $\mathbf{f}$ in campo più esteso di quello che non sia dato dalla primitiva definizione, e per un noto principio, la proprietà (6) vale ora per tutti i valori di s, s' ed $s + s'$

aventi contemporaneamente la loro parte reale superiore a $-r-1$, essendo eccettuati i valori interi negativi di r.

30. Se la proprietà posta al principio del § 28 si estende alle derivate di $\varphi(u)$ di tutti gli ordini $1, 2, 3, \ldots$, la $K_s f$ verrà ad essere definita per $R(s) > -m$, m essendo un intero grande a piacere e sarà quindi una funzione meromorfa di s coi poli nei punti di indice intero negativo. In particolare, se $\varphi(u)$ è funzione analitica di u regolare in un intorno $|u| < \varrho$ di $u = 0$, si prenda a positivo ed inferiore a ϱ, e si ponga

$$K_s f = \int_0^a u^s \varphi(u)\, e^{-ux}\, du + \int_a^\infty u^s \varphi(u)\, e^{-ux}\, du.$$

L'ultimo termine è una funzione intera di s, regolare in x per $R(x) > c$; sia essa $\varepsilon_a(s, x)$; nel primo integrale si può sostituire a $\varphi(u)$ il suo sviluppo in serie

$$\varphi(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu u^\nu}{\nu!}, \tag{9}$$

indi integrare termine a termine. Viene così:

$$K_s f = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\nu!} \int_0^a u^{\nu+s} e^{-ux}\, du + \varepsilon_a(s, x).$$

Ma gl'integrali della sommatoria sono facilmente riducibili alla nota trascendente di Prym, e come tali ammettono lo sviluppo:

$$\int_0^a u^{\nu+s} e^{-ux}\, du = a^{\nu+s+1}\left(\frac{1}{\nu+s+1} - \frac{ax}{\nu+s+2} + \frac{a^2x^2}{2!(\nu+s+3)} - \cdots\right),$$

onde sostituendo e tenuto conto della convergenza assoluta delle serie che qui figurano, si ottiene:

$$K_s f = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a^{s+\nu+1}}{\nu!(s+\nu+1)} (k_\nu - \nu k_{\nu-1} x + \cdots (-1)^\nu k_0 x^\nu) + \varepsilon_a(x, s). \tag{10}$$

La (10) definisce dunque l'operazione K_s per tutti i valori di s, eccettuati gli interi negativi, per ogni x tale che sia $R(x) > c$; per s intero positivo essa dà, all'infuori del fattore $(-1)^s$, la derivata s^{sima} di $f(x)$.

31. La formula (8), oltre al vantaggio di estendere il campo di valori di s pei quali è valida l'operazione K_s, presenta anche quello di rendere più approssimata la conoscenza del comportamento assintotico di $f_s(x)$ per k tendente all'infinito nelle direzioni indicate $\left(\text{fra } -\frac{\pi}{2}+0 \text{ e } \frac{\pi}{2}-0\right)$.

Infatti, pel § 25, $f_s(x)$ tende allo zero nelle dette direzioni di ordine non inferiore a $1 + R(s) - \varepsilon$, essendo ε piccolo a piacere. Per il medesimo § 25, la $g_s(x)$ tende allo zero, nelle stesse direzioni, di ordine non inferiore ad $R(s) + r - \varepsilon + 1$.

Ma posto $\varphi(0) = k_0$, $\varphi'(0) = k_1$, $\varphi''(0) = k_2, \ldots$ la (8) si può scrivere:

$$(8') \quad \mathbf{f}_s(x) - k_0 \frac{\Gamma(s+1)}{x^{s+1}} - k_1 \frac{\Gamma(s+2)}{x^{s+2}} - \frac{k_2}{2!} \frac{\Gamma(s+3)}{x^{s+3}} - \cdots - \frac{k_{r-1}}{r-1!} \frac{\Gamma(s+r)}{x^{s+r}} = \mathbf{g}_s(x);$$

ora questa dimostra anzitutto che $\mathbf{f}_s(x)$ tende a zero precisamente dell'ordine $s+1$ per $x = \infty$ nelle dette direzioni, e di più che

$$x^{s+r}\left(\mathbf{f}_s(x) - \frac{k_0 \Gamma(s+1)}{x^{s+1}} - \cdots - \frac{k_{r-1}}{r-1!} \frac{\Gamma(s+r)}{x^{s+r}}\right)$$

tende a zero.

Nel caso in cui la funzione $\varphi(u)$ abbia le derivate di tutti gli ordini finite per $u = 0$ ed in special modo nel caso in cui $\varphi(u)$ sia analitica regolare in un intorno di $u = 0$, viene di qua lo sviluppo assintotico nel senso del Poincaré.

$$(11) \qquad \mathbf{f}_s(x) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{k_\nu}{\nu!} \frac{\Gamma(\nu+s+1)}{x^{\nu+s+1}},$$

per ogni valore di s, gli interi negativi eccettuati. Poichè è noto (¹) che gli sviluppi assintotici si possono integrare termine a termine, viene quindi confermata la

$$\mathrm{K}_s = (-1)^m \mathrm{D}^{-m} \mathrm{K}_{s+m}.$$

Si noti ancora che la (8) o (8') permette di estendere la formula (6) a tutti i valori di s e di s' se esistono per $\varphi(u)$ le derivate di tutti gli ordini; ai valori tali che le parti reali di s, s' ed $s+s'$ siano superiori a $-r-1$ se esistono le derivate solo fino alla r^{sima}.

32. È appena necessario di fare avvertire che lo sviluppo (11) viene ad essere e f f e t t i v o nel caso in cui $\mathbf{f}(x)$ sia regolare in un intorno di $x = \infty$. In tal caso, la $\varphi(u)$ appartiene all'insieme di funzioni intere indicato con $\mathcal{S}$ (§ 5).

33. All'operazione $e^{\pi i s} \mathrm{K}_s \mathbf{f}$ si darà il nome di *derivata d'indice* s della funzione determinante $\mathbf{f}$; le proprietà (6) e (7) di K_s legittimano questa denominazione. Coll'uso di questa nomenclatura, possiamo dire che

a) « Una funzione determinante, la cui generatrice $\varphi(u)$ è d'ordine σ per $u = 0$ « (nel senso stabilito al § 24), ammette la derivata per ogni indice reale o com- « plesso s tale che sia $\mathrm{R}(s) > -\sigma - 1$ ».

b) « Una funzione determinante la cui generatrice ammette le prime r deri- « vate d'indice intero positivo ed è finita e diversa da zero per $u = 0$, ammette le « derivate per tutti gl'indici reali o complessi s per i quali sia $\mathrm{R}(s) > -r-1$. « Queste derivate sono fornite dalla formola integrale (4) per $\mathrm{R}(s) > -1$; per i « valori minori di $\mathrm{R}(s)$, dalla formula (8); eccettuati i valori interi negativi di s ».

c) « Una funzione determinante la cui generatrice ammette tutte le derivate « d'ordine intero, ed è insieme a queste derivate finita, e diversa da zero per $u = 0$,

(¹) Poincaré, loc. cit., pag. 301.

« ammette derivate per ogni indice complesso s; esse sono fornite dalla formula (8), « eccettuati i valori interi negativi di s. Queste derivate ammettono, per $R(x)$ tendente all'infinito positivo, i sviluppi assintotici (11). Siccome poi gli sviluppi « assintotici sono integrabili termine a termine ([1]), si possono ottenere analoghi sviluppi anche per s intero negativo. I detti sviluppi sono tutti effettivi (convergenti « in un intorno di $x=\infty$) se $\mathbf{f}$ è un elemento di $\mathfrak{I}$ ».

d) « Dall'essere

$$D^s \frac{1}{x^r} = e^{\pi i s} K_s\left(\frac{1}{x^r}\right) = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)} \frac{e^{\pi i s}}{x^{r+s}},$$

« si ha che gli sviluppi (assintotici o effettivi) (11) si ottengono dallo sviluppo « (rispettivamente assintotico o effettivo di $\mathbf{f}$) mediante la derivazione d'indice s « termine a termine ».

34. È possibile di togliere l'eccezione relativa agli indici interi negativi. Ciò sarà evidentemente dimostrato quando lo sia per $s=-1$, e per il caso di un termine dello sviluppo (8): il passaggio al caso generale non presentando più alcuna essenziale difficoltà. A questo effetto, consideriamo

$$D^s \frac{1}{x} = e^{\pi i s} \int_0^\infty e^{-ux} u^s \, du = \frac{e^{\pi i s}\, \Gamma(s+1)}{x^{s+1}}.$$

Conviene scindere l'integrale nelle due parti (integrali di Prym)

$$\int_0^1 e^{-ux} u^s \, du + \int_1^\infty e^{-ux} u^s \, du.$$

La prima parte è una funzione meromorfa, il cui sviluppo si ha immediatamente in

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n+s+1)};$$

la seconda è una funzione intera in s, che si può scrivere

$$\frac{1}{x^{s+1}} \int_x^\infty e^{-t} t^s \, dt;$$

l'integrale definito è quella nota trascendente che viene di solito indicata con $Q(x, s+1)$. Il limite di questa per $s=-1$ è la funzione nota sotto il nome di *logaritmo integrale* ([2]); si ha cioè:

$$\lim_{s=-1} \frac{1}{x^{s+1}} Q(x, s+1) = -li\, e^{-x} = -C - \log x + x - \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^3}{3.3!} \cdots$$

dove C è una nota costante.

([1]) Vedi citazione al § 31.

([2]) V. per es. N. Nielsen, *Theorie der Integrallogarithmus*, pag. 2, Leipzig, 1906.

Essendo dunque

$$D^s \frac{1}{x} = e^{\pi i s}\left(\frac{1}{x^{s+1}} Q(x, s+1) + \frac{1}{s+1} - \frac{x}{s+2} + \frac{x^2}{2!(s+3)} - \cdots\right),$$

verrà

$$\lim_{s=-1} D^s\left(\frac{1}{x} - \frac{e^{\pi i s}}{s+1}\right) = c + \log x,$$

cioè il limite di D^s per $s = -1$ dà precisamente la derivata d'indice -1, con una speciale determinazione della costante d'integrazione.

IV.

35. Nell'articolo precedente si è studiata un'operazione, che si è indicata con $K_s f$, e che è applicabile a tutte le funzioni $f(x)$ determinanti di funzioni $\varphi(u)$ definite, come è detto al § 24, in tutto l'intervallo $0 \cdots +\infty$ di valori della variabile u. Questa operazione, che per i valori di s tali che sia

$$R(s) > -\sigma - 1,$$

è rappresentata da

$$K_s f = \int_0^\infty \varphi(u)\, e^{-ux} u^s\, du, \tag{1}$$

ha tali proprietà che persuadono di considerarla come derivata d'indice qualunque s della $f(x)$, all'infuori del fattore $e^{\pi i s}$; abbiamo dunque posto

$$K_s f = e^{-\pi i s} D^s f, \tag{2}$$

Inoltre, abbiamo visto come questa operazione, sebbene manchi allora dell'espressione (1) in forma d'integrale definito, possa continuare a sussistere e a mantenere intatte le sue proprietà anche per valori di s che non soddisfino alla limitazione $R(s) > -\sigma - 1$: di ciò ha dato esempio, in particolare, il caso in cui $\varphi(u)$ sia analitica regolare in un intorno di $u = 0$; nel quale caso $K_s f$ dà una funzione meromorfa di s, talchè l'operazione ha significato per tutti i valori di s, gl'interi negativi eccettuati (§ 31); più generalmente se la $\varphi(u)$, non analitica, ammette le derivate dei primi r ordini (§ 28), ed è finita insieme ad esse per $u = 0$, la K_s è definita per tutti i valori $R(s) > -r - 1$, gl'interi negativi eccettuati, sebbene la (1) non valga se non per $R(s) > -1$. Inoltre per i valori di s, s' tali che siano ad un tempo s, s' ed $s + s'$ in parte reale maggiori di $-\sigma - 1$, vale la relazione

$$D^s D^{s'} = D^{s+s'}. \tag{3}$$

Questo ci conduce a formulare come segue la definizione dell'operazione D^s.

« Si considerino le funzioni della variabile reale u definite ad un valore e integrabili in ogni tratto compreso fra 0 e $+\infty$, e che siano d'ordine numerico finito σ per $u = 0$ e d'ordine esponenziale finito c per $u = \infty$. Ogni tale funzione $\varphi(u)$

« ammette una determinante $\mathbf{f}(x)$, analitica regolare per $\mathrm{R}(x) > c$. Per la $\mathbf{f}(x)$, la « derivata d'ordine qualunque $\mathrm{D}^s\mathbf{f}$ è definita, per i valori s tali che sia

$$(\alpha) \qquad \mathrm{R}(s) > -\sigma - 1,$$

« dall'integrale (1) moltiplicato per $e^{\pi i s}$. Ora questo prodotto è una funzione ana- « litica $\varpi(x, s)$ di due variabili che, come funzione di s, sottostà nella sua espressione « (1) alla condizione (α), ma la funzione può essere continuata univocamente a sinistra « del semipiano definito da (α). È questa continuazione di $\varpi(s)$ che si ammetterà « come definizione di D^s per valori di s non soddisfacenti ad (α).

« Ma applicando la relazione (3), si ha per s soggetto alla condizione (α) e « per m intero positivo:

$$\mathrm{D}^s\mathbf{f} = (-1)^m e^{\pi i s}\, \mathrm{D}^{-m} \int_0^\infty \varphi(u)\, e^{-ux} u^{s+m}\, du;$$

« questa espressione, che è conseguenza dell'equazione mista differenziale e alle dif- « ferenze

$$\frac{\partial \varpi}{\partial x} = \varpi(x, s+1)$$

« e in cui m si prende tale che sia $\mathrm{R}(s) + m > -\sigma - 1$, si potrà assumere come « definizione di D^s per ogni valore di s, e coinciderà (le costanti successive delle qua- « drature essendo prese secondo l'avvertenza del § 27) colla (2) sotto la condizione « (α), e colla continuazione di $\varpi(s)$ dove questa esista. In tal modo si è esteso D^s « a tutti i valori di s ».

36. Veniamo ora a considerare un'altra espressione che si può dare dell'operazione $\mathrm{D}^s\mathbf{f}$, e che ha il vantaggio di operare esplicitamente sulla $\mathbf{f}$, anzichè sulla generatrice di questa.

È noto, e si è già ricordato al § 5, come sotto date condizioni sia possibile di invertire l'espressione di $\mathbf{f}$ per la sua generatrice $\varphi(u)$, ricavandone

$$(4) \qquad \varphi(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \mathbf{f}(t)\, e^{ut}\, dt \ , \ k > c;$$

sarà, in particolare, condizione sufficiente a ciò, che $\varphi(u)$ ammetta la derivata prima d'ordine esponenziale finito per $u = \infty$ e che $\varphi(u)$ e $\varphi'(u)$ siano finite per $u = 0$. Se nella (1) si pone per $\varphi(u)$ questa espressione, indi si invertono le integrazioni, il che è lecito sotto le condizioni

$$\mathrm{R}(x) > k \ , \ \mathrm{R}(s) > -1,$$

viene da (2), per una nota formula:

$$(5) \qquad \mathrm{D}^s\mathbf{f} = \frac{e^{\pi i s}\, \Gamma(s+1)}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{\mathbf{f}(t)\, dt}{(x-t)^{s+1}};$$

tale è l'espressione di D^s che si voleva ottenere.

Reciprocamente, sia l'integrale

$$(5') \qquad \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{\mathrm{f}(t)\,dt}{(x-t)^{s+1}},$$

il quale abbia senso per $\mathrm{R}(x) > k$ e per un valore $\bar{s}$ di s. Per un noto teorema nella teoria delle funzioni determinanti esso avrà allora senso per ogni s tale che sia $\mathrm{R}(s) > \mathrm{R}(\bar{s})$ e rappresenterà nei semipiani $\mathrm{R}(x) > k$, $\mathrm{R}(s) > \mathrm{R}(\bar{s})$, una funzione o ramo di funzione analitica regolare delle due variabili x ed s. Quando sia $\mathrm{R}(\bar{s}) \leqq 0$, e l'integrale (4) abbia senso, sarà lecito, dopo sostituita a $\frac{1}{(x-t)^{s+1}}$ la sua espressione

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty e^{-u(x-t)}\, u^s\, du,$$

scambiare l'ordine delle integrazioni, e ponendo $\varphi(u)$ al posto dell'integrale (4), si ricadrà sulla formula (5).

37. In base alle considerazioni che precedono, possiamo accingerci alla risoluzione, rispetto alla funzione incognita $\mathrm{f}(x)$, sia dell'equazione funzionale

$$(a) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{\mathrm{f}(t)\,dt}{(x-t)^{q+1}} = \mathrm{g}(x),$$

in cui $\mathrm{g}(x)$ è una funzione determinante data e q è un numero qualunque, sia dell'altra equivalente in cui $\varphi(u)$ è la funzione generatrice di $\mathrm{f}(x)$:

$$(b) \qquad \int_0^\infty e^{-ux} \varphi(u)\, u^q\, du = \Gamma(q+1)\, \mathrm{g}(x).$$

Entrambe queste equazioni equivalgono, sotto convenienti restrizioni, alla

$$(c) \qquad \mathrm{D}^q \mathrm{f} = e^{\pi i q}\, \Gamma(q+1)\, \mathrm{g}(x):$$

in altri termini, risoluta che sia la (c), si hanno, sotto condizioni che andremo a stabilire, le soluzioni di (a) e di (b).

Ora la (3) ci dà immediatamente la soluzione formale della (c), mediante

$$(d) \qquad \mathrm{f}(x) = e^{\pi i q}\, \Gamma(q+1)\, \mathrm{D}^{-q} \mathrm{g}(x);$$

pertanto si tratta di discutere questa soluzione.

38. Sia perciò $\gamma(u)$ la funzione generatrice di $\mathrm{g}(x)$, e sia σ l'ordine di $\gamma(u)$ per $u=0$, e c il suo ordine esponenziale per $u=\infty$. L'espressione

$$\mathrm{D}^s \mathrm{g} = e^{\pi i s} \int_0^\infty e^{-ux}\, u^s\, \gamma(u)\, du$$

avrà dunque senso per s tale che sia $\mathrm{R}(s) > -\sigma - 1$, e definirà per tali valori di s un ramo ad un valore di funzione analitica di x regolare per $\mathrm{R}(x) > c$.

Se dapprima si suppone $-q$ compreso fra i detti valori di s, cioè

(6) $$\mathrm{R}(q) < \sigma + 1,$$

si avrà per la $\mathbf{f}(x)$ l'espressione

(7) $$\mathbf{f}(x) = \Gamma(q+1) \int_0^\infty e^{-ux} u^{-q} \gamma(u)\, du,$$

e il problema (c) è risoluto. La funzione generatrice di $\mathbf{f}(x)$ è

$$\varphi(u) = \Gamma(q+1)\, u^{-q} \gamma(u).$$

Ora dal § 36 risulta che all'integrale

$$\int_0^\infty e^{-ux} u^{-q} \gamma(u)\, du$$

si può, sotto le condizioni ivi indicate, dare la forma

$$\frac{\Gamma(-q+1)}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \mathbf{g}(t)\, (x-t)^{q-1}\, dt\,;$$

onde, sostituendo nella (7) e mediante una nota formula di riduzione viene, sotto quelle condizioni:

(7') $$\mathbf{f}(x) = \frac{q}{2i \operatorname{sen} \pi q} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \mathbf{g}(t)\, (x-t)^{q-1}\, dt\,.$$

Questa espressione inverte l'integrale (a).

Si supponga ora che q non soddisfi più alla condizione (6). Potremo allora sempre prendere un m intero positivo tale che sia $m - \mathrm{R}(q) > -\sigma - 1$, e per il § 35 porremo

(8) $$\mathrm{D}^{-q}\, \mathbf{g} = (-1)^m e^{\pi i q}\, \mathrm{D}^{-m} \int_0^\infty e^{-ux} u^{m-q} \gamma(u)\, du,$$

donde segue immediatamente, dalla (d), l'espressione di $\mathbf{f}(x)$:

(9) $$\mathbf{f}(x) = (-1)^m\, \Gamma(q+1)\, \mathrm{D}^{-m} \int_0^\infty e^{-ux} u^{m-q} \gamma(u)\, du,$$

la cui funzione generatrice è ancora

$$\Gamma(q+1)\, u^{-q} \gamma(u).$$

Sostituendo anche qui, all'integrazione su $\gamma(u)$ quella che porta direttamente su $\mathbf{g}(x)$, viene, sotto le indicate condizioni di validità:

(9') $$\mathbf{f}(x) = \frac{(-1)^m q}{2i \operatorname{sen} \pi q}\, \mathrm{D}^{-m} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \mathbf{g}(t)\, (x-t)^{q-m-1}\, dt\,.$$

39. Consideriamo il caso speciale in cui $\gamma(u)$ abbia derivata $\gamma'(u)$ integrabile in ogni intervallo finito fra 0 e ∞, d'ordine esponenziale finito per $u=\infty$, e quest'ordine si faccia addirittura uguale a c; infine $\gamma(u)$ e $\gamma'(u)$ siano finite e diverse da zero per $u=0$. Sotto questa ipotesi, $\mathbf{g}(x)$ tende a zero almeno di prim'ordine nella direzione dell'asse immaginario su ogni retta $k+iv$ in cui sia $k>c$, e inoltre è $\sigma=0$. Allora se è $R(q)<1$, la formula (7') dà una funzione $\mathbf{f}$ di x analitica regolare per $R(x)>k$; questa funzione sostituita nel primo membro di (a), risolve l'equazione (a) stessa. Se è $R(q)>1$, si può sempre determinare un intero positivo m tale che sia $R(q)<m+1$, e corrispondentemente la (9') sarà la risoluzione di (a) cioè del problema d'inversione proposto, se $\mathbf{f}(x)$ ne rende convergente il primo membro, ed in ogni caso dà la soluzione del *problema esteso*, espresso dall'equazione (c).

40. Dalla (9') risulta, con calcolo semplice, che se per $\mathbf{g}(x)$ vale lo sviluppo, effettivo od assintotico:

$$\mathbf{g}(x) \simeq \frac{c_0}{x}+\frac{c_1}{x^2}+\frac{c_2}{x^3}+\cdots,$$

varrà per $\mathbf{f}(x)$ lo sviluppo,

$$\mathbf{f}(x) \simeq \frac{\pi q}{\operatorname{sen} \pi q}\left(\frac{c_0}{x^{1-q}}+(1-q)\frac{c_1}{x^{2-q}}+\frac{(1-q)(2-q)}{1 \, . \, 2}\frac{c_2}{x^{3-q}}+\cdots\right),$$

pure rispettivamente effettivo od assintotico.

41. Il problema ora risoluto permette di generalizzare l'equazione funzionale di cui si è data la soluzione al II, § 16. Osserviamo perciò che essendo $\mathbf{a}(x)$, $\mathbf{f}(x)$ due elementi dell'insieme $\mathfrak{J}$ o dell'insieme più generale indicato con $\mathfrak{D}$ al § 8, si era indicata con $A(\mathbf{f})$ l'operazione

$$A(\mathbf{f})=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathbf{f}(t)\,\mathbf{a}(x-t)\,dt$$

o, se $\varphi(u)$ è la generatrice di $\mathbf{f}(x)$ ed $\alpha(u)$ di $\mathbf{a}(x)$, si aveva:

$$A(\mathbf{f})=\int_0^\infty \varphi(u)\,\alpha(u)\,e^{-ux}\,du\,;$$

applicando ora a questa l'operazione D^s, si avrà per $R(s)>-1$:

$$D^s A(\mathbf{f})=e^{\pi i s}\int_0^\infty \varphi(u)\,\alpha(u)\,e^{-ux}\,u^s\,du\,,$$

mentre agli altri valori di s la D^s si estende come è indicato al § 35. Ora, posto

$$\mathbf{a}_1(x)=\frac{\Gamma(s+1)}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\mathbf{a}(t)\,dt}{(x-t)^{s+1}}$$

si ha anche

$$D^s A(\mathfrak{f}) = \frac{e^{\pi i s}}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \mathfrak{a}_1(x-t)\,\mathfrak{f}(t)\,dt\,.$$

Ciò posto, abbiasi da risolvere l'equazione funzionale

$$(e)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \mathfrak{a}(x-t)\,\mathfrak{f}(t)\,dt = \mathfrak{g}(x)\,,$$

dove $\mathfrak{a}(x)$ è, non più come al § 16 un elemento di $\mathfrak{D}$, ma il prodotto di un simile elemento per una potenza di x di esponente qualunque, e $\mathfrak{g}(x)$ è un elemento di $\mathfrak{D}$, o della stessa natura di $\mathfrak{a}(x)$. Per quanto abbiamo detto, il primo membro della (e) è della forma $D^s A$, essendo A una delle operazioni del § 16, e quindi la soluzione di (e) sarà data da

$$\mathfrak{f}(x) = e^{\pi i s}\,\Gamma(s+1)\,A^{-1}\,D^{-s}(\mathfrak{g}),$$

dove la discussione della soluzione si fa in base ai §§ 37-39. Si noti che per le funzioni $\mathfrak{a}(x)$ qui considerate, agli sviluppi effettivi od assintotici dell'art. I vanno sostituiti sviluppi della forma

$$\simeq \frac{a_1}{x^{s+1}} + \frac{a_2}{x^{s+2}} + \cdots + \frac{a_n}{x^{s+n}} + \cdots$$

Infine si osservi che l'equazione (e) è, nel campo complesso delle funzioni determinanti, l'analoga dell'equazione studiata da Sonine [1] nel campo reale.

V.

42. Consideriamo l'espressione

$$(1)\qquad \mathfrak{f}(x) = \int_{-1}^{-\infty} \frac{\varpi(t)\,dt}{x-t}\,,$$

dove $\varpi(t)$ è una funzione della variabile reale t, data fra -1 e $-\infty$, integrabile in ogni tratto finito di quest'intervallo e infinitesima di ordine $\sigma > 1$ per $t = -\infty$. L'espressione (1) dà per $\mathfrak{f}(x)$ un ramo ad un valore di funzione analitica, regolare in tutto il piano x ad eccezione del taglio eseguito lungo l'asse reale, da -1 a $-\infty$.

Se in (1) sostituiamo ad $(x-t)^{-1}$ l'espressione che per $R(x) > R(t)$ gli è equivalente,

$$\int_0^\infty e^{-u(x-t)}\,du\,,$$

avremo, nel semipiano $R(x) > -1$:

$$(2)\qquad \mathfrak{f}(x) = \int_0^\infty \int_{-1}^{-\infty} e^{-ux}\,\varpi(t)\,e^{ut}\,dt\,du\,,$$

[1] Acta Math., t. IV, pag. 171. Cfr. Volterra, Annali di Mat., s. II, t. 25, pag. 140.

l'inversione dell'ordine delle integrazioni essendo evidentemente lecito sotto alle fatte ipotesi per ogni $u > 0$; talchè viene definita la funzione, regolare in tutto il semipiano $R(u) > 0$ ed avente per $u = 0$ un valore finito:

$$(3) \qquad \varphi(u) = \int_{-1}^{-\infty} e^{ut}\, \varpi(t)\, dt\,.$$

Codesta funzione $\varphi(u)$ è dunque una funzione determinante, e $\varpi(t)$ ne è la generatrice: mentre la (2), che si può scrivere

$$\mathbf{f}(x) = \int_0^{\infty} e^{-ux}\, \varphi(u)\, du$$

mostra che $\varphi(u)$ è la generatrice di $\mathbf{f}(x)$. Adunque:

« Se $\mathbf{f}(x)$ è definita da un'espressione (1), $\varpi(t)$ essendo integrabile da -1 a « $-\infty$ e infinitesima d'ordine maggiore d'uno per $t = -\infty$, $\varpi(t)$ è la generatrice « della generatrice di $\mathbf{f}(x)$ ».

43. Questa osservazione dà un metodo per la risoluzione dell'equazione funzionale

$$(a) \qquad \int_{-1}^{-\infty} \frac{\varpi(t)\, dt}{x - t} = \mathbf{g}(x),$$

in cui $\mathbf{g}(x)$ è una funzione data, $\varpi(t)$ una funzione da determinarsi. Converrà, per quanto precede, supporre $\mathbf{g}(x)$ appartenente alla classe delle funzioni determinanti, e regolare non solo nel semipiano $R(x) > -1$, ma in ogni semipiano limitato da una retta passante per -1 e escludente il taglio $-1 \cdots -\infty$. Ne viene che la sua generatrice $\varphi(u)$ sarà una funzione analitica regolare in tutto un angolo avente per vertice il punto $u = 0$ ed i lati di argomento $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon$, $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, essendo ε un angolo piccolo a piacere. Per u reale, questa funzione ammette come espressione analitica

$$\varphi(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k - i\infty}^{k + i\infty} e^{tu}\, \mathbf{g}(t)\, dt\,, \quad k > -1\,;$$

per u complesso, l'espressione è

$$\varphi(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\omega)} e^{tu}\, \mathbf{g}(t)\, dt\,,$$

dove ω è una linea che partendo da $-\infty$, gira intorno al taglio e ritorna a $-\infty$; le direzioni da cui proviene e in cui torna a $-\infty$ essendo di argomenti rispettivi $-\alpha$ e $+\alpha$, α prossimo a π ed inferiore per tanto poco quanto si vuole. Dall'espressione valida per $R(x) > -1$

$$(4) \qquad \mathbf{g}(x) = \int_0^{\infty} \varphi(u)\, e^{-ux}\, du$$

segue inoltre che $\varphi(u)$ è di ordine esponenziale non superiore a -1.

Ciò posto, e determinata $\varphi(u)$, potrà accadere che essa sia alla sua volta funzione determinante e sia $\varpi(t)$ la sua generatrice. Per essere $\varphi(u)$ di ordine esponenziale -1, si potrà quindi scrivere

$$\varphi(u) = \int_{-1}^{-\infty} \varpi(t)\, e^{tu}\, dt; \tag{5}$$

qualora inoltre accada che questa $\varpi(t)$ sia, per $t = \infty$, infinitesima d'ordine > 1, si potrà sostituire la espressione (5) di $\varphi(u)$ in (4) e invertire l'ordine delle integrazioni; viene così

$$\mathrm{g}(x) = \int_{-1}^{-\infty} \frac{\varpi(t)\, dt}{x - t}$$

e si è risoluta l'equazione (a).

Riassumendo: « Se $\mathrm{g}(x)$ appartiene alla classe delle funzioni determinanti, l'equa-
« zione (a) si risolve quando la generatrice $\varphi(u)$ di $\mathrm{g}(x)$ è essa pure una determi-
« nante, e la soluzione di (a) è data dalla generatrice $\varpi(t)$ di $\varphi(u)$ ».

44. Riprendiamo una funzione $\mathrm{f}(x)$ data sotto la forma (1) e supponiamo $\varpi(t)$ tale che gl'integrali

$$a_n = \int_{-1}^{-\infty} \varpi(t)\, t^n\, dt \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

siano tutti convergenti. Lo sviluppo (generalmente divergente)

$$\sum \frac{a_n}{x^{n+1}}$$

non è altro che lo sviluppo assintotico di $\mathrm{f}(x)$; infatti, riprendendo l'espressione (2) della generatrice $\varphi(u)$ di $\mathrm{f}(x)$, si vede che è

$$a_n = \varphi^{(n)}(0);$$

ciò dimostra nel modo più semplice l'affinità fra gli sviluppi di Stieltjes [1] e le serie assintotiche o quelle sommabili esponenzialmente.

45. Sia ora da risolvere l'equazione funzionale

$$\int_{-1}^{-\infty} \frac{\varpi(t)\, dt}{(x - t)^{s+1}} = \mathrm{g}(x), \tag{b}$$

essendo ancora $\mathrm{g}(x)$ appartenente alla classe delle funzioni determinanti, e regolare in tutto il piano x ad eccezione del taglio da -1 a $-\infty$.

A questo effetto, sostituiamo nel primo membro di (b),

$$\frac{1}{(x - t)^{s+1}} = \frac{1}{\Gamma(s + 1)} \int_0^{\infty} e^{-u(x-t)} \cdot u^s\, du$$

(1) V. Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, Ch. II. (Paris, 1901).

il che è lecito per $R(x) > -1$; invertendo l'ordine delle integrazioni, l'equazione (b) prende la forma

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)}\int_0^{\infty} e^{-ux} u^s \int_{-1}^{-\infty} \varpi(t)\, e^{ut}\, dt\, du = \mathbf{g}(x).$$

Sia ora $\mathbf{f}(x)$ la determinante di

$$\varphi(u) = \int_{-1}^{-\infty} \varpi(t)\, e^{ut}\, dt\,;$$

la (b) equivale a

$$e^{-\pi i s}\, D^s \mathbf{f} = \Gamma(s+1)\, \mathbf{g}(x)$$

e quindi il metodo per la soluzione consiste:

a) nel determinare $\mathbf{f}(x) = e^{\pi i s}\, \Gamma(s+1)\, D^{-s}\, \mathbf{g}(x)$;

b) nel risolvere l'equazione (a) relativamente alla funzione $\mathbf{f}(x)$. La generatrice $\varpi(t)$ della generatrice di $\mathbf{f}(x)$, quando soddisfi alla condizione di essere integrabile e infinitesima di ordine > 1 per $t = -\infty$, è la soluzione dell'equazione (b).

VI.

46. Nel presente articolo ci proponiamo di studiare, nel campo complesso, l'integrale

$$(1) \qquad \int_0^x \frac{\varphi(t)\, dt}{(t-x)^{s+1}}\,;$$

l'integrazione essendo eseguita lungo una linea che congiunge 0 ad x, senza naturalmente uscire dal campo in cui è data la funzione $\varphi(t)$. Si supponga dapprima $\varphi(t)$ funzione analitica regolare entro un campo semplicemente connesso C, contenente l'origine; x è un punto arbitrario di codesto campo. Il numero s è preso comunque reale o complesso, salva la condizione naturale $R(s) < 0$.

Si può osservare dapprima, che l'integrale è indipendente dalla linea d'integrazione, purchè presa tutta entro C; ciò si vede senza difficoltà, unendo le due linee d'integrazione mediante un arco di cerchio di centro x e di raggio arbitrariamente piccolo, su cui l'integrale è in valore assoluto pure arbitrariamente piccolo per la condizione $R(s) < 0$.

47. Perciò l'integrale (1) si può considerare come l'espressione di un'operazione funzionale su $\varphi(x)$, e nel tempo stesso come quella di una funzione di s. Come tale si indichi con $p(s)$; si vede immediatamente come $p(s)$ (che appartiene alla classe delle funzioni determinanti) sia una funzione meromorfa. Infatti, si descriva un cerchio (x, r) di centro x e di raggio r abbastanza piccolo per essere tutto interno a C; si spezzi poi (1) in

$$\int_0^a + \int_a^x,$$

essendo a un punto della linea d'integrazione interno al cerchio (x, r). È chiaro che il primo integrale è una funzione intera in s; in quanto al secondo, esso si può scrivere

$$\int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} (t-x)^{n-s-1}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} \frac{(a-x)^{n-s}}{s-n}; \tag{2}$$

sotto questa forma, è manifesto che $p(s)$ è una funzione uniforme, regolare in tutto il piano salvo i poli di prim'ordine $s = 0, 1, 2, \ldots$, ed il punto singolare essenziale $x = \infty$. Inoltre il residuo di $p(s)$ per $s = n$ è

$$\frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}.$$

È facile ottenere per $p(s)$ uno sviluppo in serie di fattoriali: si descriva un cerchio di centro a e di raggio r abbastanza piccolo per essere tutto interno a C, il punto a essendo preso abbastanza prossimo ad x perchè x cada nell'interno del cerchio. Si ha allora

$$p(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!} \int_a^x \frac{(t-a)^n\, dt}{(t-x)^{s+1}} + \int_0^a \frac{\varphi(t)\, dt}{(t-x)^{s+1}};$$

il secondo integrale dà una funzione intera in s; in quanto al primo, l'integrale definito che figura nei coefficienti si riduce facilmente all'integrale Euleriano di prima specie, e la sommatoria diviene

$$(-1)^{1-s}(x-a)^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(a)\,(x-a)^n}{(-s)(-s+1)\ldots(-s+n)}. \tag{3}$$

Nel caso di s intero negativo, la (1) ci dà, all'infuori del segno, l's^{mo} integrale di φ, e precisamente quella determinazione che si dice *principale*.

48. Non vi è restrizione essenziale nel supporre il campo C ridotto al cerchio di convergenza dell'elemento $\varphi(t)$ di funzione analitica nell'intorno r del punto 0. In tale ipotesi, si può fare coincidere a con 0 in entrambi gli sviluppi (2) e (3), e si hanno così per $p(s)$ le espressioni

$$p(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} \frac{(-x)^{n-s}}{s-n}, \qquad \left(\text{per } |x| < \frac{r}{2}\right) \tag{4}$$

$$p(s) = (-1)^{1-s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)\, x^{n-s}}{(-s)(-s+1)\ldots(-s+n)}. \tag{5}$$

49. Essendo ancora C un cerchio di centro 0, sia ora $\varphi(t)$ sviluppabile in serie di potenze della forma

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, t^{n+\sigma}, \tag{6}$$

dove è σ un numero qualunque reale o complesso, su cui faremo solo l'ipotesi $R(\sigma) > -1$. Applicando ad una simile $\varphi(t)$ l'operazione (1), il risultato è indipendente dalla linea d'integrazione fra 0 e x, purchè questa linea non oltrepassi un taglio arbitrariamente fatto fra 0 e il contorno di C. Sostituendo nella (1) lo sviluppo di $\varphi(t)$ ed integrando termine a termine, si ottiene l'operazione (1) espressa mediante la serie:

$$\frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(\sigma)\,(-1)^{1-s}}{\Gamma(\sigma-s)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n\,\sigma(\sigma+1)\dots(\sigma+n)\,x^{n+\sigma-s}}{(\sigma-s)(\sigma-s+1)\dots(\sigma-s+n)}. \tag{7}$$

50. Infine si può supporre, più generalmente, la $\varphi(t)$ funzione arbitraria dei punti del campo C; ramo ad un valore di funzione analitica con assegnate singolarità, o anche funzione ad un valore, sia pure non analitica, ma integrabile lungo le varie linee di C, e, per semplicità, limitata superiormente; come caso speciale, si ha quello di una funzione di variabile reale. In questa ipotesi, l'integrale (1) viene a dipendere essenzialmente dalla linea tracciata in C e lungo la quale è fatta l'integrazione; ora, per ogni tale linea, l'integrale, come funzione di s, appartiene alla classe delle funzioni determinanti ed è regolare per $R(s) > -1$, ed eventualmente estendibile al di là di questo campo sotto opportune condizioni per $\varphi(t)$, ad esempio quella di ammettere la derivata lungo la linea d'integrazione. Nel caso dell'esistenza di tutte le derivate, se ne possono dedurre, nel modo noto, sviluppi assintotici per le dette funzioni determinanti.

51. L'integrale (1) rappresenta, come si è detto, un'operazione funzionale eseguita su φ; l'indicheremo momentaneamente con $H_s(\varphi)$. Essa è definita per $R(s) < 0$; ma, considerando (1) come una funzione $p(s)$ di s, le proprietà di H_s si conservano in tutto il campo in cui di questa funzione è possibile una continuazione analitica monodroma; cosicchè (analogamente a quanto si è fatto al § 35) si potrà intendere H_s come definita per tutti quei valori di s pei quali $p(s)$ ha continuazione monodroma. Questa continuazione, essendo $p(s)$ funzione determinante, è collegata, come sappiamo, alle proprietà di $\varphi(t)$ e in particolare all'esistenza delle sue derivate: così nel caso in cui $\varphi(t)$ è data da una serie (6), l'operazione H_s (che la (1) rappresenta solo sotto le condizioni $R(\sigma) > -1$, $R(s) < 0$) vale per ogni valore di s eccettuati gl'interi positivi o nullo; in quanto a σ, sono eccettuati soli gl'interi negativi.

Notiamo ora alcune proprietà dell'operazione H_s.

a) La derivazione rispetto ad x di (1) dà, per $R(s) < 0$

$$DH_s(\varphi) = (s+1)\,H_{s+1}(\varphi); \tag{8}$$

nel caso in cui $p(s)$ è continuabile, questa vale per il campo di continuazione. Così dalla derivazione di

$$H_s(\varphi) = (-1)^{1-s}\frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\sigma-s)}\sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{\sigma(\sigma+1)\dots(\sigma+n)}{(\sigma-s)(\sigma-s+1)\dots(\sigma-s+n)}\,x^{n+\sigma-s},$$

nel caso in cui $\varphi(t)$ sia data dalla (6), essa vale per ogni s non intero positivo.

b) Per s intero negativo la H_s, all'infuori del multiplicatore $(-1)^{m+1}(m-1)!$ dà l'integrale m^{plo} $D^{-m}\varphi$: nel caso di φ delle forma (σ), si ha la cosidetta determinazione principale di codesto integrale m^{plo}.

c) Mediante l'integrazione per parti, e per $R(\sigma) > 0$, si ha

$$H_s(\varphi) = \frac{\varphi(0)}{s(-x)^s} + \frac{1}{s}\,H_{s+1}(\varphi'). \tag{9}$$

da cui, reiterando il procedimento, formule che danno sviluppi (assintotici od effettivi) per $H_s(\varphi)$.

d) Infine, con calcolo semplice, si ha per $R(s)$ ed $R(s')$ dapprima negativi, poi nel campo di continuazione analitica delle funzioni di s ottenute, e per tutte le coppie s, s' non entrambe intere (positive o nulle) nel caso delle serie (6),

$$H_s H_{s'}(\varphi) = - B(-s\,,\,-s')\, H_{s+s'}(\varphi), \tag{10}$$

essendo B la funzione Euleriana di prima specie.

52. Queste osservazioni conducono a porre in relazione l'operazione H_s colla derivata d'indice qualunque D^s: precisamente si farà

$$D^s\varphi = -\frac{e^{-\pi i s}}{\Gamma(-s)} H_s(\varphi), \tag{11}$$

che nel caso di φ della forma (6), dà lo sviluppo:

$$D^s\varphi = e^{-2\pi i s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n\Gamma(\sigma+n)\,x^{n+\sigma-s}}{\Gamma(\sigma+n-s+1)}. \tag{12}$$

La convenienza di questa posizione è posta senz'altro in chiaro: infatti le (8), (10) danno

$$DD^s = D^{s+1} \quad , \quad D^s D^{s'} = D^{s+s'}$$

rispettivamente; la (12) dà, per s intero negativo, il valore principale dell'integrale $(-s)^{uplo}$; infine è tolta la restrizione imposta ad H_s per s intero positivo quando questo sia nel campo di continuazione di $p(s)$. Per le serie $\varphi(t)$ della forma (6), si ha senz'altro da (12) l'ordinaria derivata per l'indice intero positivo s. Come sola eccezione alla (12), si hanno i valori interi negativi di σ, per i quali $D^s\varphi$ come funzione di σ, può ammettere poli di prim'ordine: l'estensione si può dare con procedimento analogo a quello del § 34.

53. Qui, come nell'art. IV, abbiamo avuto a considerare una operazione espressa da un integrale definito, la quale ha significato in generale solo sotto alcune condizioni, ad esempio per determinati valori di un parametro. Ma un'operazione, che per quei valori del parametro coincide colla data, può continuare ad ammettere le stesse proprietà anche per un campo più esteso di valori, pur mancandone l'espressione in forma d'integrale definito: ciò conduce a dare all'operazione dapprima definita dall'integrale, un campo di validità più esteso. Se pertanto di un problema d'inversione d'integrale definito

$$A(\varpi) = g,$$

dove g è la funzione data e ϖ la funzione incognita, non è possibile la soluzione, si è condotti ad indagare se la impossibilità provenga non dall'operazione A in sè, ma dalla forma d'integrale definito che si è prescritta. Ciò accade ad esempio nel noto problema d'inversione dovuto all'Abel, della cui soluzione si sono ripetutamente occupati i geometri [1] e di cui la trattazione nel campo complesso — per

[1] Da Abel (Oeuvres, I, pag. 97) fino a Goursat (Acta Math., t. 27, 1903); V. anche Volterra, Ann. di Mat., s. II, t. XXV, pag. 139 (1897).

quanto io sappia non considerata fin qui — è straordinariamente semplice in base alle considerazioni del presente articolo.

54. Osserviamo dapprima come, per $R(s) > 0$ ma inferiore ad 1, si possa giovarsi delle (9) per dare ad H_s una espressione in forma d'integrale definito. Ciò premesso, abbiasi l'equazione funzionale in cui γ è data, φ incognita

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{s+1}} = \gamma(x), \tag{13}$$

e dove fra 0 ed x l'integrazione è fatta lungo una linea determinata, su cui $\gamma(x)$ è finita continua e derivabile e inoltre nulla per $x = 0$; è infine $0 > R(s) > -1$.

L'equazione (13) equivale a

$$D^s\varphi = -\frac{e^{-\pi is}}{\Gamma(-s)}\gamma(x),$$

e quindi

$$\varphi = -\frac{e^{-\pi is}}{\Gamma(-s)} D^{-s}\gamma$$

o, sostituendo H a D,

$$\varphi = \frac{1}{\Gamma(s)\,\Gamma(-s)} H_{-s}(\gamma).$$

Ma essendo $1 > R(-s) > 0$, la H_{-s} non ammette espressione in forma d'integrale definito. Vi si sostituisca allora la (9), mediante l'osservazione fatta in principio di questo §, e viene così, poichè è $\gamma(\sigma) = 0$:

$$\varphi = -\frac{1}{s\,\Gamma(s)\,\Gamma(-s)} \int_0^x \frac{\gamma'(t)\,dt}{(t-x)^{-s}},$$

o infine

$$\varphi = \frac{\operatorname{sen} \pi s}{\pi} \int_0^x \frac{\gamma'(t)\,dt}{(t-x)^{-s}}; \tag{14}$$

questa è la soluzione di (13) sotto la forma stessa di Abel. Si vede come, nel caso in cui $\gamma(x)$ sia una serie della forma (6), è indifferente il cammino d'integrazione fra 0 ed x, e la φ viene espressa da una serie della stessa forma. È ovvia infine l'estensione al caso di $R(s) < -1$, applicando le formule consecutive a (9) che si otterrebbero da questa con successive integrazioni per parti.

È degno di nota il fatto che mentre la soluzione che si dà ordinariamente del problema d'Abel si riferisce esclusivamente al caso dell'esponente reale, qui s è arbitrariamente reale o complesso.

55. In modo analogo si può ottenere la soluzione di un problema meno semplice, che è quello risoluto dal Sonine nel campo reale [1]. Abbiasi una serie di potenze, convergente entro il cerchio C di centro $x = 0$, della forma

$$\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-s-1},$$

[1] Acta Math., t. 4, pag. 171 (1884).

dove si supporrà s reale o complesso, ma $R(s)$ compresa fra -1 e 0, e si consideri l'equazione funzionale

$$\int_0^x \alpha(x-t)\,\varphi(t)\,dt = \gamma(x) \tag{15}$$

in cui $\gamma(x)$ è una funzione soggetta alle stesse condizioni che nel § 54, e $\varphi(t)$ è la funzione da determinare. Il primo membro di (15) è una serie di operazioni H, e sostituendovi le D, essa può scriversi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\Gamma(n-s)\,D^{s-n}\,\varphi = \gamma(x).$$

Poniamo $D^s\varphi = \psi$, ed avremo, per determinare ψ l'equazione

$$\sum a_n\,\Gamma(n-s)\,D^{-n}\,\psi = \gamma(x): \tag{16}$$

questa si risolve in modo noto dalla teoria generale delle equazioni lineari rispetto ad una operazione distributiva, a coefficienti costanti. Basta, posto

$$g(z) = \sum a_n\,\Gamma(n-s)\,z^n,$$

calcolare lo sviluppo formale in serie di $\frac{1}{g(z)}$:

$$\frac{1}{g(z)} = \sum b_n\,z^n,$$

e la (16) viene risoluta formalmente da

$$\psi(x) = \sum b_n\,D^{-n}\gamma;$$

onde infine

$$\varphi(x) = \sum b_n\,D^{-n-s} = \sum \frac{b_n\,e^{\pi i(n+s)}}{\Gamma(n+s)}\,H_{-n-s}. \tag{17}$$

Ma qui, per $n=0$, si avrebbe H_{-s} non esprimibile in forma d'integrale definito: si ricorre perciò all'espediente indicato al principio del § 54, e si ha così

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\Gamma(n+s+1)} \int_0^x \gamma'(t)\,(x-t)^{n+s}\,dt. \tag{18}$$

L'equazione (15) è dunque risoluta da

$$\varphi(x) = \int_0^x \beta(x-t)\,\gamma'(t)\,dt, \tag{18'}$$

dove è

$$\beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n\,x^n}{\Gamma(n+s+1)};$$

la convergenza della serie risulta, anche nel caso più probabile che $\sum b_n z^n$ sia costantemente divergente, dalla presenza del fattoriale in denominatore: la verificazione di ciò non presenta difficoltà.

Tralasciamo le ovvie considerazioni sulla natura analitica di $\varphi(x)$ in relazione con quella di $\gamma(x)$; basti fare notare come la formula (18) sia perfettamente conforme a quella data dal SONINE per la risoluzione del problema nel campo reale: solo che l'esponente s non è per noi costretto ad essere reale. Si noti ancora come, reiterando l'integrazione per parti che conduce alla (9), si possa togliere l'ipotesi che sia $\mathrm{R}(s) > 1$, e prendere $\mathrm{R}(s)$ negativo e del resto comunque grande in valore assoluto.

56. Per terminare, cerchiamo quale relazione vi sia fra l'operazione D^s qui definita e quella considerata all'art. IV per il campo delle funzioni determinanti. Si osservi dapprima come, nello stabilire la teoria dell'operazione D^s nel presente articolo, il punto estremo fisso dall'integrale non abbia importanza: in luogo del punto 0 si può prendere un punto qualsiasi a del campo di validità della $\varphi(t)$ ed anche il punto ∞ se la funzione $\varphi(t)$ è data in un campo infinito, e le proprietà di D^s non mutano essenzialmente. Orbene, è facile vedere come anche la D^s dell'art. IV sia riducibile ad un integrale della forma

$$-\frac{e^{-\pi i s}}{\Gamma(-s)}\int_{\infty}^{x}\frac{\mathbf{f}(t)\,dt}{(t-x)^{s+1}}. \tag{19}$$

Infatti, supposto $\mathrm{R}(s)$ compreso fra 0 e -1, e $\mathbf{f}(t)$ data come funzione determinante nel semipiano $\mathrm{R}(t) > c$ e tendente a zero almeno del prim'ordine per t tendente all'infinito in qualunque direzione di codesto semipiano, la D^s dell'art. IV è data (§ 36) da

$$\mathrm{D}^s\mathbf{f} = \frac{e^{\pi i s}\,\Gamma(s+1)}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\mathbf{f}(t)\,dt}{(x-t)^{s+1}}, \quad k > c,\ \mathrm{R}(x) > k.$$

Ora, consideriamo l'integrazione estesa, nel piano t e nel senso delle rotazioni negative, ad un contorno composto del segmento $k - ib \ldots k + ib$, del semicerchio di centro k e di raggio b, volto dalla parte dell'asse reale e positivo, infine di un cappio che partendo dal punto reale positivo $k + b$, vi torna ruotando intorno al punto x. Tendendo b all'infinito e a zero il raggio del cerchio di centro x del cappio, viene

$$\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\mathbf{f}(t)\,dt}{(x-t)^{s+1}} = (1 - e^{-2\pi i s})\int_{\infty}^{x}\frac{\mathbf{f}(t)\,dt}{(x-t)^{s+1}}$$

in seguito alle ipotesi fatte su $\mathbf{f}(t)$ e su s; onde con una facile riduzione, dopo la moltiplicazione per $\dfrac{e^{\pi i s}\,\Gamma(s+1)}{2\pi i}$ e tenuta presente la relazione

$$\Gamma(s+1)\,\mathrm{sen}\,\pi s = -\frac{\pi}{\Gamma(-s)},$$

si ricade precisamente sulla (19).