

Sopra un sistema di equazioni a derivate parziali
del secondo ordine.

Memoria del prof. ALBERTO TONELLI

(presentata dal Socio V. CERUTI, approvata dal Socio U. DINI).

La interessante estensione alle equazioni a derivate parziali del secondo ordine contenenti tutte le derivate seconde e relative ad un numero qualunque di variabili indipendenti fatta dai signori DINI e BURGATTI (*) del metodo di EULERO-LAPLACE, mi ha fatto pensare ad un'altra generalizzazione che io non credo sia stata mai considerata sin qui. In questo lavoro io tento di estendere quel metodo ad un sistema di due equazioni relative ad altrettante funzioni di due variabili indipendenti e di forma simile a quella di EULERO-LAPLACE. I risultati cui giungo, per la maggior parte, corrispondono a quelli noti per una sola equazione; ma non ne hanno, per la natura stessa del problema, quella semplicità che permette una esposizione elegante quale ha saputo fare il sig. DARBOUT nella sua classica opera: *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (**).

Riconosco che il mio lavoro è ancora incompleto ed è suscettibile di ulteriori generalizzazioni, e mi sono indotto a pubblicarlo solo perchè anche un modesto risultato nella teoria della integrazione delle equazioni differenziali assume una certa importanza, e nella speranza che il problema da me posto venga ripreso da altri e studiato con più acume e maggior fortuna.

(*) DINI, *Sopra una classe di equazioni a derivate parziali di secondo ordine con un numero qualunque di variabili*. Acc. dei Lincei (Anno CCXCVIII, 1901). — BURGATTI, *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine con n variabili indipendenti*. Circolo matematico di Palermo, T. XVII.

(**) Deuxième partie, Chapitre II.

PARTE PRIMA

1. Il sistema di due equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine, contenenti le sole derivate miste e relative a due funzioni di due variabili indipendenti, ha la forma

$$\begin{aligned} l \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + m \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial v}{\partial x} + f \frac{\partial v}{\partial y} + gu + hv = 0, \\ l' \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + m' \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + a' \frac{\partial u}{\partial x} + b' \frac{\partial u}{\partial y} + c' \frac{\partial v}{\partial x} + f' \frac{\partial v}{\partial y} + g'u + h'v = 0, \end{aligned}$$

o, se il determinante

$$\begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}$$

è differente da zero, può anche scriversi più semplicemente

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial v}{\partial x} + f \frac{\partial v}{\partial y} + gu + hv = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + a' \frac{\partial u}{\partial x} + b' \frac{\partial u}{\partial y} + c' \frac{\partial v}{\partial x} + f' \frac{\partial v}{\partial y} + g'u + h'v = 0. \end{cases}$$

mentre, se quel determinante è nullo, si riduce all'altro

$$(1') \quad \begin{cases} l \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + m \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial v}{\partial x} + f \frac{\partial v}{\partial y} + gu + hv = 0, \\ a' \frac{\partial u}{\partial x} + b' \frac{\partial u}{\partial y} + c' \frac{\partial v}{\partial x} + f' \frac{\partial v}{\partial y} + g'u + h'v = 0, \end{cases}$$

dove i coefficienti dei sistemi (1), (1'), quantunque rappresentati con le medesime lettere, hanno espressioni diverse da quelle del sistema primitivo. Studieremo separatamente questi due casi incominciando dal primo.

2. Considerando il sistema sotto la forma (1), e ponendo in evidenza la derivazione rispetto ad x , si può scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + au + cv \right\} + b \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + au + cv \right\} + f \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + a'u + c'v \right\} + \\ + \left\{ g - ab - fa' - \frac{\partial a}{\partial x} \right\} u + \left\{ h - bc - fc' - \frac{\partial c}{\partial x} \right\} v = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + a'u + c'v \right\} + b' \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + au + cv \right\} + f' \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + a'u + c'v \right\} + \\ + \left\{ g' - a'b' - f'a' - \frac{\partial a'}{\partial x} \right\} u + \left\{ h' - c'b' - c'f' - \frac{\partial c'}{\partial x} \right\} v = 0; \end{aligned}$$

e quindi la sua integrazione si riporta a quella dei due sistemi

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + bU + fV + lu + tv = 0, & \frac{\partial u}{\partial y} + au + cv = U, \\ \frac{\partial V}{\partial x} + b'U + f'V + l'u + t'v = 0, & \frac{\partial v}{\partial y} + a'u + c'v = V. \end{cases}$$

avendo posto per brevità

$$(3) \quad \begin{cases} g - ab - fa' - \frac{\partial a}{\partial x} = l, & h - cb - fc' - \frac{\partial c}{\partial x} = t, \\ g' - ab' - f'a' - \frac{\partial a'}{\partial x} = l', & h' - cb' - f'c' - \frac{\partial c'}{\partial x} = t'. \end{cases}$$

Se invece si pone in evidenza, nel sistema (1), la derivazione rispetto ad y , la sua integrazione si può riportare a quella dei due sistemi

$$(2') \quad \begin{cases} \frac{\partial U_0}{\partial y} + aU_0 + cV_0 + l_0u + t_0v = 0, & \frac{\partial u}{\partial x} + bu + fv = U_0, \\ \frac{\partial V_0}{\partial y} + a'U_0 + c'V_0 + l'_0u + t'_0v = 0, & \frac{\partial v}{\partial x} + b'u + f'v = V_0. \end{cases}$$

avendo posto, analogamente a quanto si è fatto sopra,

$$(3') \quad \begin{cases} g - ab - cb' - \frac{\partial b}{\partial y} = l_0, & h - af - cf' - \frac{\partial f}{\partial y} = t_0, \\ g' - a'b - c'b' - \frac{\partial b'}{\partial y} = l'_0, & h' - a'f - c'f' - \frac{\partial f'}{\partial y} = t'_0. \end{cases}$$

3. È evidente che quanto si può dire studiando il sistema (2), vale anche pel (2'), sol che si sostituisca alla variabile x la y e viceversa; per cui ci limiteremo a considerare il primo. Ponendo

$$D = \begin{vmatrix} l & t \\ l' & t' \end{vmatrix}, \quad D_0 = \begin{vmatrix} l_0 & t_0 \\ l'_0 & t'_0 \end{vmatrix},$$

nel caso in cui D non sia zero, dalla prima coppia delle (2) potremo ricavare le u, v in funzione lineare di $U, V, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x}$, e sostituendone le espressioni nella seconda coppia otterremo un nuovo sistema di due equazioni in U, V , analogo a quello da cui siamo partiti; però conviene piuttosto considerare prima il caso di $D=0$, per vedere quali semplificazioni esso apporti alla integrazione delle equazioni differenziali.

L'ipotesi di $D=0$ può verificarsi:

- 1°) essendo nulli tutti gli elementi l, t, l', t' ;
- 2°) essendo nulli due elementi della stessa linea o due elementi della stessa colonna;

3°) essendo nulli tre elementi;

4°) essendo tutti gli elementi diversi da zero.

4. Nella ipotesi che tutti gli elementi di D sieno nulli, l'integrazione del sistema (1) si effettua mediante i due, lineari del primo ordine,

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + bU + fV = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial x} + b'U + f'V = 0, \end{cases}$$

e

$$(4') \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} + au + cv = U, \\ \frac{\partial v}{\partial y} + a'u + c'v = V. \end{cases}$$

Questi poi si riconducono alla integrazione, di due equazioni lineari del secondo ordine, che possono considerarsi come a derivate ordinarie. Se nel sistema (4) si pone

$$U = e^{-\int b dx} U_1, \quad V = e^{-\int f dx} V_1,$$

esso diventa

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x} + f e^{\int (b-f) dx} V_1 &= 0, \\ \frac{\partial V_1}{\partial x} + b' e^{\int (f-b) dx} U_1 &= 0, \end{aligned} ;$$

ed eliminando una volta V_1 e l'altra U_1 , si ottiene

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \left\{ \frac{\partial \log f}{\partial x} + b - f \right\} \frac{\partial U_1}{\partial x} - b' f U_1 = 0, \\ \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} - \left\{ \frac{\partial \log b'}{\partial x} + f - b \right\} \frac{\partial V_1}{\partial x} - b' f V_1 = 0. \end{cases}$$

Integrando, secondo che sarà più comodo, l'una o l'altra di queste, e quindi determinando U_1 o V_1 , avremo poi la seconda funzione senza bisogno di altra integrazione.

Ottenute le funzioni U, V , per determinare le u, v dovremo risolvere un problema analogo al precedente, perchè moltiplicando la prima delle (4') per λ , la seconda per μ e sommando, dopo aver posto

$$(4'') \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial y} = a\lambda + a'\mu, \\ \frac{\partial \mu}{\partial y} = c\lambda + c'\mu, \end{cases}$$

avremo

$$\frac{\partial}{\partial y} \lambda u + \mu v = \lambda U + \mu V$$

e tutto si ridurrà alla determinazione di λ o μ , che soddisfano alle (4'') analoghe alle (4). Ponendo anche qui

$$\lambda = e^{\int a dy} \lambda_1, \quad \mu = e^{\int a dy} \mu_1,$$

giungeremo alle equazioni

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial y^2} - \left\{ \frac{\partial \log a'}{\partial y} + c' - a \right\} \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} - a' c \lambda_1 = 0, \\ \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial y^2} - \left\{ \frac{\partial \log c}{\partial y} + a - c' \right\} \frac{\partial \mu_1}{\partial y} - a' c \mu_1 = 0. \end{cases}$$

e basterà integrare una qualunque di esse per avere le due funzioni λ, μ . Del resto, eliminata tra le (4'') una delle funzioni λ, μ e costruita l'equazione differenziale del secondo ordine lineare, se si indicano con λ', λ'' due soluzioni particolari indipendenti (dato che si fosse eliminata la μ) e con μ', μ'' i corrispondenti valori di μ , è noto dalla teoria delle equazioni differenziali lineari che il determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda' & \mu' \\ \lambda'' & \mu'' \end{vmatrix}$$

è diverso da zero; e poichè si ha

$$\frac{\partial}{\partial y} \lambda' u + \mu' v = \lambda' U + \mu' V,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \lambda'' u + \mu'' v = \lambda'' U + \mu'' V,$$

ovvero

$$\lambda' u + \mu' v = \int (\lambda' U + \mu' V) dy + \psi_1(x),$$

$$\lambda'' u + \mu'' v = \int (\lambda'' U + \mu'' V) dy + \psi_2(x),$$

otterremo subito i valori delle funzioni u, v con semplici quadrature.

5. Si potrebbero qui citare diversi casi nei quali le equazioni (5), (5') si sanno integrare, e tra gli altri i più semplici, che si presentano quando i coefficienti di una delle prime equazioni sieno funzioni della sola y , od i coefficienti di una delle seconde funzioni della sola x . Mi limiterò ad accennarne uno che comprende in sé infinite combinazioni di forme pei coefficienti del sistema proposto che lo rendono integrabile per quadratura.

Per questo osservo che, data una equazione a derivate ordinarie lineare del secondo ordine

$$(a) \quad \frac{d^2 w}{dt^2} + p \frac{dw}{dt} + qw = 0,$$

essa sarà integrabile per quadrature quando tra i coefficienti p, q abbia luogo una relazione della forma

$$(a') \quad q \left\{ 1 + p_1 + \frac{p_2^2}{1,2} + \dots + \frac{p_r^r}{r(r)} \right\} = \frac{1}{\pi(r)} \frac{d}{dt} p p^r,$$

dove r è un numero intero qualunque positivo, e

$$p_1 = \int p dt \quad (1).$$

Introducendo nella (a'), al posto di p e di q , le espressioni corrispondenti dei coefficienti delle equazioni (5) o (5') e sostituendo, nell'un caso alla variabile t la x , nell'altro la y , otterremo condizioni di integrabilità per quadrature del nostro sistema, quando sia $D = 0$, pel fatto che sono nulli tutti i suoi elementi.

Analoghe conclusioni si potrebbero fare quando fosse $D_2 = 0$ insieme coi singoli suoi elementi.

6. Meno notevole è la semplificazione del sistema (1) quando, essendo zero il determinante D (o D_2), non lo sieno tutti i suoi elementi. Però tutti quanti gli altri

(1) Omettiamo, per amore di brevità, la dimostrazione diretta di questa asserzione, che risulta immediatamente da successive integrazioni per parti. Si può del resto avere una facile riprova della sua esattezza osservando che

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \left(1 + p_1 + \dots + \frac{p_r^r}{r(r)} \right) \frac{dw}{dt} + p \frac{p_1^r}{r(r)} w \right\} = \\ & = \left(1 + p_1 + \dots + \frac{p_r^r}{r(r)} \right) \frac{d^2 w}{dt^2} + \left(1 + p_1 + \dots + \frac{p_r^{r-1}}{r(r-1)} \right) p \frac{dw}{dt} + p \frac{p_1^r}{r(r)} \frac{dw}{dt} + \frac{w}{r(r)} \frac{d}{dt} p p^r, \end{aligned}$$

ed a causa della (a'),

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left(1 + p_1 + \dots + \frac{p_r^r}{r(r)} \right) \frac{dw}{dt} + p \frac{p_1^r}{r(r)} w \right\} = \left(1 + p_1 + \dots + \frac{p_r^r}{r(r)} \right) \left(\frac{d^2 w}{dt^2} + p \frac{dw}{dt} + qw \right)$$

e quindi

$$\left\{ 1 + p_1 + \dots + \frac{p_r^r}{r(r)} \frac{dw}{dt} + p \frac{p_1^r}{r(r)} w = c \right.$$

sarà un'integrale primo della nostra equazione (a). I casi limiti di $r=0$ e di r superiore ad ogni numero dato offrono i noti criteri

$$q = \frac{dp}{dt}, \quad q = 0.$$

Considerando l'equazione aggiunta potremmo stabilire un altro criterio contenente infatti casi di integrabilità per quadrature della (a).

casi accennati al n. 3 possono ricondursi mediante una trasformazione del sistema (1) a quello in cui tre elementi del determinante stesso si annullano. Dimostriamo questa proprietà tanto più che avremo così occasione di notare come il determinante D (o D_z) sia un invariante per certe trasformazioni.

A questo scopo poniamo

$$u = \lambda u_0 + \mu v_0,$$

$$v = \lambda' u_0 + \mu' v_0,$$

supponendo

$$A = \lambda\mu' - \mu\lambda'$$

diverso da zero.

Calcolando le derivate avremo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda \frac{\partial u_0}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_0}{\partial x} + \lambda_1 u_0 + \mu_1 v_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lambda \frac{\partial u_0}{\partial y} + \mu \frac{\partial v_0}{\partial y} + \lambda_2 u_0 + \mu_2 v_0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \lambda \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \lambda_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \mu_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial u_0}{\partial y} + \mu_2 \frac{\partial v_0}{\partial y} + \lambda_{12} u_0 + \mu_{12} v_0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \lambda' \frac{\partial u_0}{\partial x} + \mu' \frac{\partial v_0}{\partial x} + \lambda'_1 u_0 + \mu'_1 v_0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \lambda' \frac{\partial u_0}{\partial y} + \mu' \frac{\partial v_0}{\partial y} + \lambda'_2 u_0 + \mu'_2 v_0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \lambda' \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \mu' \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \lambda'_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \mu'_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} + \lambda'_2 \frac{\partial u_0}{\partial y} + \mu'_2 \frac{\partial v_0}{\partial y} + \lambda'_{12} u_0 + \mu'_{12} v_0,$$

dove si sono accennate con indici le derivate parziali di $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ del primo e secondo ordine rispetto ad x ed y .

Sostituendo queste espressioni nelle (1) avremo

$$\begin{aligned} & \lambda \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + (\lambda_2 + a\lambda + c\lambda') \frac{\partial u_0}{\partial x} + (\lambda_1 + b\lambda + \lambda'') \frac{\partial u_0}{\partial y} + \\ & + (\mu_2 + a\mu + c\mu') \frac{\partial v_0}{\partial x} + (\mu_1 + b\mu + \mu'') \frac{\partial v_0}{\partial y} + \\ & + (\lambda_{12} + a\lambda_1 + c\lambda'_1 + b\lambda_2 + f\lambda'_2 + g\lambda + h\lambda') u_0 + \\ & + (\mu_{12} + a\mu_1 + c\mu'_1 + b\mu_2 + f\mu'_2 + g\mu + h\mu') v_0 = 0, \\ & \lambda' \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \mu' \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + (\lambda'_2 + a'\lambda' + c'\lambda'') \frac{\partial u_0}{\partial x} + (\lambda'_1 + b'\lambda' + f'\lambda'') \frac{\partial u_0}{\partial y} + \\ & + (\mu'_2 + a'\mu' + c'\mu'') \frac{\partial v_0}{\partial x} + (\mu'_1 + b'\mu' + f'\mu'') \frac{\partial v_0}{\partial y} + \\ & + (\lambda'_{12} + a'\lambda'_1 + c'\lambda'_{11} + b'\lambda'_2 + f'\lambda'_{12} + g'\lambda' + h'\lambda') u_0 + \\ & + (\mu'_{12} + a'\mu'_1 + c'\mu'_{11} + b'\mu'_2 + f'\mu'_{12} + g'\mu' + h'\mu') v_0 = 0. \end{aligned}$$

e moltiplicando una volta la prima per μ' , la seconda per μ e sottraendo, un'altra volta la seconda per λ e la prima per λ' e sottraendo, dopo aver diviso per $A = \lambda\mu' - \mu\lambda'$, otterremo

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{1}{A} \left\{ \mu'(\lambda_1 + a\lambda + c\lambda) - \mu(\lambda'_1 + a'\lambda' + c'\lambda') \right\} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \\
 & + \frac{1}{A} \left\{ \mu'(\lambda_1 + b\lambda + f\lambda) - \mu(\lambda'_1 + b'\lambda' + f'\lambda') \right\} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \\
 & + \frac{1}{A} \left\{ \mu'(\mu_2 + a\mu + c\mu) - \mu(\mu'_2 + a'\mu' + c'\mu') \right\} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \\
 & + \frac{1}{A} \left\{ \mu'(\mu_2 + b\mu + f\mu) - \mu(\mu'_2 + b'\mu' + f'\mu') \right\} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \\
 & + \frac{1}{A} \left\{ \mu'(\lambda_{12} + a\lambda_1 + c\lambda'_1 + b\lambda_2 + f\lambda'_2 + g\lambda + h\lambda') - \right. \\
 & \quad \left. - \mu(\lambda'_{12} + a'\lambda_1 + c'\lambda'_1 + b'\lambda_2 + f'\lambda'_2 + g'\lambda + h'\lambda') \right\} u_0 + \\
 & + \frac{1}{A} \left\{ \mu'(\mu_{12} + a\mu_1 + c\mu'_1 + b\mu_2 + f\mu'_2 + g\mu + h\mu') - \right. \\
 & \quad \left. - \mu(\mu'_{12} + a'\mu_1 + c'\mu'_1 + b'\mu_2 + f'\mu'_2 + g'\mu + h'\mu') \right\} v_0 = 0,
 \end{aligned} \right\} (6) \\
 & \left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{1}{A} \left\{ \lambda(\lambda'_2 + a'\lambda' + c'\lambda') - \lambda'(\lambda_2 + a\lambda + c\lambda) \right\} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \\
 & + \frac{1}{A} \left\{ \lambda(\lambda'_2 + b'\lambda' + f'\lambda') - \lambda'(\lambda_2 + b\lambda + f\lambda) \right\} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \\
 & + \frac{1}{A} \left\{ \lambda(\mu'_2 + a'\mu' + c'\mu') - \lambda'(\mu_2 + a\mu + c\mu) \right\} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \\
 & + \frac{1}{A} \left\{ \lambda(\mu'_2 + b'\mu' + f'\mu') - \lambda'(\mu_2 + b\mu + f\mu) \right\} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \\
 & + \frac{1}{A} \left\{ \lambda(\lambda'_{12} + a'\lambda_1 + c'\lambda'_1 + b'\lambda_2 + f'\lambda'_2 + g'\lambda + h'\lambda') - \right. \\
 & \quad \left. - \lambda'(\lambda_{12} + a\lambda_1 + c\lambda'_1 + b\lambda_2 + f\lambda'_2 + g\lambda + h\lambda) \right\} v_0 + \\
 & + \frac{1}{A} \left\{ \lambda(\mu'_{12} + a'\mu_1 + c'\mu'_1 + b'\mu_2 + f'\mu'_2 + g'\mu + h'\mu') - \right. \\
 & \quad \left. - \lambda'(\mu_{12} + a\mu_1 + c\mu'_1 + b\mu_2 + f\mu'_2 + g\mu + h\mu) \right\} v_0 = 0,
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

cioè un sistema che ha la stessa forma di quello (1) da cui siamo partiti.

7. Indicando con le lettere maiuscole gli elementi delle (6) corrispondenti a quelli delle (1) calcoliamo,

$$\begin{aligned}
 L &= G - AB - FA' - \frac{\lambda A}{\lambda x}, & T &= H - CB - FC' - \frac{\lambda C}{\lambda x}, \\
 L' &= G' - AB' - FA - \frac{\lambda A'}{\lambda x}, & T' &= H' - CB' - FC - \frac{\lambda C'}{\lambda x},
 \end{aligned}$$

ed

$$L_0 = G - AB - CB' - \frac{\partial B}{\partial y}, \quad T_0 = H - AF - CF' - \frac{\partial F}{\partial y},$$

$$L'_0 = G' - A'B - C'B' - \frac{\partial B'}{\partial y}, \quad T'_0 = H' - A'F - C'F' - \frac{\partial F'}{\partial y}.$$

Avremo

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{A} \left\{ \mu'(\lambda_{12} + a\lambda_1 + c\lambda'_1 + b\lambda_2 + f\lambda'_2 + g\lambda + h\lambda') - \right. \\ &\quad \left. - \mu(\lambda_{12} + a'\lambda_2 + c'\lambda'_2 + b'\lambda_1 + f'\lambda'_1 + g'\lambda + h'\lambda') \right\} \\ &= \frac{1}{A} \left\{ \mu'(\lambda_2 + a\lambda + c\lambda') - \mu(\lambda'_2 + a'\lambda + c'\lambda') \right\} \left\{ \mu'(\lambda_1 + b\lambda + f\lambda') - \mu(\lambda'_1 + b'\lambda + f'\lambda') \right\} \\ &= \frac{1}{A^2} \left\{ \mu'(\mu_1 + b\mu + f\mu') - \mu(\mu'_1 + b'\mu + f'\mu') \right\} \left\{ \lambda(\lambda_2 + a\lambda + c\lambda') - \lambda'(\lambda_2 + a'\lambda + c'\lambda') \right\} \\ &= \frac{1}{A} \left\{ \mu'(\lambda_2 + a\lambda + c\lambda') - \mu_1(\lambda'_2 + a'\lambda + c'\lambda') + \mu'(\lambda_{12} + a\lambda_2 + c\lambda'_1 + a_1\lambda + c_1\lambda') - \right. \\ &\quad \left. - \mu(\lambda_{12} + a'\lambda_1 + c'\lambda'_2 + a'_1\lambda + c'_1\lambda') \right\} \\ &+ \frac{1}{A^2} \left\{ \mu'(\lambda_2 + a\lambda + c\lambda') - \mu(\lambda'_2 + a'\lambda + c'\lambda') \right\} \frac{\partial A}{\partial x} = \\ &= \frac{\mu'}{A} (b\lambda_2 + f\lambda'_2 + g\lambda + h\lambda' - a_1\lambda - c_1\lambda') - \frac{\mu}{A} (b'\lambda_2 + f'\lambda'_2 + g'\lambda + h'\lambda' - a'_1\lambda - c'_1\lambda') \\ &+ \frac{\lambda_2 + a\lambda + c\lambda'}{A^2} \left\{ \mu\mu'\lambda'_1 - \mu^2\lambda_1 + \lambda'\mu'\mu_1 - \lambda\mu\mu'_1 + (\mu b' - \mu' b)A - \mu'_1 A + \mu \frac{\partial A}{\partial x} \right\} \\ &+ \frac{\lambda'_2 + a'\lambda + c'\lambda'}{A^2} \left\{ \mu\mu'\lambda_1 - \mu^2\lambda'_1 - \lambda\mu'\mu_1 + \lambda\mu\mu'_1 + (\mu f' - \mu' f)A + \mu_1 A - \mu \frac{\partial A}{\partial x} \right\} = \\ &= \frac{\mu'}{A} (g\lambda + h\lambda' - a_1\lambda - c_1\lambda') - \frac{\mu}{A} (g'\lambda + h'\lambda' - a'_1\lambda - c'_1\lambda') + \\ &\quad + \frac{\mu b' - \mu' b}{A} (a\lambda + c\lambda') + \frac{\mu f' - \mu' f}{A} (a'\lambda + c'\lambda') \\ &= \frac{\mu'}{A} \left\{ \lambda(g - ab - fa' - \frac{\partial a}{\partial x}) + \lambda'(h - bc - fc' - \frac{\partial c}{\partial x}) \right\} - \\ &= \frac{\mu}{A} \left\{ \lambda(g' - ab' - a'f' - \frac{\partial a'}{\partial x}) + \lambda'(h' - c'b' - c'f' - \frac{\partial c'}{\partial x}) \right\}. \end{aligned}$$

e, ricordando le espressioni di l, t, ℓ, ℓ' poste al n. 2, si avrà in fine

$$L = \frac{\mu'}{A} (\lambda l + \lambda' t) - \frac{\mu}{A} (\lambda \ell + \lambda' \ell') = \frac{\lambda}{A} (\mu' l - \mu \ell) + \frac{\lambda'}{A} (\mu' t - \mu \ell').$$

Con un calcolo analogo si trovano le espressioni di T, L', T' ; ma si può anche osservare, tenendo conto della forma dei coefficienti del sistema (6), che L si cambia in T sostituendo alle λ, λ' le μ, μ' e viceversa, ed ugualmente avviene per T ed L' .

In ogni modo, o col calcolo diretto o con queste considerazioni si ottengono le formole

$$(7) \quad \begin{cases} L = \frac{\mu'}{\mathcal{A}}(\lambda l + \lambda' l') - \frac{\mu}{\mathcal{A}}(\lambda l' + \lambda' l) = \frac{\lambda}{\mathcal{A}}(\mu' l - \mu l') + \frac{\lambda'}{\mathcal{A}}(\mu' l' - \mu l), \\ T = \frac{\mu'}{\mathcal{A}}(\mu l + \mu' l') - \frac{\mu}{\mathcal{A}}(\mu l' + \mu' l) = \frac{\mu}{\mathcal{A}}(\mu' l - \mu l') + \frac{\mu'}{\mathcal{A}}(\mu' l' - \mu l), \\ L' = \frac{\lambda}{\mathcal{A}}(\lambda l' + \lambda' l) - \frac{\lambda'}{\mathcal{A}}(\lambda l + \lambda' l') = \frac{\lambda}{\mathcal{A}}(\lambda l' - \lambda' l) + \frac{\lambda'}{\mathcal{A}}(\lambda l - \lambda' l'), \\ T' = \frac{\lambda}{\mathcal{A}}(\mu l' + \mu' l) - \frac{\lambda'}{\mathcal{A}}(\mu l + \mu' l') = \frac{\mu}{\mathcal{A}}(\lambda l' - \lambda' l) + \frac{\mu'}{\mathcal{A}}(\lambda l - \lambda' l'). \end{cases}$$

8. Da queste espressioni di L, T, L', T' si trae immediatamente

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} L & L' \\ T & T' \end{vmatrix} &= \frac{1}{\mathcal{A}^2} \begin{vmatrix} \mu'(\lambda l + \lambda' l') - \mu(\lambda l' + \lambda' l) & -\lambda'(\lambda l + \lambda' l') + \lambda(\lambda l' + \lambda' l) \\ \mu'(\mu l + \mu' l') - \mu(\mu l' + \mu' l) & -\lambda'(\mu l + \mu' l') + \lambda(\mu l' + \mu' l) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\mathcal{A}} \begin{vmatrix} \lambda l + \lambda' l' & \lambda l' + \lambda' l \\ \mu l + \mu' l' & \mu l' + \mu' l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l & l' \\ l' & l \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Potremo quindi concludere che

$$D = \begin{vmatrix} l & l' \\ l' & l \end{vmatrix}$$

è un invariante assoluto del sistema (1) per ogni sostituzione della forma

$$(8) \quad \begin{cases} u = \lambda u_0 + \mu v_0 \\ v = \lambda' u_0 + \mu' v_0. \end{cases}$$

Una proprietà analoga varrà anche pel determinante

$$D_0 = \begin{vmatrix} l_0 & l'_0 \\ l'_0 & l_0 \end{vmatrix}$$

poichè, come già abbiamo osservato, quanto si dimostra per un determinante vale anche per l'altro, equivalendo il passaggio dall'uno all'altro allo scambio di x in y e viceversa, nel sistema (1).

Potremo quindi, secondo l'uso, denominare questi determinanti D , D_0 *invarianti* del sistema (1) (1).

(1) Sarebbe facile vedere che ponendo

$$x = \varphi(x'), \quad y = \psi(y')$$

si ottengono per il sistema trasformato del sistema (1) gli elementi

$$L = \varphi'(x) \psi'(y) l$$

$$T = \varphi'(x) \psi'(y) t$$

$$L' = \varphi'(x) \psi'(y) l'$$

$$T' = \varphi'(x) \psi'(y) t'$$

analoga a ciò che avviene per l'equazione di EULER-LA PLACE.

Questa proprietà ci avverte che sarebbe vano sperare di trasformare il sistema (1), mediante le (8), in un altro pel quale uno degli invarianti fosse nullo, se già non lo è il corrispondente del sistema primitivo.

Ma oltre D e D_0 vi è un'altra combinazione degli elementi l, l', l'', l''' che è puro invariante colla trasformazione (8). Infatti le (7) ci danno immediatamente

$$L + T' = l + l',$$

ed è chiaro che sarà ugualmente

$$L_0 + T'_0 = l_0 + l'_0.$$

Abbiamo così due altri invarianti del sistema (1), i quali ci avvertono che sarebbe ugualmente vano, mediante la trasformazione (8), di sperare di giungere ad un sistema (6) pel quale fossero nulli L e T' se già non si ha pel sistema (1) soddisfatta la condizione $l + l' = 0$. Tanto meno poi sarà possibile ridurre nulli tutti gli elementi T, L, T', L' se già non è $D = 0$ ed $l + l' = 0$. Ma, pur essendo verificate queste due condizioni, mediante la trasformazione (8), non si potrà mai far sì che risultino i quattro elementi L, T, L', T' separatamente nulli, se questa condizione non è già verificata pel sistema (1).

Infatti se volessimo determinare $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ così che fosse

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \cdot T &= l\mu^2 + (l - l')\mu\mu' - l'\mu'^2 = 0, \\ -\mathcal{A} \cdot L' &= l\lambda^2 + (l - l')\lambda\lambda' - l'\lambda'^2 = 0, \end{aligned}$$

poichè l'equazione

$$lz^2 + (l - l')z - l' = 0$$

ha le sue due radici uguali, perchè

$$(l - l')^2 + 4l' = (l + l')^2 - 4(l - l'l') = (l + l')^2 - 4D = 0,$$

dovremmo porre

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\lambda'}{\lambda},$$

ciò che non è possibile, risultandone $\mathcal{A} = 0$. Questo ragionamento sarebbe in difetto ove fosse $l = 0$; ma poichè, in questo caso, dovrebbe pure esser zero l' od l_0 quindi ambedue, a causa dell'ipotesi $l + l' = 0$, ne risulterebbe

$$\mathcal{A} \cdot T = -l'\mu^2, \quad -\mathcal{A} \cdot L' = -l'\lambda^2,$$

e l'impossibilità di avere $T = L' = 0$, con \mathcal{A} diverso da zero, risulta evidente, non potendosi supporre $l' = 0$ senza ammettere che già pel sistema (1) sia

$$l = l' = l'' = l''' = 0.$$

9. Se non è possibile in alcun caso ridurre nulli tutti gli elementi dell'invariante nel sistema trasformato, quando tali non sieno nel primitivo, sarà però sempre

possibile ridurle nulli tre, e tra questi necessariamente L, T se oltre $D=0$ si ha anche $l+l'=0$; e se $l+l'$ è diverso da zero gli elementi necessariamente nulli saranno T, L' . Salvo questa limitazione si potrà scegliere arbitrariamente, nel primo caso, tra T, L' , nel secondo, tra L, T quell'elemento che si vuole annullare.

Incominciando dal caso di $D=0, l+l'=0$, osserviamo che, se non è possibile porre contemporaneamente $T=L'=0$, si potrà porre a piacere l'una o l'altra delle due condizioni

$$T=0, \quad L'=0,$$

e poichè queste due quantità si convertono l'una nell'altra sostituendo alle λ, λ' le μ, μ' e viceversa, così le condizioni imposte alla coppia λ, λ' quando si voglia $L'=0$ si cambieranno in uguali condizioni imposte alla coppia μ, μ' quando invece si voglia $T=0$.

Se t è diverso da zero, la condizione $T=0$ equivale a

$$T.t.A = (t\mu' + l\mu)^2 = 0,$$

e la condizione $L'=0$ ad

$$L'.t.A = -(\lambda' + l\lambda)^2 = 0,$$

e poichè, se si vuole anche $L=0$, basta porre

$$L.t.A = (t\mu' + l\mu)(\lambda' + l\lambda) = 0$$

così questa ultima condizione è una conseguenza della prima o della seconda sopra stabilita. D'altra parte, per la nostra ipotesi di $l+l'=0$, e conseguentemente $L+T=0$, risulterà pure $T=0$.

In un caso avremo

$$L=0, \quad T=0, \quad L' = \frac{\lambda' + \lambda' l}{\mu}, \quad T=0$$

avendo preso $\mu' = -\frac{l}{l'}\mu$ e non potendo assumere $\lambda' = -\frac{l}{l'}\lambda$.

Nell'altro caso invece avremo

$$L=0, \quad T = \frac{\mu l + \mu' l'}{\lambda}, \quad L'=0, \quad T=0,$$

avendo posto $\lambda' = -\frac{l}{l'}\lambda$ e quindi non potendo prendere $\mu' = -\frac{l}{l'}\mu$.

Se si avesse ancora $t=0$, a causa delle ipotesi $l+l'=0, D=0$, dovrebbe pure essere $l=l'=0$, e per conseguenza, già tre elementi dell'invariante del primitivo sistema sarebbero nulli. In questo caso risulterebbe

$$L = -\frac{\mu\lambda}{A} l', \quad T = -\frac{l\lambda'}{A} l', \quad L' = \frac{\lambda^2}{A} l', \quad T' = \frac{\mu\lambda'}{A} l',$$

e basterebbe prendere $\mu = 0$ e μ', λ diversi da zero per ottenere

$$L = 0, \quad T = 0, \quad L' = \frac{\lambda}{\mu'} \ell, \quad T' = 0;$$

ovvero $\lambda = 0$ e μ, λ' diversi da zero, per ottenere

$$L = 0, \quad T = \frac{\mu}{\lambda'} \ell, \quad L' = 0, \quad T' = 0.$$

Possiamo quindi concludere che nella ipotesi di $D = 0$, $l + l' = 0$, l'integrazione del nostro sistema, se tutti gli elementi di D non sono nulli, si potrà ricondurre a quella dei due sistemi

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial U_0}{\partial x} + BU_0 + FV_0 = 0 & , \quad U_0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + Au_0 + Cv_0, \\ \frac{\partial V_0}{\partial x} + B'U_0 + F'V_0 + L'u_0 = 0 & , \quad V_0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + A'u_0 + C'v_0. \end{cases}$$

ovvero degli altri

$$(9') \quad \begin{cases} \frac{\partial U_0}{\partial x} + BU_0 + FV_0 + T'v_0 = 0 & , \quad U_0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + Au_0 + Cv_0, \\ \frac{\partial V_0}{\partial x} + B'U_0 + F'V_0 = 0 & , \quad V_0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + A'u_0 + C'v_0. \end{cases}$$

disponendo di una sola delle quattro quantità $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$, avvertendo che non risulti $\lambda\mu' - \mu\lambda' = \mathcal{A} = 0$ nel determinare le altre.

Nei sistemi (9), (9') abbiamo indicato con le lettere maiuscole i coefficienti degli elementi analoghi a quelli che si presentano nel sistema primitivo, e che sono così indicati colle lettere minuscole. Avvertiamo ancora che, sebbene rappresentati coi medesimi simboli, i coefficienti dei sistemi (9), (9') hanno espressioni diverse, dipendendo essi dagli elementi $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ che vengono, nei due casi, determinati da condizioni differenti.

La indeterminazione che rimane nei coefficienti, a causa della presenza di tre delle quantità $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$, può essere utilizzata per opportune semplificazioni dei sistemi stessi, sempre però badando che non risulti $\lambda\mu' - \mu\lambda' = \mathcal{A} = 0$.

10. Nella ipotesi di $D = 0$, ma di $l + l'$ diverso da zero, le due radici della equazione

$$t^2 + (l - l')t - \ell = 0,$$

se ℓ è diverso da zero, sono distinte e precisamente

$$s_1 = \frac{\ell}{l}, \quad s_2 = -\frac{\ell}{l'}$$

e prendendo

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\ell'}{\ell}, \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = -\frac{\ell'}{\ell},$$

ovvero

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\ell'}{\ell}, \quad \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{\ell'}{\ell},$$

avremo

$$T = 0, \quad L' = 0,$$

e

$$A = \mu\lambda \left(\frac{\mu'}{\mu} - \frac{\lambda'}{\lambda} \right) = \pm \mu\lambda \frac{\ell + \ell'}{\ell}$$

diverso da zero.

D'altra parte essendo

$$A \cdot L = \lambda(\mu' \ell - \mu \ell') + \lambda'(\mu \ell - \mu' \ell'),$$

$$A \cdot T = \mu(\lambda \ell' - \lambda' \ell) + \mu'(\lambda \ell - \lambda' \ell'),$$

nel primo caso avremo pure $L = 0$ e quindi $T = \ell + \ell'$; nel secondo $T = 0$ ed $L = \ell + \ell'$.

Se invece $t = 0$, allora, perchè sia pure $D = 0$, dovrà essere $\ell = 0$ o $l = 0$, ma non ambedue contemporaneamente, perchè si ritornerebbe alla ipotesi già considerata di $\ell + \ell' = 0$.

Nella prima ipotesi di $t = 0$, $\ell = 0$ ma l diverso da zero, poichè si ha

$$A \cdot T = \mu(\mu' l - \mu l), \quad A \cdot L' = \lambda(\lambda \ell' - \lambda' l),$$

potremo porre

$$\mu' = \frac{\mu \ell'}{l}, \quad \lambda = 0,$$

ovvero

$$\mu = 0, \quad \lambda' = \frac{\lambda \ell'}{l},$$

prendendo però, nel primo caso λ, μ diversi da zero, e nel secondo λ, μ' diversi da zero, onde non si abbia $A = 0$. Ne risulterà allora, con la prima posizione, $L = 0$ e $T' = l$; con la seconda $T' = 0$, $L = l$. Che se invece fosse $t = 0$, $l = 0$, ma ℓ diverso da zero, essendo

$$A \cdot T = -\mu(\mu \ell' + \mu' \ell), \quad A \cdot L' = \lambda(\lambda \ell' + \lambda' \ell),$$

potremmo porre

$$\mu = 0, \quad \lambda' = -\frac{\lambda \ell'}{\ell},$$

ovvero

$$\lambda = 0, \quad \mu' = -\frac{\mu \ell'}{\ell},$$

nell'un caso prendendo μ', λ , nell'altro μ, λ' diversi da zero. Con la prima posizione risulterà $L = 0$ e $T' = \ell'$; con la seconda $T' = 0$, $L = \ell'$.

In ogni caso però, nella ipotesi di $D=0$ e di $l+l'$ diverso da zero, la integrazione del sistema proposto si riconduce a quella dei due sistemi

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial U_0}{\partial x} + BU_0 + FV_0 = 0 & , \quad U_0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + Au_0 + Cv_0 \\ \frac{\partial V_0}{\partial x} + B'U_0 + F'V_0 + T'v_0 = 0 & , \quad V_0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + A'u_0 + C'v_0 \end{cases}$$

o degli altri

$$(10') \quad \begin{cases} \frac{\partial U_0}{\partial x} + BU_0 + FV_0 + Lu_0 = 0 & , \quad U_0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + Au_0 + Cv_0 \\ \frac{\partial V_0}{\partial x} + B'U_0 + F'V_0 = 0 & , \quad V_0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + A'u_0 + C'v_0 \end{cases}$$

avendo qui pure i coefficienti dei due sistemi, quantunque designati con le medesime lettere, espressioni diverse, dipendendo essi dagli elementi $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ che risultano variamente determinati nei due casi.

11. Si vede da quanto si è detto, che il problema della integrazione del sistema (1), quando $D=0$, non subisce in generale la semplificazione notata quando tutti gli elementi dell'invariante sieno separatamente nulli; però non mi sembra privo di importanza il fatto che l'annullarsi dell'invariante D permette di ricondurre il nostro problema all'integrazione di una sola equazione differenziale, lineare, omogenea al più del quarto ordine e di forma speciale; mentre, come è noto, la eliminazione di una funzione dal sistema (1) non apparisce possibile in generale. Considerando, per fissare le idee, il sistema (9), dalla seconda equazione ricaveremo u_0 in funzione lineare di $U_0, V_0, \frac{\partial V_0}{\partial x}$, e sostituendone il valore nella terza e nella quarta, potremo dalla terza, se C non è zero, ricavare anche il valore di v_0 in funzione lineare omogenea di

$$U_0, V_0, \frac{\partial U_0}{\partial y}, \frac{\partial V_0}{\partial x}, \frac{\partial V_0}{\partial y}, \frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial y}.$$

Sostituendo questo valore di v_0 nella quarta, questa si trasformerà in una equazione lineare omogenea della forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial y^2} + P \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + Q \frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial y} + R \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + S \frac{\partial U_0}{\partial y} + T \frac{\partial V_0}{\partial x} + L \frac{\partial V_0}{\partial y} + \\ + MU_0 + NV_0 = 0, \end{aligned}$$

e tenendo conto della prima del sistema (9), e cioè

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} + BU_0 + FV_0 = 0,$$

se F non è nullo, potremo eliminare V , giungendo così ad una equazione differenziale, lineare, omogenea del quarto ordine in U_0 della forma

$$\frac{\lambda^4 U_0}{\lambda x^2 \lambda y^2} + P' \frac{\lambda^3 U_0}{\lambda x^2 \lambda y} + Q' \frac{\lambda^2 U_0}{\lambda y^2 \lambda x} + R' \frac{\lambda^2 U_0}{\lambda x^2} + S' \frac{\lambda^2 U_0}{\lambda x \lambda y} + T' \frac{\lambda^2 U_0}{\lambda y^2} + \\ + L' \frac{\lambda U_0}{\lambda x} + M' \frac{\lambda U_0}{\lambda y} + N' U_0 = 0.$$

Colla integrazione di questa equazione il nostro problema sarà completamente risoluto, avendosi immediatamente, senza ulteriori integrazioni, dalla prima delle (9), la V_0 , poi dalla seconda la u_0 e finalmente v_0 dalla terza. Un ragionamento analogo vale pel sistema ridotto nelle forme (9'), (10), (10').

12. Queste conclusioni valgono in generale, ma vi sono dei casi nei quali il nostro problema consente ulteriori semplificazioni. Per questo però è necessario distinguere il caso in cui il nostro sistema (1) è riducibile alla forma (9) o (9') (cioè il caso di $D=0$, $l+l'=0$) da quello in cui è riducibile alla forma (10) o (10') (cioè il caso di $D=0$ ma $l+l'$ diverso da zero).

È evidente che se nel sistema (9) si ha

$$F=0, \quad C=0,$$

esso è integrabile con sole quadrature. In questo modo vengono ad imporsi due nuove condizioni cui debbono soddisfare i coefficienti del sistema (1). Poniamoci nella ipotesi più generale, onde non prolungare troppo la discussione, e cioè che gli elementi l, l', l', l' , soddisfacenti già le due condizioni $D=0$, $l+l'=0$, sieno diversi da zero, e ricordiamo che, a causa delle (6), si ha

$$A \cdot C = \mu(\mu_1 + a\mu + c\mu') - \mu(\mu_2 + a'\mu + c'\mu') = \\ = -\mu^2 \left\{ \frac{\lambda}{\lambda y} \frac{\mu'}{\mu} - c \left(\frac{\mu'}{\mu} \right)^2 + (c' - a) \frac{\mu'}{\mu} + a' \right\},$$

$$A \cdot F = \mu(\mu_1 + b\mu + f\mu') - \mu(\mu_1 + b'\mu + f'\mu') = \\ = -\mu^2 \left\{ \frac{\lambda}{\lambda x} \frac{\mu'}{\mu} - f \left(\frac{\mu'}{\mu} \right)^2 + (f' - b) \frac{\mu'}{\mu} + b' \right\}.$$

mentre per ottenere il sistema (9) si doveva porre

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{l}{l} = \frac{l'}{l}.$$

Ne concluderemo che il sistema (1) sarà integrabile con sole quadrature quando sieno soddisfatte le quattro condizioni

$$D=0, \quad l+l'=0,$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\lambda}{\lambda y} \frac{l'}{l} - c \left(\frac{l'}{l} \right)^2 + (c' - a) \frac{l'}{l} + a' &= 0, \\ \frac{\lambda}{\lambda x} \frac{l'}{l} - f \left(\frac{l'}{l} \right)^2 + (f' - b) \frac{l'}{l} + b' &= 0. \end{aligned} \right.$$

Se fosse solamente verificata la condizione $C=0$ e non $F=0$, l'equazione differenziale finale si abbasserebbe al terzo ordine, ed integrata questa, e quindi determinata U_0 , ne risulterebbero subito V_0, μ_0 , mentre v_0 sarebbe data con semplici quadrature. E se fosse invece $F=0$ e non $C=0$, si avrebbe subito con quadrature U_0 e l'equazione in V_0 risulterebbe del terzo ordine. Con la integrazione poi di questa equazione il nostro problema resterebbe completamente risoluto. È evidente che analoghe considerazioni possono farsi relativamente al sistema (9); ma per brevità le tralascio, come pure tralascio di considerare il caso in cui l, t, l', t' non sieno tutti diversi da zero.

13. Quando invece il sistema (1) sia ridotto alla forma (10) o (10'), per essere $D=0$ ma non $l+t=0$, se si ha

$$F=0, \quad C=0,$$

le prime due equazioni sulla stessa linea del sistema (10), con sole quadrature, ci danno U_0, μ_0 ; le altre due, derivando l'ultima rispetto ad x e ricordando che $T=l+t'$, conducono colla eliminazione di V_0 , all'equazione in v_0 del tipo dell'equazione di EULERO-LAPLACE

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial v_0}{\partial x} + F' \frac{\partial v_0}{\partial y} + \left(\frac{\partial C}{\partial x} + F' C + l + t' \right) v_0 = H,$$

dove H è una funzione di x, y conosciuta.

Gli invarianti di questa equazione sono

$$l+t', \quad l+t'+\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial F'}{\partial y},$$

e poichè, per ipotesi $l+t'$ non è zero, il nostro sistema sarà integrabile per quadrature quando sia

$$(12) \quad l+t'+\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial F'}{\partial y}=0.$$

Intendiamo di considerare anche qui, onde non entrare in troppi dettagli, il caso degli elementi l, t, l', t' diversi da zero, ed allora, poichè per ottenere il sistema (10) doveva porsi

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{l'}{l} = \frac{t'}{t}, \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = -\frac{l}{l} = -\frac{t}{t},$$

così le condizioni $C=0, F=0$ vengono, anche in questo caso, rappresentate dalle (11). La (12), che ora vien sostituita all'altra $l+t=0$, può trasformarsi. Per questo osserviamo che dalle (6) si ha

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{A} \left\{ \lambda(\mu'_1 + a'\mu + c'\mu') - \lambda'(\mu_1 + a\mu + c\mu') \right\} = \\ &= \frac{\lambda\mu}{A} \left\{ \frac{l+t}{t} \frac{\partial \log \mu}{\partial y} + \frac{\partial l}{\partial y} \frac{1}{t} + \frac{c'l + c'l'}{t} + \frac{a't + a't'}{t} \right\}, \\ F &= \frac{1}{A} \left\{ \lambda(\mu'_1 + b'\mu + f'\mu') - \lambda'(\mu_1 + b\mu + f\mu') \right\} = \\ &= \frac{\lambda\mu}{A} \left\{ \frac{l+t}{t} \frac{\partial \log \mu}{\partial x} + \frac{\partial l}{\partial x} \frac{1}{t} + \frac{l'l' + f'l'}{t} + \frac{b't + b't'}{t} \right\}, \end{aligned}$$

e, per essere

$$\frac{\lambda \mu}{A} = \frac{l}{l' + l}.$$

anche

$$C' = \frac{\partial \log \mu}{\partial y} + \frac{l'}{l+l'} \frac{\partial \log \frac{l}{l'}}{\partial y} + \frac{c'l' + c'l}{l+l'} + \frac{a'l + al}{l+l'}.$$

$$F' = \frac{\partial \log \mu}{\partial x} + \frac{l'}{l+l'} \frac{\partial \log \frac{l}{l'}}{\partial x} + \frac{f'l' + f'l}{l+l'} + \frac{b'l + bl}{l+l'}.$$

Ma le condizioni (11), che presentemente supponiamo verificate, ci danno

$$\frac{\partial}{\partial y} \log \frac{l}{l'} = c \frac{l'}{l} - a' \frac{l}{l'} + a - c',$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{l}{l'} = f \frac{l'}{l} - b' \frac{l}{l'} + b - f'.$$

per cui sostituendo nelle precedenti, avremo più semplicemente

$$C' = \frac{\partial \log \mu}{\partial y} + c \frac{l'}{l} + a,$$

$$F' = \frac{\partial \log \mu}{\partial x} + f \frac{l'}{l} + b,$$

e la condizione (12) diventa

$$l + l' + \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{l'}{l} \left(\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) + c \frac{\partial l'}{\partial x} - f \frac{\partial l'}{\partial y} = 0.$$

Tenendo nuovamente conto delle (11), questa relazione si trasforma nell'altra

$$l + l' + \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} + f'a' - b'c + \frac{l'}{l} \left(\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + cb + f'd - c'f' - fa \right) = 0;$$

ma dalle (3) e (3') si ha

$$\frac{\partial c}{\partial x} + cb + f'd - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + fa + c'f' \right) = l_0 - l,$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} + f'a' - \left(\frac{\partial b}{\partial y} + b'c \right) = l_0 - l,$$

per cui, in fine, la (12) si riduce

$$l_0 + \frac{l'l_0}{l} = 0.$$

Potremo concluderne che il sistema (1) è integrabile con sole quadrature quando sieno soddisfatte tra i coefficienti le relazioni

$$D = 0, \quad l_2 t + l_1 l_3 = 0,$$

$$\frac{\partial l}{\partial y} t - c \left(\frac{l}{t}\right)^2 + (c' - a) \frac{l}{t} + a' = 0,$$

$$\frac{\partial l}{\partial x} t - f \left(\frac{l}{t}\right)^2 + (f' - b) \frac{l}{t} + b' = 0,$$

non essendo nulli nessuno degli elementi l, t, l', t' .

14. Sempre nella ipotesi di $C = F = 0$, tra la seconda e la quarta delle (10) potremmo eliminare v_3 , giungendo ad una equazione della forma

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} + \left(C' - \frac{\partial \log(t+l)}{\partial y} \right) \frac{\partial v_3}{\partial x} + F' \frac{\partial v_3}{\partial y} + \\ + \left(l + l' + C' F' + \frac{\partial F'}{\partial y} - F' \frac{\partial \log(t+l)}{\partial y} \right) v_3 = H,$$

dove H è una funzione conosciuta di x, y .

Qui i due invarianti sono

$$l + l' + \frac{\partial F'}{\partial y} - \frac{\partial C'}{\partial x} + \frac{\partial^2 \log(t+l)}{\partial x \partial y}, \quad l + l',$$

e poichè per ipotesi non è nullo il secondo, l'integrazione si potrà effettuare con semplici quadrature quando i coefficienti del sistema (1), oltre soddisfare la condizione $D = 0$ e le (11), soddisfino pure l'altra

$$l + l' + \frac{\partial F'}{\partial y} - \frac{\partial C'}{\partial x} + \frac{\partial^2 \log(t+l)}{\partial x \partial y} = 0.$$

Questa si trasforma facilmente, perchè, avendo già trovato

$$l + l' + \frac{\partial C'}{\partial x} - \frac{\partial F'}{\partial y} = \frac{l_2 t + l_1 l'}{t},$$

se ne conclude che può scriversi

$$(13) \quad \frac{\partial^2 \log(t+l)}{\partial x \partial y} + 2(l+l') = \frac{l_2 t + l_1 l'}{t}.$$

Si vede poi che, se nelle (10) si ha $\Lambda' = 0$, ovvero

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{l}{l} - c \left(\frac{l}{l} \right)^2 + (c' - a) \frac{l}{l} - a' = 0,$$

l'equazione differenziale finale si abbassa al terzo ordine, e se si avesse insieme $\Lambda' = 0$, $F = 0$ si abbasserebbe al secondo, restando in un caso a fare una quadratura, nell'altro due.

15. Analoghe considerazioni si potrebbero fare sul sistema (10') ed anche nell'ipotesi in cui gli elementi l, l', l'' non fossero tutti diversi da zero. Le tralascio per amor di brevità e così pure ometto il calcolo della eliminazione nel caso generale accennato al n. 11, riserbandomi di tornare su questa parte della teoria ove mi sia possibile stabilire qualche condizione, diversa da quelle accennate, che riduca l'equazione generale del quarto ordine; e passo al caso in cui gli invarianti D, D_2 sono ambedue differenti da zero.

In questa ipotesi, ricavando dalle prime delle (2) i valori di u, v e sostituendoli nelle due ultime otterremo un sistema, della stessa forma (1), cui soddisfano le U, V . Potremmo far uso della trasformazione già adoperata introducendo le variabili u_0, v_0 ; ma se in questo modo è possibile semplificare il processo di eliminazione, riducendo a zero alcuni coefficienti del sistema, valendoci delle indeterminate $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$, è pur vero che si complicherebbe la forma dei rimanenti coefficienti, per cui ci sembra più conveniente operare direttamente sul sistema (2). Dalle prime due equazioni di esso si ricava

$$u = \frac{l}{D} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x} + b'U + f'V \right\} - \frac{l'}{D} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + bU + fV \right\},$$

$$v = \frac{l'}{D} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + bU + fV \right\} - \frac{l}{D} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x} + b'U + f'V \right\},$$

mentre, derivandole rispetto ad y e tenendo conto delle altre, si ha

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial U}{\partial y} + f \frac{\partial V}{\partial y} +$$

$$+ (b_1 + l)U + (f_1 + l)V + (l_2 - a'l - a'l')u + (l_2 - c'l - c'l')v = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + b' \frac{\partial U}{\partial y} + f' \frac{\partial V}{\partial y} +$$

$$+ (b'_1 + l')U + (f'_1 + l')V + (l'_2 - a'l' - a'l'')u + (l'_2 - c'l' - c'l'')v = 0.$$

Sostituendo in queste per u, v i valori sopra trovati ed ordinando, si avrà il sistema

$$(14) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{1}{D} \left\{ \ell(l_1 - cl - c'l) - \ell(l_2 - al - a'l) \right\} \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial U}{\partial y} + \\ & + \frac{1}{D} \left\{ l(l_2 - al - a'l) - l(l_1 - cl - c'l) \right\} \frac{\partial V}{\partial x} + f \frac{\partial V}{\partial y} + \\ & + \left\{ b_2 + l + \frac{l'b - \ell b}{D} (l_2 - al - a'l) + \frac{\ell b - l'b}{D} (l_1 - cl - c'l) \right\} U + \\ & + \left\{ f_2 + l + \frac{\ell f' - \ell f}{D} (l_2 - al - a'l) + \frac{f f' - l f'}{D} (l_1 - cl - c'l) \right\} V = 0, \\ & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{1}{D} \left\{ \ell'(l'_1 - c'l' - c'l') - \ell'(l'_2 - al' - a'l') \right\} \frac{\partial U}{\partial x} + b' \frac{\partial U}{\partial y} + \\ & + \frac{1}{D} \left\{ l'(l'_2 - al' - a'l') - l'(l'_1 - c'l' - c'l') \right\} \frac{\partial V}{\partial x} + f' \frac{\partial V}{\partial y} + \\ & + \left\{ b'_2 + l' + \frac{l'b' - \ell b}{D} (l'_2 - al' - a'l') + \frac{\ell b - l'b'}{D} (l'_1 - c'l' - c'l') \right\} U + \\ & + \left\{ f'_2 + l' + \frac{\ell f' - \ell f}{D} (l'_2 - al' - a'l') + \frac{f f' - l f'}{D} (l'_1 - c'l' - c'l') \right\} V = 0, \end{aligned} \right.$$

dove, per brevità, abbiamo accennato, come suol farsi, con indici le derivate parziali rispetto ad x, y .

16. Designiamo con le lettere maiuscole gli elementi del sistema (14) corrispondenti a quelli del sistema (1) rispettivamente designati con le minuscole, e procuriamo di calcolarne le espressioni in funzione dei coefficienti del sistema (1).

Avremo

$$\begin{aligned} L_0 &= G - AB - CB' - \frac{\partial B}{\partial y} = \\ &= b_2 + l + \frac{l'b - \ell b}{D} (l_2 - al - a'l) + \frac{\ell b - l'b}{D} (l_1 - cl - c'l), \\ &- \frac{b}{D} \left\{ \ell(l_1 - cl - c'l) - \ell(l_2 - al - a'l) \right\} - \\ &- \frac{b'}{D} \left\{ l(l_2 - al - a'l) - l(l_1 - cl - c'l) \right\} - \frac{\partial b}{\partial y}, \end{aligned}$$

ovvero

$$L_0 = l.$$

Analogamente si troverà

$$L_0 = l, \quad T_0 = t, \quad L'_0 = \ell', \quad T'_0 = \ell',$$

e per conseguenza

$$D_0 = \begin{vmatrix} L_0 & T_0 \\ L'_0 & T'_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l & t \\ \ell' & \ell' \end{vmatrix} = D, \quad L_0 + T_0 = l + t.$$

Abbiamo così la proprietà, che trova il suo perfetto riscontro nella teoria relativa ad una sola equazione, per la quale gli elementi degli invarianti D , L , T del sistema in U, V formati ponendo in evidenza la derivazione rispetto ad y coincidono con quelli del sistema in u, v formati ponendo in evidenza la derivazione rispetto ad x .

17. Con facili riduzioni si trova analogamente

$$\begin{aligned}
 L &= G - AB - FA' - \frac{\partial A}{\partial x} = \\
 &= b_2 + l + \frac{b'}{D} \{ l(t_2 - al - a't) - l(t_2 - cl - c't) \} \\
 &\quad + \frac{f}{D} \{ l'(t_2 - al - a't) - l'(t_2 - cl - c't) \} \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{D} \{ l(t_2 - al - a't) - l(t_2 - cl - c't) \}, \\
 L' &= G' - AB' - F'A' - \frac{\partial A'}{\partial x} = \\
 &= b'_2 + l' + \frac{b'' - lb + f'l}{D} (t_2 - al - a't) + \frac{f'b - lb' - f'l}{D} (t_2 - cl - c't) \\
 &\quad + \frac{b'}{D} \{ l(t_2 - al - a't) - l(t_2 - cl - c't) \} \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{D} \{ l'(t_2 - al - a't) - l'(t_2 - cl - c't) \}, \\
 (15) \quad T &= H - CB - FC - \frac{\partial C}{\partial x} = \\
 &= f_2 + t + \frac{f'f - lf - bl}{D} (t_2 - al - a't) + \frac{f'f - lf + lb}{D} (t_2 - cl - c't) \\
 &\quad + \frac{f}{D} \{ l(t_2 - cl - c't) - l(t_2 - al - a't) \} \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{D} \{ l(t_2 - cl - c't) - l(t_2 - al - a't) \}, \\
 T' &= H' - CB' - F'C - \frac{\partial C'}{\partial x} = \\
 &= f'_2 + t' + \frac{f}{D} \{ l(t_2 - cl - c't) - l(t_2 - al - a't) \} \\
 &\quad + \frac{b'}{D} \{ l(t_2 - cl - c't) - l(t_2 - al - a't) \} \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{D} \{ l(t_2 - cl - c't) - l(t_2 - al - a't) \},
 \end{aligned}$$

e, sommando la prima e l'ultima,

$$\begin{aligned} L + T &= b_x + f'_x + l + \ell + \frac{\lambda}{\partial x} \frac{1}{D} \{ \ell l_x + l'_x - \ell' l_x - l'_x - aD - c'D \} \\ &= b_x + f'_x + l + \ell - a_x - c'_x + \frac{\lambda^2 \log D}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Ma dalle (3), (3') si ha

$$\begin{aligned} b_x &= \frac{\partial b}{\partial y} = g - ab - c\ell' - l_x, \\ f'_x &= \frac{\partial f'}{\partial y} = h' - a'f - c'f' - \ell'_x, \\ -a_x &= -\frac{\partial a}{\partial x} = l - g + ab + f'a, \\ -c'_x &= -\frac{\partial c'}{\partial x} = \ell' - h' + c\ell' + f'e', \end{aligned}$$

per cui, sostituendo sopra,

$$L + T = 2(l + \ell) - (l_x + \ell'_x) + \frac{\lambda^2 \log D}{\partial x \partial y};$$

e questa formula presenta una grande analogia con quella che nel metodo di LAPLACE esprime uno degli invarianti dell'equazione differenziale trasformata per mezzo dei due invarianti della primitiva.

18. Era da aspettarsi che una formula analoga esistesse puro per l'altro invariante

$$D = \begin{vmatrix} L & T \\ L' & T' \end{vmatrix},$$

ma ogni tentativo per ottenerla è riuscito vano.

Sono stato quindi indotto a ritenere che tale formula non esista e che D possa solo esprimersi per mezzo degli elementi l, ℓ, ℓ', ℓ'_x combinati coi singoli coefficienti del sistema (1). Che questa mia supposizione sia conforme al vero credo possa ritenersi rigorosamente dimostrato dalle seguenti osservazioni. Se esistesse una formula atta ad esprimere D in funzione dei soli invarianti $l + \ell, l_x + \ell'_x, D, D_x$, od anche, più generalmente, per mezzo dei soli elementi $l, \ell, \ell', \ell'_x, l_x, l'_x, \ell'_x, \ell'_x$ comunque combinati tra loro e con derivazioni od integrazioni, tale formula dovrebbe valere per qualsiasi forma dei coefficienti del sistema (1). L'espressione di D non dovrebbe, per conseguenza, cambiare per una variazione qualunque dei coefficienti del sistema (1) che lasciasse inalterati gli elementi $l, \ell, \ell', \ell'_x, l_x, l'_x, \ell'_x, \ell'_x$. Ora è facile dare un esempio nel quale ciò non avviene.

Supponiamo per questo che i coefficienti del sistema (1) sieno

$$\begin{aligned} a &= x, \quad b = y, \quad c = 0, \quad f = xy(x), \quad g = 1 + y + xy, \quad h = x^2y(x), \\ a' &= 0, \quad b' = \frac{1}{x}, \quad c' = x, \quad f' = y, \quad g' = 1, \quad h' = 2 + xy, \end{aligned}$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione qualunque della sola x , ed avremo

$$l = g - ab - fa' - \frac{\partial a}{\partial x} = 1 + y + xy - xy - 1 = y,$$

$$t = h - cb - fd' - \frac{\partial c}{\partial x} = x^2\varphi(x) - x^2\varphi(x) = 0,$$

$$l' = g' - ab' - f'a' - \frac{\partial a'}{\partial x} = 1 - 1 = 0,$$

$$t' = h' - cb' - f'd' - \frac{\partial c'}{\partial x} = 2 + xy - xy - 1 = 1,$$

$$l_0 = g - ab - cb' - \frac{\partial b}{\partial y} = 1 + y + xy - xy - 1 = y,$$

$$t_0 = h - af - cf' - \frac{\partial f}{\partial y} = x^2\varphi(x) - x^2\varphi(x) = 0,$$

$$l'_0 = g' - a'b - c'b' - \frac{\partial b'}{\partial y} = 1 - 1 = 0,$$

$$t'_0 = h' - f'a' - c'f' - \frac{\partial f'}{\partial y} = 2 + xy - xy - 1 = 1.$$

Questi elementi sono dunque indipendenti dalla funzione $\varphi(x)$, per cui, se esistesse una formula atta ad esprimere D in funzione delle sole $l, t, l', t', l_0, t_0, l'_0, t'_0$ comunque combinate, la D dovrebbe risultare indipendente da $\varphi(x)$. Andiamo a calcolare per nostro sistema i valori di L, T, L', T' , e per questo osserviamo intanto che le (15) nel caso, che è l'attuale, in cui sia $l' = t' = 0$ prendono la forma più semplice

$$L = b_1 + l + cb' \frac{l}{l'} - fa' \frac{l}{l'} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{l_1}{l} - a \right),$$

$$T = f_1 + fa - fd' + \left(cf' - cb - \frac{\partial c}{\partial x} \right) \frac{l}{l'} + f \frac{\partial \log \frac{l}{l'}}{\partial y} - c \frac{\partial l}{\partial x} \frac{1}{l'},$$

$$L' = b'_1 + b'c' - ab' + \left(a'b - a'f' - \frac{\partial a'}{\partial x} \right) \frac{l}{l'} + b' \frac{\partial \log \frac{l}{l'}}{\partial y} - a' \frac{\partial l}{\partial x} \frac{1}{l'},$$

$$T' = f'_1 + l' + fa' \frac{l}{l'} - cb' \frac{l}{l'} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{l'_1}{l'} - c' \right),$$

ovvero, sostituendo i valori sopra determinati per gli elementi che compariscono in queste espressioni,

$$L = 1 + y - 1 = y,$$

$$T = x^2\varphi(x) - x^2\varphi(x) - \frac{x\varphi(x)}{y} = -\frac{x\varphi(x)}{y},$$

$$L' = 1 - 1 + \frac{1}{xy} = \frac{1}{xy},$$

$$T' = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Otteniamo così per l'invariante D la formula

$$D = LT' - TL' = y + \frac{\varphi(x)}{y^2} = l + \frac{\varphi(x)}{l^2},$$

dipendente dalla funzione $\varphi(x)$; per cui, come avevamo asserito, possiamo concludere che non esiste una espressione di D per i soli elementi $l, l', l'', l_0, l_0', l_0''$.

Come presunzione di riprova dell'esattezza dei calcoli possiamo notare che, coi valori trovati, è soddisfatta la formula generale

$$L + T = 2(l + l') - (l_0 + l_0') + \frac{\partial^2 \log D}{\partial x \partial y}.$$

Ritengo inutile di calcolare D perchè la sua espressione, non avendo la semplicità di quella trovata per $L + T$, non presenta un interesse speciale. Dall'esame degli elementi L, T, L', T' si potrà giudicare se l'integrazione del sistema (14) consente quelle semplificazioni sopra notate, e per questo dovremo vedere se è $D = 0$, se è $L + T$ uguale o diverso da zero, e poi tener conto delle altre condizioni (11), (12), (13), che unite alle precedenti riducono l'integrazione del nostro sistema a semplici quadrature. Naturalmente se D non è zero potremo sul sistema (14) ripetere la trasformazione applicata al sistema (1), potendo avvenire che, così facendo, si cada sopra un sistema che ammette le accennate semplificazioni, operando in tutto, salvo le maggiori complicazioni nei calcoli, portate dalla natura speciale del problema, come nel metodo di LAPLACE.

19. Se il determinante D , non è zero anzichè operare sul sistema (2) potremo considerare il sistema (2'), giungendo ad un nuovo sistema nelle variabili U_0, V_0 analogo al primitivo (1). Per questo non sarebbe neppure necessario fare nuovi calcoli, e basterebbe sostituire, nelle formule precedentemente ottenute, agli elementi b, f, a, c, l, l', l'' rispettivamente $a, c, b, f, l_0, l_0', l_0''$ o cambiare tra loro x, y .

Si troverebbero, così facendo, formule analoghe a quelle sopra ricavate, e le medesime proprietà per gli invarianti del nuovo sistema in U_0, V_0 .

PARTE SECONDA.

1. Passiamo ora a considerare il caso in cui il sistema proposto si possa ridurre alla forma

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} l \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + m \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial v}{\partial x} + f \frac{\partial v}{\partial y} + g u + h v &= 0, \\ a' \frac{\partial u}{\partial x} + b' \frac{\partial u}{\partial y} + c' \frac{\partial v}{\partial x} + f' \frac{\partial v}{\partial y} + g' u + h' v &= 0, \end{aligned} \right.$$

ed osserviamo subito che il procedimento impiegato nella prima parte di questo lavoro non è più applicabile; però, con opportune modificazioni, possono ancora ottenersi dei risultati che hanno grande analogia coi precedenti. I richiami alle formule si riferiscono, d'ora in poi, a quelle di questa seconda parte e non a quelle, ugualmente numerate della prima, alle quali non avremo mai occasione di ricorrere.

Se l, m sono ambedue differenti da zero la prima equazione si può divider tutta per l , e quindi, non guardando, per ora, all'espressione dei coefficienti bensì alla forma delle equazioni, possiamo supporre senz'altro $l=1$. Osservando allora che si ha

$$\frac{\partial^2 m v}{\partial x \partial y} = m \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + m_1 \frac{\partial v}{\partial y} + m_2 \frac{\partial v}{\partial x} + m_{12} v,$$

dove si sono accennate con indici le derivate parziali di m , la prima equazione del nostro sistema si potrà scrivere

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (u + m v) + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + (c - m_2) \frac{\partial v}{\partial x} + (f - m_1) \frac{\partial v}{\partial y} + g u + (h - m_{12}) v = 0,$$

per cui, ponendo per simmetria

$$u + m v = U, \quad v = V,$$

e quindi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - m \frac{\partial V}{\partial x} - m_1 V, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - m \frac{\partial V}{\partial y} - m_2 V,$$

il sistema (1) (dove si è supposto $l=1$) diventa

$$(1') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial U}{\partial y} + (c - a m - m_2) \frac{\partial V}{\partial x} + (f - b m - m_1) \frac{\partial V}{\partial y} + g U + (h - a m_1 - b m_2 - g m - m_{12}) V &= 0, \\ a' \frac{\partial U}{\partial x} + b' \frac{\partial U}{\partial y} + (c' - a' m) \frac{\partial V}{\partial x} + (f' - b' m) \frac{\partial V}{\partial y} + g' U + (h' - a' m_1 - b' m_2 - g' m) V &= 0. \end{aligned} \right.$$

2. Non diminuiremo dunque la generalità delle nostre considerazioni partendo da un sistema della forma

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial v}{\partial x} + f \frac{\partial v}{\partial y} + g u + h v = 0, \\ a' \frac{\partial u}{\partial x} + b' \frac{\partial u}{\partial y} + c' \frac{\partial v}{\partial x} + f' \frac{\partial v}{\partial y} + g' u + h' v = 0, \end{cases}$$

o da un altro analogo in cui comparisca la derivata del secondo ordine della sola funzione v .

Vi sono dei casi particolari nei quali il sistema (1) subisce immediate semplificazioni. Così se fosse

$$c' = f' = h' = 0,$$

l'integrazione del sistema (2) si ridurrebbe a quella di due equazioni differenziali lineari a derivate parziali del primo ordine; e se fosse solo

$$c' = f' = 0,$$

si ridurrebbe alla integrazione di una equazione lineare del secondo ordine in u . Se invece fosse

$$\frac{c}{c'} = \frac{f}{f'} = \frac{h}{h'},$$

ed anche

$$a' = b' = g' = 0,$$

il sistema (2) si integrerebbe mediante una equazione lineare del primo ed una del secondo ordine della forma di quella di LAPLACE.

In fine se fosse

$$a' = b' = 0,$$

ed anche

$$\frac{c}{c'} = \frac{f}{f'},$$

il nostro problema si ridurrebbe alla integrazione di una sola equazione differenziale lineare del terzo ordine in v od in u contenente sole le derivate terze miste.

3. Non ci fermeremo su questi casi particolari, e tratteremo subito il caso generale.

Esclusa l'ipotesi, già considerata, di $c' = f' = 0$, supponiamo c' diverso da zero, ed osserviamo che il sistema (2) si può scrivere

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(a - \frac{c}{c'} a'\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(b - \frac{c}{c'} b'\right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(f - \frac{c}{c'} f'\right) \frac{\partial v}{\partial y} + \\ \quad + \left(g - \frac{c}{c'} g'\right) u + \left(h - \frac{c}{c'} h'\right) v = 0, \\ a' \frac{\partial u}{\partial x} + b' \frac{\partial u}{\partial y} + c' \frac{\partial v}{\partial x} + f' \frac{\partial v}{\partial y} + g' u + h' v = 0. \end{cases}$$

Ponendo, nella prima, in evidenza la derivazione rispetto ad y , avremo

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \left(b - \frac{c}{\sigma} b' \right) u + \left(f - \frac{c}{\sigma} f' \right) v \right\} + \\ & + \left(a - \frac{c}{\sigma} a' \right) \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \left(b - \frac{c}{\sigma} b' \right) u + \left(f - \frac{c}{\sigma} f' \right) v \right\} + \\ & + \left\{ g - \frac{c}{\sigma} g' - \left(a - \frac{c}{\sigma} a' \right) \left(b - \frac{c}{\sigma} b' \right) - \left(b - \frac{c}{\sigma} b' \right)_1 \right\} u + \\ & + \left\{ h - \frac{c}{\sigma} h' - \left(a - \frac{c}{\sigma} a' \right) \left(f - \frac{c}{\sigma} f' \right) - \left(f - \frac{c}{\sigma} f' \right)_1 \right\} v = 0, \end{aligned}$$

per cui la integrazione del sistema (2) si ridurrà a quella delle tre equazioni simultanee del primo ordine

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial y} + \left(a - \frac{c}{\sigma} a' \right) U + l_u u + l_v v = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \left(b - \frac{c}{\sigma} b' \right) u + \left(f - \frac{c}{\sigma} f' \right) v = U \\ a' \frac{\partial u}{\partial x} + b' \frac{\partial u}{\partial y} + c' \frac{\partial v}{\partial x} + f' \frac{\partial v}{\partial y} + g' u + h' v = 0, \end{cases}$$

avendo posto per semplicità

$$(5) \quad \begin{cases} g - \frac{c}{\sigma} g' - \left(a - \frac{c}{\sigma} a' \right) \left(b - \frac{c}{\sigma} b' \right) - \left(b - \frac{c}{\sigma} b' \right)_1 = l_u \\ h - \frac{c}{\sigma} h' - \left(a - \frac{c}{\sigma} a' \right) \left(f - \frac{c}{\sigma} f' \right) - \left(f - \frac{c}{\sigma} f' \right)_1 = l_v. \end{cases}$$

Analogamente, supponendo f' differente da zero, e ponendo in evidenza, nella prima equazione del sistema (1), dopo averla modificata come si è fatto sopra, la derivazione rispetto ad x , avremo le tre equazioni lineari del primo ordine

$$(4') \quad \begin{cases} \frac{\partial U_0}{\partial x} + \left(b - \frac{f}{\rho} b' \right) U_0 + l_u u + l_v v = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \left(a - \frac{f}{\rho} a' \right) u + \left(c - \frac{f}{\rho} c' \right) v = U_0 \\ a' \frac{\partial u}{\partial x} + b' \frac{\partial u}{\partial y} + c' \frac{\partial v}{\partial x} + f' \frac{\partial v}{\partial y} + g' u + h' v = 0, \end{cases}$$

avendo qui pure posto

$$(5') \quad \begin{cases} g - \frac{f}{\rho} g' - \left(b - \frac{f}{\rho} b' \right) \left(a - \frac{f}{\rho} a' \right) - \left(a - \frac{f}{\rho} a' \right)_1 = l_u \\ h - \frac{f}{\rho} h' - \left(b - \frac{f}{\rho} b' \right) \left(c - \frac{f}{\rho} c' \right) - \left(c - \frac{f}{\rho} c' \right)_1 = l_v. \end{cases}$$

È evidente che quanto diremo pel sistema (4) varrà anche pel sistema (4') purchè si scambino tra loro le x, y ed i relativi coefficienti delle derivate parziali di u, v rispetto a quelle variabili.

4. Considerando il sistema (4), se i coefficienti del sistema proposto (1) soddisfano le condizioni

$$(6) \quad \begin{cases} g - \frac{c}{\sigma} g' - \left(a - \frac{c}{\sigma} a'\right) \left(b - \frac{c}{\sigma} b'\right) - \left(b - \frac{c}{\sigma} b'\right)_z = t = 0, \\ h - \frac{c}{\sigma} h' - \left(a - \frac{c}{\sigma} a'\right) \left(f - \frac{c}{\sigma} f'\right) - \left(f - \frac{c}{\sigma} f'\right)_z = t = 0, \end{cases}$$

otterremo dalla prima, con sole quadrature, la funzione U , e dopo resterà ad integrarsi una equazione lineare completa del secondo ordine nella sola funzione u .

Se, più particolarmente, i coefficienti del sistema (1) soddisfacessero le tre relazioni

$$(7) \quad \begin{cases} g - \frac{c}{\sigma} g' - \left(a - \frac{c}{\sigma} a'\right) \left(b - \frac{c}{\sigma} b'\right) - \left(b - \frac{c}{\sigma} b'\right)_z = t = 0 \\ f - \frac{c}{\sigma} f' = 0 \\ h - \frac{c}{\sigma} h' = 0, \end{cases}$$

avremmo dalle (4), con sole quadrature, le funzioni u, U , mentre la v dovrebbe determinarsi dall'equazione

$$c \frac{\partial v}{\partial x} + f' \frac{\partial v}{\partial y} + h' v = H,$$

con H funzione conosciuta di x, y . Ogni difficoltà sarebbe ricondotta all'integrazione della equazione a derivato ordinario del primo ordine

$$f' dx - c' dy = 0.$$

Il problema ammetterebbe una soluzione con sole quadrature quando le (7) fossero verificate avendosi separatamente

$$f = f' = 0.$$

Questa ipotesi è ammissibile perchè dobbiamo ricordare che il sistema (4) è stato ottenuto supponendo c' diverso da zero e senza fare alcuna ipotesi sopra f' . Del resto questa riduzione appare evidente considerando il sistema (2), e ricordando la nota teoria di LAPLACE

5. Se tra i coefficienti del nostro sistema sussistesse la sola relazione

$$(8) \quad h - \frac{c}{\sigma} h' - \left(a - \frac{c}{\sigma} a'\right) \left(f - \frac{c}{\sigma} f'\right) - \left(f - \frac{c}{\sigma} f'\right)_z = t = 0,$$

le (4) diverrebbero

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} + \left(a - \frac{c}{c'} a'\right) U + l u &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \left(b - \frac{c}{c'} b'\right) u + \left(f - \frac{c}{c'} f'\right) v &= U \\ a' \frac{\partial u}{\partial x} + b' \frac{\partial u}{\partial y} + c' \frac{\partial v}{\partial x} + f' \frac{\partial v}{\partial y} + g' u + h' v &= 0, \end{aligned}$$

e si potrebbe eliminare u, v giungendo ad una equazione lineare omogenea del terzo ordine in U contenente le sole derivate terze miste. L'integrazione di questa equazione risolverebbe completamente il nostro problema.

6. Se invece si avesse solamente

$$g - \frac{c}{c'} g' - \left(a - \frac{c}{c'} a'\right) \left(b - \frac{c}{c'} b'\right) - \left(b - \frac{c}{c'} b'\right) l = 0,$$

il sistema (4) diverrebbe

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} + \left(a - \frac{c}{c'} a'\right) U + l v &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \left(b - \frac{c}{c'} b'\right) u + \left(f - \frac{c}{c'} f'\right) v &= U \\ a' \frac{\partial u}{\partial x} + b' \frac{\partial u}{\partial y} + c' \frac{\partial v}{\partial x} + f' \frac{\partial v}{\partial y} + g' u + h' v &= 0, \end{aligned}$$

e se non è verificata alcuna altra condizione tra i coefficienti del sistema (2), non appare immediatamente la possibilità della eliminazione di due funzioni. Non volendo supporre $f - \frac{c}{c'} f' = 0$, perchè questa ipotesi è già stata considerata anche indipendentemente dall'altra $l = 0$, troviamo che l'eliminazione è possibile quando sia contemporaneamente

$$l = 0, \quad b' = 0.$$

Infatti, in questo caso, combinando la seconda e la terza equazione, il sistema (4) può esser sostituito dall'altro

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} + \left(a - \frac{c}{c'} a'\right) U + l v &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + b u + \left(f - \frac{c}{c'} f'\right) v &= 0 \\ c' \frac{\partial v}{\partial x} + f' \frac{\partial v}{\partial y} + (g' - a' b) u + \left\{h' - a' \left(f - \frac{c}{c'} f'\right)\right\} v + a' U &= 0, \end{aligned}$$

e mentre dalla prima si ricaverà v espresso per U , $\frac{\partial U}{\partial y}$, dalla terza, se non è $g' - a'b = 0$, si ricaverà u espresso per U , $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ e colla sostituzione nella seconda otterremo una equazione del terzo ordine lineare omogenea in U contenente, al solito, le sole derivate terze miste. Se fosse però $g' = ba'$ l'equazione in U si abbasserebbe al secondo ordine, e per avere u dovremmo poi effettuare una quadratura.

7. Che la sola condizione $l = 0$ non apporti una immediata semplificazione al nostro problema si spiega col fatto che essa può esser sempre realizzata mediante una trasformazione del sistema (2).

Poniamo infatti

$$(9) \quad \begin{cases} u = \lambda u_0 + \mu v_0, \\ v = \lambda' u_0 + \mu' v_0; \end{cases}$$

e poichè si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial u_0}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_0}{\partial x} + \lambda_1 u_0 + \mu_1 v_0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial u_0}{\partial y} + \mu \frac{\partial v_0}{\partial y} + \lambda_2 u_0 + \mu_2 v_0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \lambda \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \lambda_3 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \mu_3 \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ &\quad + \lambda_4 \frac{\partial u_0}{\partial y} + \mu_4 \frac{\partial v_0}{\partial y} + \lambda_{12} u_0 + \mu_{12} v_0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \lambda' \frac{\partial u_0}{\partial x} + \mu' \frac{\partial v_0}{\partial x} + \lambda'_1 u_0 + \mu'_1 v_0, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \lambda' \frac{\partial u_0}{\partial y} + \mu' \frac{\partial v_0}{\partial y} + \lambda'_2 u_0 + \mu'_2 v_0. \end{aligned}$$

così il sistema (2) diverrà

$$(1') \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\mu}{\lambda} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\lambda_2 + a\lambda + c\lambda'}{\lambda} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\lambda_1 + b\lambda + f\lambda'}{\lambda} \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ &\quad + \frac{\mu_2 + a\mu + c\mu'}{\lambda} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\mu_1 + b\mu + f\mu'}{\lambda} \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \{ \lambda_{12} + a\lambda_1 + c\lambda'_1 + b\lambda_2 + f\lambda'_2 + g\lambda + h\lambda' \} u_0 \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} \{ \mu_{12} + a\mu_1 + c\mu'_1 + b\mu_2 + f\mu'_2 + g\mu + h\mu' \} v_0 = 0, \\ &(a'\lambda + c'\lambda') \frac{\partial u_0}{\partial x} + (b'\lambda + f'\lambda') \frac{\partial u_0}{\partial y} + (a'\mu + c'\mu') \frac{\partial v_0}{\partial x} + (b'\mu + f'\mu') \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ &\quad + \{ a'\lambda_1 + c'\lambda'_1 + b'\lambda_2 + f'\lambda'_2 + g'\lambda + h'\lambda' \} u_0 + \\ &\quad + \{ a'\mu_1 + c'\mu'_1 + b'\mu_2 + f'\mu'_2 + g'\mu + h'\mu' \} v_0 = 0, \end{aligned} \right.$$

assumendo la forma del primitivo (1).

Ponendo qui pure, come si è fatto in principio,

$$u_0 + \frac{\mu}{\lambda} v_0 = U_0 \quad . \quad v_0 = V_0,$$

otterremo

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} + \frac{\lambda_2 + a\lambda + c\lambda'}{\lambda} \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\lambda_1 + b\lambda + f\lambda'}{\lambda} \frac{\partial U_0}{\partial y} + \\ & + \left\{ \frac{\mu_2 + a\mu + c\mu'}{\lambda} - \frac{\lambda_2 + a\lambda + c\lambda'}{\lambda} \frac{\mu}{\lambda} - \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)_2 \right\} \frac{\partial V_0}{\partial x} + \\ & + \left\{ \frac{\mu_1 + b\mu + f\mu'}{\lambda} - \frac{\lambda_1 + b\lambda + f\lambda'}{\lambda} \frac{\mu}{\lambda} - \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)_1 \right\} \frac{\partial V_0}{\partial y} + \\ & + \frac{1}{\lambda} \left\{ \lambda_{12} + a\lambda_1 + c\lambda'_1 + b\lambda_2 + f\lambda'_2 + g\lambda + h\lambda' \right\} U_0 + \\ & + \left\{ \frac{\mu_{12} + a\mu_1 + c\mu'_1 + b\mu_2 + f\mu'_2 + g\mu + h\mu'}{\lambda} - \frac{\lambda_2 + a\lambda + c\lambda'}{\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)_1 - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\lambda_{12} + a\lambda_1 + c\lambda'_1 + b\lambda_2 + f\lambda'_2 + g\lambda + h\lambda'}{\lambda} \frac{\mu}{\lambda} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\lambda_1 + b\lambda + f\lambda'}{\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)_2 - \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)_{12} \right\} V_0 = 0, \\ & (a'\lambda + c'\lambda) \frac{\partial U_0}{\partial x} + (b'\lambda + f'\lambda) \frac{\partial U_0}{\partial y} + \left(a'\mu + c'\mu' - (a\lambda + c\lambda) \frac{\mu}{\lambda} \right) \frac{\partial V_0}{\partial x} \\ & \quad + \left(b'\mu + f'\mu' - (b\lambda + f\lambda) \frac{\mu}{\lambda} \right) \frac{\partial V_0}{\partial y} \\ & \quad + (a'\lambda_1 + c'\lambda'_1 + b'\lambda_2 + f'\lambda'_2 + g'\lambda + h'\lambda') U_0 + \\ & + \left\{ a'\mu_1 + c'\mu'_1 + b'\mu_2 + f'\mu'_2 + g'\mu + h'\mu' - (a\lambda + c\lambda) \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)_1 - (b\lambda + f\lambda) \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)_2 - \right. \\ & \quad \left. - (a'\lambda_1 + c'\lambda'_1 + b'\lambda_2 + f'\lambda'_2 + g'\lambda + h'\lambda') \frac{\mu}{\lambda} \right\} V_0 = 0, \end{aligned}$$

che è un sistema della forma (2).

I coefficienti di queste equazioni possono semplificarsi perchè, posto

$$A = \lambda\mu' - \mu\lambda',$$

si ha

$$\frac{\mu_2 + a\mu + c\mu'}{\lambda} - \frac{\lambda_2 + a\lambda + c\lambda'}{\lambda} \frac{\mu}{\lambda} - \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)_2 = c \frac{A}{\lambda^2},$$

$$\frac{\mu_1 + b\mu + f\mu'}{\lambda} - \frac{\lambda_1 + b\lambda + f\lambda'}{\lambda} \frac{\mu}{\lambda} - \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)_1 = f \frac{A}{\lambda^2},$$

$$a'\mu + c'\mu' - (a\lambda + c\lambda) \frac{\mu}{\lambda} = c' \frac{A}{\lambda},$$

$$b'\mu + f'\mu' - (b\lambda + f\lambda) \frac{\mu}{\lambda} = f' \frac{A}{\lambda}.$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\mu_{12} + a\mu_1 + c\mu'_1 + b\mu_2 + f\mu'_2 + g\mu + h\mu'}{\lambda} \\
 & \quad - \frac{\lambda_{12} + a\lambda_2 + c\lambda'_1 + b\lambda_2 + f\lambda'_2 + g\lambda + h\lambda'}{\lambda} \frac{\mu}{\lambda} = \\
 & \quad - \frac{\lambda_2 + a\lambda + c\lambda'}{\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)_1 - \frac{\lambda_1 + b\lambda + f\lambda'}{\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)_2 - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)_{12} = \\
 & = \frac{\mu_{12}\lambda - \lambda_{12}\mu}{\lambda^2} - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)_{12} - \frac{\lambda_2}{\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)_2 + c \left\{ \frac{\mu'_1}{\lambda} - \frac{\lambda'_1\mu}{\lambda^2} - \frac{\lambda'}{\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)_1 \right\} + \\
 & \quad + f \left\{ \frac{\mu'_2}{\lambda} - \frac{\lambda'_2\mu}{\lambda^2} - \frac{\lambda'}{\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)_2 \right\} + h \frac{A}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} \left\{ c \left(\frac{A}{\lambda}\right)_1 + f \left(\frac{A}{\lambda}\right)_2 + h \frac{A}{\lambda} \right\}, \\
 & a'\mu_1 + c'\mu'_1 + b'\mu_2 + f'\mu'_2 + g'\mu + h'\mu' - (a'\lambda + c'\lambda') \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)_1 - (b'\lambda + f'\lambda') \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)_2 = \\
 & \quad - (a'\lambda_1 + c'\lambda'_1 + b'\lambda_2 + f'\lambda'_2 + g'\lambda + h'\lambda') \frac{\mu}{\lambda} = \\
 & = c' \left\{ \mu'_1 - \lambda' \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)_1 - \frac{\mu\lambda'_1}{\lambda} \right\} + f' \left\{ \mu'_2 - \lambda' \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)_2 - \frac{\lambda'_2\mu}{\lambda} \right\} + \frac{h'A}{\lambda} = \\
 & \quad = c' \left(\frac{A}{\lambda}\right)_1 + f' \left(\frac{A}{\lambda}\right)_2 + h' \frac{A}{\lambda},
 \end{aligned}$$

e quindi, sostituendo sopra, avremo

$$(10) \left\{ \begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} + \frac{\lambda_2 + a\lambda + c\lambda'}{\lambda} \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\lambda_1 + b\lambda + f\lambda'}{\lambda} \frac{\partial U_0}{\partial y} + c \frac{A}{\lambda^2} \frac{\partial V_0}{\partial x} + f \frac{A}{\lambda^2} \frac{\partial V_0}{\partial y} + \\
 & \quad + \frac{1}{\lambda} \{ \lambda_{12} + a\lambda_1 + c\lambda'_1 + b\lambda_2 + f\lambda'_2 + g\lambda + h\lambda' \} U_0 + \\
 & \quad + \frac{1}{\lambda} \left\{ c \left(\frac{A}{\lambda}\right)_1 + f \left(\frac{A}{\lambda}\right)_2 + h \frac{A}{\lambda} \right\} V_0 = 0, \\
 & (a'\lambda + c'\lambda') \frac{\partial U_0}{\partial x} + (b'\lambda + f'\lambda') \frac{\partial U_0}{\partial y} + c' \frac{A}{\lambda} \frac{\partial V_0}{\partial x} + f' \frac{A}{\lambda} \frac{\partial V_0}{\partial y} + \\
 & \quad + \{ a'\lambda_1 + c'\lambda'_1 + b'\lambda_2 + f'\lambda'_2 + g'\lambda + h'\lambda' \} U_0 + \\
 & \quad + \left\{ c' \left(\frac{A}{\lambda}\right)_1 + f' \left(\frac{A}{\lambda}\right)_2 + h' \frac{A}{\lambda} \right\} V_0 = 0.
 \end{aligned} \right.$$

8. Indicando con le lettere maiuscole gli elementi di questo sistema corrispondenti a quelli del sistema (2) indicati con le lettere minuscole, osserviamo intanto che se si ha C' diverso da zero e di più

$$\begin{aligned}
 A - \frac{C}{C'} A' &= \frac{\lambda_2 + a\lambda + c\lambda'}{\lambda} - \frac{c}{c'} \frac{a'\lambda + c'\lambda'}{\lambda} = \frac{\lambda_2}{\lambda} + a - \frac{c}{c'} a', \\
 B - \frac{C}{C'} B' &= \frac{\lambda_1 + b\lambda + f\lambda'}{\lambda} - \frac{c}{c'} \frac{b'\lambda + f'\lambda'}{\lambda} = \frac{\lambda_1}{\lambda} + b - \frac{c}{c'} b' + \left(f - \frac{c}{c'} f' \right) \frac{\lambda'}{\lambda}, \\
 F - \frac{C}{C'} F' &= f \frac{A}{\lambda^2} - \frac{c}{c'} f' \frac{A'}{\lambda^2} = \left(f - \frac{c}{c'} f' \right) \frac{A}{\lambda^2}.
 \end{aligned}$$

$$G - \frac{C}{C'} G' = \frac{\lambda_{12} + a\lambda_1 + c\lambda'_1 + b\lambda_2 + f\lambda'_2 + g\lambda + h\lambda'}{\lambda} - \frac{\frac{c}{c'} a\lambda_1 + c'\lambda'_1 + b\lambda_2 + f'\lambda'_2 + g\lambda + h\lambda'}{\lambda} =$$

$$= \frac{\lambda_{12}}{\lambda} + \left(a - \frac{c}{c'} a'\right) \frac{\lambda_1}{\lambda} + \left(b - \frac{c}{c'} b'\right) \frac{\lambda_2}{\lambda} + \left(f - \frac{c}{c'} f'\right) \frac{\lambda'_2}{\lambda} + \left(h - \frac{c}{c'} h'\right) \frac{\lambda'}{\lambda} + \left(g - \frac{c}{c'} g'\right),$$

$$H - \frac{C}{C'} H' = \frac{1}{\lambda} \left\{ c \left(\frac{A}{\lambda}\right)_1 + f \left(\frac{A}{\lambda}\right)_2 + h \frac{A}{\lambda} \right\} - \frac{c}{\lambda c'} \left\{ c' \left(\frac{A}{\lambda}\right)_1 + f' \left(\frac{A}{\lambda}\right)_2 + h' \frac{A}{\lambda} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left(f - \frac{c}{c'} f' \right) \left(\frac{A}{\lambda}\right)_2 + \frac{1}{\lambda} \left(h - \frac{c}{c'} h' \right) \frac{A}{\lambda},$$

per cui con un facile calcolo otterremo

$$L = G - \frac{C}{C'} G' - \left(A - \frac{C}{C'} A'\right) \left(B - \frac{C}{C'} B'\right) - \left(B - \frac{C}{C'} B'\right)_2 =$$

$$= g - \frac{c}{c'} g' - \left(a - \frac{c}{c'} a'\right) \left(b - \frac{c}{c'} b'\right) - \left(b - \frac{c}{c'} b'\right)_2 +$$

$$+ \frac{\lambda'}{\lambda} \left\{ h - \frac{c}{c'} h' - \left(a - \frac{c}{c'} a'\right) \left(f - \frac{c}{c'} f'\right) - \left(f - \frac{c}{c'} f'\right)_2 \right\},$$

$$T = H - \frac{C}{C'} H' - \left(A - \frac{C}{C'} A'\right) \left(F - \frac{C}{C'} F'\right) - \left(F - \frac{C}{C'} F'\right)_2 =$$

$$= \left\{ h - \frac{c}{c'} h' - \left(a - \frac{c}{c'} a'\right) \left(f - \frac{c}{c'} f'\right) - \left(f - \frac{c}{c'} f'\right)_2 \right\} \frac{A}{\lambda^2},$$

ovvero

$$L = l + \frac{\lambda'}{\lambda} t.$$

$$T = \frac{A}{\lambda^2} t.$$

9. Queste formule ci mostrano che mediante la sostituzione (9) non sarà possibile trasformare il sistema (2) in un altro pel quale sia $T=0$, se già, sin da principio, non è $t=0$. Se però t è diverso da zero (e l'ipotesi contraria, come abbiamo visto, consente l'eliminazione di due funzioni tra le (4)) sarà sempre possibile fare in modo che risulti $L=0$. A questo scopo basterà prendere

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -\frac{l}{t},$$

e quindi $\lambda'=0$, se già fosse $l=0$, coll'avvertenza che, ove si passi alla determinazione delle quantità λ, μ, μ' , non risulti $A=0$.

Osservando che con questa determinazione di $\frac{\lambda'}{\lambda}$ risulta

$$B' = \lambda \left\{ b' + f' \frac{\lambda'}{\lambda} \right\} = \frac{\lambda'}{\lambda} b' l - f' l,$$

e ricordando quanto si disse al n. 6, ne concluderemo che l'integrazione del nostro sistema si ricondurrà a quella di una equazione differenziale del terzo ordine della forma più volte accennata, quando tra i coefficienti abbia luogo la relazione

$$(11) \quad b' l - f' l = 0.$$

10. Dalla forma dei coefficienti del sistema (10) risulta subito che è possibile l'eliminazione di U , giungendo al solito ad una equazione differenziale del terzo ordine, quando tra i coefficienti del primitivo sistema abbia luogo la relazione

$$(12) \quad a' f' - c' b' = 0,$$

potendosi allora determinare λ, λ' così che risulti

$$a' \lambda + c' \lambda' = 0 \quad , \quad b' \lambda + f' \lambda' = 0,$$

senza assumere $\lambda = 0$, poichè il caso di $c' = f' = 0$ deve escludersi, e del resto abbiamo già visto che consente l'eliminazione di v dal sistema (2). Anche lo studio diretto del sistema (2) mostrerebbe la possibilità della eliminazione quando sia verificata la (12).

11. Se i coefficienti non soddisfano alcuna delle condizioni che abbiamo precedentemente accennate, dalle (4) potremo trarre un nuovo sistema che ha la forma del primitivo (1) e cui soddisfano le funzioni u, U . Per facilitare l'eliminazione di v potremmo trar profitto delle indeterminate $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ della sostituzione (9) e partire così da un sistema pel quale si ha $L = 0, A - \frac{C}{C'} A' = 0$; ma se in tal modo si faciliterebbe il processo di eliminazione, si complicherebbe la forma degli altri elementi, per cui ritengo più opportuno partire direttamente dal sistema (4) nel quale è indifferente supporre l uguale a zero o no; ma supporremo $l, f - \frac{c}{c'} f'$ differenti da zero, perchè l'ipotesi che una di queste quantità sia nulla è stata già considerata.

Poniamo per amor di brevità

$$a - \frac{c}{c'} a' = \alpha \quad , \quad b - \frac{c}{c'} b' = \beta \quad , \quad f - \frac{c}{c'} f' = \varphi,$$

ricaviamo dalle prime due delle (4) i valori di v , deriviamoli una volta rispetto ad x ed una rispetto ad y , ed avremo

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{l} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\alpha}{l} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{l}{l} \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{1}{l} \right)_1 \frac{\partial U}{\partial y} - \left(\frac{\alpha}{l} \right)_1 U - \left(\frac{l}{l} \right)_1 u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\beta}{\varphi} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial U}{\partial y} - \left(\frac{1}{\varphi} \right)_2 \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\beta}{\varphi} \right)_2 u + \left(\frac{1}{\varphi} \right)_2 U,$$

e dopo sarà facile eliminare v giungendo alle due equazioni

$$(13) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{t f'}{g c'} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left\{ \frac{l c' - t a'}{c'} + \frac{f' t}{c'} \left(\frac{1}{g} \right)_1 \right\} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\beta f' - g' b'}{g} \cdot \frac{t}{c'} \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha \frac{\partial U}{\partial x} \\ & + \left\{ \frac{K'}{c'} - \frac{f' t}{g c'} - \frac{\partial \log t}{\partial x} \right\} \frac{\partial U}{\partial y} + \left\{ \frac{K l - g' t}{c'} + \frac{f' t}{c'} \left(\frac{\beta}{g} \right)_2 + t \left(\frac{l}{t} \right)_1 \right\} u + \\ & + \left\{ t \left(\frac{\alpha}{t} \right)_1 - \frac{f' t}{c'} \left(\frac{1}{g} \right)_2 + \frac{K \alpha}{c'} \right\} U = 0, \\ & t \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial U}{\partial y} + (t \beta - t g) u - (\alpha g + t) U = 0, \end{aligned} \right.$$

che costituiscono un sistema analogo al primitivo (1) ma di forma più semplice perchè la seconda equazione manca delle due derivate $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial x}$. Questo sistema si potrà ancora ridurre alla forma (2) ponendo

$$U + \frac{t f'}{g c'} u = U_1, \quad u = V_1,$$

per applicare poi ad esso il metodo sopra esposto.

12. Si vede che, nel caso più generale in cui tra i coefficienti non sussista alcuna delle condizioni sopra accennate, il sistema proposto (1) è sempre riducibile ad un altro della forma più semplice

$$(14) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + e \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial v}{\partial x} + f \frac{\partial v}{\partial y} + g u + h v = 0, \\ & \frac{\partial u}{\partial x} + f' \frac{\partial v}{\partial y} + g' u + h' v = 0, \end{aligned} \right.$$

dove g è diverso da zero, per le nostre ipotesi, se tale è f' .

Questo risultato oltre apparire spontaneo col metodo che abbiamo applicato al sistema (2), si poteva ottenere anche dalla considerazione delle (1'). Infatti se determiniamo i coefficienti della sostituzione (8) così che sia

$$b \lambda + f' \lambda' = 0, \quad a' \mu + e' \mu' = 0,$$

otteniamo un sistema della forma (14). Per non fare troppe distinzioni supponiamo che le c' , f' del sistema (2) sieno differenti da zero, ed allora quelle due condizioni possono verificarsi facendo

$$\lambda' = -\frac{b'}{f'}, \quad \lambda = 1, \quad \mu' = -\frac{a'}{c'}, \quad \mu = 1,$$

a meno che non sia

$$\frac{b'}{f'} = \frac{a'}{c'},$$

il che può escludersi avendo già considerata questa ipotesi.

Con tali posizioni il sistema (1') assume la forma

$$(15) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \left(a - c \frac{b'}{f'} \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} + \left(b - f \frac{b'}{f'} \right) \frac{\partial u_0}{\partial y} + \left(a - c \frac{a'}{c'} \right) \frac{\partial v_0}{\partial x} + \\ & \quad + \left(b - f \frac{a'}{c'} \right) \frac{\partial v_0}{\partial y} + \left\{ g - h \frac{b'}{f'} - f \left(\frac{b'}{f'} \right)_2 - c \left(\frac{b'}{f'} \right)_1 \right\} u_0 + \\ & \quad + \left\{ g - h \frac{a'}{c'} - f \left(\frac{a'}{c'} \right)_2 - c \left(\frac{a'}{c'} \right)_1 \right\} v_0 = 0, \\ & \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{f'}{a'f' - c'b'} \left\{ g' - h' \frac{b'}{f'} - f' \left(\frac{b'}{f'} \right)_2 - c' \left(\frac{b'}{f'} \right)_1 \right\} u_0 + \\ & \quad + \frac{f'}{a'f' - c'b'} \left\{ g' - h' \frac{a'}{c'} - f' \left(\frac{a'}{c'} \right)_2 - c' \left(\frac{a'}{c'} \right)_1 \right\} v_0 = 0. \end{aligned} \right.$$

analoga a quella del sistema (14) in cui sia fatto $e=1$, $f'=-1$. Del resto anche nel sistema (14) potrebbe suppersi $e=1$, quando alla funzione v si sostituisse ev .

Per comprendere insieme lo studio dei due sistemi (13), (15) partiremo dal sistema (14), nel quale ai coefficienti potremo poi assegnare le espressioni che hanno in quelli.

13. Le (14) possono scriversi nel seguente modo

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + bu + fv \right\} + e \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{a}{e} u + \frac{c}{e} v \right\} + \\ & \quad + \left\{ g - b_2 - e \left(\frac{a}{e} \right)_1 \right\} u + \left\{ h - f_2 - e \left(\frac{c}{e} \right)_1 \right\} v = 0, \\ & \frac{\partial u}{\partial x} + bu + fv + f' \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{a}{e} u + \frac{c}{e} v \right\} + \\ & \quad + \left\{ g' - b - \frac{af'}{e} \right\} u + \left\{ h' - f - \frac{cf'}{e} \right\} v = 0, \end{aligned}$$

per cui, mantenendo i simboli (5) ma con un altro significato, col porre

$$\begin{aligned} g - b_2 - e \left(\frac{a}{e} \right)_1 &= l, & h - f_2 - e \left(\frac{c}{e} \right)_1 &= l', \\ g' - b - \frac{af'}{e} &= l'', & h' - f - \frac{cf'}{e} &= l''', \end{aligned}$$

la loro integrazione si riporta a quella del sistema

$$(16) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial y} + e \frac{\partial V}{\partial x} + lu + lv = 0, & U &= \frac{\partial u}{\partial x} + bu + fv, \\ & U + f'V + l'u + l'v = 0, & V &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{a}{e}u + \frac{c}{e}v. \end{aligned} \right.$$

e se i coefficienti soddisfano le condizioni

$$l=0, \quad t=0, \quad l'=0, \quad t'=0,$$

avremo da integrare l'equazione a derivate parziali lineare

$$e \frac{\partial V}{\partial x} - f' \frac{\partial V}{\partial y} = f_1 V,$$

o l'altra

$$e \frac{\partial U}{\partial x} - f' \frac{\partial U}{\partial y} = e \frac{\partial \log f'}{\partial x} U,$$

e poi le due

$$U = \frac{\partial u}{\partial x} + bu + v,$$

$$V = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{a}{e} u + \frac{c}{e} v,$$

che conducono ad una equazione lineare del secondo ordine in u od in v del tipo di quella di LAPLACE.

Tralascio per brevità la formazione di questa equazione, dalla quale potremmo ricavare delle condizioni di integrabilità per quadrature, ed osservo solamente che le quattro condizioni $l=t=f=f'=0$, in verità si riducono a due, perchè, mediante una conveniente trasformazione della (14), si può sempre fare in modo che due di esse sieno spontaneamente verificate.

14. A questo scopo, e per non variare la forma delle (14), poniamo

$$u = \lambda u_0, \quad v = \mu v_0,$$

e troveremo che esse diventano

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + e \frac{\mu}{\lambda} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\lambda_2 + a\lambda}{\lambda} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\lambda_1 + b\lambda}{\lambda} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \\ & \quad + \frac{e\mu_2 + c\mu}{\lambda} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{e\mu_1 + f\mu}{\lambda} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \\ & \quad + \frac{1}{\lambda} \{ \lambda_{12} + a\lambda_1 + b\lambda_2 + \gamma\lambda \} u_0 + \frac{1}{\lambda} \{ e\mu_{12} + c\mu_1 + f\mu_2 + h\mu \} v_0 = 0, \\ & \frac{\partial u_0}{\partial x} + f' \frac{\mu}{\lambda} \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\lambda_1 + g'\lambda}{\lambda} u_0 + \frac{f'\mu_2 + h'\mu}{\lambda} v_0 = 0. \end{aligned} \right.$$

Indicando con $\lambda_0, \lambda_0', \lambda_0''$ gli elementi di questo sistema analoghi a quelli del sistema (14) indicati con l, t, l', t' , avremo

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_2}{\lambda} + g' - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} + b \right) - \frac{\lambda_2 + a\lambda}{\lambda} \frac{f'}{e} = g' - b - a \frac{f'}{e} - \frac{\lambda_2}{\lambda} \frac{f'}{e} = l' - \frac{f'}{e} \frac{\lambda_2}{\lambda},$$

$$\lambda_0' = \frac{f'\mu_2 + h'\mu}{\lambda} - \frac{e\mu_1 + f\mu}{\lambda} \frac{f'}{e} - \frac{e\mu_2 + c\mu}{\lambda} \frac{f'}{e} = \frac{\mu}{\lambda} \left(h' - f' - \frac{c f'}{e} \right) - \frac{e}{\lambda} \mu_1 = \frac{\mu}{\lambda} l' - \frac{e\mu_1}{\lambda}.$$

per cui, prendendo

$$\lambda = e^{\int \frac{p}{r} dx}, \quad \mu = e^{\int \frac{q}{r} dx},$$

risulterà

$$L_0 = 0, \quad L_0' = 0.$$

Farebbero eccezione i casi di $r' = 0$ o $q = 0$; ma il primo consente la immediata eliminazione di v , il secondo deve essere escluso sin dalla prima applicazione del metodo.

15. Otterremo ancora

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{\lambda_{11} + a\lambda_1 + b\lambda_2 + g\lambda}{\lambda} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} + b\right)_1 - \frac{e\mu}{\lambda} \left(\frac{\lambda_2 + a\lambda}{e\mu}\right)_1 = \\ &= g - b_2 - \frac{\lambda_{12}}{\lambda} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda^2} + b \frac{\lambda_2}{\lambda} - e \left(\frac{a}{e}\right)_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda} \frac{e_1}{e} + \frac{\lambda_2}{\lambda} \frac{\mu_1}{\mu} + a \frac{\mu_2}{\mu} = \\ &= l + a \frac{\mu_1}{\mu} + b \frac{\lambda_2}{\lambda} + \frac{\mu_1 \lambda_2}{\mu \lambda} - e \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{e} \frac{\lambda_2}{\lambda}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{e\mu_{11} + c\mu_1 + f\mu_2 + h\mu}{\lambda} - \left(\frac{e\mu_1 + f\mu}{\lambda}\right)_1 - \frac{e\mu}{\lambda} \left(\frac{e\mu_2 + c\mu}{e\mu}\right)_1 = \\ &= \frac{\mu}{\lambda} \left\{ h - f_2 - e \left(\frac{c}{e}\right)_1 + c \frac{\mu_1}{\mu} + f \frac{\lambda_2}{\lambda} + e \frac{\mu_1 \lambda_2}{\mu \lambda} - \frac{\partial}{\partial y} e \frac{\mu_2}{\mu} \right\} = \\ &= \frac{\mu}{\lambda} \left\{ l + c \frac{\mu_1}{\mu} + f \frac{\lambda_2}{\lambda} + e \frac{\mu_1 \lambda_2}{\mu \lambda} - \frac{\partial}{\partial y} e \frac{\mu_2}{\mu} \right\}, \end{aligned}$$

e poichè si è posto

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{l'}{e}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda} = e \frac{l'}{r'},$$

risulterà

$$\begin{aligned} l_0 &= l + a \frac{l'}{e} + \frac{bq}{r'} l' + \frac{ell'}{r'} - e \frac{\partial}{\partial x} \frac{l'}{r'}, \\ l_0 &= \frac{\mu}{\lambda} \left\{ l + c \frac{l'}{e} + \frac{fel'}{r'} + e \frac{ell'}{r'} - \frac{\partial}{\partial y} l' \right\}. \end{aligned}$$

Ne concluderemo che alle quattro condizioni che permettono l'accennata riduzione del nostro problema potremo sostituire le due

$$(18) \quad \begin{cases} l + a \frac{l'}{e} + \frac{bq}{r'} l' + \frac{ell'}{r'} - e \frac{\partial}{\partial x} \frac{l'}{r'} = 0, \\ l + c \frac{l'}{e} + \frac{fel'}{r'} + \frac{ell'}{r'} - \frac{\partial}{\partial y} l' = 0. \end{cases}$$

16. L'osservazione ora fatta ci permette di ricondurre l'integrazione del sistema (14) a quella delle seguenti equazioni

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{\partial U_0}{\partial y} + e \frac{\mu}{\lambda} \frac{\partial V_0}{\partial x} + l_0 u_0 + l_0 v_0 = 0, \\ U_0 + f \frac{\mu}{\lambda} V_0 = 0, \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\lambda_1 + b\lambda}{\lambda} u_0 + \frac{e\mu_1 + f\mu}{\lambda} v_0 = U_0, \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\lambda_2 + a\lambda}{e\mu} v_0 + \left(\frac{\mu_2}{\mu} + \frac{c}{e} \right) v_0 = V_0. \end{cases}$$

dove λ, μ hanno i valori precedentemente loro assegnati.

Se delle (18) ne è soddisfatta una sola sarà ancora possibile, tra le (19), di effettuare l'eliminazione di tre funzioni giungendo ad una sola equazione lineare del terzo ordine in U_0 o V_0 .

Un risultato analogo si ottiene anche quando essendo l_0, l_0 diverse da zero tra i coefficienti del sistema (14) si verifichi l'una o l'altra delle due relazioni

$$(20) \quad \frac{\lambda_1}{\lambda} = e \frac{f}{f} = -a, \quad \frac{\mu_1}{\mu} = \frac{e}{e} = -\frac{f}{e}.$$

Infatti nel primo caso le (19) diventano

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{e\mu}{\lambda} \frac{\partial V_0}{\partial x} + l_0 u_0 + l_0 v_0 &= 0, \\ U_0 + f \frac{\mu}{\lambda} V_0 &= 0, \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\lambda_1 + b\lambda}{\lambda} u_0 + \frac{e\mu_1 + f\mu}{\lambda} v_0 &= U_0, \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \left(\frac{\mu_2}{\mu} + \frac{c}{e} \right) v_0 &= V_0, \end{aligned}$$

e ricavando il valore di u_0 dalla prima e sostituendolo nella terza, questa assumerà la forma

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} + K \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + A \frac{\partial U_0}{\partial y} + B \frac{\partial V_0}{\partial x} + C \frac{\partial v_0}{\partial x} + D U_0 + E v_0 = 0,$$

od anche, a causa della seconda,

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x \partial y} + K_1 \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + A_1 \frac{\partial V_0}{\partial x} + B_1 \frac{\partial V_0}{\partial y} + C_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} + D_1 V_0 + E_1 v_0 = 0.$$

Questa poi col sostituirvi il valore di V_0 dato dalla quarta si cambia in una equazione del terzo ordine in v_0 del solito tipo.

Un ragionamento analogo, salvo che l'equazione finale sarà in u_0 , varrà nel secondo caso.

Le condizioni (20) tenendo conto delle espressioni di l, t, l', t' assumono la forma assai semplice

$$(21) \quad g' = b \quad , \quad h'q - cf' = 0.$$

17. Osserviamo in fine che se fossero contemporaneamente verificate le relazioni

$$l_0 = 0 \quad , \quad \frac{\lambda_2}{\lambda} = q \frac{f'}{f} = -a,$$

o le altre

$$l_0 = 0 \quad , \quad \frac{\mu_2}{\mu} = \frac{f'}{q} = -\frac{f}{q},$$

l'equazione differenziale finale risulterebbe in U_0 o V_0 , e del secondo ordine, integrata la quale, per risolvere completamente il nostro problema, resterebbe a fare una sola quadratura.

Queste condizioni si trasformano facilmente nelle altre più semplici

$$(22) \quad g - ab - b_0 = 0 \quad , \quad g' = b.$$

e

$$(22') \quad hq - cf - e^r \left(\frac{c}{e}\right)_1 = 0 \quad , \quad qh' - cf' = 0.$$

18. Se nelle condizioni (18), (21), (22), (22') al posto dei coefficienti del sistema (14) poniamo quelli corrispondenti dei sistemi (13), (15) avremo altrettante condizioni che consentono una riduzione maggiore o minore nell'integrazione del sistema primitivo (1) o nell'equivalente (2).

Se per altro nessuna di quelle condizioni fosse verificata, partendo dalle (19), si potrebbe eliminare u_0 tra la prima e la quarta giungendo ad una equazione della forma

$$\frac{\lambda_2 + a\lambda}{e\mu} \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\lambda_2 + a\lambda}{\lambda} \frac{\partial V_0}{\partial x} - l_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + \left\{ \frac{\lambda_2 + a\lambda}{e\mu} l_0 - l_0 \left(\frac{\mu_2}{\mu} + \frac{c}{e} \right) \right\} v_0 + l_0 V_0 = 0,$$

e tra la terza e la quarta ottenendo

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\mu_2}{\mu} + \frac{c}{e} \right) \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} + b - \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\lambda_2 + a\lambda}{e\mu} \right) \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{\partial V_0}{\partial x} + \\ & + \left\{ \left(\frac{\mu_2}{\mu} + \frac{c}{e} \right)_1 - \left(\frac{\mu_2}{\mu} + \frac{c}{e} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\lambda_2 + a\lambda}{e\mu} - \frac{\lambda_1}{\lambda} - b \right) - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda} + a \right) \left(\frac{\mu_1}{\mu} + \frac{f}{e} \right) \right\} v_0 + \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\lambda_2 + a\lambda}{e\mu} - \frac{\lambda_1}{\lambda} - b \right\} V_0 + \frac{\lambda_2 + a\lambda}{e\mu} U_0 = 0, \end{aligned}$$

dopodichè, tenendo conto della seconda, giungeremo al sistema

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\mu_2}{\mu} + \frac{c}{\rho} \right) \frac{\partial v_0}{\partial x} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} + b - \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\lambda_2 + a\lambda}{\rho\mu} \right) \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{\partial V_0}{\partial x} + \\ & + \left\{ \left(\frac{\mu_2}{\mu} + \frac{c}{\rho} \right)_1 - \left(\frac{\mu_2}{\mu} + \frac{c}{\rho} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\lambda_2 + a\lambda}{\rho\mu} - \frac{\lambda_1}{\lambda} - b \right) - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda} + a \right) \left(\frac{\mu_1}{\mu} + \frac{c}{\rho} \right) \right\} v_0 + \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\lambda_2 + a\lambda}{\rho\mu} - \frac{\lambda_1}{\lambda} - b - f \frac{\lambda_2 + a\lambda}{\rho\lambda} \right\} V_0 = 0, \\ & f \frac{\lambda_2 + a\lambda}{\rho\lambda} \frac{\partial V_0}{\partial y} - \frac{\lambda_2 + a\lambda}{\lambda} \frac{\partial V_0}{\partial x} + l_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + \left\{ l_0 \left(\frac{\mu_2}{\mu} + \frac{c}{\rho} \right) - \frac{\lambda_2 + a\lambda}{\rho\mu} l_0 \right\} v_0 + \\ & + \left\{ \frac{\lambda_2 + a\lambda}{\rho\mu} \left(\frac{f\mu}{\lambda} \right)_1 - l_0 \right\} V_0 = 0, \end{aligned}$$

che è del tipo del primitivo (2) coll'ipotesi particolare di $f = a' = 0$. A questo potete applicare il metodo esposto in principio, e se non troviamo verificata dai suoi coefficienti alcuna delle relazioni che consentivano riduzione nel problema della integrazione (o almeno la eliminazione di una funzione) ne trarremo un nuovo sistema della forma (14) al quale è applicabile il primo ed il secondo metodo. Proseguendo in questo modo potrà avvenire che si cada in un sistema pel quale sono verificate condizioni che consentono le accennate riduzioni. Avremo così un metodo di ricerca che ha una grande analogia con quello di LAPLACE per una sola equazione, salvo la maggior complicazione portata dalla natura più complessa del nostro problema.