Contributi al problema generale della stabilità del movimento.

Memoria di UMBERTO CRUDELI

(presentata dal Socio V. Volterra ed approvata dal Socio C. Somigliana)

INTRODUZIONE

In due Note, comparse nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei [1], ho dato alcuni criterî di stabilità per moti stazionarî di prima specie, criterî ai quali sono pervenuto sfruttando la teoria delle equazioni integrali del Volterra, generalizzata ai sistemi di equazioni integrali lineari. Qui mi propongo di mostrare come quella stessa teoria possa utilmente adattarsi anche al problema generale della stabilità del movimento, permettendo di operare direttamente sui coefficienti delle equazioni differenziali.

Intanto osservo che i suddetti criterî portano, anch'essi, un contributo al problema generale della stabilità nel caso dei moti stazionarî generali, e nel caso dei generali moti periodici. Infatti, nel primo di cotesti casi, intendendo che i secondi membri delle equazioni del moto perturbato, supposte nella forma normale, siano funzioni olomorfe delle incognite, e facendo ulteriormente certe ipotesi generali, il Liapounoff ha mostrato [2] che la condizione di essere essenzialmente negative tutte le parti reali delle radici dell'equazione determinante (intendendo, qualora esistano radici reali, di considerare le radici reali medesime come quantità complesse aventi nullo il coefficiente dell'imaginario) è condizione necessaria e sufficiente affinchè, *indipendentemente dal tipo delle suddette funzioni olomorfe*, sussista la stabilità del movimento non perturbato, ferme restando, naturalmente, le suddette ipotesi. Ne resulta che, per i moti stazionarî, la stabilità della soluzione non perturbata, relativa al sistema della prima approssimazione, è necessaria affinchè sussista la stabilità dei moti stazionarî medesimi, con la circostanza testè sottolineata. Nel caso, poi, dei moti periodici, il contributo superiormente indicato viene ad aversi indirettamente, in virtù [3] del teorema che stabilisce potersi — nel caso dei moti in

(1) 2° sem. 1913, pag. 642; e 1° sem. 1914, pag. 400.

(2) *Problème générale de la stabilité du mouvement.* Ann. de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, 1907, pp. 299 e 465.

(3) Liapounoff, loc. cit., pag. 398.

discorso, mediante sostituzioni lineari di tipo tale da non far perdere, attraverso ad esse, l'eventuale stabilità — trasformare il sistema di equazioni differenziali della prima approssimazione in un sistema a coefficienti costanti.

Il Liapounoff ha trattato anche il caso più generale, in cui i coefficienti delle equazioni differenziali siano funzioni qualsiasi [1] del tempo, le quali non oltrepassino mai, in valore assoluto, certi limiti. Sotto cotesta ipotesi generale, egli perviene a stabilire certe proposizioni, fra le quali, però, alcune richiedono pure la conoscenza dei segni dei così detti numeri caratteristici, conoscenza difficile, in generale, ad aversi.

Come ho detto più sopra, la teoria delle equazioni integrali del Volterra può utilmente adattarsi anche al problema generale della stabilità del movimento, permettendo di operare direttamente sui coefficienti delle equazioni differenziali. Per venire nuovamente al concreto, mi propongo qui di stabilire alcuni criteri d'indole generale.

Giova, anzitutto, richiamare la definizione di moto stabile, ed alcune proposizioni.

[1] Liapounoff, loc. cit., pp. 252-266.

CAPITOLO I.

Le definizioni di moto stabile e di moto instabile.

Una prima nozione di stabilità, nei riguardi del movimento, fu introdotta da LAPLACE. A lord KELVIN spetta il merito di avere posto in luce l'importanza che, nella fisica, hanno le questioni relative alla stabilità del movimento. Nel celebre *Treatise of Natural Philosophy* si afferma (¹) « there is scarcely any question in dynamics more important for Natural Philosophy than the stability or instability of motion ».

Una critica sulle nozioni di moto stabile e di moto instabile trovasi nel libro di KLEIN e SOMMERFELD *Die Theorie des Kreisels* (²). Noi adotteremo la definizione data dal LIAPOUNOFF.

Si consideri un sistema materiale olonomo con k gradi di libertà. Siano

$$q_1, q_2, \ldots, q_k$$

k parametri che individuano la posizione del sistema stesso al tempo t, e si ponga

$$q'_1 = \frac{dq_1}{dt}, q'_2 = \frac{dq_2}{dt}, \ldots, q'_k = \frac{dq_k}{dt}.$$

Si supponga, poi, che

$$(1) \qquad q_j = f_j(t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

sia una soluzione particolare delle equazioni dinamiche, e s'intenda che le q_j siano funzioni reali della variabile reale t, esistenti in qualunque campo della t medesima. A cotesta soluzione particolare corrisponderà un certo movimento del nostro sistema. Ora siano q_{j0}, q'_{j0} i valori che, in un moto qualunque, rispettivamente assumono le quantità q_j e q'_j in corrispondenza dell'istante t_0. E si ponga

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{j0} = f_j(t_0) + \epsilon_j \quad , \quad q'_{j0} = f'_j(t_0) + \epsilon'_j \\ \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \end{array} \right.$$

Al sistema delle costanti ϵ_j, ϵ'_j, costanti che verranno dette *perturbazioni*, corrisponderà un *movimento perturbato* rispetto al movimento individuato dalle (1). Al moto individuato dalle (1) verrà attribuito il nome di *moto non perturbato*.

Ora, $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ siano n funzioni, reali e continue, delle quantità q_j, q'_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$. In corrispondenza del moto non perturbato, esse verranno desi-

(¹) THOMSON and TAIT, *Treatise of Natural Philosophy*, art. 346, vol. I, pag. 416.
(²) Pag. 342.

gnate rispettivamente con $F_1, F_2, \ldots, F_n$. In corrispondenza, poi, di un moto perturbato, esse verranno designate con le suddette notazioni generiche, cioè rispettivamente con $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, e saranno funzioni delle quantità $t, \epsilon_j, \epsilon'_j$.

Ciò premesso, *qualora, assegnati, piccoli a piacere, n numeri positivi* $L_1, L_2, \ldots, L_n$, *esistano dei numeri positivi* $E_1, E_2, \ldots, E_k, E'_1, E'_2, \ldots, E'_k$ *tali che per*

$$|\epsilon_j| < E_j \quad \text{ed} \quad |\epsilon'_j| < E'_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

si abbia

$$|Q_1 - F_1| < L_1, |Q_2 - F_2| < L_2, \ldots, |Q_n - F_n| < L_n$$

per tutti i valori di t superiori a t_0, *diremo, col* LIAPOUNOFF, *che il movimento non perturbato è stabile rispetto alle quantità* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$; *nel caso contrario, esso verrà detto instabile rispetto alle medesime quantità.*

Notiamo, poi, che, ponendo

$$Q_1 - F_1 = x_1, Q_2 - F_2 = x_2, \ldots, Q_n - F_n = x_n,$$

ed indicando con $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i valori delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ per $t = t_0$, intenderemo (¹) che, nelle questioni di stabilità, le $a_1, a_2, \ldots, a_n$ possano *jouer le même rôle* delle $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_k, \epsilon'_1, \epsilon'_2, \ldots, \epsilon'_k$.

CAPITOLO II.

Le equazioni differenziali del moto perturbato.

Posto, come abbiamo detto,

$$Q_1 - F_1 = x_1, Q_2 - F_2 = x_2, \ldots, Q_n - F_n = x_n,$$

supporremo che le equazioni differenziali del moto perturbato siano le seguenti:

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \frac{dx_2}{dt} = X_2, \ldots, \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

dove le X_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ sono funzioni assegnate delle quantità

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, t,$$

e sono nulle per $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Supporremo, inoltre, che, per $t \geq t_0$, le X_s siano funzioni olomorfe delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$, finchè

$$|x_1| \leq A_1, |x_2| \leq A_2, \ldots, |x_n| \leq A_n,$$

(¹) LIAPOUNOFF, loc. cit., pag. 214.

dove, per ora, intenderemo soltanto che ciascuna delle $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (le quali, in generale, dipenderanno da t) ammetta un limite inferiore diverso da zero nel tratto (t_0, T), comunque grande sia il valore finito T.

Scriveremo

$$\left\{ \begin{array}{l} X_s = p_{s1} x_1 + p_{s2} x_2 + \cdots + p_{sn} x_n + \Sigma P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n} \\ \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \right.$$

dove la sommatoria va estesa a tutti gli interi non negativi $m_1, m_2, \ldots, m_n$, soddisfacenti alla condizione

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n > 1,$$

e dove i coefficienti $p_{s\sigma}$, $P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$ vengono supposti funzioni continue della variabile reale t, per $t \geqq t_0$.

CAPITOLO III.

Una fondamentale proposizione del Liapounoff.

Ferma restando la condizione che ciascuna delle $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ammetta un limite inferiore diverso da zero nel tratto (t_0, T), comunque grande sia T, il Liapounoff (1) ha mostrato che, ove si ricerchi se il moto non perturbato sia stabile (2), basterà, nei riguardi del campo della t, riferirsi all'insieme dei valori di t superiori ad un limite θ_0 tanto grande quanto ci piace. In particolare, potremo intendere $\theta_0 > 1$.

CAPITOLO IV.

Ricerca di un primo criterio di stabilità.

Si ponga (dapprima, naturalmente, in modo formale)

$$x_s = x_s^{(1)} + x_s^{(2)} + x_s^{(3)} + \cdots \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

e formalmente si portino coteste espressioni nelle equazioni (2). Poi, in ciascuna di queste ultime, si eguaglino fra loro gli insiemi dei termini che sono dello stesso ordine nei due membri, considerando come possedenti l'm^{esimo} ordine le quantità $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}$ e le loro derivate rispetto al tempo. Avremo, così, i seguenti

(1) Loc. cit., pag. 225.

(2) Verrà implicitamente intesa, ove si parli di stabilità o d'instabilità, la clausola « rispetto alle quantità $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ » (vedasi, nel Cap. I, la definizione di stabilità).

sistemi di equazioni differenziali:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_s^{(1)}}{dt} = p_{s1}\, x_1^{(1)} + p_{s2}\, x_2^{(1)} + \cdots + p_{sn}\, x_n^{(1)} \\ \dfrac{dx_s^{(m)}}{dt} = p_{s1}\, x_1^{(m)} + p_{s2}\, x_2^{(m)} + \cdots + p_{sn}\, x_n^{(m)} + R_s^{(m)} \\ \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \quad , \quad (m > 1). \end{cases}$$

Le $R_s^{(m)}$ saranno funzioni intere, razionali, delle $x_s^{(\mu)}$ $(\mu < m)$.

Il sistema

$$\frac{dx_s^{(1)}}{dt} = p_{s1}\, x_1^{(1)} + p_{s2}\, x_2^{(1)} + \cdots + p_{sn}\, x_n^{(1)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

dicesi *sistema della prima approssimazione*.

I sistemi di equazioni differenziali testè considerati, verranno anche scritti

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_s^{(m)}}{d\tau} = p_{s1}\, x_1^{(m)} + p_{s2}\, x_2^{(m)} + \cdots + p_{sn}\, x_n^{(m)} + R_s^{(m)} \\ \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \quad , \quad (m \geq 1), \end{cases}$$

intendendo $R_s^{(1)} = 0$.

Ciò premesso, occorre richiamare che, data l'equazione integrale

$$x(t) - \int_{\theta_0}^{t} f(\tau, t)\, x(\tau)\, d\tau = g(t),$$

i metodi del Volterra porgono

$$x(t) = g(t) + \int_{\theta_0}^{t} \Phi(\tau, t)\, g(\tau)\, d\tau,$$

dove

$$\Phi(\tau, t) = \sum_{1}^{\infty}{}_h\, f_h(\tau, t),$$

essendo

$$f_1(\tau, t) = f(\tau, t) \ , \ f_2(\tau, t) = \int_{\tau}^{t} f_1(\tau, u)\, f_1(u, t)\, du, \ldots,$$

$$\ldots, f_{h+1}(\tau, t) = \int_{\tau}^{t} f_1(\tau, u)\, f_h(u, t)\, du, \ldots$$

Cotesti metodi, qualora si abbia il sistema di equazioni integrali

$$\begin{cases} y_1(t) - \sum_{1}^{n}{}_i \int_{\theta_0}^{t} f_{1i}(\tau, t)\, y_i(\tau)\, d\tau = g_1(t) \\ y_2(t) - \sum_{1}^{n}{}_i \int_{\theta_0}^{t} f_{2i}(\tau, t)\, y_i(\tau)\, d\tau = g_2(t) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n(t) - \sum_{1}^{n}{}_i \int_{\theta_0}^{t} f_{ni}(\tau, t)\, y_i(\tau)\, d\tau = g_n(t), \end{cases}$$

porgono (¹)

$$y_s(t) = g_s(t) + \sum_1^n{}_i \int_{\theta_0}^t \varphi_{si}(\tau, t)\, g_i(\tau)\, d\tau\,, \qquad (s = 1, 2, \dots, n)$$

dove

$$\varphi_{si}(\tau, t) = \sum_1^\infty{}_h f_{si}^{(h)}(\tau, t)\,,$$

essendo

$$f_{si}^{(1)}(\tau, t) = f_{si}(\tau, t)\ ,\ f_{si}^{(2)}(\tau, t) = \sum_1^n{}_r \int_\tau^t f_{sr}^{(1)}(\tau, u)\, f_{ri}^{(1)}(u, t)\, du\,, \dots$$

$$\dots, f_{si}^{(h+1)}(\tau, t) = \sum_1^n{}_r \int_\tau^t f_{sr}^{(1)}(\tau, u)\, f_{ri}^{(h)}\, du\,, \dots$$

Ora, dai sistemi di equazioni differenziali (4), otteniamo, evidentemente, i sistemi di equazioni integrali seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_s^{(m)}(t) = a_s^{(m)} + \int_{\theta_0}^t \mathrm{R}_s^{(m)}\, d\tau + \sum_1^n{}_i \int_{\theta_0}^t p_{si}(\tau)\, x_i^{(m)}(\tau)\, d\tau \\ (s = 1, 2, \dots, n) \quad , \quad (m \geq 1)\,. \end{array} \right.$$

dove le $a_s^{(m)}$ sono costanti, le quali rappresentano, evidentemente, i valori delle $x_s^{(m)}$ per $t = \theta_0$. Assumeremo nulle le $a_s^{(m)}$ per $m > 1$. Le $a_s^{(1)}$ rappresenteranno i valori delle x_s per $t = \theta_0$.

Porremo, per brevità,

$$\mathrm{H}_s^{(m)}(t) = \int_{\theta_0}^t \mathrm{R}_s^{(m)}\, d\tau\,.$$

Avremo dunque da considerare i sistemi

$$\left\{ \begin{array}{c} x_s^{(m)}(t) - \sum_1^n{}_i \int_{\theta_0}^t p_{si}(\tau)\, x_i^{(m)}(\tau)\, d\tau = a_s^{(m)} + \mathrm{H}_s^{(m)}(t) \\ (s = 1, 2, \dots, n) \quad , \quad (m \geq 1)\,. \end{array} \right.$$

Mediante applicazione dei suddetti metodi del Volterra, otteniamo intanto

$$\text{(5)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_s^{(m)}(t) = a_s^{(m)} + \sum_1^n{}_i\, a_i^{(m)} \int_{\theta_0}^t \varphi_{si}(\tau, t)\, d\tau + \mathrm{H}_s^{(m)}(t) + \\ \qquad\qquad + \sum_1^n{}_i \int_{\theta_0}^t \varphi_{si}(\tau, t)\, \mathrm{H}_i^{(m)}(\tau)\, d\tau \\ \qquad\qquad (s = 1, 2, \dots, n)\,, \end{array} \right.$$

dove

$$\varphi_{si}(\tau, t) = \sum_1^\infty{}_h p_{si}^{(h)}(\tau, t)\,,$$

(¹) Volterra, Rend. R. Accad. dei Lincei, 1° semestre 1896.

essendo

$$p_{si}^{(1)}(\tau, t) = p_{si}(\tau) \;,\; p_{si}^{(2)}(\tau, t) = \sum_1^n {}_r\, p_{sr}(\tau) \int_\tau^t p_{ri}(u)\, du \,, \ldots$$

$$\ldots , p_{si}^{(h+1)}(\tau, t) = \sum_1^n {}_r\, p_{sr}(\tau) \int_\tau^t p_{ri}^{(h)}(u, t)\, du \,, \ldots$$

Si osservi che $H_s^{(1)}(t) = 0$ identicamente, e che, avute le $x_s^{(1)}$, resulteranno note le $H_s^{(2)}$, giacchè le $R_s^{(m)}$, per $m > 1$, sono funzioni note delle $x_s^{(\mu)}$ dove $\mu < m$. Note le $H_s^{(2)}$, avremo, dalle (5), per $m = 2$, le $x_s^{(2)}$. E allora resulteranno note anche le $H_s^{(3)}$; quindi, dalle (5), per $m = 3$, avremo le $x_s^{(3)}$, ecc.

Si tenga presente, poi, che, in virtù del su ricordato teorema fondamentale del Liapounoff, è sempre lecito, nella nostra questione, intendere che θ_0 abbia un valore (finito) tanto grande quanto ci piace. Noi intenderemo, intanto, $\theta_0 > 1$.

Nei riguardi delle p_{si} porremo, dapprima, le seguenti restrizioni: Supporremo, cioè, esistente una funzione $p(\tau)$ tale che sia possibile simultaneamente di soddisfare alle seguenti condizioni:

1ª) la funzione $p(\tau)$ sia integrabile nel campo (θ_0, t);

2ª) sia

$$\left\{ \begin{array}{l} |p_{si}(\tau)| \leq p(\tau) \\ (s, i = 1, 2, \ldots, n) \;,\; (\theta_0 \leq \tau \leq t); \end{array} \right.$$

3ª) sia, infine,

$$\int_{\theta_0}^t p(u)\, du$$

convergente col crescere indefinitamente di t.

In virtù di cotesta convergenza, sarà possibile di trovare un θ_0 superiore all'unità e tale (e noi, allora, lo intenderemo appunto così scelto) che, designando con α una costante, positiva, inferiore all'unità, resulti

$$\alpha > n \int_\tau^t p(u)\, du \,,$$

essendo $\theta_0 \leq \tau \leq t$. Infatti, qualora sussista cotesta convergenza, si ha, per un teorema ben noto, che, assegnato, piccolo a piacere, un numero ε positivo, sarà possibile di trovare un θ_0 tale che sia $\varepsilon > \int_\tau^t p(u)\, du$, essendo $\theta_0 \leq \tau \leq t$.

Nei riguardi delle $A_1, A_2, \ldots, A_n$, alla restrizione che ciascuna di esse ammetta un limite inferiore diverso da zero nel tratto (t_0, T), comunque grande sia il valore finito T, aggiungeremo l'altra: che nessuna di esse svanisca col crescere indefinitamente di t. In altre parole, nei riguardi delle $A_1, A_2, \ldots, A_n$, supporremo che, per $t \geq t_0$, ciascuna di esse non sia inferiore ad una certa costante (costante che indicherò con A). Le funzioni

$$X_s = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + p_{sn}x_n + \Sigma P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n} \,,$$

olomorfe, per ipotesi, rispetto alle $x_1, x_2, \dots, x_n$, finchè

$$|x_1| \leq A_1, |x_2| \leq A_2, \dots, |x_n| \leq A_n,$$

verranno, qui appresso, considerate nel campo

$$|x_1| < A, |x_2| < A, \dots, |x_n| < A.$$

Nei riguardi delle $P_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}$ supporremo, dapprima, che esse, col crescere indefinitamente di τ, svaniscano, con la condizione che, per $\tau \geq \theta_0$, si abbia

$$(6) \qquad \begin{cases} |P_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}| \leq \dfrac{\beta}{\tau^k A^{m_1 + m_2 + \dots + m_n}} \\ (s = 1, 2, \dots, n) \quad , \quad (m_1 + m_2 + \dots + m_n > 1), \end{cases}$$

dove β rappresenta una quantità finita e costante, e k una costante superiore all'unità (indipendenti dagli apici $m_1, m_2, \dots, m_n$); e dove, inoltre, $|P_s^{m_1, m_2, \dots, m_n}|$ rappresenta il valore assoluto di $P_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}$.

In virtù delle restrizioni poste nei riguardi delle p_{si}, avremo, per $t \geq \tau \geq \theta_0$,

$$|p_{si}^{(2)}(\tau, t)| < \alpha p(\tau)$$

$$|p_{si}^{(3)}(\tau, t)| < \alpha^2 p(\tau)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$|p^{(h+1)}(\tau, t)| < \alpha^h p(\tau)$$

$$\dots\dots\dots$$

Quindi, per $t \geq \tau \geq \theta_0$, avremo

$$|\varphi_{si}(\tau, t)| < \frac{p(\tau)}{1 - \alpha},$$

tenendo presente che α è positiva ed inferiore all'unità. Ora, osservando le (5) e designando con a una costante positiva superiore ai moduli delle $a_s^{(1)}$ $(s = 1, 2, \dots, n)$, avremo

$$\begin{cases} |x_s^{(m)}(t)| < a^{(m)} + \dfrac{na^{(m)}}{1 - \alpha} \displaystyle\int_{\theta_0}^t p(\tau)\, d\tau + \int_{\theta_0}^t R^{(m)}\, d\tau + \frac{n}{1 - \alpha} \int_{\theta_0}^t H^{(m)} p(\tau)\, d\tau \\ (s = 1, 2, \dots, n) \quad , \quad (m \geq 1), \end{cases}$$

dove intenderemo $a^{(m)} = 0$ per $m > 1$, ed $a^{(1)} = a$, e dove $R^{(m)}$ rappresenta ciò che diviene ciascuna delle funzioni $R_1^{(m)}, R_2^{(m)}, \dots, R_n^{(m)}$ qualora si pongano, in esse, al posto delle $x_s^{(\mu)}$, delle quantità positive, $x^{(\mu)}$, superiori ai moduli delle $x_s^{(\mu)}$ nell'intervallo (θ_0, t), e, al posto delle $P_i^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}$, le quantità $\dfrac{\beta}{\tau^k A^{m_1 + m_2 + \dots + m_n}}$, che figurano nelle diseguaglianze (6). Con $H^{(m)}$ abbiamo poi designato ciò che diviene, corrispondentemente, ciascuna delle $H_i^{(m)}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Potremo scrivere

$$\left\{\begin{array}{l} |x_s^{(m)}(t)| < a^{(m)} + \dfrac{\alpha a^{(m)}}{1-\alpha} + \beta R_0^{(m)} \displaystyle\int_{\theta_0}^{t} \frac{d\tau}{\tau^k} + \frac{n}{1-\alpha} \int_{\theta_0}^{t} H^{(m)} p(\tau)\, d\tau \\ \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \quad , \quad (m \geq 1) , \end{array}\right.$$

dove è manifesto il significato di $R_0^{(m)}$. Inoltre, poichè

$$H^{(m)} = \int_{\theta_0}^{t} R^{(m)}\, d\tau = \beta R_0^{(m)} \int_{\theta_0}^{t} \frac{d\tau}{\tau^k} ,$$

e poichè, avendosi $1 < \theta_0 \leq t$ e $k > 1$, resulta

$$\frac{1}{k-1} > \int_{\theta_0}^{t} \frac{d\tau}{\tau^k} \qquad (t > \theta_0) ,$$

avremo

$$H^{(m)} < \frac{\beta}{k-1} R_0^{(m)} \qquad (t > \theta_0) .$$

Sicchè, osservando che

$$\alpha > n \int_{\theta_0}^{t} p(\tau)\, d\tau ,$$

potremo anche scrivere

$$|x_s^{(m)}(t)| < \frac{a^{(m)}}{1-\alpha} + \frac{\beta}{k-1} R_0^{(m)} + \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(k-1)} R_0^{(m)} ,$$

ovvero

$$\left\{\begin{array}{l} |x_s^{(m)}(t)| < \dfrac{a^{(m)}}{1-\alpha} + \dfrac{\beta}{(1-\alpha)(k-1)} R_0^{(m)} \\ \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \quad , \quad (m \geq 1) . \end{array}\right.$$

Cioè

$$\left\{\begin{array}{l} |x_s^{(1)}| < \dfrac{a}{1-\alpha} \\ |x_s^{(m)}| < \dfrac{\beta}{(1-\alpha)(k-1)} R_0^{(m)} \qquad\qquad (m > 1) , \\ \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) , \end{array}\right.$$

giacchè $R^{(1)}$ è identicamente nulla, ed $a^{(m)} = 0$ per $m > 1$.

Ciò premesso, si osservi che, ponendo le quantità $\dfrac{\beta}{t^k A^{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}}$ nelle X_s, al posto dei coefficienti $P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$, gl'insiemi dei termini di grado superiore al primo, che figurano nelle X_s medesime, diverranno identici allo sviluppo di

$$\frac{\beta}{t^k} \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{x_1}{A}\right)\left(1 - \frac{x_2}{A}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_n}{A}\right)} - 1 - \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{A} \right\} .$$

Si vede, così, che $R_s^{(m)}$ rappresenterà l'insieme dei termini dell'm^{esimo} ordine nello sviluppo di

$$\left(1-\frac{1}{A}\sum_1^\infty {}_s x^{(s)}\right)^{-n}-1-\frac{n}{A}\sum_1^\infty {}_s x^{(s)}.$$

Sicchè, ponendo

$$\gamma=\frac{\beta}{(1-\alpha)(k-1)},$$

e considerando, fra le radici dell'equazione

$$x=\frac{a}{1-\alpha}+\gamma\left\{\left(1-\frac{x}{A}\right)^{-n}-1-n\frac{x}{A}\right\}, \tag{7}$$

quella che si annulla per $a=0$, avremo che lo sviluppo della radice stessa, secondo le potenze intere e positive di a, rappresenterà la serie

$$x^{(1)}+x^{(2)}+x^{(3)}+\cdots \tag{8}$$

Cotesta serie sarà, dunque, certamente convergente qualora a sia inferiore al più piccolo dei moduli (che indicheremo con σ) dei valori di a per i quali l'equazione (7) ha radici multiple. La serie (8) rappresenta una maggiorante rispetto alle serie

$$x_s=x_s^{(1)}+x_s^{(2)}+x_s^{(3)}+\cdots \qquad (s=1,2,\ldots,n). \tag{9}$$

Ne resulta che, per $|a_s^{(1)}|<\sigma$ $(s=1,2,\ldots,n)$, le serie (9) saranno certamente convergenti assolutamente (intendendo $t\geq\theta_0$). Inoltre, come è facile il vedere, per $|a_s^{(1)}|<\sigma$, i moduli delle x_s date dalle (9) sono inferiori ad A. Quindi, introducendo le serie (9) nelle funzioni X_s, potremo (intendendo, naturalmente, $|a_s^{(1)}|<\sigma$) rappresentare le funzioni X_s medesime mediante serie ordinate secondo le potenze intere e positive delle $a_s^{(1)}$. Potremo, dunque, scrivere

$$\left\{\begin{array}{l} X_s=p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\cdots+p_{sn}x_n+R_s^{(2)}+R_s^{(3)}+\cdots \\ \qquad\qquad (s=1,2,\ldots,n). \end{array}\right.$$

E, tenendo presenti le (3), avremo

$$X_s=\frac{dx_s^{(1)}}{dt}+\frac{dx_s^{(2)}}{dt}+\frac{dx_s^{(3)}}{dt}+\cdots \tag{10}$$

Ora, si osservi che, in virtù delle condizioni che ho poste nei riguardi delle p_{st}, le p_{st} saranno necessariamente funzioni limitate di t per $t\geq\theta_0$. Infatti, tenendo presente che

$$\alpha>n\int_\tau^t p(u)\,du \qquad (\theta_0\leq\tau\leq t),$$

subito si vede che la funzione *non negativa* $p(t)$ non può essere non limitata nel campo della t (a destra non limitato) nel quale $t \geq \theta_0$, e, quindi, anche le $p_{st}(t)$ saranno limitate nello stesso campo: cioè esisterà un numero finito M tale che

$$|p_{st}(t)| < \mathrm{M} \qquad (t \geq \theta_0).$$

Allora, osservando le (3), avremo che

$$n\mathrm{M}x^{(1)} + \sum_{2}^{\infty}{}_{i} (n\mathrm{M}x^{(i)} + \mathrm{R}^{(i)})$$

rappresenterà una maggiorante rispetto alle serie che figurano nei secondi membri delle (10). A cotesta maggiorante potremo sostituire l'altra,

$$n\mathrm{M}x^{(1)} + \sum_{2}^{\infty}{}_{i} \left(n\mathrm{M}x^{(i)} + \frac{\beta}{t^k}\mathrm{R}_0^{(i)}\right);$$

e, essendo $t^k > 1$, avremo la maggiorante

$$(11) \qquad n\mathrm{M}x^{(1)} + \sum_{2}^{\infty}{}_{i} (n\mathrm{M}x^{(i)} + \beta\mathrm{R}_0^{(i)}).$$

Ora, assumendo per $x^{(m)}$ i valori assunti precedentemente, cioè

$$\begin{cases} x^{(1)} = \dfrac{a}{1-\alpha} \\ x^{(m)} = \gamma\mathrm{R}_0^{(m)} \qquad (m > 1), \end{cases}$$

la (11) può scriversi

$$\frac{n\mathrm{M}a}{1-\alpha} + \left(n\mathrm{M} + \frac{\beta}{\gamma}\right)\sum_{2}^{\infty}{}_{i} x^{(i)}.$$

Abbiamo, così, una maggiorante, della quale i termini sono indipendenti da t. Essa è convergente, manifestamente, per $a < \sigma$. Dunque, per $|a_s^{(1)}| < \sigma$, le serie che figurano nei secondi membri delle (10) sono uniformemente convergenti nel campo $t \geq \theta_0$ (1).

Dunque avremo che, nel campo in discorso, le serie $\sum_{1}^{\infty}{}_{m} x_s^{(m)}$ sono soluzioni delle (2), intendendo che le $x_s^{(m)}$ siano date dalle (5), ove $a_s^{(m)} = 0$ per $m > 1$; ed intendendo, inoltre, nelle (5) medesime, $|a_s^{(1)}| < \sigma$.

(1) È implicitamente inteso che le due notazioni $t \geq \theta_0$ e $+\infty > t \geq \theta_0$ vengono riguardate come aventi lo stesso significato.

CAPITOLO V.

Nuovi criterî di stabilità.

Si osservi che

$$\left|\sum_{1}^{\infty}{}_m x_s^{(m)}\right| < \sum_{1}^{\infty}{}_m x^{(m)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

e che la serie dei secondi membri di coteste diseguaglianze (la quale dipende da a) è indipendente da t. Sicchè, assegnati, piccoli a piacere, n numeri L_s, positivi, esisteranno dei numeri positivi b_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ tali che, per $|a_s^{(1)}| < b_s$, si abbia

$$\left|\sum_{1}^{\infty}{}_m x_s^{(m)}\right| < L_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

per tutti i valori di t superiori a θ_0. Dunque, in virtù delle restrizioni poste, il moto non perturbato sarà certamente stabile.

Le restrizioni imposte alle funzioni continue p_{si} hanno fatto resultare limitate le funzioni $\varphi_{si}(\tau, t)$ (nuclei risolventi) nel campo illimitato $t \geq \tau \geq \theta_0$, e, inoltre, hanno fatto resultare stabile la soluzione non perturbata relativa al sistema della prima approssimazione, cioè al sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx_s^{(1)}}{dt} = p_{s1} x_1^{(1)} + p_{s2} x_2^{(1)} + \cdots + p_{sn} x_n^{(1)} \\ \qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Le restrizioni, poi, imposte alle funzioni continue $P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$, unite a quelle relative alle p_{si} ed all'altra relativa alle $A_1, A_2, \ldots, A_n$, hanno fatto resultare stabile il moto non perturbato relativo al sistema (2). Ora, senza specificare restrizioni atte a far resultare, in pari tempo, limitate le $\varphi_{si}(\tau, t)$ e stabile la soluzione non perturbata relativa al sistema della prima approssimazione, veniamo a mostrare che: qualora le $\varphi_{si}(\tau, t)$ siano funzioni limitate nel campo illimitato $t \geq \tau \geq \theta_0$, e, oltre a ciò, la soluzione non perturbata relativa al sistema della prima approssimazione sia stabile, sarà certamente stabile anche il moto non perturbato relativo al sistema (2), ferme restando sia le restizioni poste nei riguardi delle $P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$ sia la restrizione relativa alle $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Infatti, tenendo presente che

$$x_s^{(1)}(t) = a_s^{(1)} + \sum_{1}^{n}{}_i a_i^{(1)} \int_{\theta_0}^{t} \varphi_{si}(\tau, t)\, d\tau, \tag{12}$$

avremo che, qualora la soluzione non perturbata, relativa al sistema della prima approssimazione, sia stabile, sarà certamente

$$|x_s^{(1)}(t)| < a',$$

per $t \geqq \theta_0$, essendo a' una costante superiore ai moduli delle $a_s^{(1)}$ $(s=1, 2, \dots, n)$. Inoltre, essendo, per ipotesi, le $\varphi_{st}(\tau, t)$ funzioni limitate nel campo illimitato $t \geqq \tau \geqq \theta_0$, avremo, nel campo in discorso,

$$|\varphi_{st}(\tau, t)| < g,$$

designando g una certa costante. Sicchè, tenendo presenti le (5), col significato dei simboli che vi compaiono, sarà, per $m > 1$,

$$\begin{cases} |x_s^{(m)}(t)| < \mathrm{H}^{(m)}(t) + ng \int_{\theta_0}^{t} \mathrm{H}^{(m)}(\tau)\, d\tau \\ (s = 1, 2, \dots, n) \quad , \quad (m > 1). \end{cases}$$

Quindi, tenendo presenti le restrizioni poste nei riguardi delle $\mathrm{P}_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}$, e la restrizione relativa alle $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n$, avremo, mediante un ragionamento analogo a quello usato nel precedente paragrafo, che il nostro movimento non perturbato sarà certamente stabile.

La nostra teoria permette, inoltre, di assegnare immediatamente le condizioni *necessarie e sufficienti* affinchè la soluzione non perturbata *relativa ad un sistema lineare* sia stabile. Infatti, qualora il sistema dato, cioè il sistema (2) sia un sistema lineare, esso coincide col sistema che, nel caso generale, veniva denominato sistema della prima approssimazione. Avremo, allora, che le x_s saranno date dalle (12). Dunque, affinchè la soluzione non perturbata relativa ad un sistema lineare sia stabile, è necessario e sufficiente che le funzioni $\int_{\theta_0}^{t} \varphi_{st}(\tau, t)\, d\tau$ siano limitate nel campo illimitato $t \geqq \theta_0$. Si noti, incidentalmente, che, nel caso di un sistema lineare, la stabilità di una soluzione trae seco, come resulta subito dalle (12), la stabilità delle altre soluzioni del sistema lineare stesso.

Vengo, infine, ad assegnare, *nel caso generale*, un criterio, il quale si presenta come notevole per la circostanza ch'esso assicura la stabilità del movimento non perturbato attraverso lo studio di un certo sistema *lineare*. Ferma restando la restrizione relativa alle $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n$, intenderò soltanto, nei riguardi delle funzioni continue $\mathrm{P}_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}$ che le funzioni stesse soddisfino alle condizioni che mi accingo a specificare. Poichè abbiamo ammesso che, per $\tau \geqq t_0$, le

$$\Sigma \mathrm{P}_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$$

siano, delle $x_1, x_2, \dots, x_n$, almeno in un certo intorno dell'origine, funzioni olomorfe, si ha, per un noto teorema,

$$|\mathrm{P}_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}| < \frac{\mathrm{M}_s}{\mathrm{A}^{m_1 + m_2 + \dots + m_n}},$$

dove M_s rappresenta una certa funzione, indipendente dagli apici $m_1, m_2, \dots, m_n$. Noi, qui, porremo la restrizione che esista una costante β tale che, per $\tau \geqq \theta_0$, si abbia

$$(13) \qquad |\mathrm{P}_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}| < \frac{\beta}{\mathrm{A}^{m_1 + m_2 + \dots + m_n}}.$$

La restrizione in discorso (sia detto incidentalmente) fu posta anche dal LIAPOUNOFF nella sua ricerca, *Sur un cas général d'équations différentielles du mouvement troublé* (¹). La (13) sussisterà certamente qualora le M_s siano limitate nel campo illimitato $\tau \geqq \theta_0$.

Ciò premesso, si ponga

$$(14) \qquad \begin{cases} x_s(\tau) = \varphi(\tau)\, y_s(\tau)\,, \\ (s = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \qquad (\tau \geqq \theta_0)$$

dove $\varphi(\tau)$ sia funzione (derivabile) limitata nel campo illimitato $\tau \geqq \theta_0$ e tale, inoltre, che, nell'interno del campo medesimo (cioè al finito) non si annulli e che, in esso campo, si abbia

$$(15) \qquad |\varphi(\tau)| \leqq \frac{1}{\tau^k}\,,$$

dove k rappresenta una costante superiore all'unità.

Il sistema dato, cioè il sistema (2), verrà scritto

$$\begin{cases} \varphi y'_s + \varphi' y_s = \varphi(p_{s1} y_1 + p_{s2} y_2 + \cdots + p_{sn} y_n) + \\ \qquad + \Sigma \varphi^{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_n^{m_n} \\ \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)\,, \end{cases}$$

dove la sommatoria va estesa a tutti gli apici non negativi $m_1, m_2, \ldots, m_n$ soddisfacenti alla condizione

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n > 1\,.$$

Sicchè, risoluto rispetto alle derivate y'_s, il sistema in discorso verrà scritto

$$(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_s}{d\tau} = p_{s1} y_1 + p_{s2} y_2 + \cdots + \left(p_{ss} - \dfrac{d \log \varphi}{d\tau}\right) y_s + \cdots + p_{sn} y_n + \\ \qquad + \Sigma Q_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_n^{m_n} \\ \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

dove

$$Q_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} = \varphi^{m_1 + m_2 + \cdots + m_n - 1} P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}\,.$$

Ora, abbiamo che, per $\tau \geqq \theta_0$, le $\Sigma Q_s^{(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)} y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_n^{m_n}$, che figurano nei secondi membri delle (16), cioè

$$\frac{1}{\varphi} \Sigma \varphi^{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_n^{m_n}$$

sono, delle $y_1, y_2, \ldots, y_n$, funzioni olomorfe per

$$|\varphi y_s| \leqq A_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

(¹) Memoria citata, pag. 243.

cioè per

$$|y_s| \leq \frac{A_s}{|\varphi|} \qquad (s = 1, 2, \dots, n).$$

E poichè, per ipotesi, ciascuna delle A_s non è inferiore (nel considerato campo della τ) ad una certa costante positiva e, inoltre, la φ è, nel medesimo campo, una funzione limitata, resulta che esisterà una costante *positiva* (che indicherò con B) tale che per

$$|y_s| < B \qquad (s = 1, 2, \dots, n)$$

i secondi membri, che figurano nelle (16) saranno, per $\tau \geq \theta_0$, funzioni olomorfe delle $y_1, y_2, \dots, y_n$. Dunque, intanto, nei riguardi del campo di olomorfismo dei secondi membri delle (16), è soddisfatta la condizione imposta ai secondi membri della (2).

Nei riguardi, poi, delle $Q_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}$ sono pure soddisfatte le condizioni imposte, nel paragrafo precedente, alle $P_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}$. Infatti, tenendo presenti le (15), ed osservando che

$$Q_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)} = \varphi^{m_1 + m_2 + \dots + m_n - 1} \, P_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)},$$

avremo

$$|Q_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}| \leq \frac{|P_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}|}{\tau^{\lambda(m_1 + m_2 + \dots + m_n - 1)}}.$$

Ora (senza togliere nulla alla nostra trattazione) possiamo intendere, come già abbiamo inteso nel paragrafo precedente, $\theta_0 > 1$. Quindi avremo

$$\tau^{\lambda(m_1 + m_2 + \dots + m_n - 1)} \geq \tau^{\lambda} \text{ (1)},$$

tenendo presente che $\tau \geq \theta_0$ e tenendo, inoltre, presente il significato degli altri simboli. Sicchè

$$|Q_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}| \leq \frac{|P_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}|}{\tau^{\lambda}}.$$

Dunque, in virtù delle (13), avremo

$$|Q_s^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}| < \frac{\beta}{\tau^{\lambda} A^{m_1 + m_2 + \dots + m_n}},$$

come volevasi dimostrare.

Ora, si consideri il sistema lineare

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{dy_s}{d\tau} = q_{s1} y_1 + q_{s2} y_2 + \cdots + q_{sn} y_n \\ & \qquad (s = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \right.$$

avendo posto

$$\left\{ \begin{aligned} & q_{si} = p_{si} \quad \text{per} \quad s \neq i \\ & q_{ss} = p_{ss} - \frac{d \log \varphi}{d\tau}, \end{aligned} \right.$$

(1) Il segno di eguaglianza, evidentemente, sussiste soltanto per $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = 2$

e si costruiscano, relativamente al sistema (17), le funzioni analoghe alle $\varphi_{st}(\tau, t)$ (che indicherò con γ_{st}) cioè si ponga

$$\gamma_{st}(\tau, t) = \sum_{1}^{\infty}{}_h \, q_{st}^{(h)}(\tau, t),$$

essendo

$$q_{st}^{(1)}(\tau, t) = q_{st}(\tau) \;,\; q_{st}^{(2)}(\tau, t) = \sum_{1}^{n}{}_r \, q_{sr}(\tau) \int_{\tau}^{t} q_{rt}(u)\, du, \ldots,$$
$$\ldots, q_{st}^{(h+1)}(\tau, t) = \sum_{1}{}_r \, q_{sr}(\tau) \int_{\tau}^{t} q_{rt}^{(h)}(u, t)\, du, \ldots$$

In virtù di quanto ho precedentemente dimostrato, e tenendo, inoltre, presenti le (14) resulta che: *qualora le $\gamma_{st}(\tau, t)$ siano funzioni limitate nel campo illimitato $t \geq \tau \geq \theta_0$ ed, oltre a ciò, la soluzione non perturbata relativa al sistema lineare*

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = q_{11}\, y_1 + q_{12}\, y_2 + \cdots + q_{1n}\, y_n \\ \dfrac{dy_2}{dt} = q_{21}\, y_1 + q_{22}\, y_2 + \cdots + q_{2n}\, y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = q_{n1}\, y_1 + q_{n2}\, y_2 + \cdots + q_{nn}\, y_n \end{cases}$$

sia stabile, sarà certamente stabile anche il moto non perturbato relativo al sistema (2), *ferme restando la restrizione relativa alle A_s e la restrizione* (13). Infatti, per quanto ho precedentemente stabilito, sarà, allora, stabile la soluzione non perturbata relativa al sistema (16), e quindi, tenendo presente che, nelle (14), la $\varphi(\tau)$ è funzione limitata nel campo illimitato $\tau \geq \theta_0$, avremo, allora, che sarà stabile anche il nostro moto non perturbato.

Quest'ultimo criterio, come si vede, riconduce lo studio del sistema (2) allo studio del sistema (17), il quale è un sistema *lineare*. Così, per esempio, se prendiamo

$$\varphi(\tau) = e^{-\tau},$$

avremo che il criterio testè trovato riconduce lo studio del sistema (2) allo studio del sistema seguente

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = (1 + p_{11})\, y_1 + p_{12}\, y_2 + \cdots + p_{1n}\, y_n \\ \dfrac{dy_2}{dt} = p_{21}\, y_1 + (1 + p_{22})\, y_2 + \cdots + p_{2n}\, y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = p_{n1}\, y_1 + p_{n2}\, y_2 + \cdots + (1 + p_{nn})\, y_n, \end{cases}$$

cioè allo studio delle $\gamma_{st}(\tau, t)$ corrispondenti.

INDICE DELLA MEMORIA