Sulle trasformazioni delle superficie a linee di curvatura coincidenti.

Memoria del dott. UMBERTO SBRANA

(presentata dal Socio L. BIANCHI ed approvata dal Socio U. DINI).

Quando si escluda la sfera, si trova che la condizione necessaria e sufficiente, affinchè una superficie abbia in ogni punto eguali i due raggi principali di curvatura r_1, r_2, è che coincidano i suoi due sistemi di linee di curvatura. Le superficie che soddisfano a questa condizione sono le rigate isotrope; per esse i due sistemi di linee di curvatura coincidono in quello delle generatrici.

Queste superficie sono integrali dell'equazione a derivate parziali $r_1 = r_2$, che, colle notazioni di MONGE, si scrive:

$$\text{(A)} \qquad 4(rt - s^2)(1 + p^2 + q^2) - [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]^2 = 0,$$

equazione questa che, come è noto, fu integrata da MONGE stesso.

SERRET osservò che fra queste superficie vi sono quelle di una classe, che dipendono da una funzione arbitraria, le quali sono a curvatura costante. Le superficie generali sono state poi studiate da STÄCKEL [1], e brevemente anche da SCHEFFERS [2].

Quelle speciali a curvatura costante si sono presentate al prof. BIANCHI, nelle sue ricerche sulle superficie applicabili sulle quadriche rotonde [3], come collegate alle deformate rigate dell'iperboloide di rotazione ad una falda, e quindi anche alle curve di BERTRAND.

In questo lavoro io stabilisco per le superficie a linee di curvatura coincidenti un metodo di trasformazione. Comincio dall'osservare che esse appartengono alla classe di quelle considerate dal prof. BIANCHI, per le quali la curvatura K, nei parametri u, v delle assintotiche, ha l'espressione:

$$\text{(1)} \qquad K = -\frac{1}{[\varphi(u) + \psi(v)]^2}.$$

(1) PAUL STÄCKEL, *Beiträge zur Flächentheorie*. Berichte der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 1897, S. 479; 1902, S. 108.

(2) SCHEFFERS, *Einführung in die Theorie der Flächen*. Leipzig, 1902, S. 227-229.

(3) BIANCHI, *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde*. Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL), serie 3ª, t. XIV.

con $\varphi(u)$, $\psi(v)$ funzioni rispettivamente della sola u e della sola v. Osservo poi, che il metodo di trasformazione dato dal prof. BIANCHI [1] per queste superficie si può applicare anche a quelle a linee di curvatura coincidenti, e conduce a nuove superficie della stessa specie. Faccio quindi vedere come, per quelle a curvatura variabile, queste trasformazioni si riducano a delle trasformazioni di curve, nelle quali si conserva la lunghezza degli archi.

Colle trasformazioni dette, dalle rigate isotrope a curvatura costante si ottengono superficie della stessa specie; si trova cioè che anche ad esse è applicabile la trasformazione di BÄCKLUND. Quando ci si limiti poi alla considerazione di superficie a curvatura costante, reale, negativa, si trova che le trasformazioni si riducono a quelle di RAZZABONI e DEMARTRES per le curve di BERTRAND.

Le trasformazioni per le superficie generali.

§ 1. Riferiamo una delle nostre superficie S alle sue linee assintotiche u, v; e sieno le $u =$ costante le assintotiche rettilinee, cioè quelle nelle quali coincidono le linee di curvatura, e che costituiscono uno dei sistemi delle linee di lunghezza nulla. Valendosi delle equazioni di GAUSS e CODAZZI, si trova che le due forme differenziali, fondamentali di S hanno i seguenti coefficienti:

$$
(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & E = \frac{2\Phi\Phi'}{u+v} + \psi \;,\quad F = -\frac{2\Phi^2}{(u+v)^2} \;,\quad G = 0 \,; \\ & D = D'' = 0 \;,\quad D' = -\frac{2\Phi}{(u+v)^2} \end{aligned} \right.
$$

dove Φ, ψ sono due funzioni della sola u [2]. Inversamente, scelte Φ, ψ in modo arbitrario, le (2) determinano intrinsecamente una delle nostre superficie.

Gli altri elementi di S hanno quindi le espressioni:

$$
K = \frac{1}{\Phi^2} \;,\quad r_1 = r_2 = -\Phi .
$$

Il sistema di equazioni al quale soddisfano le coordinate x, y, z di un punto di una qualsiasi superficie, e i coseni direttori X, Y, Z, della normale, assume per S questa forma:

$$
(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \,,\; \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} + D'X \,,\; \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \,; \\ & \qquad \frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{D'}{F} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{ED'}{F^2} \frac{\partial x}{\partial v} \;,\quad \frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{D'}{F} \frac{\partial x}{\partial v} . \end{aligned} \right.
$$

(1) BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, vol. II, pp. 74-82.

(2) Cfr. STÄCKEL, *Beiträge zur Flächentheorie*. Berichte ecc. 1897, S. 482.

La formola $K = \frac{1}{\Phi^2} = -\frac{1}{(i\Phi)^2}$ ci dice che le nostre superficie appartengono alla classe di quelle caratterizzate dalla (1), e per le quali, come abbiamo già detto, il prof. BIANCHI ha dato un metodo di trasformazione. Io mi propongo, modificando il procedimento del prof. BIANCHI, procedimento che non è applicabile a causa della coincidenza dei due sistemi di linee di curvatura, di far vedere che anche per le nostre superficie si hanno delle trasformazioni analoghe. Voglio provare cioè che:

(a) Una superficie S a linee di curvatura coincidenti è falda fuocale di ∞^2 congruenze W, la cui seconda falda è una superficie S_0 della stessa specie, la quale ha, nei punti corrispondenti a quelli di S, la stessa curvatura di questa.

§ 2. Supposta l'esistenza di una di tali congruenze W, le cui falde fuocali S ed S_0 hanno la stessa curvatura $-\frac{1}{(i\Phi)^2}$ in punti corrispondenti, e indicando con σ l'angolo dei piani fuocali, col procedimento generale si trova che deve essere:

$$\frac{\partial \cos\sigma}{\partial v} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \cos\sigma}{\partial u} = -(1 + \cos\sigma)\frac{d \log \Phi}{\partial u}; \tag{3}$$

dalle quali si trae, integrando:

$$1 + \cos\sigma = \frac{c}{\Phi},$$

con c costante arbitraria.

Si ha di più che la distanza dei punti limiti deve essere $i\Phi$ e quindi quella dei fuochi $i\Phi$ sen σ.

Ciò posto, consideriamo in ogni punto di S le tre direzioni seguenti: quella della normale, quella della tangente alla linea $v =$ costante, quella della perpendicolare ad ambedue le precedenti. I coseni direttori di esse saranno rispettivamente questi:

$$X \, , \, Y \, , \, Z;$$

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u} \quad , \quad Y_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u} \quad , \quad Z_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u};$$

$$X_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(Y\frac{\partial z}{\partial u} - Z\frac{\partial y}{\partial u}\right), \; Y_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(Z\frac{\partial x}{\partial u} - X\frac{\partial z}{\partial u}\right), \; Z_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(X\frac{\partial y}{\partial u} - Y\frac{\partial x}{\partial u}\right).$$

Tenendo conto delle (I) e delle formole:

$$Y\frac{\partial z}{\partial v} - Z\frac{\partial y}{\partial v} = -i\frac{\partial x}{\partial v}, \text{ ecc.}$$

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial u} = -\frac{F}{E}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix},$$

si trovano le seguenti:

$$
\text{(II)}\quad\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{F\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}}{E}X_1 + \frac{\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial v}\,,\quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = -\frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}X_1 + \frac{D'}{\sqrt{E}}X + \frac{\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial v}\,,\\
&\frac{\partial X_2}{\partial u} = -\frac{F\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}}{E}X_2 - \frac{i\sqrt{E}\,D'}{F}X - \frac{i\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial v}\,,\\
&\frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}X_2 + \frac{i D'}{\sqrt{E}}X - \frac{i\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial v}\,,\\
&\frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{D'\sqrt{E}}{F}X_1 + \frac{E D'}{F^2}\frac{\partial x}{\partial v}\,,\quad \frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{D'}{F}\frac{\partial x}{\partial v}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Le coordinate x_0, y_0, z_0 del punto P_0 di S_0 corrispondente al punto $P \equiv (x, y, z)$ di S saranno così espresse:

$$
(4)\qquad x_0 = x + i\Phi \operatorname{sen}\sigma (X_1 \cos\varphi + X_2 \operatorname{sen}\varphi)\,;
$$

e pei coseni direttori X_0, Y_0, Z_0 della normale ad S_0 in P_0 avremo:

$$
(4)^*\qquad X_0 = X\cos\sigma + (X_1 \operatorname{sen}\varphi - X_2\cos\varphi)\operatorname{sen}\sigma\,,
$$

nelle quali φ indica l'angolo formato dalla PP_0 con l'orientazione (X_1, Y_1, Z_1).

Le due condizioni:

$$
\sum X_0 \frac{\partial x_0}{\partial u} = 0 \quad , \quad \sum X_0 \frac{\partial x_0}{\partial v} = 0\,,
$$

quando si osservi che si ha:

$$
\sum X_1 \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{F}{\sqrt{E}} \quad , \quad \sum X_2 \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{iF}{\sqrt{E}}\,,
$$

si riducono alle seguenti:

$$
(5)\qquad\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial u} = -\frac{i\sqrt{E}}{\Phi}\,\frac{1+\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\cdot\operatorname{sen}\varphi + \frac{F}{iE}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix},\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{F}{\Phi\sqrt{E}}\,\frac{1-\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) + \frac{F}{iE}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si ha così per φ un'equazione ai differenziali totali tipo Riccati, che è illimitatamente integrabile. Formando infatti la condizione di integrabilità delle (5), col tener presente la formola della curvatura:

$$
K = \frac{1}{\Phi^2} = -\frac{1}{iF}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F}{iE}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{iE}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right)\right],
$$

e le (3), si trova che è identicamente soddisfatta.

Attribuito alla costante c che comparisce in σ un valore qualsiasi, e integrate le (5), le (4) ci danno ∞^1 superficie che sono falde fuocali di ∞^1 congruenze la cui altra falda è S. Facendo poi variare c, si ottengono ∞^2 superficie trasformate di S, che vogliamo far vedere essere quelle del teorema (a). Infatti se, per mezzo delle (4), (4)*, (II), si calcolano i coefficienti E_0, F_0, G_0; D_0, D_0', D_0'' delle due forme fondamentali di una S_0 di queste ∞^2 superficie, usando le (3), (5) si trova:

$$E_0 = E \operatorname{sen}^2 \varphi + \left[\sqrt{E}\cos\varphi + i\Phi' \frac{1+\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\right]^2,$$

$$F_0 = F(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^2 + \frac{i\Phi' F}{\sqrt{E}}\frac{1+\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) \quad , \quad G_0 = 0;$$

$$D_0 = D_0'' = 0 \quad , \quad D_0' = D'(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^2 + \frac{i\Phi' D'}{\sqrt{E}}\frac{1+\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi).$$

Queste ci dicono che le linee u, v sono per S_0 le assintotiche, e che i due sistemi di linee di curvatura coincidono in quello delle $u =$ costante. Quando si osservi poi che si ha: $\frac{D'}{F} = \frac{D_0'}{F_0} = \frac{1}{\Phi}$, e che quindi in punti corrispondenti S ed S_0 hanno la stessa curvatura, si trova che è completamente stabilito il teorema (a).

§ 3°. Sia S_0 una delle trasformate di S, corrispondente al valore k della costante c; diremo che S_0 è dedotta da S con una trasformazione T_k. Ciò posto, si ha il seguente teorema di permutabilità:

Date due trasformate S_1, S_2 di S dedotte da questa rispettivamente con una T_{c_1}, e con una T_{c_2}, risulta determinata in termini finiti una terza superficie S_3 legata ad S_1 con una T_{c_2}, e ad S_2 con una T_{c_1}.

Indichiamo con σ_1, φ_1; σ_2, φ_2 rispettivamente i valori di σ, φ relativi ad S_1, S_2. Ripetendo gli stessi ragionamenti del caso generale (¹), si vede che le coordinate x_3, y_3, z_3 di un punto di S_3 e i coseni direttori X_3, Y_3, Z_3 della normale in esso, devono essere espressi dalle formole seguenti:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} x_3 &= x + \frac{i\Phi}{\lambda}\Big\{\operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\sigma_2 \operatorname{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) X + \\ &\qquad + (\operatorname{sen}\sigma_2\cos\sigma_1\cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\sigma_1\cos\sigma_2\cos\varphi_1) X_1 + \\ &\qquad + (\operatorname{sen}\sigma_2\cos\sigma_1\operatorname{sen}\varphi_2 - \operatorname{sen}\sigma_1\cos\sigma_2\operatorname{sen}\varphi_1) X_2\Big\} \\ X_3 &= X\left(1 + \frac{\cos\sigma_1 - \cos\sigma_2}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda}\left[X_1(\operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\sigma_1 - \operatorname{sen}\varphi_2\operatorname{sen}\sigma_2) + \right. \\ &\qquad \left. + X_2(\cos\varphi_2\operatorname{sen}\sigma_2 - \cos\varphi_1\operatorname{sen}\sigma_1)\right], \end{aligned}\right.$$

con

$$\lambda = \frac{1 - \cos\sigma_1\cos\sigma_2 - \operatorname{sen}\sigma_1\operatorname{sen}\sigma_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos\sigma_2 - \cos\sigma_1}.$$

(¹) Cfr. Bianchi, *Lezioni*, ecc., vol. 2°, pag. 81.

Si vede poi che per verificare tutte le proprietà alle quali deve soddisfare S_3, basta limitarsi a dimostrare che si ha:

$$\sum X_3 \frac{\partial x_3}{\partial u} = 0 \quad , \quad \sum X_3 \frac{\partial x_2}{\partial v} = 0 . \tag{7}$$

Ora per dimostrare ciò, o si può fare il calcolo valendosi delle (3), (II), (5), oppure si può dire così: Le (7) si verificano nel caso generale di superficie la cui curvatura è data dalla (1), usando un certo procedimento. Ora noi possiamo immaginare di stabilire anche in questo caso le formole di trasformazione, con lo stesso procedimento usato per le superficie con un solo sistema di linee di curvatura; avremo così delle formole che si ridurranno alle (3), (II), (5), quando vi si faccia: $\psi(v) = 0$, $\varphi(u) = i\Phi$, $G = 0$. Si comprende poi come, valendosi di queste formole, le (7) debbano necessariamente riuscire verificate in ogni caso, anche quando si facciano le ipotesi particolari suddette. Dal teorema di permutabilità segue, nel solito modo, che una volta conosciute le ∞^2 trasformate di S, per ciascuna di queste l'applicazione delle trasformazioni richiede soltanto calcoli algebrici e di derivazione.

Osserviamo infine come risulti così stabilito, che per gli integrali dell'equazione a derivate parziali (A) esiste un metodo di trasformazione, analogo a quello che si ha per l'equazione da cui dipendono le superficie pseudosferiche.

Trasformazioni di curve.

§ 4. Le trasformazioni trovate, pel caso in cui S non sia a curvatura costante, possono presentarsi sotto un altro aspetto. Perciò basta valersi della costruzione seguente di Stäckel [1] delle più generali superficie con un solo sistema di linee di curvatura:

Si prenda una curva C qualsiasi e si consideri una sua evolvente C_1; con centro in ogni punto di C, si descriva la sfera che passa per il punto corrispondente di C_1. L'inviluppo di questa semplice infinità di sfere è costituito di due falde ciascuna delle quali è una superficie della specie richiesta.

Di qui segue che, se con x_0, y_0, z_0 si indicano le coordinate di un punto mobile su C, date in funzione dell'arco u, e si usano poi le solite notazioni per la curva C, si ha la seguente rappresentazione, pei parametri u, v, della superficie S:

$$\tag{III} \begin{cases} x = x_0 - u\alpha + (-\alpha\beta + i\gamma)\, uv \\ y = y_0 - u\beta + (\alpha^2 + \gamma^2)\, uv \\ z = z_0 - u\gamma + (-\beta\gamma - i\alpha)\, uv . \end{cases}$$

Facendo in queste $v = 0$, si ottiene la curva C_1 evolvente di C. Le (III) ci

[1] Stäckel, *Beiträge zur Flächentheorie*, Berichte ecc., 1902, S. 112-113.

forniscono i seguenti valori per gli elementi di S:

$$
(8)\quad \begin{cases} \mathrm{E}=\dfrac{u^2}{\varrho^2}+\dfrac{u^2 v^2}{\varrho^2}(\eta+i\mu)^2+\dfrac{2u^2 v}{\varrho^2}\beta-2\dfrac{uv}{\varrho}(\eta+i\mu) \\ \mathrm{F}=-\dfrac{u^2}{\varrho}(\eta+i\mu)\ ,\ \mathrm{G}=0\ ,\ \dfrac{\mathrm{D}'}{\mathrm{F}}=-\dfrac{1}{u}\ ,\ \mathrm{K}=\dfrac{1}{u^2}\ ,\ \mathrm{D}''=0\,. \end{cases}
$$

Ora consideriamo in ogni punto di S la normale, la tangente alla linea $v=\text{cost.}$ la perpendicolare alle prime due; e indichiamone al solito i coseni direttori, rispettivamente con: $X, Y, Z\ ;\ X_1, Y_1, Z_1\ ;\ X_2, Y_2, Z_2$.

Le coordinate $x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}$ di un punto di una superficie $S^{(1)}$ trasformata di S saranno date da:

$$
(9)\qquad x^{(1)}=x+iu\,\mathrm{sen}\,\sigma\,(X_1\cos\varphi+X_2\,\mathrm{sen}\,\varphi),
$$

e i coseni direttori $X^{(1)}, Y^{(1)}, Z^{(1)}$ della normale da:

$$
(9)^*\qquad X^{(1)}=X\cos\sigma+(X_1\,\mathrm{sen}\,\varphi-X_2\cos\varphi)\,\mathrm{sen}\,\sigma\,;
$$

ove φ indica l'angolo formato dalla congiungente due punti $P, P^{(1)}$ che si corrispondono su $S, S^{(1)}$, con la tangente alla linea $v=\text{costante}$ che passa per P, e σ, angolo dei piani fuocali, è dato dalla formola:

$$
1+\cos\sigma=\frac{c}{u}\,,
$$

con c costante.

Formando per mezzo delle (9), (9)* la condizione:

$$
\sum X^{(1)}\frac{\partial x^{(1)}}{\partial u}=0,
$$

col tener conto delle formole:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial X_1}{\partial u}&=-\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}X_1+\frac{\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{E}}}X\,,\\
\frac{\partial X_2}{\partial u}&=-\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}X_2-\frac{i(\mathrm{ED}'-\mathrm{FD})}{\mathrm{F}\sqrt{\mathrm{E}}}X-\frac{i\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial x}{\partial v}\,,\\
\frac{\partial X}{\partial u}&=-\frac{\mathrm{D}'\sqrt{\mathrm{E}}}{\mathrm{F}}X_1+\frac{\mathrm{ED}'-\mathrm{FD}}{\mathrm{F}^2}\frac{\partial x}{\partial v}\,,
\end{aligned}
$$

che si ottengono con lo stesso procedimento col quale si sono trovate le (II), e delle (8), si trova:

$$
(10)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{E}}}\cot\sigma\,(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi)+\sqrt{\mathrm{E}}\,\frac{1-\cos\sigma}{iu\,\mathrm{sen}\,\sigma}\,\mathrm{sen}\,\varphi+\frac{\mathrm{F}}{i\mathrm{E}}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}.
$$

§ 5. Ora osserviamo che, corrispondentemente alle trasformazioni delle nostre superficie, avremo delle trasformazioni per le curve analoghe a C, luogo dei loro centri di curvatura. Noi vogliamo appunto dare le formole relative a tali trasformazioni. Per questo determineremo tutti gli elementi di S lungo la curva $v = 0$. Troveremo così:

$$(X)_{v=0} = -\alpha \,,\ (Y)_{v=0} = -\beta \,,\ (Z)_{v=0} = -\gamma ,$$

$$(E)_{v=0} = \frac{u^2}{\varrho^2} \,,\ (F)_{v=0} = -\frac{u^2}{\varrho}(\eta + i\mu) \,,\ (D)_{v=0} = -\frac{u}{\varrho^2} \,,\ (D')_{v=0} = \frac{u}{\varrho}(\eta + i\mu).$$

Tenendo conto di queste, la (10), tornando ad indicare con φ la funzione della sola u $(\varphi)_{v=0}$, si riduce a questa:

$$(10)^* \qquad \frac{d\varphi}{du} = -\frac{\cot\sigma\cos\varphi}{\varrho} - \frac{i\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\varrho\,\mathrm{sen}\,\sigma} - \frac{1}{T}.$$

Avendosi poi:

$$(X_1)_{v=0} = -\xi \,,\ (Y_1)_{v=0} = -\eta \,,\ (Z_1)_{v=0} = -\zeta ,$$
$$(X_2)_{v=0} = \lambda \,,\ (Y_2)_{v=0} = \mu \,,\ (Z_2)_{v=0} = \nu ,$$

le (9), (9)* ci danno le seguenti:

$$(x^{(1)})_{v=0} = x_0 - u\alpha + iu\,\mathrm{sen}\,\sigma(\lambda\,\mathrm{sen}\,\varphi - \xi\cos\varphi),$$
$$(X^{(1)})_{v=0} = -\alpha\cos\sigma - (\lambda\cos\varphi + \xi\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\mathrm{sen}\,\sigma.$$

Poichè anche per la superficie trasformata di S i due raggi di curvatura sono rappresentati da u, così avremo che le coordinate $x_0^{(1)}, y_0^{(1)}, z_0^{(1)}$ dei punti della curva trasformata di C saranno date da queste:

$$(11) \qquad x_0^{(1)} = (x^{(1)})_{v=0} - u(X^{(1)})_{v=0} =$$
$$= x_0 - u\alpha(1-\cos\sigma) + u\lambda\,\mathrm{sen}\,\sigma(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi) - u\xi\,\mathrm{sen}\,\sigma(i\cos\varphi - \mathrm{sen}\,\varphi).$$

È chiaro geometricamente che se si prendono due punti di C e i due corrispondenti di una sua trasformata $C^{(1)}$, gli archi delle due curve compresi fra queste due coppie sono eguali.

Che u sia anche per $C^{(1)}$ l'arco, si vede osservando che, quando si tenga conto della (10)*, le (11) ci danno:

$$\sum\left(\frac{dx_0^{(1)}}{du}\right)^2 = 1.$$

Possiamo insomma ritenere stabilito che:

Data una curva C, e integrata l'equazione differenziale (10)*, essendo $1 + \cos\sigma = \frac{c}{u}$, con c costante arbitraria, le (11) ci danno ∞^2 curve trasformate di C, ciascuna delle quali corrisponde punto a punto a C, in modo che si conservano le lunghezze degli archi.

È chiaro poi, che per le ∞^2 superficie trasformate di S, corrispondenti alle ∞^2 curve $C^{(1)}$, si avrà la seguente rappresentazione di Stäckel pei parametri u, v:

$$
\begin{aligned}
x^{(1)} &= x_0^{(1)} - u\alpha^{(1)} + (-\alpha^{(1)}\beta^{(1)} + i\gamma^{(1)})\,uv, \\
y^{(1)} &= y_0^{(1)} - u\beta^{(1)} + (\alpha^{(1)^2} + \gamma^{(1)^2})\,uv, \\
z^{(1)} &= z_0^{(1)} - u\gamma^{(1)} + (-\beta^{(1)}\gamma^{(1)} - i\alpha^{(1)})\,uv,
\end{aligned}
$$

avendo indicato con $\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)}$ i coseni direttori della tangente a $C^{(1)}$. In queste formole bisogna osservare però che le $v =$ costante non sono le corrispondenti sopra $S^{(1)}$ delle $v =$ costante sopra S, nella trasformazione.

§ 6. Corrispondentemente al teorema di permutabilità per le trasformazioni delle superficie, ne avremo uno per quelle delle curve. Avremo cioè che, prese due curve $C^{(1)}, C^{(2)}$, dedotte da C rispettivamente con una T_{c_1} e con una T_{c_2}, corrispondentemente alle quali si abbiano le due trasformate S_1, S_2 di S, esisterà una quarta curva $C^{(3)}$, corrispondente alla quarta superficie S_3 del teorema di permutabilità, legata a $C^{(1)}$ da una T_{c_2} e a $C^{(2)}$ da una T_{c_1}. Questa $C^{(3)}$ si avrà in termini finiti, e si vede subito che le coordinate $x_0^{(3)}, y_0^{(3)}, z_0^{(3)}$ di un suo punto saranno date dalle seguenti:

$$
x_0^{(3)} = (x^{(3)})_{v=0} - u(X^{(3)})_{v=0},
$$

ove $x^{(3)}, y^{(3)}, z^{(3)}$; $X^{(3)}, Y^{(3)}, Z^{(3)}$ rappresentano rispettivamente le coordinate di un punto, e i coseni direttori della normale in esso di S_3. Dalle formole del teorema di permutabilità per la superficie S_3, formole che sono perfettamente identiche alle (6), tenendo conto anche di quelle trovate nel § 5, si deducono poi queste:

$$
\begin{aligned}
(x^{(3)})_{v=0} = x_0 - u\alpha + \frac{iu}{\Omega}\Big\{ & \alpha \operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\sigma_2 \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2) - \\
& - (\operatorname{sen}\sigma_2 \cos\sigma_1 \cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\sigma_1 \cos\sigma_2 \cos\varphi_1)\,\xi + \\
& + (\operatorname{sen}\sigma_2 \cos\sigma_1 \operatorname{sen}\varphi_2 - \operatorname{sen}\sigma_1 \cos\sigma_2 \operatorname{sen}\varphi_1)\,\lambda \Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(X^{(3)})_{v=0} = & -\alpha\left(1 + \frac{\cos\sigma_1 - \cos\sigma_2}{\Omega}\right) + \\
& + \frac{1}{\Omega}\Big\{\lambda(\cos\varphi_2 \operatorname{sen}\sigma_2 - \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\sigma_1) - \xi(\operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\sigma_1 - \operatorname{sen}\varphi_2 \operatorname{sen}\sigma_2)\Big\}
\end{aligned}
$$

ove è:

$$
\Omega = \frac{1 - \cos\sigma_1 \cos\sigma_2 - \operatorname{sen}\sigma_1 \operatorname{sen}\sigma_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos\sigma_2 - \cos\sigma_1}.
$$

Trasformazioni per le rigate isotrope a curvatura costante.

§ 7. Facciamo $\Phi =$ costante; si ottengono così quelle speciali superficie con un solo sistema di linee di curvatura, considerate da Serret, che sono a curvatura costante: $K = \frac{1}{\Phi^2}$.

Dalle nostre considerazioni generali risulta che per queste superficie vale, come per quelle ordinarie, la trasformazione di BÄCKLUND, la quale conduce a superficie della stessa specie.

Vediamo come si semplificano le formole di trasformazione in questo caso. Posto in luogo di ψ, ψ^2, dalle (2) si traggono per i coefficienti dell'elemento lineare di una di tali superficie S le espressioni:

$$E = \psi^2 \quad , \quad F = -\frac{2\Phi^2}{(u+v^2)} \quad , \quad G = 0 .$$

Dalle (3) segue poi che $\sigma =$ costante. Le (5) si riducono, quando si ponga:

$$2\Phi \frac{1-\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma} = q ,$$

alle seguenti:

$$(5)^* \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \frac{2\psi}{iq} \operatorname{sen}\varphi + \frac{\psi'}{i\psi} + \frac{2}{i(u+v)} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \frac{q}{\psi(u+v)^2} (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) . \end{aligned} \right.$$

La seconda delle $(5)^*$ integrata ci porge:

$$e^{-i\varphi} = \frac{iq}{\psi(u+v)} + \tau(u) ,$$

essendo $\tau(u)$ una funzione arbitraria della sola u. Tenendo conto di questa, la $(5)^*$ ci dà per τ l'equazione differenziale:

$$\tau' = \frac{\psi}{iq}\tau^2 - \frac{\psi'}{\psi}\tau - \frac{\psi}{iq} ,$$

la quale, quando si prenda per nuova funzione: $\mathfrak{T} = \psi\tau$, diviene:

$$\frac{d\mathfrak{T}}{du} = \frac{\mathfrak{T}^2 - \psi^2}{iq} .$$

§ 8. Come abbiamo già avuto occasione di osservare, il luogo dei centri di curvatura di una superficie con un solo sistema di linee di curvatura, è una curva. Questa curva, come risulta dalla costruzione di STÄCKEL del § 4, può assumere una forma qualsiasi. Ora una proprietà caratteristica delle speciali superficie a curvatura costante è questa:

La curva luogo dei centri di curvatura è di lunghezza nulla (Minimalcurve) (¹), cioè tale che le sue coordinate x, y, z soddisfano all'equazione:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 .$$

(¹) Per ciò che concerne queste curve immaginarie cfr. STÄCKEL, *Beiträge zur Flächentheorie*, Berichte etc., 1902, S. 101-108.

Inversamente, presa una qualsiasi Γ di tali curve, la semplice infinità di sfere aventi i centri nei punti di Γ, e raggio eguale ad $R =$ costante ha per inviluppo una rigata isotropa, la cui curvatura K è costante ed eguale a $\frac{1}{R^2}$ (¹).

Segue da ciò che:

Le trasformazioni per le superficie a curvatura costante, di cui abbiamo parlato nel § 7, danno luogo a delle trasformazioni per le curve di lunghezza nulla dello spazio, le quali, se non sono rettilinee hanno la seguente nota rappresentazione parametrica:

$$x = \frac{1}{2}\int (1 - \tau^2)\mathcal{F}(\tau)\,d\tau\ ,\ y = \frac{i}{2}\int (1 + \tau^2)\mathcal{F}(\tau)\,d\tau\ ,\ z = \int \tau\mathcal{F}(\tau)\,d\tau,$$

con $\mathcal{F}(\tau)$ funzione arbitaria di τ.

§ 9. Limitandoci al caso delle superficie a curvatura costante, negativa, reale, è facile vedere che: Le trasformazioni del § 7 hanno un'interpretazione geometrica reale, poichè esse si riducono a quelle di Razzaboni e Demartres per le curve di Bertrand.

A ciò si giunge, ricordando la seguente costruzione che il prof. Bianchi ha dato per le più generali superficie della specie considerata (²):

Presa una coppia $(C, \overline{C})$ di curve di Bertrand coniugate, cioè aventi comuni le normali principali, si conduca per ogni punto di una di esse C, e nel piano osculatore all'altra $\overline{C}$, la coppia di rette isotrope. Ciascuna di queste rette genera una superficie, i cui due sistemi di linee di curvatura coincidono nel sistema delle generatrici isotrope, e che è a curvatura costante.

Supporremo che le coordinate: x, y, z di un punto P di C sieno espresse in funzione del suo arco u, e adopereremo poi per C le solite notazioni. Supporremo poi che le sue curvature $\frac{1}{\varrho}, \frac{1}{T}$ sieno legate dalla relazione:

$$\text{(12)} \qquad \frac{\operatorname{sen} c}{\varrho} - \frac{\cos c}{T} = \frac{1}{k},$$

ove k e c sono due costanti. Ciò posto si ha che le coordinate x_1, y_1, z_1 di un punto della coniugata $\overline{C}$, e gli altri suoi elementi $\alpha_1, \xi_1, \lambda_1 \ldots$ analoghi a quelli di C si esprimono nel seguente modo:

$$\text{(12)*} \qquad x_1 = x + k \operatorname{sen} c\,\xi\ ,\ \alpha_1 = \alpha\cos c + \lambda\operatorname{sen} c\ ,\ \xi_1 = -\xi,$$
$$\lambda_1 = \alpha\operatorname{sen} c - \lambda\cos c \ \text{ ecc.}$$

Da queste formole, e dalla costruzione del prof. Bianchi segue che per le coordi-

(¹) Stäckel, Berichte etc. 1902, S. 114-116.

(²) Bianchi, *Teoria delle trasformazioni* ecc., Memorie della Società dei XL, ser. 3ª, t. XIV.

nate $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ dei punti di una delle rigate isotrope dette S si ha la seguente rappresentazione pei parametri u, v:

$$\dot{x} = x + v(\alpha_1 + i\xi_1) = x + v[\alpha \cos c - i\xi + \lambda \operatorname{sen} c]. \tag{13}$$

Le (13) ci forniscono poi i valori seguenti pei coseni direttori $\dot{X}\,\dot{Y}\,\dot{Z}$ della normale, e per i coefficienti delle due forme fondamentali di S:

$$\tag{14} \left\{ \begin{aligned} &\dot{X} = -\frac{iv}{k}\alpha - \left(\frac{1}{\cos c} + \frac{iv}{k}\operatorname{tg} c\right)\lambda + \left(i \operatorname{tg} c - \frac{v}{k \cos c}\right)\xi \\ &E = 1 + \frac{2iv}{\varrho} - \frac{v^2}{k^2} \quad , \quad F = \cos c \quad , \quad G = 0, \\ &D = -\frac{iv^2}{k^2 \cos c} + \frac{i \operatorname{tg} c}{\varrho} - \frac{2v}{k\varrho \cos c} \quad , \quad D' = \frac{i}{k} \quad , \quad D'' = 0. \end{aligned} \right.$$

La curvatura K di S è data da:

$$K = \frac{D'^2}{F^2} = -\frac{1}{k^2 \cos^2 c}.$$

Le formole analoghe per l'altra rigata isotropa avente per direttrice C si ottengono dalle precedenti, cambiando in esse i in $-i$.

§ 10. Per verificare quanto abbiamo asserito sulla equivalenza delle nostre trasformazioni per le superficie considerate, con quelle di Razzaboni e Demartres per le curve di Bertrand, cominciamo dal ricordare che quest'ultime consistono in ciò [1]:

Sia data una curva C di Bertrand. Scelto un angolo arbitrario σ costante, si prenda per φ un integrale dell'equazione differenziale.

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{\cos c}{\varrho} + \frac{\operatorname{sen} c}{T} + \frac{\operatorname{sen} c - \cos\sigma \cos\varphi}{k(\cos c + \operatorname{sen}\sigma)}.$$

Le formole:

$$x' = x + k\cos\sigma\,[\alpha \cos c \operatorname{sen}\varphi + \xi \cos\varphi + \lambda \operatorname{sen} c \operatorname{sen}\varphi], \text{ ecc.,} \tag{15}$$

ci danno le coordinate x', y', z' dei punti di una curva C′ di Bertrand, le cui curvature sono legate dalla relazione (12).

In questo modo, poichè nei secondi membri delle (15) compaiono due costanti arbitrarie, dalla curva C se ne deducono ∞^2 della stessa famiglia.

Per gli altri elementi $u', \alpha', \xi', \lambda' \ldots$ di C′ analoghi a quelli di C si trovano i seguenti risultati. Posto:

$$\Delta = 1 + \operatorname{sen}\sigma \cos c - \cos\sigma \operatorname{sen} c \cos\varphi,$$

[1] Pei risultati riportati in questo paragrafo cfr. Razzaboni, *Un teorema del sig. Demartres generalizzato,* Atti del Reale Istituto Veneto, anno 1900-1901, t. LX, parte 2ª.

si ha:

$$\frac{du'}{du} = \frac{\Delta}{\cos c + \operatorname{sen} \sigma}.$$

Sussistono poi le formole:

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha' &= \frac{1}{\Delta}[\cos c + \operatorname{sen}\sigma - \cos\sigma\cos\varphi(\cos c\cos\sigma\cos\varphi + \operatorname{sen} c \operatorname{sen}\sigma)]\,\alpha + \\ &\qquad + \frac{\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi}{\Delta}(\cos\sigma\cos\varphi - \operatorname{sen} c)\,\xi + \cos\sigma\cos\varphi\,\lambda \\ \xi' &= \frac{\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi}{\Delta}[\cos c\cos\sigma\cos\varphi + \operatorname{sen} c\operatorname{sen}\sigma]\,\alpha + \\ &\quad + \frac{1}{\Delta}[\cos\sigma\cos\varphi(\cos\sigma\cos\varphi - \operatorname{sen} c) + \operatorname{sen}\sigma(\operatorname{sen}\sigma + \cos c)]\,\xi - \cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\,\lambda \\ \lambda' &= -\frac{\cos\sigma}{\Delta}[\cos c\operatorname{sen}\sigma\cos\varphi - \operatorname{sen} c\cos\sigma + \cos\varphi]\,\alpha + \\ &\qquad + \frac{\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi}{\Delta}(\operatorname{sen}\sigma + \cos c)\,\xi + \operatorname{sen}\sigma\,\lambda. \end{aligned}\right.$$

§ 11. Consideriamo una delle curve C' trasformate di C, e indichino $\overline{C}'$ e $\overline{C}$ le rispettive curve di Bertrand coniugate. Sieno S_1, S_2 le due rigate isotrope aventi $\overline{C}$ per curva direttrice; ed S'_1, S'_2 le analoghe per $\overline{C}'$. Faremo vedere che: S_1 ed S'_1 sono falde fuocali di una congruenza W, sono quindi trasformate di Bäcklund l'una dell'altra.

Per giungere a questo risultato, cominciamo dall'osservare che tenendo conto delle (12)*, le (13) e le (14) ci dicono che per le coordinate x_1, y_1, z_1 di un punto di S_1, e per i coseni direttori X_1, Y_1, Z_1 della normale in esso avremo le seguenti espressioni coi parametri u, v:

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= x + k\operatorname{sen} c\,\xi + v(\alpha + i\xi), \\ X_1 &= -\frac{1}{\cos c}\left(\operatorname{sen} c + \frac{iv}{k}\right)\alpha - \left(i\operatorname{tg} c - \frac{v}{k\cos c}\right)\xi + \lambda. \end{aligned}\right.$$

Gli elementi analoghi x'_1, y'_1, z'_1 ; X'_1, Y'_1, Z'_1 di S'_1, a causa delle (13), (14), saranno così espressi pei parametri u, v';

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} x'_1 &= x' + v'[\alpha'\cos c - i\xi' + \lambda'\operatorname{sen} c], \\ X'_1 &= -\frac{iv'}{k}\alpha' - \left(\frac{1}{\cos c} + \frac{iv'}{k}\operatorname{tg} c\right)\lambda' + \left(i\operatorname{tg} c - \frac{v'}{k\cos c}\right)\xi', \end{aligned}\right.$$

ove α', ξ', λ'... sono quelli dati dalle (16).

Vediamo ora di trovare le condizioni alle quali debbono soddisfare v, v', affinchè la retta che unisce il punto $P \equiv (u, v)$ di S_1, col punto $P' \equiv (u, v')$ di S'_1 tocchi in P, P' rispettivamente S_1, S'_1. Queste condizioni che si scrivono così:

$$\sum X_1(x'_1 - x_1) = 0 \quad , \quad \sum X'_1(x'_1 - x_1) = 0,$$

si riducono, tenendo conto delle (15), (16) e delle (17), (18), ad un'unica, bilineare in v, v', della forma:

$$\mathrm{A}vv' + \mathrm{B}v + \mathrm{C}v' + \mathrm{D} = 0,$$

ove A, B, C, D sono funzioni della sola u. Questa relazione fa corrispondere ad ogni punto P di S_1, un punto P' di S_1', in modo che la retta PP' tocca in P, P' rispettivamente S_1 ed S_1'.

Vediamo dunque che effettivamente S_1, S_1' sono le due falde fuocali di una certa congruenza, e siccome su di esse le generatrici $u =$ costante, ossia le assintotiche di uno dei sistemi, si corrispondono, così questa congruenza è W, c. d. d.

Ora se indichiamo con S, S_3 e con S', S_3' le due coppie di rigate isotrope relative rispettivamente alle curve C, $\overline{C}'$, risulta subito da quanto precede che S, S' sono legate da una trasformazione di Bäcklund, e che identica cosa accade per S_3, S_3'.

Se ora immaginiamo di far variare C' in modo che essa assuma le forme delle ∞^2 trasformate di Razzaboni della C, è chiaro che le ∞^2 superficie S' corrispondenti saranno tutte le trasformate di Bäcklund della S. E ciò prova quanto asserivamo al principio del § 9 sull'equivalenza delle due trasformazioni.

§ 12. Si possono osservare alcune altre proprietà del sistema delle otto superficie relative alle curve C, C', $\overline{C}$, $\overline{C}'$. Intanto abbiamo veduto che S, S_1, S_2, S_3 sono legate rispettivamente ad S', S_1', S_2', S_3' da una trasformazione di Bäcklund.

Facciamo ora vedere che S_1, S_2 sono legate ad S da una di tali trasformazioni. Basterà perciò che ci si valga dello stesso procedimento usato per le due superficie S_1, S_1'. Ora usando le (13), (14) nelle quali si cambi v in v', relative ad S; e le (17) relative ad S_1, si trova che le condizioni:

$$\sum X_1(\dot{x} - x_1) = 0 \quad , \quad \sum \dot{X}(\dot{x} - x_1) = 0$$

si riducono all'unica relazione bilineare in v, v':

$$\frac{i}{k}\left(1 + \frac{1}{\cos c}\right) vv' + v \operatorname{tang} c + v' \operatorname{tang} c - ik \frac{\operatorname{sen}^2 c}{\cos c} = 0. \tag{20}$$

Mentre per mezzo delle (13), (14) ove al solito si ponga v' in luogo di v, e di quelle relative ad S_2:

$$x_2 = x + k \operatorname{sen} c\,\xi + v(\alpha - i\xi)$$

$$X_2 = -\frac{\alpha}{\cos c}\left(\operatorname{sen} c - \frac{iv}{k}\right) + \left(i \operatorname{tg} c + \frac{v}{k \cos c}\right)\xi + \lambda$$

che si ottengono dalle (17) cangiandovi i in $-i$, si trova che le altre condizioni:

$$\sum (\dot{x} - x_2) X_2 = 0 \quad , \quad \sum (\dot{x} - x_2) \dot{X} = 0$$

coincidono nell'unica:

$$\left(\frac{i}{k} - \frac{i}{k \cos c}\right) vv' - v \operatorname{tg} c + v' \operatorname{tg} c - ik \frac{\operatorname{sen}^2 c}{\cos c} = 0. \tag{21}$$

Di qui segue appunto nel solito modo che SS_1, SS_2 sono coppie di falde fuocali di due congruenze W. Si ha poi manifestamente che anche S_3 è legata ad S_1, S_2 da due trasformazioni di Bäcklund.

Indicando con σ_1, σ_2 gli angoli dei piani fuocali per le due congruenze pseudosferiche, aventi rispettivamente SS_1, SS_2 per superficie fuocali, si trova, usando le (20), (21), che:

$$\cos\sigma_1 = \cos\sigma_2 = \sum \dot{X} X_1 = \sum \dot{X} X_2 = -\frac{1}{\cos c}.$$

Poichè cambiando i in $-i$ non cambia $\cos c$, così vediamo che S, S_1, S_2, S_3 formano una quaterna del teorema di permutabilità, essendo S_1, S_2 legate rispettivamente ad S, S_3 da una B_σ, con σ dato dalla relazione:

$$\cos\sigma = -\frac{1}{\cos c}.$$

Conseguenza analoga si trae subito per la quaterna S', S'_1, S'_2, S'_3.

Sarebbe poi facile vedere, per mezzo delle formole trovate, che la trasformazione che lega ciascuna superficie della prima quaterna alla corrispondente della seconda è una B_τ, essendo τ lo stesso per tutte e quattro le coppie. Le due quaterne dette possono quindi dedursi l'una dall'altra con una trasformazione B_τ. A complemento di queste considerazioni diremo poi che il prof. Bianchi ha dimostrato, che se con la costruzione di Bioche si costruiscono le quattro deformate rigate $\sum$, $\sum'$, $\overline{\sum}$, $\overline{\sum}'$ dell'iperboloide di rotazione ad una falda, relative alle quattro curve C, C', $\overline{C}$, $\overline{C}'$, si ha che $\sum'$, $\overline{\sum}$; $\sum$, $\overline{\sum}'$ sono falde fuocali di due congruenze W.