Il problema dei due corpi di masse variabili.

Memoria del dott. ing. GIUSEPPE ARMELLINI

(presentata dal Socio E. MILLOSEVICH e approvata dal Socio G. CASTELNUOVO)

INTRODUZIONE

1. — Bibliografia.

Il problema, di cui passiamo ad occuparci, è stato proposto da C. DUFOUR [1] e da T. OPPOLZER [2], i quali hanno cercato di spiegare, almeno parzialmente, la differenza che esiste tra l'osservazione e la teoria dell'accelerazione secolare della Luna, ammettendo un incremento della massa terrestre, dovuto alla caduta degli aereoliti. Noi ricordiamo, a questo proposito, che il peso della pioggia di polvere cosmica che cade ogni giorno sulla Terra, può essere valutato a circa 100,000 kg. [3]. La quantità di materia che cade sui pianeti e sul sole è ancora ignota; ma certamente è considerevole, almeno per il sole. Secondo studî recenti del COWELL anche il moto della Terra intorno al Sole sarebbe affetto da una leggiera accelerazione secolare, e forse se ne potrebbe trovare la cagione nel fenomeno ora accennato.

H. GYLDÉN [4] ha cercato di ricondurre il problema al caso di masse costanti, introducendo nei calcoli un tempo ridotto τ.

Questa nuova variabile τ risulta legata al tempo vero t da un'equazione differenziale che non è possibile di integrare: GYLDÉN cerca quindi di risolverla con approssimazioni successive.

Il metodo che egli ci dà è complicatissimo, e, quel che è più grave, in alcuni casi risulta privo di rigore. D'altra parte, sarebbe stato assai più semplice di trattare direttamente le equazioni differenziali del moto, senza introdurre il tempo ridotto che non reca alcun giovamento.

(1) Comptes rendus de l'Ac. des sciences de Paris; an. 1866, pag. 840.

(2) Astron. Nachr., n. 2578. *Ueber ein Ursache welche den Unterschied zwischen der theoretisch berechneten Säculacceleration in der Länge des Mondes und der thatsächlichen bedingen kann.*

(3) TISSERAND, *Traité de mécanique céleste*, tom. II, pag. 543.

(4) *Die bahnbewegungen in einem Systeme von zwei Körpern, in dem Falle das die Massen Veränderungen unterwörfen sind.* Astron. Nachr., n. 2593.

Il metodo del Gyldén fu più tardi semplificato dal Terkan, il quale propose, in una breve Nota [1], di prendere come variabile indipendente l'anomalia vera.

E. Strömgren, in una Nota di grande importanza per gli astronomi [2], ha abbandonato del tutto questa via, ricorrendo ai metodi ordinari della teoria delle perturbazioni; e, nel caso di piccole variazioni, è riuscito a dare formole comodissime per il calcolo degli elementi dell'orbita osculatrice.

Come il Terkan aveva semplificato le ricerche del Gyldén, così più tardi H. C. Plummer giunse agli stessi risultati dello Strömgren adoperando calcoli molto più facili. Il suo metodo esposto in una breve Nota [3] consiste essenzialmente nel supporre l'incremento assai piccolo e presso a poco proporzionale al tempo. Ponendo allora $M(t) = \mu(1 + \alpha t)$ dove μ è costante ed α assai piccola, egli mostra che le equazioni differenziali del moto divengono integrabili se si trascurono le potenze di α superiori alla prima.

Citiamo ancora un bel lavoro del Lehmann-Filhès, il quale fra l'altro, dimostra un teorema assai importante sull'orbita perturbata [4]; teorema che io ritroverò di nuovo nel corso della presente Memoria, valendomi di un metodo estremamente più semplice.

Va infine segnalata una Nota del Mestschersky [5], il quale ha indicato un caso importante integrabilità delle equazioni differenziali del moto; quando cioè la somma delle masse $M(t)$ è rappresentata dalla funzione $M(t) = \dfrac{1}{\sqrt{a + bt + ct^2}}$, dove a, b, c sono costanti.

Io ho esteso questo teorema ad un caso più generale, in una Nota inserita nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei; nella quale collego anche questo teorema con uno analogo dello Jacobi [6].

Sul presente argomento io ho pubblicato cinque lavori [7], trattandolo sopra tutto dal lato analitico e cercando di determinare le leggi rigorose del movimento. Alcuni dei teoremi da me scoperti e pubblicati nei Lincei comparvero l'anno seguente in due Riviste straniere con dimostrazioni differenti e spesso inesatte. Poichè il mio nome non era mai citato, io mostrai la mia priorità negli ultimi dei lavori ora nominati.

In questa Memoria riprendo per intero lo studio del problema coordinando insieme i varii risultati da me ottenuti, sviluppandoli e dandone dei nuovi.

(1) *Observatio ad problema duorum corporum, casu massarum mutantium.* Astr. Nachr., n. 4325.

(2) Astr. Nachr., n. 3897. *Ueber die Bedeutung Kleiner Massenänderung für die Newtonsche Centralbewegung.*

(3) *Note on the Motion about an Attracting Centre of slowly increasing Mass.* By H. C. Plummer, M. A., Monthy Not., LXVI, 83.

(4) *Ueber Centralbewegungen.* Astr. Nachr., n. 3479.

(5) Astr. Nachr., n. 3153.

(6) *Sopra la integrabilità delle equazioni differenziali della meccanica,* Nota di G. Armellini. Rend. della R. Accademia dei Lincei, an. 1911, 2° sem., fasc. 3°.

(7) Rend. Acc. dei Lincei, an. 1911, 2° sem., fasc. 12°; an. 1913, 1° sem., fasc. 5°; an. 1914, 1° sem., fasc. 12°. Comptes Rendus de l'Ac. des sciences de Paris, tom. 158, pag. 1565. Astr. Nachr., n. 4717.

2. — Preliminari. Equazioni del movimento.

Siano A e B due punti materiali di cui la somma delle masse, M, varii secondo una certa funzione del tempo $M = M(t)$.

Io suppongo che $M(t)$ sia analitica, reale, e positiva per tutti i valori reali della variabile t.

La somma delle masse dei due corpi — del Sole e della Terra, — p. es., varia, in realtà, in maniera discontinua a cagione della caduta istantanea d'innumerevoli aereoliti sopra la superficie di questi astri.

Ma, poichè la massa degli aereoliti è sempre assai piccola, noi potremo supporre, senza nulla togliere all'esattezza delle nostre ricerche, che $M(t)$ soddisfi alle condizioni indicate.

Ciò posto, noi ci proponiamo di risolvere il seguente problema:

« Data la funzione $M(t)$ e conosciute le condizioni iniziali del movimento, « determinare l'orbita relativa di uno dei due punti A rispetto all'altro B ».

Notiamo, prima di tutto, che il movimento avrà luogo in un piano; possiamo dunque prendere come origine il punto B e determinare la posizione di A per mezzo delle sue coordinate rettangolari x ed y, o del suo raggio vettore r e dell'anomalia ϑ. Chiamando con f il coefficiente attrattivo, avremo:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + fM(t)\dfrac{x}{r^3} = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} + fM(t)\dfrac{y}{r^3} = 0 . \end{cases}$$

Con alcune trasformazioni elementari, ne deduciamo le equazioni:

$$(2) \qquad \begin{cases} r^2\dfrac{d\vartheta}{dt} = c \\[2ex] \dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{c^2}{r^3} - f\dfrac{M(t)}{r^2} ; \end{cases}$$

dalle quali, chiamando con v la velocità relativa di A, abbiamo:

$$(3) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left[\frac{dr}{dt}\right]^2 + \frac{c^2}{r^2}\right) = \frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{c^2}{r^3}\frac{dr}{dt} ,$$

od anche, sostituendo a $\dfrac{d^2r}{dt^2}$ il suo valore:

$$(4) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v^2) = -f\frac{M(t)}{r^2}\frac{dr}{dt} .$$

In seguito supporremo sempre che la costante delle aree c sia diversa da zero, giacchè altrimenti il moto sarebbe rettilineo ed il problema privo d'importanza.

Tranne il caso del MESTSCHERSKY, di cui abbiamo già parlato, e su cui ora è inutile di fermarci, il sistema (2) non è integrabile.

Ci proponiamo perciò tre questioni differenti:

I) Studiare la natura della traiettoria relativa descritta da uno dei corpi B intorno all'altro A.

II) Trovare delle serie convergenti per ogni ogni valore reale e finito del tempo, le quali, nel campo reale, rappresentino l'integrale generale del sistema (2).

III) Cercare formole semplici e approssimate che permettano il calcolo delle coordinate con esattezza sufficiente a tutti i bisogni dell'astronomia.

Se noi riusciamo a rispondere alle questioni ora accennate, potremo dire di aver studiato completamente il nostro problema.

Infatti, nel campo reale, ne possederemo una soluzione analitica, analoga, p. es., a quella data dal SUNDMAN per il problema dei tre corpi; conosceremo la natura geometrica della traiettoria, ed infine avremo formole semplici per il calcolo numerico.

Sarà quindi opportuno di dividere a tale scopo la presente Memoria in tre capi, riservando ciascuno di essi ad ognuna delle questioni accennate.

CAPITOLO I.

Studio della traiettoria relativa.

Come abbiamo detto, gli autori che hanno trattato il nostro problema si sono occupati quasi unicamente di determinare soluzioni approssimate. LEHMANN-FILHÈS soltanto ha dato un teorema sulla forma delle orbite perturbate. Noi crediamo quindi utilissimo di assegnare questo primo capitolo della Memoria allo studio delle leggi rigorose del moto, deducendole da un esame approfondito delle equazioni differenziali della traiettoria [1].

§ 1. — Teoremi generali.

TEOREMA I. — *Supponiamo che* M(t) *si conservi sempre minore di una quantità assegnata, od anche che sia*

$$\lim_{t=\infty} \mathrm{M}(t) = \infty\,; \tag{5}$$

divenendo però in tal caso M(t) *infinita d'ordine inferiore al primo rispetto a* t. *Io dico che è possibile di scegliere le condizioni iniziali del movimento in modo tale che si abbia:*

$$\lim_{t=\infty} r = \infty\,. \tag{6}$$

Dimostrazione. — Per brevità, consideriamo soltanto l'ipotesi più sfavorevole: supponiamo cioè che si abbia $\lim\limits_{t=\infty} \mathrm{M}(t) = \infty$ e che, di più, M(t) sia funzione crescente dell'argomento. Consideriamo sul piano del moto un corpo mobile ausiliare S, la cui distanza s dall'origine sia variabile secondo la legge:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -f\,\frac{\mathrm{M}(s)}{s^2} \qquad (s_{t=0} > 0)\,. \tag{7}$$

Dico che possiamo scegliere il valore iniziale della derivata $\frac{ds}{dt}$ in modo che questa funzione resti sempre maggiore dell'unità.

Infatti dalla (7) abbiamo:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2_{t=0} - 2f\int_{s_{t=0}}^{s} \frac{\mathrm{M}(s)}{s^2}\,ds\,; \tag{8}$$

[1] È inutile ricordare che in tutto quel che segue supponiamo sempre M(t) *analitica, reale, positiva e diversa da zero* per tutti i valori reali di t.

e, in virtù della nostra ipotesi sulla funzione $M(s)$, l'integrale

$$f\int_{s_{t=0}}^{s=\infty}\frac{M(s)}{s^2}\,ds \tag{9}$$

è certamente convergente ed eguale ad una quantità positiva e finita Q.

Scegliamo allora $\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0}$ in modo che si abbia:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0} > \left|\sqrt{1+2Q}\right|; \tag{10}$$

la derivata $\frac{ds}{dt}$ sarà sempre maggiore di 1, secondo la (8). La distanza s crescerà allora all'infinito; ed essendo anche $s_{t=0} > 0$, noi avremo, per $t > 0$, l'ineguaglianza $s > t$.

Ciò posto, se noi riusciamo a provare che si possono scegliere le condizioni iniziali del corpo A in modo che si abbia sempre $r > s$, il nostro teorema sarà stabilito.

Ora, essendo per ipotesi, M funzione crescente dell'argomento, dall'ineguaglianza $s > t$ ne ricaviamo $M(s) > M(t)$: donde

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3} - f\frac{M(t)}{r^2} > \frac{c^2}{r^3} - f\frac{M(s)}{r^2}, \tag{11}$$

e quindi

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{d^2s}{dt^2} > fM(s)\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{r^2}\right\}. \tag{12}$$

La (12) dimostra che, se in un istante qualsiasi si ha $r \geqq s$, ne risulta $\frac{d^2r}{dt^2} > \frac{d^2s}{dt^2}$. Scegliamo allora le condizioni iniziali del punto A in modo che si abbia $r_{t=0} > s_{t=0}$ e

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=0} > \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0}.$$

È facile il vedere che in tal caso si avrà sempre

$r > s$ e che quindi r avrà per limite l'infinito.

c. d. d.

Conseguenze astronomiche. — Supponiamo che la massa solare cresca p. es. secondo la legge $M(t) = a + b\sqrt{t}$. Alcuni corpi del sistema planetario potranno ancora allontanarsi indefinitamente dal sole e sfuggire alla sua attrazione, benchè la sua massa aumenti all'infinito. Vedremo che, in tal caso, condizione necessaria, ma non sufficiente, perchè ciò avvenga, è che l'orbita osculatrice iniziale sia iperbolica.

Teorema II. — *Il raggio vettore r non può mai annullarsi per un valore reale qualsiasi del tempo.*

Dimostrazione. — Per semplificare le nostre formole, scegliamo le tre unità di lunghezza, di tempo e di massa in modo che le costanti c ed f e il valore iniziale di v (certamente diverso da zero, perchè noi abbiamo $c \gtreqless 0$) si riducano eguali ad 1 (*). Ne risulta che il valore iniziale del raggio vettore r sarà maggiore o, al più, eguale ad 1.

Ciò posto, indichiamo con h la differenza tra la forza viva e il potenziale di A nel suo moto relativo intorno a B: poniamo cioè

$$(13) \qquad h = \frac{v^2}{2} - \frac{M(t)}{r}.$$

È inutile di avvertire che h, a differenza di ciò che avviene nel caso di masse costanti, è ora una funzione del tempo; la quale, come è facile di vedere differenziando la (13), soddisfa alla legge:

$$(14) \qquad dh = -\frac{1}{r}\frac{dM}{dt}\,dt.$$

Abbiamo allora dalla (13), essendo $c = 1$,

$$(15) \qquad 2hr^2 + 2M(t) \cdot r \geqq 1;$$

od anche, paragonando con la (14),

$$(15^{bis}) \qquad 2h_{t=0}\, r^2 - 2r^2 \int_{t=0}^{t} \frac{1}{r}\frac{dM}{dt}\,dt + 2r\,M(t) \geqq 1.$$

Ciò posto, indicando con τ un istante compreso tra 0 e t, abbiamo:

$$\int_0^t \frac{1}{r}\frac{dM}{dt}\,dt = t\left(\frac{1}{r}\frac{dM}{dt}\right)_{t=\tau};$$

e quindi sostituendo nella 15^{bis}:

$$(16) \qquad 2h_{t=0}\, r^2 - 2t\frac{r^2}{r_{t=\tau}}\left(\frac{dM}{dt}\right)_{\tau=t} + 2r\,M(t) \geqq 1.$$

La (16) ci mostra essere impossibile che r si annulli in un istante qualsiasi $t = T$. Infatti, se ciò avvenisse, essendo $h_{t=0}$ (valore iniziale di h), $M(t)$ e $\frac{dM}{dt}$ sempre finite e determinate, e restando τ compreso fra 0 e T (e quindi essendo $r_\tau > 0$ perchè la r si annulla al più nell'estremo superiore), il primo membro della (16) tenderebbe a zero col tendere di t a T; l'ineguaglianza (16) non potrebbe quindi sussistere.

Teorema III. — *Se si ha* $M(t_1) \gtreqless M(t_2)$, *e se negli istanti* t_1 *e* t_2 *il corpo* A *passa per uno stesso punto* P *i due rami della traiettoria non possono presentare in* P *un contatto d'ordine superiore al primo.*

(*) Questa scelta comodissima delle unità di misura sarà mantenuta nel seguito della Memoria.

Dimostrazione. — Chiamiamo con R_1 e R_2 i raggi di curvatura dei due rami della traiettoria in P. Avremo:

$$R_1 = \frac{\left[\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2_{t=t_1} + r^2_{t=t_1}\right]^{\frac{3}{2}}}{2\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2_{t=t_1} + r^2_{t=t_1} - r_{t=t_1}\left(\frac{d^2r}{d\vartheta^2}\right)_{t=t_1}} . \tag{17}$$

Eliminando $\frac{dr^2}{d\vartheta^2}$ per mezzo della formola notissima

$$\frac{d^2r}{d\vartheta^2} = \frac{\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{dr}{dt}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}}{\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^3} , \tag{18}$$

dove per $\frac{dr^2}{dt^2}$ e $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ possiamo porre le loro espressioni tratte dalle (2), abbiamo infine:

$$R_1 = \frac{\left\{1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2_{t=t_1}\right\}^{\frac{3}{2}}}{M(t_1)} ; \tag{19}$$

Analogamente si avrebbe:

$$R_2 = \frac{\left\{1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)_{t=t_2}\right\}^{\frac{3}{2}}}{M(t_2)} . \tag{20}$$

Ora, se in P si avesse un contatto d'ordine superiore al primo, noi avremmo:

$$\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)_{t=t_1} = \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)_{t=t_2} \quad ; \quad R_1 = R_2 ; \tag{21}$$

donde dalla (19) e dalla (20) risulterebbe

$$M(t_1) = M(t_2) , \tag{22}$$

ciò che è contrario alla nostra ipotesi. Il nostro teorema è dunque provato.

c. d. d.

1°. Corollario. — Supponiamo che il moto di A intorno a B sia periodico, con periodico T. Noi avremo, per ipotesi,

$$r(t) = r(t + T) \quad ; \quad \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)_t = \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)_{t+T} \quad ; \quad \vartheta_t = \vartheta_{t+T} \quad ; \quad R_t = R_{t+T} . \tag{23}$$

Dalla (22) segue allora:

$$M(t) = M(t + T) . \tag{24}$$

Quindi possiamo affermare la seguente proposizione: *Affinchè esistano soluzioni periodiche con periodo* T, *è necessario che la funzione* M(t) *sia periodica con lo stesso periodo* T, *o con periodo* s *sottomultiplo di* T.

2°. Corollario. — Cerchiamo ora la condizione a cui deve soddisfare M(t), affinchè la traiettoria effettivamente descritta ammetta un asse di simmetria s passante per l'origine.

Poichè la traiettoria effettivamente descritta è composta di un solo ramo rivolgente sempre la parte concava all'origine, la retta s dovrà necessariamente tagliarla almeno in un punto Q.

Noi potremo quindi prendere come origine dei tempi, l'istante in cui il punto mobile passa per Q.

Ciò posto sia P_1 un punto generico della traiettoria distinto da Q, e P_2 il punto simmetrico. Essendo necessariamente

$$r_1 = r_2 \quad \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)_1 = -\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)_2 ,$$

dal teorema delle aree ricaviamo:

$$v_1 = v_2 .$$

La stessa uguaglianza vale certamente per tutti i punti dell'orbita, intermedî tra Q e P_1, paragonati con i corrispondenti punti simmetrici, intermedî tra Q e P_2. Indicando allora con t_1 e t_2 gl'istanti in cui il corpo mobile raggiunge le posizioni P_1 e P_2 ne risulta $t_2 = -t_1$; e quindi la (22) ci dà $M(t_1) = M(-t_1)$. Ma P_1 è un punto generico preso a caso sulla traiettoria; togliendo quindi l'indice che non ha alcuna importanza avremo come condizione cercata:

$$M(t) = M(-t) . \tag{24bis}$$

Vale a dire: *Se la traiettoria ammette un asse di simmetria* s *passante per l'origine, e se si sceglie come origine dei tempi l'istante in cui il corpo mobile passa per un punto in cui* s *taglia la traiettoria, la* M(t) *deve risultare funzione pari dell'argomento.*

Teorema IV. — *Supponiamo che si abbia:*

$$\lim_{t=\infty} M(t) = \infty . \tag{24ter}$$

Dico che, in questo caso.

1°) *o il raggio vettore* r *crescerà all'infinito,*

2°) *oppure* r *avrà per limite inferiore lo zero.*

Dimostrazione. — Noi abbiamo visto (teorema I) che r può tendere verso ∞ quando t tende verso ∞. Per dimostrare il teorema, noi faremo vedere che nel caso contrario, cioè quando r resta sempre minore di una quantità fissa L (positiva), esso ha per limite inferiore lo zero. A tale scopo indichiamo con ϵ una quantità piccola a piacere, e costruiamoci due sfere, aventi per centro l'origine, e di raggio L ed ϵ. Vediamo se è possibile che il punto A si muova sempre nello spazio compreso tra le due sfere.

In questa ipotesi, a cagione della relazione

$$L \geqq r \geqq \epsilon, \tag{25}$$

la seconda equazione del sistema (2) ci darà:

$$\frac{d^2r}{dt^2} \leqq \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{M(t)}{L^2}. \tag{26}$$

Chiamando allora con $-G^2$ una quantità negativa, il cui valore assoluto sia grande a piacere, noi potremo, in virtù della 24^{ter}, determinare un istante T tale, che da T in poi si abbia sempre $\frac{d^2r}{dt^2} < -G^2$.

Ne risulta allora immediatamente che il corpo A dovrà in fine tagliare la sfera interna di raggio ϵ, non potendo aversi sempre $r > \epsilon$. La relazione (25) non può perciò sussistere insieme con la (24^{bis}). Avendosi quindi, per ipotesi, $r > L$, la r dovrà divenire minore di ϵ, ed avrà perciò per limite inferiore lo zero.

c. d. d.

Teorema V. — *Supponiamo che $M(t)$ sia funzione crescente dell'argomento, e che r sia massimo per $t = T$. Supponiamo cioè che si abbia*

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=T} = 0 \quad , \quad \left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)_{t=T} < 0,$$

ed indichiamo con R il valore di r nell'istante T.

Io dico che in tutti gl'istanti successivi si avrà sempre $r < R$.

Dimostrazione. — Consideriamo il movimento immediatamente dopo l'istante T. La r sarà decrescente, e $\frac{dr}{dt}$ certamente negativa. Se $\frac{dr}{dt}$ si conserva negativa in tutti gl'istanti successivi, il teorema è evidente.

Nel caso contrario, r decrescerà fino ad un certo istante τ, nel quale noi avremo un minimo ϱ, e, dopo τ, tornerà di nuovo a crescere; ma tuttavia io dico che r non potrà più raggiungere il valore R. Per dimostrarlo, supponiamo che, dopo l'istante T, la r raggiunga di nuovo il valore R nell'istante T_1.

Noi avremo dalla (4), integrando da $t = T$ a $t = T_1$, e ricordando che si ha $\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=T} = 0$:

$$-\frac{1}{2}\left\{v^2_{t=T_1} - v^2_{t=T}\right\} = -\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2_{t=T_1} = \int_{t=T}^{t=T_1} \frac{M(t)}{r^2}\frac{dr}{dt}\,dt. \tag{27}$$

Ora il secondo membro della (27) è certamente positivo e maggiore di zero, poichè la parte positiva dell'integrale ha la prevalenza sulla parte negativa, essendo $M(t)$ crescente; il primo membro è invece negativo o, al più, nullo. L'ipotesi che r raggiunga il valore R nell'istante T_1, è perciò assurda.

c. d. d.

Osservazione. — Supponiamo, invece, che $M(t)$ sia una funzione decrescente: vale allora un teorema analogo. Cioè se, nell'istante $t = t_2$, la r ha un minimo ϱ, in tutti gl'istanti successivi la r si conserva maggiore di ϱ.

P. es., se nell'istante $t = t_1$ la terra è all'afelio e se da t_1 in poi la massa solare comincia a crescere, tutta la traiettoria terrestre, dall'istante t_1 in poi, si svolgerà nell'*interno* di un cerchio avente per centro il sole e per raggio il valore della distanza afeliaca nell'istante t_1.

Se invece nell'istante $t = t_2$ la terra è al perielio, e se da t_2 in poi la massa solare decresce, tutta la traiettoria da t_2 in poi si svolge all'*esterno* di un cerchio avente per centro il sole e per raggio il valore della distanza perieliaca nell'istante t_2.

Teorema VI. — *Se $M(t)$ è funzione crescente o decrescente di t, e se il raggio vettore r diviene ∞ per $t = \infty$, allora la r non può ammettere più di un solo minimo in tutto l'intervallo compreso tra $t = -\infty$ e $t = \infty$.*

Dimostrazione. — Supponiamo che r presenti due minimi, p. es. per $t = t_1$ e per $t = t_2$; poichè in questo intervallo il raggio vettore è certamente funzione continua del tempo (giacchè la somma delle masse cresce con continuità e si mantiene finita per t finito) tra t_1 e t_2 la r dovrebbe presentare un massimo R per $t = \tau$. Ora ciò è assurdo. Infatti, se $M(t)$ è crescente, per il teorema V la r, da τ in poi, dovrebbe conservarsi minore di R, e non potrebbe perciò tendere all'infinito. Se invece $M(t)$ è decrescente, da τ in poi la r dovrebbe mantenersi maggiore di R, e non potrebbe perciò presentare un minimo per $t = t_2$. L'ipotesi di due minimi è perciò impossibile ad essere ammessa.

c. d. d.

Osservazione. — Questo teorema ci mostra la grande analogia fra il problema dei due corpi con masse crescenti o decrescenti e quello ordinario con masse costanti. Anche qui infatti, quando r diviene ∞ per $t = \infty$, cioè quando l'orbita relativa è un'iperbole o una parabola, la r in tutto l'intervallo compreso tra $t = -\infty$ e $t = \infty$, non presenta che un solo minimo.

§ 2. — Teoremi sull'urto.

Noi abbiamo dimostrato (teorema II) che, se si ha $c \lesseqgtr 0$, la r non potrà mai annullarsi. Se dunque A e B sono due punti matematici, l'urto sarà sempre impossibile.

Se, al contrario, A a B sono punti materiali, *noi diremo che vi sarà urto tutte le volte che il raggio vettore r, cioè la distanza AB, divenga minore di ogni quantità assegnata ε.*

Nel n. 2593 delle « *Astronomische Nachrichten* » Gyldèn ha dimostrato che, se la massa del sole, cominciasse a crescere linearmente col tempo, tutti i pianeti e le comete ora ellittiche e paraboliche dovrebbero cadere sul sole stesso.

È possibile di estendere questo teorema in modo da comprendervi anche quelle comete la cui orbita è ora iperbolica? Questa è la domanda che io mi sono proposta e alla quale ho dato una risposta affermativa per mezzo dei teoremi che seguono.

Generalizziamo ancora il campo delle nostre ricerche; e supponiamo che la massa solare cresca all' infinito, ma senza essere sottomessa alla legge lineare. Possiamo ancora affermare che *tutti* i corpi del nostro sistema solare cadranno, alla lunga, sul sole?

Io ho trovato che la risposta è affermativa nel caso in cui $M(t)$ diviene infinita di ordine uguale o superiore al primo, rispetto a t.

Supponiamo dunque il nostro sistema planetario isolato nello spazio; affinchè tutti i corpi di cui esso è composto, comprese anche *tutte le possibili comete iperboliche*, cadano sul sole, è necessario ed è sufficiente che la sua massa cresca linearmente col tempo o con legge più rapida della legge lineare.

Affinchè invece vi cadano tutti i pianeti e tutte le comete ora ellittiche e paraboliche, è sufficiente, come dimostrerò in questo paragrafo, che la sua massa cresca all' infinito.

La legge lineare ha dunque importanza assai grande nel nostro problema; importanza che sin qui non era stata posta in luce. Passiamo ora a dimostrare i nostri teoremi.

Teorema VII. — *Sia $M(t)$ funzione crescente di t, e si abbia*

$$\lim_{t=\infty} M(t) = \infty \,. \tag{27bis}$$

Supponiamo che, in un certo istante t_1, la differenza h tra la forza viva e la funzione delle forze sia nulla o negativa. Io dico che il raggio vettore r avrà lo zero per limite inferiore.

Dimostrazione. — Poniamo

$$h_1 = \frac{1}{2} v^2_{t=t_1} - M(t_1) \,, \tag{28}$$

e supponiamo che, nell' istante t_1, il valore h_1 sia nullo o negativo.

Scriviamo, per comodità,

$$\mu(t) = M(t) - M(t_1) \,; \tag{29}$$

avremo dalla (4), integrando da $t = t_1$ a t,

$$\frac{1}{2} v^2 = h_1 + \frac{M(t_1)}{r_1} - M(t_1) \int_{t_1}^{t} \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt}\, dt - \int_{t_1}^{t} \frac{\mu(t)}{r^2} \frac{dr}{dt}\, dt \,. \tag{30}$$

Integrando ancora, si ha:

$$- M(t_1) \int_{t_1}^{t} \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt}\, dt = \frac{M(t_1)}{r} - \frac{M(t_1)}{r_1} \,; \tag{30bis}$$

e sostituendo nella (30):

$$\frac{1}{2} v^2 = h_1 + \frac{M(t_1)}{r} - \int_{t_1}^{t} \frac{\mu(t)}{r^2} \frac{hr}{dt}\, dt \,. \tag{31}$$

Supponiamo ora, se è possibile, che r cresca all'infinito. Allora, per il teorema VI, da un certo tempo in poi $\frac{dr}{dt}$ sarà positivo; sarà quindi facile di vedere che, essendo $\mu(t)$ positiva per $t > t_1$, l'integrale

$$\int_{t_1}^{t} \frac{\mu(t)}{r^2}\frac{dr}{dt}\,dt. \tag{32}$$

risulterà positivo per valori sufficientemente grandi di t.

D'altra parte si ha:

$$\lim_{t=\infty} \frac{M(t_1)}{r^2} = 0, \tag{32bis}$$

poichè t_1 è fisso, mentre la r cresce all'infinito. Quindi dalla (31) ricaviamo che, per elevati valori del tempo, v^2 dovrebbe essere negativa, ciò che è assurdo. La r perciò non può crescere all'infinito: ed allora, a cagione del teorema IV, avrà per limite inferiore lo zero.

c. d. d.

Conseguenze astronomiche. — Se la massa del sole crescesse all'infinito con una legge qualsiasi, tutti i pianeti e le comete ora paraboliche ed ellittiche cadrebbero sulla sua superficie. Avverrebbe invece il contrario per alcune comete ora iperboliche, le quali potrebbero allontanarsene all'infinito (teorema I).

Teorema VIII. — *Supponiamo che* $M(t)$ *sia crescente e che, tendendo* t *verso* ∞, *essa divenga infinita d'ordine uguale o superiore al primo rispetto a* t. *In tale caso, qualunque siano le condizioni iniziali del moto, il raggio vettore* r *avrà per limite inferiore lo zero.*

Dimostrazione. — Supponiamo, se è possibile, che r tenda all'infinito. Dalla seconda equazione del sistema (2) ricaviamo, avendo posto $c = f = 1$,

$$r^3 \frac{d^2 r}{dt^2} = 1 - r\,M(t); \tag{32}$$

e quindi, nel nostro caso, per valori sufficientemente grandi di t, $\frac{dr^2}{dt^2}$ sarà negativo. D'altra parte $\frac{dr}{dt}$, da un certo istante in poi, sarà positiva (teorema VI): e quindi, per valori sufficientemente grandi del tempo, sarà funzione decrescente di t.

Ne segue che r diverrà infinita, e $\frac{1}{r}$ infinitesima, di ordine *inferiore*, o, *al più, eguale* al primo, rispetto a t; e la derivata $\frac{d\frac{1}{r}}{dt} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}$ diverrà infinitesima di ordine *inferiore*, o, *al più, eguale al secondo.*

Consideriamo allora l'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{M(t)}{r^2}\frac{dr}{dt}\,dt. \tag{33}$$

Esso sarà certamente *divergente*, perchè la funzione sotto il segno d'integrazione, da un certo istante in poi, si mantiene *positiva*, e per $t = \infty$ diviene infinitesima di ordine *inferiore*, o, al più, *eguale* al *primo*.

Ora l'equazione (4) ci dà:

$$v^2 = v^2_{t=0} - 2\int_{t=0}^{t} \frac{M(t)}{r^2}\frac{dr}{dt}\,dt. \tag{34}$$

Per valori sufficientemente grandi di t, se ne ricaverebbe allora

$$v^2 < 0: \tag{35}$$

ciò che è assurdo. È dunque impossibile di ammettere che r divenga infinita. Il nostro teorema risulta, perciò, provato.

c. d. d.

Conseguenze astronomiche. — Supponiamo che la massa solare cresca con la legge ora nominata: tutti i pianeti e tutte le comete (ora ellittiche, paraboliche ed iperboliche) cadranno sulla sua superficie.

§ 3. — Teoremi sulla conica osculatrice alla traiettoria.

Come già vedemmo nell' Introduzione il problema dei due corpi di masse variabili ha molta importanza per la meccanica celeste: crediamo quindi utile di dare alcuni teoremi sulla conica osculatrice alla traiettoria.

Teorema IX. — *Supponiamo che* $M(t)$ *sia crescente, e che in un istante* t_1 *la conica osculatrice alla traiettoria sia una ellisse o una parabola. Io dico che in ogni istante* t_2, *posteriore a* t_1, *la conica osculatrice sarà certamente ellittica.*

Dimostrazione. — Nell'istante t_1, la conica osculatrice alla traiettoria essendo ellittica o parabolica, noi avremo:

$$\frac{1}{2}v^2_{t=t_1} - \frac{M(t_1)}{r_{t_1}} = h_{t=t_1} \leqq 0. \tag{35}$$

Sia t_2 un istante qualsiasi, posteriore a t_1; l'equazione (14) ci dà:

$$h_{t=t_2} = h_{t=t_1} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{r}\frac{dM}{dt}\,dt. \tag{36}$$

Essendo quindi, per ipotesi, $\frac{dM}{dt}$ sempre positivo ed $h_{t=t_1}$ negativo o nullo, anche $h_{t=t_2}$ risulterà negativo; e quindi l'orbita osculatrice alla traiettoria nell'istante t_2 sarà ellittica.

c. d. d.

Teorema X. — *Supponiamo che, tendendo* t *verso* ∞, *la funzione* $M(t)$ *divenga infinita d'ordine inferiore al primo, rispetto a* t. *Io dico che le condizioni iniziali del moto potranno essere tali che la conica osculatrice alla traiettoria sia sempre iperbolica.*

Dimostrazione. — Noi abbiamo visto (teorema I) che, se $M(t)$ diviene ∞ d'ordine inferiore al primo rispetto a t, le condizioni iniziali possono essere tali che r divenga ∞ per $t = \infty$.

In questo caso la conica osculatrice alla traiettoria sarà sempre necessariamente iperbolica. Infatti, se nell'istante t_1, p. es., essa fosse ellittica o parabolica, noi avremmo $h_{t=t_1} \leqq 0$, e allora, per il teorema VII, il raggio r decrescerebbe al di sotto di ogni grandezza assegnata: il che è contrario alla nostra ipotesi. Il teorema resta dunque provato.

c. d. d.

Osservazione. — Questo teorema ha grande importanza perchè distrugge un errore in cui erano caduti alcuni astronomi. Si era infatti creduto, fondandosi sulla sola intuizione, che, facendo crescere all'infinito la somma delle masse $M(t)$ con legge qualsiasi, l'orbita osculatrice alla traiettoria relativa avrebbe dovuto in fine cangiarsi in una ellisse.

Noi abbiamo dimostrato che questa conclusione è erronea.

CAPITOLO II.

Soluzione del sistema differenziale (2) nel campo reale.

§ 1.

Cominciamo a studiare il movimento dei pianeti e delle comete ora ellittiche e paraboliche (cioè di tutti gli astri in cui la differenza attuale fra forza viva e funzione delle forze è nulla o negativa), supponendo, con Oppoltzer e Gyldén, che la massa solare aumenti col tempo, in modo però da non superare un certo limite finito e determinato. È questo l'unico caso che presenti un vero interesse per la meccanica celeste e per l'astronomia matematica.

Dalla (14) ricaviamo:

$$h = h_{t=0} - \int_0^t \frac{1}{r} \frac{dM}{dt} dt; \tag{37}$$

ed essendo $h_{t=0} \leqq 0$ e $\frac{dM}{dt}$ positivo, la quantità h sarà certamente negativa per tutti i valori positivi del tempo.

Dall'ineguaglianza (15) ricaviamo allora, a maggior ragione,

$$2rM(t) \geqq 1; \tag{38}$$

e quindi:

$$r \geqq \frac{1}{2M(t)}. \tag{39}$$

D'altra parte, dalla (13) abbiamo, ricordando essere $v^2 = \frac{1}{r^2} + r'^2$,

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 < \frac{2M(t)}{r} = 4\{M(t)\}^2 ; \tag{40}$$

da cui, infine,

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| < 2M(t) . \tag{41}$$

La (39) e la (41) sono valide per t reale e positivo.

Vediamo ora quel che avviene per valori negativi della t.

Se h si conserva sempre negativa possiamo ripetere la stessa dimostrazione senza alcuna modificazione.

Supponiamo invece che, diminuendo la t, da un certo valore $\bar{t}$ in poi, la h si cangi da negativa in positiva, secondo la (37).

Prendiamo per semplicità l'istante $\bar{t}$ come origine dei tempi: avremo allora $h_{t=0} = 0$; e quindi essendo la nostra scelta conforme a ciò che abbiamo detto in principio di questo capitolo la (39) e la (41) saranno valide per tutti i valori positivi del tempo.

Essendo, in generale, per $t = 0$, $\frac{dr}{dt} \gtreqless 0$ la (13) ci darà: $r < \frac{1}{2M(0)}$. Solo nel caso eccezionale in cui si abbia $\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=0} = 0$, ne risulterebbe $r = \frac{1}{2M(0)}$. Però in questo caso la seconda equazione del sistema (2) ci darà $\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)_{t=0} > 0$, e quindi per valori negativi della variabile t, sufficientemente vicini a $t = 0$, sarà $r > \frac{1}{2M(0)}$.

Ora io dico che per tutti i valori negativi della t deve aversi sempre $r > \frac{1}{2M(0)}$.

Infatti sia, se è possibile t_1 il primo istante negativo in cui si abbia $r = \frac{1}{2M(0)}$.

La (16) ci darà, essendo $h_{t=0} = 0$,

$$-2r^2 \int_0^{t_1} \frac{1}{r}\frac{dM}{dt}\, dt + 2rM(t) \gtreqless 1 . \tag{41bis}$$

Poichè, per ipotesi, $\frac{dM}{dt}$ conserva sempre lo stesso segno, integrando col teorema della media e chiamando con ϱ un valore intermedio, avremo:

$$\frac{2r^2_{t=t_1}}{\varrho}\{M(0) - M(t_1)\} + 2r_{t=t_1} M(t_1) \gtreqless 1 . \tag{42}$$

Ora poichè in tutto l'intervallo da $t = 0$ a $t = t_1$, esclusi al più gli estremi, si ha sempre $r > \frac{1}{2M(0)}$, avremo $\varrho = \frac{K}{2M(0)}$ dove K è certamente maggiore di 1.

Sostituendo allora nella (42) i valori ora dati di $r_{t=t_1}$ e ϱ si ha:

$$M(t_1) \geqq M(0) \tag{42bis}$$

ciò che è assurdo perchè t_1 è negativo ed $M(t)$ è funzione crescente. Dunque l'ipotesi da noi fatta è certamente falsa, e quindi per tutti i valori negativi della t deve aversi $r > \frac{1}{2M(0)}$. Ricordando ora che $M(t)$ è funzione crescente dell'argomento potremo scrivere, a maggior razione, $r > \frac{1}{2M|t|}$.

Cioè la (39) sarà valida per tutti i valori reali del tempo, sostituendo soltanto al posto di t il suo modulo $|t|$. Ad analoga conclusione giungeremo per la (41).

Ora, per ipotesi, $M(t)$ non può crescere al di là di un certo limite determinato e finito; potremo dunque trovare una quantità positiva L tale che si abbia

$$2M|t| \leqq L \tag{43}$$

per tutti i valori reali di t.

Essendo $M(t)$ funzione conosciuta, potremo riguardare L come quantità nota.

Ciò posto, scriviamo la seconda delle (2) sotto la forma del sistema seguente:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r' = f_1 \\ \frac{dr'}{dt} &= \frac{1}{r^3} - \frac{M(t)}{r^2} = f_2 . \end{aligned} \right. \tag{43bis}$$

Sia t_0 un valore reale del tempo; r_0 ed r'_0 i corrispondenti valori delle funzioni incognite r ed r'. Essendo $M(t)$ funzione regolare nell'intorno di ogni punto dell'asse reale, compreso anche il punto all'infinito, dovrà esistere una costante μ diversa da zero, tale che, qualunque sia t_0, $M(t)$ sia sviluppabile in serie di potenze di $t - t_0$ convergenti per $|t - t_0| < \mu$. Anche μ deve ritenersi come una quantità nota.

Ciò posto, i secondi membri del sistema (43) nell'intorno del punto t_0, r_0, r'_0 sono sviluppabili in serie di potenze di $t - t_0, r - r_0, r' - r'_0$ convergenti, comunque sia grande in modulo la quantità $r' - r'_0$ e purchè si abbia

$$|t - t_0| \leqq \mu \; , \; |r - r_0| < r_0 .$$

Consideriamo ora le due costanti positive $\frac{1}{2} r_0$ e μ; esse saranno uguali, oppure l'una sarà minore dell'altra.

Per fissare le idee, supponiamo p. es. che si abbia $\mu \leqq \frac{1}{2L}$. Sarà allora, qualunque sia t_0, $\mu \leqq \frac{1}{2} r_0$.

Descriviamo allora sui tre piani complessi delle tre variabili t, r, r', tre cerchi aventi per centri i punti t_0, r_0, r'_0 e come raggio μ.

I secondi membri delle (43) sono certamente sviluppabili in serie di potenze finchè le tre variabili si trovano nell'interno di questi cerchi: e in essi si avrà

$$(44) \qquad |f_1| = |r'| \leqq |r'_0| + \mu \leqq 2M|t| + \mu \leqq L + \frac{1}{2L} = \frac{2L^2+1}{2L}.$$

D'altra parte abbiamo, ancora nell'interno dei cerchi nominati,

$$(45) \qquad |f_2| < \left|\frac{1}{r^3}\right| + \left|\frac{M(t)}{r^2}\right| \leqq \left|\frac{1}{(r_0-\mu)^3}\right| + \left|\frac{L}{2(r_0-\mu)^2}\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{8}{r_0^3} + \frac{2L}{r_0^2} \leqq 8L^3 + 2L^3 = 10L^3.$$

Poniamo per comodità:

$$(46) \qquad L_1 = 10L^3 + \frac{2L^2+1}{2L}$$

$$(47) \qquad \mu_1 = \mu\left(1 - e^{-\frac{1}{3L_1^2}}\right);$$

e ricordiamo che, se i secondi membri di due equazioni differenziali

$$(48) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f_1(x, y, z) \\[2mm] \dfrac{dz}{dx} = f_2(x, y, z) \end{cases}$$

sono olomorfi nell'intorno del punto $x_0\, y_0\, z_0$ e sviluppabili in serie di potenze intere e positive di $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ convergenti per $|x - x_0| < h$, $|y - y_0| < h_0$, $|z - z_0| < h$; e se di più nell'interno di questi cerchi si ha sempre $|f_1| < K$, $|f_2| < K$, allora esistono due integrali particolari y e z che assumono i valori particolari y_0 e z_0 per $x = x_0$ e sono sviluppabili in serie di potenze intere e positive di $x - x_0$ convergenti per $|x - x_0| \leqq h\left(1 - e^{-\frac{1}{3K^2}}\right)$ (¹).

Applicando questo teorema al nostro caso, si ha che gl'integrali r ed r' sono sviluppabili in serie di potenze di $t - t_0$ convergenti per

$$(49) \qquad |t - t_0| \leqq \mu\left(1 - e^{-\frac{1}{3L_1^2}}\right) = \mu_1.$$

Descriviamo allora due rette parallele all'asse reale dei tempi, e distanti da esso, da una parte e dall'altra, della quantità μ. In tutta la striscia così formata, r ed r' sono funzioni olomorfe di t senza alcuna singolarità. Applicando allora sviluppi

(¹) Jordan, *Traité d'analyse*, tom. III, pag. 99 (seconda edizione).

noti, avremo una serie uniformemente convergente che ci dà il raggio vettore r per ogni valore positivo del tempo.

A tale scopo basta trasformare la striscia in un cerchio avente per centro l'origine e per raggio l'unità, per mezzo della formula:

$$\eta = \frac{e^{\frac{\pi t}{2\mu}} - 1}{e^{\frac{\pi t}{2\mu}} + 1}. \tag{49bis}$$

Scrivendo allora:

$$\left\{ \begin{aligned} A_0 &= r_{\eta=0} = r_{t=0} \\ A_1 &= \left(\frac{dr}{d\eta}\right)_{\eta=0} = \left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=0} \left(\frac{dt}{d\eta}\right)_{t=0} \quad \text{ecc.} \end{aligned} \right. \tag{50}$$

avremo:

$$r = A_0 + A_1 \left(\frac{e^{\frac{\pi t}{2\mu}} - 1}{e^{\frac{\pi t}{2\mu}} + 1} \right) + \frac{A_2}{1 \cdot 2} \left(\frac{e^{\frac{\pi t}{2\mu}} - 1}{e^{\frac{\pi t}{2\mu}} + 1} \right)^2 + \cdots \tag{50bis}$$

dove i coefficienti A_1 A_2 ecc. sono noti, essendo date le condizioni iniziali del moto.

Data una quantità ϵ piccola a piacere potremo trovare un numero n tale, che limitando la serie (50^{bis}) al termine n^{mo}, l'errore si conservi sempre minore di $|\epsilon|$, da $t = -\infty$ a $t = \infty$. Il problema è quindi analiticamente risoluto.

§ 2.

Trovato r in funzione del tempo, la prima delle (2) ci dà

$$\vartheta = \vartheta_0 + c \int_0^t \frac{dt}{r^2} = \vartheta_0 + \int_0^t \frac{dt}{r^2}; \tag{51}$$

avendo posto $c = 1$.

Possiamo calcolare l'integrale con quella approssimazione che si desidera: ed in tal modo il problema che ci siamo proposti può essere considerato come analiticamente risoluto.

Se la funzione h fosse inizialmente positiva (*comete iperboliche*), il calcolo sarebbe identico, tranne piccole variazioni. Se $M(t)$ crescesse all'infinito, sarebbe impossibile ottenere la striscia di spessore costante. Il problema sarebbe ancora risolubile per serie; solamente, non si avrebbe la convergenza uniforme.

Noi non c'indugiamo su questi casi che non presentano alcun interesse astronomico.

CAPITOLO III.

Soluzione approssimata del problema: formole per il calcolo pratico.

§ 1.

Noi abbiamo già detto che i matematici e gli astronomi, che hanno studiato questo problema, hanno cercato, quasi unicamente, soluzioni approssimate delle equazioni differenziali del moto.

Io proporrò ora un nuovo metodo, di cui farò vedere l'utilità dimostrando con pochi calcoli un bel teorema dovuto a Lehmann-Filhès, e che ci dà in prima approssimazione la legge delle perturbazioni.

Nel caso astronomico, la somma delle masse $M(t)$ aumenta assai lentamente; e questo aumento, durante molti secoli, è estremamente piccolo.

Noi potremo dunque, nella seconda equazione del sistema (2), sostituire $M(t)$ con $M(\tau)$, a condizione che l'istante τ sia abbastanza vicino a t.

Per esempio, noi potremo scegliere per t e τ gl'istanti corrispondenti ad una stessa anomalia vera ϑ; la prima volta nel caso di masse crescenti, la seconda nel caso di masse costanti ed eguali al loro valore iniziale $M(0)$; t e τ saranno certamente molto prossimi tra di loro.

Per giudicare l'alto grado d'approssimazione, prendiamo p. es. il sistema planetario. In questo caso, a cagione del piccolo aumento della massa solare, la terra, dopo molti secoli, si troverà avanzata nella sua orbita, p. es., d'un giorno.

Ebbene: col nostro metodo, noi supponiamo, in ultima analisi, che la Terra sia attratta dal Sole con una forza corrispondente non alla sua massa istantanea, ma bensì a quella che il Sole aveva il giorno avanti.

La differenza è fisicamente nulla; ciò non ostante, con questo cambiamento leggerissimo, si possono integrare con grande facilità le equazioni differenziali del moto.

Infatti l'istante τ è legato all'anomalia ϑ dalle formole di risoluzione del problema di Keplero. Noi potremo dunque sostituire $M(\tau)$ con una funzione $\chi(\vartheta)$, ben conosciuta, dell'anomalia ϑ.

Ponendo $\frac{1}{r} = \varrho$, la seconda delle (2) diviene

$$\frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2} + \varrho + \chi(\vartheta) = 0\,, \tag{51bis}$$

equazione facilmente integrabile. Eseguendo i calcoli si arriva al seguente risultato:

I) *Equazione della traiettoria.* — Ponendo, per semplicità,

$$\chi(\vartheta) = \chi(0) + \lambda(\vartheta)\,. \tag{52}$$

e chiamando con G_1 e G_2 due costanti arbitrarie, si ha:

$$(53) \qquad r = \frac{1}{\chi(0) - \left\{ \int_0^\vartheta \lambda(\vartheta) \cos\vartheta \, d\vartheta - G_2 \right\} \operatorname{sen}\vartheta + \left\{ \int_0^\vartheta \lambda(\vartheta) \operatorname{sen}\vartheta \, d\vartheta + G_1 \right\} \cos\vartheta} .$$

II) *Equazione del tempo.* — Si ha dalla prima delle (2) e dalla (53), eseguendo i calcoli,

$$(54) \qquad t = t_0 + \int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\left\{ \chi(0) - \left[\int_0^\vartheta \lambda(\vartheta) \cos\vartheta \, d\vartheta - G_2 \right] \operatorname{sen}\vartheta + \left[\int_0^\vartheta \lambda(\vartheta) \cos\vartheta \, d\vartheta + G_1 \right] \cos\vartheta \right\}^2} .$$

Ponendo $\lambda(\vartheta) = 0$, cioè $\chi(\vartheta) =$ costante, si torna, come è facile a verificare, alla soluzione kepleriana.

§ 2. — Applicazioni: Teorema di Lehmann.

Facciamo ora un'applicazione di queste formole alla ricerca della traiettoria della Terra, nel caso in cui la pioggia di materia cosmica, che cade sul Sole, sia leggierissima e costante.

Avremo con la nostra ipotesi:

$$(55) \qquad M(t) = m(1 + \varepsilon t),$$

dove ε è una costante positiva, assai piccola.

Trascurando il prodotto di ε per l'eccentricità dell'orbita terrestre, potremo scrivere $\chi(\vartheta) = m(1 + \gamma\vartheta)$; avendo posto $\gamma = \frac{\varepsilon T}{2\pi}$, ed indicando con T l'anno sidereo.

Contiamo l'anomalia ϑ dalla posizione della Terra in un istante in cui essa è al perielio, ed indichiamo con e_0 e p_0 l'eccentricità e il parametro della ellisse osculatrice alla traiettoria in questo istante; avremo, dalla (53),

$$(56) \qquad r = \frac{p_0(1 + \varepsilon t)}{1 + e_0 \cos\vartheta} .$$

Cioè: « *se la pioggia di materia cosmica che cade sul Sole è assai leggiera e costante, l'orbita della Terra sarà, con grande approssimazione, una ellisse, il cui parametro decresce linearmente col tempo, mentre la posizione dell'asse maggiore e le eccentricità restano invariabili* ».

È questo il teorema di Lehmann; di cui noi ora abbiamo dato una dimostrazione nuova ed estremamente semplice.

§ 3. — Perturbazioni degli elementi osculatori. Formole dello Strömgren e del Plummer.

Diamo ora a t un valore particolare t_1; la (56) ci dice che nell'istante t_1 la Terra descrive un arco infinitesimo di ellisse avente per eccentricità e_0 e per parametro $\frac{p_0}{1+\varepsilon t_1}$.

Occorre però osservare che la conica (56) del Lehmann non è osculatrice alla traiettoria nel senso classico della Meccanica Celeste.

Infatti nell'istante t_1 la velocità *assoluta* della Terra risulta di due parti:

1) Una componente tangenziale all'ellisse (56).

2) Una componente normale, di grandezza finita, dovuta al fatto che l'ellisse sostegno (56) ha il parametro variabile.

Ne segue che se nell'istante t_1 cessasse l'aumento della massa solare la Terra descriverebbe, *da* t_1 *in poi*, una ellisse *differente* da quella ottenuta ponendo nella formola del Lehmann $t = t_1$.

Possiamo però assai facilmente passare dalla (58) al calcolo degli elementi osculatori.

Basta ricordare che se q è una coordinata di un pianeta, espressa mediante gli elementi osculatori, deve aversi [1].

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=t_1} = \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{t=t_1}. \tag{57}$$

Chiamando allora con a_s, e_s, ω_s il semiasse maggiore l'eccentricità, la posizione del perielio dell'orbita osculatrice e prendendo come coordinate r e ϑ si ritrovano con calcoli elementarissimi le formole dello Strömgren e del Plummer di cui abbiamo già parlato nell'introduzione.

[1] Cfr. Charlier, *Die Mechanik des Himmels*, vol. I, pag. 266.