Sulle varietà a tre dimensioni deformabili entro lo spazio euclideo a quattro dimensioni.

Memoria del Socio LUIGI BIANCHI.

PREFAZIONE.

È noto che entro lo spazio euclideo S_n ad n dimensioni, appena il numero n superi il 3, le varietà ad $n-1$ dimensioni, o *ipersuperficie*, pure essendo supposte flessibili ed inestendibili, non possono in generale deformarsi. Esistono per altro intere classi di ipersuperficie deformabili che in casi particolari è facile riconoscere; ma il loro studio completo è ben poco inoltrato fino ad ora. I risultati più notevoli a questo riguardo rimangono sempre quelli che SCHUR conseguì nel 1886 ([1]) pel caso particolare dello spazio a quattro dimensioni. Senza risolvere il problema proposto, SCHUR lo ha trasformato nel seguente, che diremo il Problema A): *Trovare quelle superficie dello spazio ellittico a tre dimensioni che possono deformarsi in modo continuo, conservando coniugato un doppio sistema di linee attualmente coniugato.* Di una tale superficie diremo brevemente che essa possiede un *sistema coniugato persistente.*

Questo problema, davanti al quale si è allora arrestato lo SCHUR, non è stato, che io sappia, ripreso da altri, sicchè fino ad ora non poteva ancora dirsi riconosciuta l'estensione delle classi di ipersuperficie deformabili nell'S_4. Ma attualmente possediamo una serie di ricerche esaurienti sulle superficie *dell'ordinario spazio euclideo* dotate di un sistema coniugato persistente, ed inoltre le ricerche di geometria infinitesimale ellittica sono abbastanza avanzate perchè si possano riprendere e condurre in certo modo a termine le interessanti ricerche di SCHUR. Questo è appunto lo scopo principale delle ricerche seguenti, le quali però hanno assunto, dal lato analitico, una generalità ed estensione molto maggiore di quanto sarebbe stato necessario

([1]) *Ueber die Deformation eines dreidimensionalen Raumes in einem ebenen vierdimensionalen Raume* (Math. Annalen, Bd. 27, pag. 344).

per la pura questione geometrica. Così mi è parso conveniente dividere la Memoria in due parti: la prima analitica tratta di certe particolari trasformazioni delle equazioni a derivate parziali del tipo di Moutard $(a)\ \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=M\theta$, che diciamo *trasformazioni ortogonali*; la seconda ne studia le applicazioni geometriche al problema A) ed a varie altre questioni strettamente collegate con questa. Il legame fra le due parti apparirà dal rapido riassunto che ora darò del contenuto della Memoria.

Si sa che nel caso dello spazio euclideo il problema A) delle superficie con sistema coniugato persistente si riduce a trovare quelle equazioni (a) di Moutard che posseggono un gruppo di tre soluzioni $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ legate dall'identità quadratica

$$\theta_0^2+\theta_1^2+\theta_2^2=U+V$$

essendo U una funzione della sola u e V una funzione della sola v. Ora il problema A) di Schur per lo spazio ellittico è suscettibile, come si vedrà, di una riduzione analoga: esso equivale alla ricerca delle equazioni (a) di Moutard con un gruppo di *quattro* soluzioni $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ legate dall'identità analoga

$$\theta_0^2+\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2=U+V.$$

In generale se un'equazione di Moutard possiede un certo numero, diciamo $n+1$, di soluzioni $\theta_0, \theta_1, \theta_2 \ldots \theta_n$ legate dall'identità quadratica

$$(b)\qquad \sum_i^{0\ldots n}\theta_i^2=\theta_0^2+\theta_1^2+\theta_2^2+\cdots\theta_n^2=U+V,$$

diremo con Guichard (¹) che $\theta_0, \theta_1, \theta_2 \ldots \theta_n$ formano un *gruppo di* $n+1$ *soluzioni quadratiche* dell'equazione di Moutard. I primi studî sulle equazioni di Moutard con gruppi di soluzioni quadratiche sembrano esser quelli contenuti in una mia Memoria del 1890 (²) e riguardano il caso di gruppi di tre soluzioni quadratiche. Quivi, partendo da considerazioni geometriche, sono giunto a costruire una teoria delle *trasformazioni* per le equazioni di Moutard con gruppi di tre soluzioni quadratiche, dimostrando che ogni tale equazione ne possiede una doppia infinità di contigue, trasformate di Moutard della primitiva, tali che la somma dei quadrati delle tre soluzioni trasformate eguaglia quella costruita coi quadrati delle primitive. Avendo ora osservato che il problema A) si riduceva alla ricerca delle equazioni di Moutard con gruppi di *quattro* soluzioni quadratiche, era ben naturale di domandare se anche per questo caso esistevano trasformazioni analoghe. In generale se, con una trasformazione di Moutard, un certo numero $n+1$ di soluzioni della primitiva, siano $\theta_0, \theta_1 \ldots \theta_n$, si cangiano in $n+1$ nuove soluzioni della trasformata $\overline{\theta}_0, \overline{\theta}_1 \ldots \overline{\theta}_n$, in guisa che sia $\sum_i^{0\ldots n}\theta_n^2=\sum_i^{0\ldots n}\overline{\theta}_n^2$, diremo che la trasformazione *è ortogonale rispetto al gruppo di soluzioni* $(\theta_0, \theta_1 \ldots \theta_n)$.

(¹) Vedi le Memorie di Guichard citate più avanti al § 1.

(²) *Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali.* Annali di matematica, serie 2ª, T. 18.

La prima parte della Memoria sviluppa appunto una teoria generale delle trasformazioni ortogonali delle equazioni di Moutard. Vi si dimostra in primo luogo che il gruppo di soluzioni $(\theta_0, \theta_1 \dots \theta_n)$, su cui la trasformazione agisce ortogonalmente, soddisfa necessariamente una relazione della forma (b), cioè costituisce un gruppo di soluzioni quadratiche. Inversamente si dimostra il teorema fondamentale:

B) *Ogni equazione di* Moutard *con un gruppo di* $n+1$ *soluzioni quadratiche possiede* ∞^n *trasformazioni ortogonali rispetto a questo gruppo di soluzioni.*

Quanto alla ricerca effettiva di queste ∞^n trasformazioni ortogonali, essa dipende dalla integrazione di un sistema di equazioni ai differenziali totali per n funzioni incognite, illimitatamente integrabile, il sistema (A) § 3 della Memoria, e si riduce quindi alla integrazione di equazioni differenziali ordinarie. E, sebbene i metodi generali nulla ci apprendano rispetto alla integrazione effettiva di questo sistema, si perviene a stabilirne una notevole proprietà dipendente dal seguente *teorema di permutabilità*:

C) *Se di un'equazione* E *di* Moutard, *con un gruppo di* $n+1$ *soluzioni quadratiche, si considerano due trasformate ortogonali contigue* E_1, E_2, *esiste una quarta equazione di* Moutard $\overline{E}$, *perfettamente determinata e contigua alla sua volta, per trasformazioni ortogonali, alle medesime* E_1, E_2. *Note le equazioni* E, E_1, E_2 *ed i corrispondenti gruppi di soluzioni quadratiche, il calcolo della corrispondente quarta equazione* $\overline{E}$ *e del gruppo corrispondente di soluzioni quadratiche si effettua in termini finiti.*

Da questo teorema si trae poi la conseguenza importante a cui sopra alludevamo, e cioè questa:

Se di un'equazione E *di* Moutard *con un gruppo di* $n+1$ *soluzioni quadratiche si conoscono tutte le* ∞^n *trasformazioni ortogonali, anche per ciascuna delle equazioni derivate si conosceranno, senza altri calcoli d'integrazione, tutte le* ∞^n *trasformate contigue ortogonali.*

Così, nell'applicazione successiva delle nostre trasformazioni, basta aver integrato una prima volta il sistema (A) perchè risultino integrati anche tutti gli analoghi successivi.

La prima parte termina colla dimostrazione di un teorema, complementare di quello di permutabilità, dal quale si riconosce l'esistenza di cicli chiusi di 8 equazioni di Moutard, così costituiti che ciascuna equazione nel ciclo è legata a tre contigue da tre trasformazioni ortogonali. Questo teorema si applica alle trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche, delle quali si riconosce così una nuova proprietà.

Le applicazioni geometriche di questi risultati al problema A) di Schur si presentano ora immediate, e vengono svolte nella seconda parte della Memoria. In questa, dopo avere brevemente dimostrati i risultati di Schur che riducono al problema A) la ricerca delle ipersuperficie deformabili nell' S_4, si stabilisce una teoria delle trasformazioni delle superficie con sistema coniugato persistente dello spazio ellittico, affatto analoga a quella già stabilita dall'autore per lo spazio euclideo.

Si studia poi una classe particolarmente interessante di queste superficie, quelle in cui il sistema coniugato persistente è formato di linee geodetiche: le *superficie* *di Voss* dello spazio ellittico. La superficie polare Σ di una tale superficie di Voss è caratterizzata da ciò che sopra di essa il sistema coniugato (u, v), corrispondente al sistema coniugato geodetico della superficie di Voss, è una *rete di* TCHEBYCHEF, cioè dà all'elemento lineare di Σ la forma caratteristica

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\Omega\, du\, dv + dv^2\,.$$

Così la ricerca delle superficie di Voss dello spazio ellittico equivale a quella delle superficie di questo spazio dotate di una *rete coniugata di* TCHEBYCHEF. Si dimostra poi come questi risultati possono interpretarsi nell'ordinario spazio euclideo giacchè, nota una superficie di Voss dello spazio ellittico, se ne deduce con quadrature una coppia di superficie applicabili dello spazio euclideo per la quale il doppio sistema di linee che serbano invariata la flessione è una rete di TCHEBYCHEF; ed inversamente ad ogni tale coppia di superficie applicabili dello spazio euclideo corrisponde una superficie di Voss dello spazio ellittico.

Tratto poi di tre particolari classi di superficie di Voss, dipendenti ciascuna da due sole funzioni arbitrarie (¹), che si collegano, mediante la teoria delle deformazioni infinitesime, al problema della deformazione di tre particolari superficie di rotazione dello spazio euclideo. La prima superficie di rotazione non è altro che una superficie pseudosferica, la seconda un *sinusoide iperbolico* nel senso introdotto al § 259 delle mie *Lezioni di geometria differenziale* (vol. II della seconda edizione, pag. 109) (²). La teoria delle trasformazioni delle superficie pseudosferiche fa conoscere infinite deformate delle superficie dei primi due tipi e si possono costruire le formole per le superficie di Voss corrispondenti dello spazio ellittico. Qui ci limitiamo a scrivere le formole effettive per le superficie di Voss del primo tipo che più direttamente derivano dalle ordinarie superficie pseudosferiche.

Sarebbe facile estendere in generale allo spazio iperbolico tutte le ricerche così compiute per lo spazio ellittico. Qui trattiamo per brevità soltanto delle superficie di Voss e delle superficie con rete coniugata di TCHEBYCHEF nello spazio iperbolico, costruendo anche per questo caso una teoria delle trasformazioni. Da ultimo si considerano alcune classi particolari di queste superficie che nuovamente si collegano alle flessioni di superficie di rotazione dello spazio euclideo di cui vengono determinati i diversi tipi, strettamente connessi colle superficie pseudosferiche.

(¹) Le superficie generali di Voss dipendono da un'equazione a derivate parziali del 4° ordine, quindi da quattro funzioni arbitrarie.

(²) D'ora innanzi citerò il mio libro colla sola indicazione del volume e della pagina.

PARTE PRIMA.

Le equazioni di Moutard con gruppi di soluzioni quadratiche e le loro trasformazioni ortogonali (¹).

§ 1.

Trasformazioni ortogonali delle equazioni di MOUTARD.

Consideriamo un'equazione a derivate parziali del tipo

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=M\theta\,, \tag{1}$$

dove M è una funzione assegnata delle due variabili indipendenti $u\,,v$. È ben nota la generale trasformazione di MOUTARD (²) colla quale, partendo da una soluzione particolare nota R della (1), si passa ad una equazione contigua:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\overline{M}\theta\,, \tag{2}$$

dove il nuovo coefficiente $\overline{M}$ ha il valore

$$\overline{M}=R\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{R}\right).$$

Da una soluzione qualunque θ della (1) si ottiene una soluzione corrispondente $\overline{\theta}$ della (2) mediante le formole

$$\frac{\partial}{\partial u}(R\overline{\theta})=-R^2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\theta}{R}\right)\,,\quad \frac{\partial}{\partial v}(R\overline{\theta})=R^2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\theta}{R}\right), \tag{3}$$

le quali, nota θ, fanno conoscere $\overline{\theta}$ con una quadratura, e viceversa. Scriviamo anche le (3) sotto la forma equivalente

$$\frac{\partial(\overline{\theta}+\theta)}{\partial u}=(\theta-\overline{\theta})\frac{\partial \log R}{\partial u}\,,\quad \frac{\partial(\overline{\theta}-\theta)}{\partial v}=-(\theta+\overline{\theta})\frac{\partial \log R}{\partial v}\,. \tag{3*}$$

(¹) Le ricerche di questa prima parte ho già esposto brevemente, sopprimendo gli sviluppi di calcolo, in una Nota inserita nei Rendiconti dei Lincei del settembre 1904.

(²) Cf. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, T. II, n. 390, oppure le mie *Lezioni* (vol. II, pag. 47).

Si osservi poi che, data θ, la soluzione $\overline{\theta}$ della (2) contiene ancora una costante arbitraria, il cui valore si intenderà fissato quando si parla della soluzione $\overline{\theta}$ corrispondente a θ.

Consideriamo ora un numero qualunque, sia $n+1$, di soluzioni

$$\theta_0\,,\,\theta_1\,,\,\theta_2\,...\,\theta_n$$

della (1) e siano

$$\overline{\theta}_0\,,\,\overline{\theta}_1\,,\,\overline{\theta}_2\,...\,\overline{\theta}_n$$

le soluzioni corrispondenti della (2). Proponiamoci la questione preliminare seguente: *Può accadere che la trasformazione di* MOUTARD *conservi la somma dei quadrati delle $n+1$ soluzioni, che si abbia cioè:*

$$\theta_0^2+\theta_1^2+\cdots+\theta_n^2=\overline{\theta}_0^2+\overline{\theta}_1^2+\cdots+\overline{\theta}_n^2\ ?$$

In tal caso diremo che la trasformazione è *ortogonale* rispetto alle $n+1$ soluzioni $\theta_0\,,\,\theta_1\,...\,\theta_n$ considerate.

Nell' ipotesi affermativa poniamo

$$\sum_i^{0\ldots n}\theta_i^2=\sum_i^{0\ldots n}\overline{\theta}_i^2=\varrho \tag{4}$$

e introduciamo inoltre un angolo σ tale che si abbia

$$\sum_i^{0\ldots n}\theta_i\overline{\theta}_i=\varrho\cos\sigma\,; \tag{5}$$

l'angolo σ sarà reale se intendiamo di operare in un campo reale, come generalmente riterremo.

Per le formole (3*), abbiamo per tutti i valori di i da 0 a n:

$$\frac{\partial(\overline{\theta}_i+\theta_i)}{\partial u}=(\theta_i-\overline{\theta}_i)\frac{\partial\log R}{\partial u}.$$

Moltiplichiamo questa una prima volta per θ_i, una seconda per $\overline{\theta}_i$ ed ambedue le volte sommiamo, rispetto ad i, da 0 a n; osservando le (4), (5), otteniamo le due equazioni

$$\left\{\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial\varrho}{\partial u}+\sum_i^{0\ldots n}\theta_i\frac{\partial\overline{\theta}_i}{\partial u}&=\quad\varrho(1-\cos\sigma)\frac{\partial\log R}{\partial u}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial\varrho}{\partial u}+\sum_i^{0\ldots n}\overline{\theta}_i\frac{\partial\theta_i}{\partial u}&=-\varrho(1-\cos\sigma)\frac{\partial\log R}{\partial u},\end{aligned}\right.$$

che sommate dànno

$$\frac{\partial(\varrho\cos\sigma)}{\partial u}=-\frac{\partial\varrho}{\partial u}. \tag{6}$$

Similmente procedendo sulle altre equazioni

$$\frac{\partial(\overline{\theta}_i-\theta_i)}{\partial v}=-(\theta_i+\overline{\theta}_i)\frac{\partial\log R}{\partial v},$$

deduciamo le due

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{1}^{0\ldots n} \theta_i \frac{\partial \overline{\theta}_i}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varrho}{\partial v} = -\varrho(1+\cos\sigma) \frac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial v} \\ \displaystyle -\sum_{1}^{0\ldots n} \overline{\theta}_i \frac{\partial \theta_i}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varrho}{\partial v} = -\varrho(1+\cos\sigma) \frac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial v}, \end{cases}$$

e sottraendo

$$(6^*) \qquad \frac{\partial(\varrho\cos\sigma)}{\partial v} = \frac{\partial\varrho}{\partial v}.$$

Derivando le (6) rispetto a v, la (6*) rapporto ad u e sottraendo, segue $\frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v} = 0$, indi $\varrho = \mathrm{U} + \mathrm{V}$, dove U è funzione della sola u, V della sola v. Dalle (6), (6*) abbiamo poi

$$\frac{\partial(\varrho\cos\sigma)}{\partial u} = -\mathrm{U}', \quad \frac{\partial(\varrho\cos\sigma)}{\partial v} = \mathrm{V}',$$

gli apici avendo il solito significato di derivazione. Di qui integrando abbiamo per $\cos\sigma$ la formola

$$(7) \qquad \cos\sigma = \frac{\mathrm{V} - \mathrm{U} + 2h}{\mathrm{U} + \mathrm{V}},$$

dove h indica una costante arbitraria. Gioverà scrivere la (7) anche sotto le forme equivalenti

$$(7^*) \qquad 1 - \cos\sigma = \frac{2(\mathrm{U} - h)}{\mathrm{U} + \mathrm{V}}, \quad 1 + \cos\sigma = \frac{2(\mathrm{V} + h)}{\mathrm{U} + \mathrm{V}}.$$

Vediamo intanto di qui che nell'ipotesi dell'esistenza di una trasformazione ortogonale per il gruppo $(\theta_0, \theta_1 \ldots \theta_n)$ di soluzioni dell'equazione di Moutard, sussiste necessariamente una relazione della forma

$$(8) \qquad \sum_{1}^{0\ldots n} \theta_i^2 = \mathrm{U} + \mathrm{V},$$

così: *Affinchè un'equazione di* Moutard *ammetta una trasformazione ortogonale rispetto al gruppo di soluzioni $(\theta_0, \theta_1 \ldots \theta_n)$ è necessario che questo sia un gruppo di soluzioni quadratiche.*

Le ricerche ulteriori dimostreranno che tale condizione necessaria è pur sufficiente e che, quando essa è soddisfatta, esistono ∞^n trasformazioni ortogonali della equazione di Moutard rispetto al gruppo dato di $n+1$ soluzioni quadratiche (1).

(1) Le equazioni di Moutard con gruppi di un numero qualunque di soluzioni quadratiche furono studiate da Guichard nelle sue belle ricerche: *Sur les systèmes orthogonaux et sur les systèmes cycliques* (Annales de l'École Normale Supérieure, T. XIV, 1897; T. XV, 1898 et T. XX, 1903. Il Guichard ne ha scoperto varie interessanti proprietà che ha applicato a diverse questioni geometriche.

§ 2.

Il determinante Δ e le rotazioni.

Per procedere alle nostre ricerche è necessario che premettiamo la deduzione di alcune formole fondamentali.

Supposto che l'equazione (1) di Moutard ammetta un gruppo di $n+1$ soluzioni $(\theta_0, \theta_1 \dots \theta_n)$ legate dalla relazione quadratica (8), eseguiamo nella (1) un cangiamento proporzionale di funzioni incognite, ponendo

(9) $$x = \frac{\theta}{\sqrt{U+V}};$$

la (1) si trasformerà nell'altra

(10) $$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{V'}{2(U+V)}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{U'}{2(U+V)}\frac{\partial x}{\partial v} + Fx = 0,$$

il coefficiente F avendo il valore

(11) $$F = -M - \frac{U'V'}{4(U+V)^2}.$$

Indichino ora $x_0, x_1 \dots x_n$ le soluzioni della (10) corrispondenti, secondo la (9), a $\theta_0, \theta_1 \dots \theta_n$, onde avremo

$$x_i = \frac{\theta_i}{\sqrt{U+V}}$$

e quindi

(12) $$\sum_i^{0\dots n} x_i^2 = 1.$$

Da questa identità, derivando rispetto ad u, v, otteniamo le altre

(12*) $$\sum_i^{0\dots n} x_i \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0, \quad \sum_i^{0\dots n} x_i \frac{\partial x_i}{\partial v} = 0, \quad \sum_i^{0\dots n} x_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} = -\sum_i^{0\dots n} \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v}.$$

Ciò posto, avendosi

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} + \frac{V'}{2(U+V)}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{U'}{2(U+V)}\frac{\partial x_i}{\partial v} + Fx_i = 0\ ;\ i = 0, 1 \dots n,$$

se moltiplichiamo questa per x_i e sommiamo da $i=0$ a $i=n$, avendo riguardo alle (12), (12*), ne deduciamo quest'altra espressione del coefficiente F:

(13) $$F = \sum_i^{0\dots n} \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v}.$$

Costruiamo ora un determinante *ortogonale* $\varDelta$ d'ordine $n+1$:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_0^{(n)} & x_1^{(n)} & \ldots & x_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

la cui prima riga sia formata colle $n+1$ soluzioni considerate $x_0, x_1 \ldots x_n$ della (10) e le altre con elementi $x_0^{(\lambda)}, x_1^{(\lambda)} \ldots x_n^{(\lambda)}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots n)$ funzioni di u, v, scelte in guisa da formare con $x_0 x_1 \ldots x_n$ il quadro di una sostituzione ortogonale e del resto arbitrarie. Per maggiore uniformità indichiamo anche gli elementi della prima riga con $x_0^{(0)} x_1^{(0)} \ldots x_n^{(0)}$, talchè per convenzione $x_i^{(0)} = x_i$. Le condizioni perchè il determinante $\varDelta$ sia ortogonale si esprimono colle note relazioni

$$\sum_{\lambda}^{0\ldots n} x_\lambda^{(i)} x_\lambda^{(k)} = \epsilon_{ik} \quad (i, k = 0, 1, \ldots n), \tag{14}$$

essendo

$$\epsilon_{ik} = 0 \text{ per } i \neq k \quad , \quad \epsilon_{ik} = 1 \text{ per } i = k.$$

Le (14) possono poi scriversi sotto la forma equivalente

$$\sum_{\lambda}^{0\ldots n} x_i^{(\lambda)} x_k^{(\lambda)} = \epsilon_{ik} \quad (i, k = 0, 1, \ldots n). \tag{14*}$$

Se consideriamo le derivate rapporto ad u, v degli elementi di una stessa colonna

$$x_\lambda^{(0)} x_\lambda^{(1)} \ldots x_\lambda^{(n)}$$

in $\varDelta$, queste potranno esprimersi linearmente ed omogeneamente per gli elementi della colonna stessa con formole del tipo seguente:

$$\frac{\partial x_\lambda^{(i)}}{\partial u} = \sum_{k}^{0\ldots n} p_{ik} x_\lambda^{(k)} \quad , \quad \frac{\partial x_\lambda^{(i)}}{\partial v} = \sum_{k}^{0\ldots n} q_{ik} x_\lambda^{(k)} \tag{I}$$

i coefficienti p_{ik}, q_{ik} dipendendo unicamente dagli indici i, k e non dall'indice λ della colonna. E invero se prendiamo p. e. le $n+1$ equazioni

$$\frac{\partial x_\lambda^{(i)}}{\partial u} = \sum_{k}^{0\ldots n} p_{ik} x_\lambda^{(k)} \quad (\lambda = 0, 1, \ldots n),$$

ove l'indice i è tenuto fisso, queste sono, rispetto alle $n+1$ incognite

$$p_{i0}, p_{i1} \ldots p_{in},$$

$n+1$ equazioni lineari con determinante $\varDelta$ e, risolute rapporto alle p, danno

$$p_{ik} = \sum_{\lambda}^{0\ldots n} x_\lambda^{(k)} \frac{\partial x_\lambda^{(i)}}{\partial u} = -\sum_{\lambda}^{0\ldots n} x_\lambda^{(i)} \frac{\partial x_\lambda^{(k)}}{\partial u}.$$

Analogamente si esprimono i coefficienti q_{ik}, onde abbiamo le formole:

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} p_{ik} &= \sum_{\lambda}^{0\dots n} x_\lambda^{(k)} \frac{\partial x_\lambda^{(i)}}{\partial u} = -\sum_{\lambda}^{0\dots n} x_\lambda^{(i)} \frac{\partial x_\lambda^{(k)}}{\partial u} \\ q_{ik} &= \sum_{\lambda}^{0\dots n} x_\lambda^{(k)} \frac{\partial x_\lambda^{(i)}}{\partial v} = -\sum_{\lambda}^{0\dots n} x_\lambda^{(i)} \frac{\partial x_\lambda^{(k)}}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

Indicheremo con Guichard questi coefficienti p_{ik}, q_{ik} col nome di *rotazioni* (¹) del determinante Δ ed osserveremo che dalle (15) risulta che scambiando i due indici i, k la rotazione cangia segno, e però sono nulle le rotazioni con indici eguali; in formole

$$(15^*)\qquad \left\{\begin{aligned} &p_{ki} = -p_{ik} \quad , \quad q_{ki} = -q_{ik} \\ &p_{ii} = 0 \qquad\;\; , \quad q_{ii} = 0. \end{aligned}\right.$$

Le rotazioni p_{ik}, q_{ik} di un determinante ortogonale soddisfano ad equazioni differenziali caratteristiche che provengono dall'esprimere le condizioni d'integrabilità delle (I). Se si deriva la prima dalle (I) rapporto a v, la seconda rapporto ad u, e si sottrae, si ottiene dapprima:

$$\sum_{k}^{0\dots n}\left(\frac{\partial p_{ik}}{\partial v} - \frac{\partial q_{ik}}{\partial u}\right) x_\lambda^{(k)} + \sum_{l}^{0\dots n} p_{il} \frac{\partial x_\lambda^{(l)}}{\partial v} - \sum_{l}^{0\dots n} q_{il} \frac{\partial x_\lambda^{(l)}}{\partial u} = 0;$$

ed osservando che per le (I) stesse

$$\frac{\partial x_\lambda^{(l)}}{\partial u} = \sum_{k}^{0\dots n} p_{lk}\, x_\lambda^{(k)} \quad , \quad \frac{\partial x_\lambda^{(l)}}{\partial v} = \sum_{k}^{0\dots n} q_{lk}\, x_\lambda^{(k)},$$

ne segue

$$(16)\qquad \sum_{k}^{0\dots n}\left\{\frac{\partial p_{ik}}{\partial v} - \frac{\partial q_{ik}}{\partial u} + \sum_{l}^{0\dots n}(p_{il}\, q_{lk} - q_{il}\, p_{lk})\right\} \cdot x_\lambda^{(k)} = 0.$$
$$i, \lambda = 0, 1, \dots n$$

Tenendo fisso l'indice i e dando a λ i suoi $n+1$ valori, si hanno così $n+1$ equazioni lineari omogenee nelle $n+1$ espressioni

$$\frac{\partial p_{ik}}{\partial v} - \frac{\partial q_{ik}}{\partial u} + \sum_{l}^{0\dots n}(p_{il}\, q_{lk} - q_{il}\, p_{lk}), \quad k = 0, 1, \dots n;$$

ma poichè il determinante dei coefficienti è $\Delta = 1$, segue che ciascuna delle dette espressioni si annulla. Sussistono dunque le relazioni:

$$(\mathrm{II})\qquad \frac{\partial p_{ik}}{\partial v} - \frac{\partial q_{ik}}{\partial u} + \sum_{l}^{0\dots n}(p_{il}\, q_{lk} - q_{il}\, p_{lk}) = 0$$
$$(i, k = 0, 1, 2, \dots n).$$

(¹) Annales ecc., t. XIV. Più in generale furono introdotte le rotazioni per un'n^{pla} ortogonale in uno spazio curvo qualunque ad n dimensioni dal Ricci (v. la Memoria: *Sui sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*. Atti dei Lincei, ser. 5ª, vol. II, 1896).

Queste per $i = k$ si riducono ad identità, a causa delle (15*) e per $i \neq k$ dànno $\frac{n(n+1)}{2}$ relazioni differenziali fra le rotazioni, che sono appunto quelle che volevansi stabilire.

Le formole precedenti sussistono per le rotazioni di un determinante ortogonale qualunque. Ma nel caso nostro sussistono ancora altre relazioni differenziali, importanti pel nostro scopo, a cui soddisfano le rotazioni di cui sia nullo uno degli indici, e dipendenti dal fatto che gli elementi della prima riga in Δ sono soluzioni della equazione (10) di Laplace. Per trovare queste formole prendiamo l'espressione di p_{0k}:

$$p_{0k} = \sum_{\lambda}^{0 \dots n} x_\lambda^{(k)} \frac{\partial x_\lambda^{(0)}}{\partial u},$$

e derivandola rispetto a v avremo

$$\frac{\partial p_{0k}}{\partial v} = \sum_{\lambda}^{0 \dots n} x_\lambda^{(k)} \frac{\partial^2 x_\lambda^{(0)}}{\partial u \, \partial v} + \sum_{\lambda}^{0 \dots n} \frac{\partial x_\lambda^{(k)}}{\partial v} \frac{\partial x_\lambda^{(0)}}{\partial u}.$$

Sostituendo ora per $\frac{\partial^2 x_\lambda^{(0)}}{\partial u \, \partial v}$ il valore

$$\frac{\partial^2 x_\lambda^{(0)}}{\partial u \, \partial v} = -\frac{V'}{2(U+V)} \frac{\partial x_\lambda^{(0)}}{\partial u} - \frac{U'}{2(U+V)} \frac{\partial x_\lambda^{(0)}}{\partial v} - F x_\lambda^{(0)},$$

che deriva dalla (10) e per le derivate prime i valori dati dalla (I)

$$\frac{\partial x_\lambda^{(k)}}{\partial v} = \sum_{l}^{0 \dots n} q_{kl} x_\lambda^{(l)} \quad , \quad \frac{\partial x_\lambda^{(0)}}{\partial u} = \sum_{j}^{0 \dots n} p_{0j} x_\lambda^{(j)},$$

otteniamo

$$\frac{\partial p_{0k}}{\partial v} = -\frac{V'}{2(U+V)} \sum_{\lambda}^{0 \dots n} x_\lambda^{(k)} \frac{\partial x_\lambda^{(0)}}{\partial u} - \frac{U'}{2(U+V)} \sum_{\lambda}^{0 \dots n} x_\lambda^{(k)} \frac{\partial x_\lambda^{(0)}}{\partial v} - F \sum_{\lambda}^{0 \dots n} x_\lambda^{(0)} x_\lambda^{(k)} +$$
$$+ \sum_{jl}^{0 \dots n} p_{0j} q_{kl} \sum_{\lambda}^{0 \dots n} x_\lambda^{(l)} x_\lambda^{(j)}.$$

Ma si ha

$$\sum_{\lambda}^{0 \dots n} x_\lambda^{(k)} \frac{\partial x_\lambda^{(0)}}{\partial u} = p_{0k} \quad , \quad \sum_{\lambda}^{0 \dots n} x_\lambda^{(k)} \frac{\partial x_\lambda^{(0)}}{\partial v} = q_{0k} \quad , \quad \sum_{\lambda}^{0 \dots n} x_\lambda^{(0)} x_\lambda^{(k)} = \varepsilon_{0k} = 0$$
$$\sum_{\lambda}^{0 \dots n} x_\lambda^{(l)} x_\lambda^{(j)} = \varepsilon_{lj},$$

e la formola precedente diventa quindi

$$\frac{\partial p_{0k}}{\partial v} = -\frac{V'}{2(U+V)} p_{0k} - \frac{U'}{2(U+V)} q_{0k} + \sum_{\lambda}^{0 \dots n} p_{0l} q_{kl}.$$

Del tutto similmente si calcola la derivata di q_{0k} rapporto; e si hanno così le nuove formole

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_{0k}}{\partial v} = -\dfrac{V'}{2(U+V)} p_{0k} - \dfrac{U'}{2(U+V)} q_{0k} + \sum_{i}^{0 \ldots n} p_{0i}\, q_{ki} \\[2mm] \dfrac{\partial q_{0k}}{\partial u} = -\dfrac{V'}{2(U+V)} p_{0k} - \dfrac{U'}{2(U+V)} q_{0k} + \sum_{i}^{0 \ldots n} q_{0i}\, p_{ki}\,, \end{cases}$$

che sono le formole domandate. Sottraendole ne segue nuovamente la (II) per $i=0$.

§ 3.

Ricerca delle trasformazioni ortogonali delle equazioni di Moutard.

Supponiamo ora che l'equazione (1) di Moutard possegga il gruppo di $n+1$ soluzioni quadratiche $(\theta_0, \theta_1 \ldots \theta_n)$ legate dalla relazione (8)

$$\theta_0^2 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_n^2 = U + V$$

e cerchiamo tutte le possibili trasformazioni di Moutard della (1), ortogonali rispetto al gruppo $(\theta_0, \theta_1 \ldots \theta_n)$ di soluzioni. Supposto che R sia la soluzione della (1) corrispondente ad una di tali trasformazioni, indichiamo con $\overline{\theta}_0, \overline{\theta}_1 \ldots \overline{\theta}_n$ le soluzioni trasformate ed avremo per ipotesi

$$\overline{\theta}_0^2 + \overline{\theta}_1^2 + \cdots + \overline{\theta}_n^2 = U + V.$$

A causa delle (13*) sussisteranno le relazioni

$$\text{(17)} \qquad \frac{\partial(\overline{\theta}_i + \theta_i)}{\partial u} = (\theta_i - \overline{\theta}_i)\frac{\partial \log R}{\partial u}\,, \qquad \frac{\partial(\overline{\theta}_i - \theta_i)}{\partial v} = -(\theta_i + \overline{\theta}_i)\frac{\partial \log R}{\partial v}$$
$$(i = 0, 1 \ldots n),$$

e, per quanto si è visto al § 1, ponendo

$$\theta_0 \overline{\theta}_0 + \theta_1 \overline{\theta}_1 + \cdots + \theta_n \overline{\theta}_n = (U+V)\cos\sigma,$$

sussisteranno per l'angolo σ le formole (7), (7*) § 1.

Ora, in armonia colla sostituzione (9), poniamo

$$\overline{x}_i^{(0)} = \overline{x}_i = \frac{\overline{\theta}_i}{\sqrt{U+V}}\,, \quad (i = 0, 1, \ldots n),$$

ed avremo

$$\text{(18)} \qquad \sum_{i}^{0 \ldots n} \overline{x}_i^{(0)2} = 1 \quad , \quad \sum_{i}^{0 \ldots n} \overline{x}_i^{(0)} x_i^{(0)} = \cos\sigma\,.$$

Ne segue che esisteranno n funzioni

$$\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$$

di u, v tali che sussistano le $n+1$ relazioni

$$\overline{x}_i^{(0)} = x_i^{(0)} \cos\sigma + \sum_k^{1\ldots n} \lambda_k x_i^{(k)}, \quad i = 0, 1 \ldots n \tag{19}$$

e si abbia inoltre

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = \operatorname{sen}^2\sigma. \tag{20}$$

Ora, essendo

$$\overline{x}_i^{(0)} = \frac{\overline{\theta}_i}{\sqrt{U+V}}, \quad x_i^{(0)} = \frac{\theta_i}{\sqrt{U+V}},$$

le relazioni fondamentali (17) si scrivono sotto la forma equivalente:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{x}_i^{(0)}}{\partial u} + \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial u} + (\overline{x}_i^{(0)} - x_i^{(0)}) \frac{\partial \log R}{\partial u} + \frac{U'}{2(U+V)} (\overline{x}_i^{(0)} + x_i^{(0)}) = 0 \\ &\frac{\partial \overline{x}_i^{(0)}}{\partial v} - \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial v} + (\overline{x}_i^{(0)} + x_i^{(0)}) \frac{\partial \log R}{\partial v} + \frac{V'}{2(U+V)} (\overline{x}_i^{(0)} - x_i^{(0)}) = 0. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

La nostra ricerca delle trasformazioni ortogonali delle equazioni di Moutard si trasforma dunque nel problema seguente: *Determinare le $n+1$ funzioni incognite $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, R di u, v in guisa che siano soddisfatte la* (20) *e le* (21), *ed inoltre* R *risulti una soluzione dell'equazione* (1) *di* Moutard.

Per trovare tutte le condizioni a cui dobbiamo assoggettare le incognite, deriviamo rapporto ad u, v le espressioni (19) delle $\overline{x}_i^{(0)}$ servendoci delle formole fondamentali (I) § 2; otteniamo così:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \overline{x}_i^{(0)}}{\partial u} &= \frac{\partial \cos\sigma}{\partial u} x_i^{(0)} + \cos\sigma \sum_k^{1\ldots n} p_{0k} x_i^{(k)} + \sum_k^{1\ldots n} \frac{\partial \lambda_k}{\partial u} x_i^{(k)} + \sum_j^{1\ldots n} \lambda_j \sum_k^{0\ldots n} p_{jk} x_i^{(k)} \\ \frac{\partial \overline{x}_i^{(0)}}{\partial v} &= \frac{\partial \cos\sigma}{\partial u} x_i^{(0)} + \cos\sigma \sum_k^{1\ldots n} q_{0k} x_i^{(k)} + \sum_k^{1\ldots n} \frac{\partial \lambda_k}{\partial v} x_i^{(k)} + \sum_j^{1\ldots n} \lambda_j \sum_k^{0\ldots n} q_{jk} x_i^{(k)}. \end{aligned}\right.$$

D'altra parte abbiamo per le (1) stesse

$$\frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial u} = \sum_k^{1\ldots n} p_{0k} x_i^{(k)}, \quad \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial v} = \sum_k^{1\ldots n} q_{0k} x_i^{(k)},$$

e sostituendo nelle (21), queste diventano:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \cos\sigma}{\partial u} x_i^{(0)} + (\cos\sigma + 1) \sum_k^{1\ldots n} p_{0k} x_i^{(k)} + \sum_k^{1\ldots n} \frac{\partial \lambda_k}{\partial u} x_i^{(k)} + \sum_j^{1\ldots n} \lambda_j \sum_k^{0\ldots n} p_{jk} x_i^{(k)} + \\ &\quad + \left\{(\cos\sigma - 1) x_i^{(0)} + \sum_k^{1\ldots n} \lambda_k x_i^{(k)}\right\} \frac{\partial \log R}{\partial u} + \frac{U'}{2(U+V)} \left\{(\cos\sigma + 1) x_i^{(0)} + \sum_k^{1\ldots n} \lambda_k x_i^{(k)}\right\} = 0 \\ &\frac{\partial \cos\sigma}{\partial v} x_i^{(0)} + (\cos\sigma - 1) \sum_k^{1\ldots n} q_{0k} x_i^{(k)} + \sum_k^{1\ldots n} \frac{\partial \lambda_k}{\partial v} x_i^{(k)} + \sum_j^{1\ldots n} \lambda_j \sum_k^{0\ldots n} q_{jk} x_i^{(k)} + \\ &\quad + \left\{(\cos\sigma + 1) x_i^{(0)} + \sum_k^{1\ldots n} \lambda_k x_i^{(k)}\right\} \frac{\partial \log R}{\partial v} + \frac{V'}{2(U+V)} \left\{(\cos\sigma - 1) x_i^{(0)} + \sum_k^{1\ldots n} \lambda_k x_i^{(k)}\right\} = 0. \\ &\qquad\qquad i = 0, 1, \ldots n. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Ciascuna di queste è una relazione omogenea fra gli elementi di una medesima colonna in Δ, con coefficienti indipendenti dalla colonna; ma poichè $\Delta \neq 0$ $(\Delta = 1)$ dovrà risolversi in un' identità, cioè dovranno essere separatamente nulli i coefficienti di

$$x_i^{(0)}, x_i^{(1)}, \ldots x_i^{(n)}.$$

Cominciando dunque dall'eguagliare a zero i coefficienti di $x_i^{(0)}$ nella (22), abbiamo le due relazioni

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \cos\sigma}{\partial u} + \sum_j^{1\ldots n} p_{j0}\,\lambda_j + (\cos\sigma - 1)\frac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial u} + \frac{\mathrm{U}'}{2(\mathrm{U}+\mathrm{V})}(\cos\sigma + 1) = 0 \\ &\frac{\partial \cos\sigma}{\partial v} + \sum_j^{1\ldots n} q_{j0}\,\lambda_j + (\cos\sigma + 1)\frac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial v} + \frac{\mathrm{V}'}{2(\mathrm{U}+\mathrm{V})}(\cos\sigma - 1) = 0. \end{aligned}\right.$$

Ora dalle (7), (7*) si ricavano subito le formole

$$\text{(23)} \qquad \frac{\partial \cos\sigma}{\partial u} = -\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}+\mathrm{V}}(\cos\sigma + 1) \quad , \quad \frac{\partial \cos\sigma}{\partial v} = -\frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{U}+\mathrm{V}}(\cos\sigma - 1),$$

onde le precedenti diventano:

$$\text{(24)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial u} = -\frac{\mathrm{U}'}{2(\mathrm{U}+\mathrm{V})}\,\frac{1+\cos\sigma}{1-\cos\sigma} + \sum_j^{1\ldots n} \frac{p_{j0}\,\lambda_j}{1-\cos\sigma} \\ &\frac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial v} = -\frac{\mathrm{V}'}{2(\mathrm{U}+\mathrm{V})}\,\frac{1-\cos\sigma}{1+\cos\sigma} - \sum_j^{1\ldots n} \frac{q_{j0}\,\lambda_j}{1+\cos\sigma}. \end{aligned}\right.$$

Queste, note che siano le λ, e supposta soddisfatta la condizione d'integrabilità per le (24), fanno conoscere con una quadratura R, a meno di un fattore costante. Avendo ora k uno qualunque dei valori da 1 ad n, eguagliamo a zero nelle (22) i coefficienti di $x_i^{(k)}$ ed avremo le equazioni

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \lambda_k}{\partial u} + \sum_j^{1\ldots n} \lambda_j\,p_{jk} + (\cos\sigma + 1)\,p_{0k} + \left[\frac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial u} + \frac{\mathrm{U}'}{2(\mathrm{U}+\mathrm{V})}\right]\lambda_k = 0 \\ &\frac{\partial \lambda_k}{\partial v} + \sum_j^{1\ldots n} \lambda_j\,q_{jk} + (\cos\sigma + 1)\,q_{0k} + \left[\frac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial v} + \frac{\mathrm{V}'}{2(\mathrm{U}+\mathrm{V})}\right]\lambda_k = 0, \end{aligned}\right.$$

dalle quali, eliminando colle (24) le derivate di log R, abbiamo le formole definitive:

$$\text{(A)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \lambda_k}{\partial u} = -(1+\cos\sigma)\,p_{0k} - \sum_j^{1\ldots n} p_{jk}\,\lambda_j + \left[\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}+\mathrm{V}}\,\frac{\cos\sigma}{1-\cos\sigma} - \sum_j^{1\ldots n}\frac{p_{j0}\,\lambda_j}{1-\cos\sigma}\right]\cdot\lambda_k \\ &\frac{\partial \lambda_k}{\partial v} = (1-\cos\sigma)\,q_{0k} - \sum_j^{1\ldots n} q_{jk}\,\lambda_j - \left[\frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{U}+\mathrm{V}}\,\frac{\cos\sigma}{1+\cos\sigma} - \sum_j^{1\ldots n}\frac{q_{j0}\,\lambda_j}{1+\cos\sigma}\right]\cdot\lambda_k \\ &\qquad\qquad \text{per } k = 1, 2, \ldots n. \end{aligned}\right.$$

Queste costituiscono per le n funzioni incognite $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ un sistema di *equazioni ai differenziali totali*, i cui secondi membri sono, come si vede, funzioni quadratiche delle incognite λ. A questo sistema bisogna poi aggiungere l'equazione (20) in termini finiti che deve sussistere fra le λ:

$$\text{(B)} \qquad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = \operatorname{sen}^2\sigma .$$

Le condizioni *necessarie e sufficienti*, cui debbono soddisfare le nostre incognite

$$\lambda_1 , \lambda_2 \dots \lambda_n , \mathrm{R}$$

sono dunque espresse dalle (A), (B) e dalle (24) e in fine da ciò che R deve essere una soluzione della equazione (1) di Moutard. Dopo ciò è manifesta la via da tenersi per giungere alla risoluzione del nostro problema. Dobbiamo in primo luogo esaminare le condizioni d'integrabilità del sistema simultaneo (A), (B) per le funzioni incognite $\lambda_1 , \lambda_2 \dots \lambda_n$ e cercarne la più generale soluzione. In secondo luogo dovremo ricercare se le (24) saranno compatibili, ed in terzo luogo se la funzione R da esse determinate risulterà una soluzione dell'equazione di Moutard.

Seguendo la via ora tracciata, noi dimostreremo nei due successivi paragrafi:

1° che le condizioni d'integrabilità pel sistema (A), (B) sono identicamente soddisfatte, e per ciò esso ammette una soluzione generale in cui possono darsi ad arbitrio, per un sistema iniziale (u_0 , v_0) di valori delle variabili indipendenti u , v, i valori iniziali di $\lambda_1 , \lambda_2 \dots \lambda_n$, purchè soddisfino alla (B) per $u = u_0$, $v = v_0$;

2° che, preso un qualunque sistema integrale $(\lambda_1 , \lambda_2 \dots \lambda_n)$ delle (A), (B), la condizione d'integrabilità per le (24) è soddisfatta, e la funzione R da esse determinata verifica l'equazione di Moutard: $\dfrac{\partial^2 \mathrm{R}}{\partial u \, \partial v} = \mathrm{M} . \mathrm{R}$.

§ 4.

Illimitata integrabilità del sistema (A), (B).

Cominciamo dal dimostrare che il sistema (A), per sè considerato, è completamente integrabile, che cioè le sue condizioni d'integrabilità sono identicamente soddisfatte.

Osserviamo in primo luogo che, in forza delle (A) stesse, delle formole (III) per le rotazioni e delle (23), si ha

$$\text{(25)} \qquad \frac{\partial}{\partial v} \sum_j^{1 \dots n} \frac{p_{j0} \lambda_j}{1 - \cos\sigma} + \frac{\partial}{\partial u} \sum_j^{1 \dots n} \frac{q_{j0} \lambda_j}{1 + \cos\sigma} = 0 ,$$

come facilmente si verifica; si ha poi immediatamente:

$$\text{(25*)} \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}+\mathrm{V}} \frac{\cos\sigma}{1-\cos\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{U}+\mathrm{V}} \frac{\cos\sigma}{1+\cos\sigma} \right) = 0 .$$

Ciò posto, per formare le condizioni d'integrabilità del sistema (A) basterà dimostrare che derivando la seconda delle (A) rapporto ad u, la prima rapporto a v e sottraendo, l'espressione Ω che ne risulta nel secondo membro è nulla a causa delle (A) stesse. Ora, se si ha riguardo alle (25), (25*) già constatate, si trova:

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial v}[(1+\cos\sigma)\,p_{0k}] + \frac{\partial}{\partial u}[(1-\cos\sigma)\,q_{0k}) + \sum_j^{1\ldots n} \lambda_j \left(\frac{\partial p_{jk}}{\partial v} - \frac{\partial q_{jk}}{\partial u}\right) +$$
$$+ \sum_j^{1\ldots n} p_{jk} \frac{\partial \lambda_j}{\partial v} - \sum_j^{1\ldots n} q_{jk} \frac{\partial \lambda_j}{\partial u} + \left[\sum_j^{1\ldots n} \frac{p_{j0}\,\lambda_j}{1-\cos\sigma} - \frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}+\mathrm{V}} \frac{\cos\sigma}{1-\cos\sigma}\right] \frac{\partial \lambda_k}{\partial v} +$$
$$+ \left[\sum_j^{1\ldots n} \frac{q_{j0}\,\lambda_j}{1+\cos\sigma} - \frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{U}+\mathrm{V}} \frac{\cos\sigma}{1+\cos\sigma}\right] \frac{\partial \lambda_k}{\partial u}.$$

Sostituendo per le derivate delle λ i valori dati dalle (A) stesse, avendo riguardo alle formole (II), (III) per le rotazioni ed alle (23), si trova dopo alcune facili riduzioni:

$$\Omega = \sum_j^{1\ldots n} \sum_l^{0\ldots n} (q_{jl}\,p_{lk} - p_{jl}\,q_{lk})\,\lambda_j - \sum_j^{1\ldots n} \sum_l^{1\ldots n} p_{jk}\,q_{lj}\,\lambda_l + \sum_j^{1\ldots n} \sum_l^{1\ldots n} q_{jk}\,p_{lj}\,\lambda_l +$$
$$+ \sum_j^{1\ldots n} p_{j0}\,q_{0k}\,\lambda_j - \sum_j^{1\ldots n} q_{j0}\,p_{0k}\,\lambda_j.$$

Scambiando nelle due seconde somme gli indici di sommazione j, l, possiamo scrivere

$$\Omega = \sum_j^{1\ldots n} \sum_l^{0\ldots n} (q_{jl}\,p_{lk} - p_{jl}\,q_{lk})\,\lambda_j + \sum_j^{1\ldots n} \sum_l^{1\ldots n} (p_{jl}\,q_{lk} - q_{jl}\,p_{lk})\,\lambda_j +$$
$$+ \sum_j^{1\ldots n} (p_{j0}\,q_{0k} - q_{j0}\,p_{0k})\,\lambda_j;$$

ma l'ultima somma distrugge quella parte della prima che corrisponde a $l=0$, dopo di che le somme restanti si elidono. Così effettivamente $\Omega = 0$ ed il sistema è dunque illimitatamente integrabile, c. d. d.

Aggreghiamo ora al sistema (A) l'equazione in termini finiti (B) fra le λ:

$$\sum_k^{1\ldots n} \lambda_k^2 + \cos^2\sigma = 1; \tag{26}$$

dimostriamo che le due equazioni ottenute da questa per derivazione rapporto ad u, v, cioè le

$$\sum_k^{1\ldots n} \lambda_k \frac{\partial \lambda_k}{\partial u} + \cos\sigma \frac{\partial \cos\sigma}{\partial u} = 0 \quad , \quad \sum_k^{1\ldots n} \lambda_k \frac{\partial \lambda_k}{\partial v} + \cos\sigma \frac{\partial \cos\sigma}{\partial v} = 0 \tag{27}$$

sono conseguenze della (26) e delle (A) stesse. Ma, facendo uso di queste, troviamo

$$\sum_k^{1\ldots n} \lambda_k \frac{\partial \lambda_k}{\partial u} + \cos\sigma \frac{\partial \cos\sigma}{\partial u} = -(1+\cos\sigma) \sum_k^{1\ldots n} p_{0k}\,\lambda_k - \sum_j^{1\ldots n} \sum_k^{1\ldots n} p_{jk}\,\lambda_j\,\lambda_k +$$
$$+ \frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}+\mathrm{V}} \cos\sigma(1+\cos\sigma) - (1+\cos\sigma) \sum_j^{1\ldots n} p_{j0}\,\lambda_j + \cos\sigma \frac{\partial \cos\sigma}{\partial u}$$

$$\sum_k^{1\ldots n} \lambda_k \frac{\partial \lambda_k}{\partial v} + \cos\sigma \frac{\partial \cos\sigma}{\partial v} = (1-\cos\sigma) \sum_k^{1\ldots n} q_{0k}\,\lambda_k - \sum_j^{1\ldots n} \sum_k^{1\ldots n} q_{jk}\,\lambda_j\,\lambda_k -$$
$$- \frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{U}+\mathrm{V}} \cos\sigma(1-\cos\sigma) + (1-\cos) \sum_j^{1\ldots n} q_{j0}\,\lambda_j + \cos\sigma \frac{\partial \cos\sigma}{\partial v}.$$

In ciascuno dei secondi membri la somma doppia è nulla, come si vede scambiando gli indici di sommazione j, k, ciò che fa cangiare di segno alle rotazioni secondo le (15*); le somme semplici si distruggono, onde in fine per le (23) essi riduconsi identicamente a zero.

Dalle proprietà dimostrate segue appunto che il sistema simultaneo (A), (B) è un sistema *completo* e nel suo integrale generale entrano quindi $n-1$ costanti arbitrarie, cioè i valori iniziali di $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, vincolati dalla (B).

§ 5.

La funzione R *come soluzione dell'equazione* (I) *di* Moutard.

Venendo ora alla seconda parte delle verifiche indicate alla fine del § 3, dimostriamo che, scelte $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ in guisa da soddisfare il sistema (A), (B), le due equazioni (24), che danno i valori di $\frac{\partial \log R}{\partial u}$, $\frac{\partial \log R}{\partial v}$, risultano compatibili, e in secondo luogo che la funzione R, così determinata con una quadratura, eguaglia una soluzione dell'equazione (1) di Moutard.

La prima verifica è immediata, ricordando che vale la (25) ed osservando l'altra

$$(28) \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{U'}{U+V}\,\frac{1+\cos\sigma}{1-\cos\sigma}\right]=\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{V'}{U+V}\,\frac{1-\cos\sigma}{1+\cos\sigma}\right]=\frac{U'\,V'}{(U+V)^2}.$$

Ed ora, scrivendo le (24) sotto la forma:

$$\frac{\partial R}{\partial u}=\left[-\frac{U'}{2(U+V)}\,\frac{1+\cos\sigma}{1-\cos\sigma}+\sum_j^{1\ldots n}\frac{p_{j0}\,\lambda_j}{1-\cos\sigma}\right]\cdot R$$

$$\frac{\partial R}{\partial v}=-\left[\frac{V'}{2(U+V)}\,\frac{1-\cos\sigma}{1+\cos\sigma}+\sum_j^{1\ldots n}\frac{q_{j0}\,\lambda_j}{1+\cos\sigma}\right]\cdot R,$$

deriviamo p. e. la prima rispetto a v, sostituendo per $\frac{\partial R}{\partial v}$ il valore dato dalla seconda; troveremo manifestamente un risultato della forma:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial v}=N\cdot R,$$

dove resterà da calcolare il valore del coefficiente N e dimostrare che coincide con M. Ora, facendo uso delle (23), (28), delle formole (III) per le rotazioni e delle (A), troviamo:

$$\begin{aligned}
N=&-\frac{U'\,V'}{2(U+V)^2}+\sum_j^{1\ldots n}\frac{\lambda_j}{1-\cos\sigma}\left[\sum_k^{1\ldots n}p_{k0}\,q_{jk}-\frac{V'}{2(U+V)}\,p_{j0}-\frac{U'}{2(U+V)}\,q_{j0}\right]+\\
&+\sum_j^{1\ldots n}\frac{p_{j0}}{1-\cos\sigma}\left[(1-\cos\sigma)\,q_{0j}-\sum_k^{1\ldots n}q_{kj}\,\lambda_k-\frac{V'}{U+V}\,\frac{\cos\sigma}{1-\cos\sigma}\,\lambda_j+\sum_k^{1\ldots n}\frac{q_{k0}\,\lambda_k\,\lambda_j}{1+\cos\sigma}\right]+\\
&+\frac{V'}{U+V}\sum_j^{1\ldots n}\frac{p_{j0}\,\lambda_j}{1-\cos\sigma}+\frac{V'}{2(U+V)}\,\frac{1-\cos\sigma}{1+\cos\sigma}\left[\frac{U'}{2(U+V)}\,\frac{1+\cos\sigma}{1-\cos\sigma}-\sum_j^{1\ldots n}\frac{p_{j0}\,\lambda_j}{1-\cos\sigma}\right]+\\
&+\left[\frac{U'}{2(U+V)}\,\frac{1+\cos\sigma}{1-\cos\sigma}-\sum_k^{1\ldots n}\frac{p_{k0}\,\lambda_k}{1-\cos\sigma}\right]\cdot\sum_j^{1\ldots n}\frac{q_{j0}\,\lambda_j}{1+\cos\sigma}.
\end{aligned}$$

Qui osserviamo che nel secondo membro: 1° le due somme doppie ove figurano i prodotti di due λ si elidono; 2° la parte lineare nelle λ è pure nulla, annullandosi il coefficiente di λ_j (per $j = 1, 2 \dots n$); resta quindi:

$$N = -\frac{U'V'}{4(U+V)^2} + \sum_j^{1\dots n} p_{jo}\, q_{oj}.$$

Ora si ha per le (15)

$$\sum_j^{1\dots n} p_{jo}\, q_{oj} = -\sum_j^{0\dots n} p_{oj}\, q_{oj} = -\sum_j^{0\dots n}\left(\sum_r^{0\dots n} x_r^{(j)} \frac{\partial x_r^{(0)}}{\partial u}\right)\cdot\left(\sum_s^{0\dots n} x_s^{(j)} \frac{\partial x_s^{(0)}}{\partial v}\right) =$$

$$= -\sum_{r,s}^{0\dots n} \frac{\partial x_r^{(0)}}{\partial u} \frac{\partial x_s^{(0)}}{\partial v} \cdot \sum_j^{0\dots n} x_r^{(j)} x_s^{(j)},$$

e quindi per le (14*)

$$\sum_j^{1\dots n} p_{jo}\, q_{oj} = -\sum_{r,s}^{0\dots n} \varepsilon_{rs} \frac{\partial x_r^{(0)}}{\partial u} \frac{\partial x_s^{(0)}}{\partial v} = -\sum_r^{0\dots n} \frac{\partial x_r^{(0)}}{\partial u} \frac{\partial x_r^{(0)}}{\partial v} = -F;$$

dunque in fine

$$N = -F - \frac{U'V'}{4(U+V)^2},$$

ossia per la (11)

$$N = M, \text{ c. d. d.}$$

Osserviamo di passaggio che le verifiche compiute nel presente paragrafo si appoggiano solo sulle relazioni (A) cui soddisfano le λ e nulla affatto sulla (B). Basta dunque che $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ verifichino il sistema (A), e le (24) daranno con una quadratura una soluzione R della (1) e d'altra parte le formole

$$\theta_i = \theta_i \cos\sigma + \sum_k^{1\dots n} \lambda_k\, x_i^{(k)} \cdot \sqrt{U+V}$$

daranno, secondo le (19), le soluzioni $\bar\theta_0, \bar\theta_1 \dots \bar\theta_n$ della trasformata.

Con queste ultime ricerche abbiamo dimostrato che ogni equazione di Moutard con un gruppo di $n+1$ soluzioni quadratiche possiede delle trasformazioni ortogonali. Di più abbiamo visto che nella espressione più generale di una tale trasformazione figurano n costanti arbitrarie, e cioè i valori iniziali di $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$, vincolati dalla (B), e la costante h contenuta, secondo la (7), in $\cos\sigma$. Siamo giunti così al teorema B) enunciato nella prefazione: *Ogni equazione di Moutard con un gruppo di $n+1$ soluzioni quadratiche possiede ∞^n trasformazioni ortogonali che cangiano questo gruppo in un gruppo della medesima specie per l'equazione trasformata.*

Quanto alla ricerca effettiva di queste trasformazioni, essa dipende dall'integrazione del sistema completo (A), (B); e su questa i metodi generali ben poco possono apprenderci. Solo si può osservare che nel caso $n = 2$, corrispondente al primo problema geometrico di cui è parola nella prefazione, se si pone

$$\lambda_1 = \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\varphi\ ,\quad \lambda_2 = \operatorname{sen}\sigma \cos\varphi\ ,$$

si ottiene per φ un'equazione ai differenziali totali, che nell'incognita $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ assume la forma di Riccati. Essa si integra quindi con quadrature, appena nota una sua soluzione particolare.

Ma, pur rimanendo nel caso generale di n qualunque, noi perverremo a trovare una proprietà molto notevole relativa alla integrazione del sistema (A), (B), dimostrando che anche in questa teoria generale delle trasformazioni ortogonali delle equazioni di Moutard sussiste un *teorema di permutabilità*, di cui preciseremo fra breve l'enunciato. Esso non è altro che la generalizzazione del teorema di permutabilità da me dapprima stabilito per la teoria delle trasformazioni delle superficie pseudosferiche (1) e più tardi per le trasformazioni delle superficie con sistema coniugato permanente (2), i quali casi corrispondono al supporre nella teoria generale attuale $n = 2$. In fine ho dimostrato recentemente che un teorema del tutto analogo sussiste nella teoria generale delle trasformazioni di Darboux delle superficie isoterme (3).

§ 6.

Richiamo di una proprietà generale delle equazioni di Moutard.

Per arrivare all'indicato teorema di permutabilità ci conviene riprendere il risultato generale, relativo alle equazioni di Moutard, stabilito al § 247 delle mie *Lezioni* (vol. II, pag. 69), e completarlo in un punto. Ivi si è provato che se si passa da un'equazione E di Moutard

$$\mathrm{E})\ \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{M}\theta$$

a due contigue E_1, E_2

$$\mathrm{E}_1)\ \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{M}_1\theta\,, \qquad \mathrm{E}_2)\ \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{M}_2\theta$$

mediante le trasformazioni di Moutard che corrispondono alle rispettive soluzioni particolari R_1, R_2 della E, esiste una quarta equazione $\overline{\mathrm{E}}$ di Moutard:

$$\overline{\mathrm{E}})\ \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \overline{\mathrm{M}}\theta\,,$$

dipendente da una costante arbitraria e contigua, come la E, alle due medesime E_1, E_2.

(1) *Sulle trasformazioni di Bäcklund per le superficie pseudosferiche* (Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, 1892).

(2) *Sulla interpretazione geometrica del teorema di Moutard* (Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, 1894).

(3) Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, aprile 1904, e la Memoria negli Annali di matematica, t. XI, ser. 3ª.

Più precisamente se si determina con una quadratura l'incognita Δ dal sistema lineare completamente integrabile

$$(29)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Delta}{\partial u} + \Delta \dfrac{\partial}{\partial u} \log(R_1 R_2) + \dfrac{\partial}{\partial u} \log\left(\dfrac{R_1}{R_2}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \Delta}{\partial v} + \Delta \dfrac{\partial}{\partial v} \log(R_1 R_2) + \dfrac{\partial}{\partial v} \log\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right) = 0, \end{cases}$$

le soluzioni R'_1, R'_2 rispettivamente di E_1, E_2 che fanno passare da queste alla $\overline{E}$ sono date dalle formole

$$(28^*)\qquad R'_1 = R_2 \Delta \quad , \quad R'_2 = R_1 \Delta .$$

Sia ora θ una soluzione qualunque della E, e θ_1, θ_2 due soluzioni corrispondenti delle rispettive contigue E_1, E_2, onde avremo le formole:

$$(30)\qquad \frac{\partial(\theta_1 + \theta)}{\partial u} + (\theta_1 - \theta)\frac{\partial \log R_1}{\partial u} = 0 \quad , \quad \frac{\partial(\theta_1 - \theta)}{\partial v} + (\theta_1 + \theta)\frac{\partial \log R}{\partial v} = 0$$

$$(30^*)\qquad \frac{\partial(\theta_2 + \theta)}{\partial u} + (\theta_2 - \theta)\frac{\partial \log R_2}{\partial u} = 0 \quad , \quad \frac{\partial(\theta_2 - \theta)}{\partial v} + (\theta_2 + \theta)\frac{\partial \log R}{\partial v} = 0;$$

dimostreremo che: *Se si pone*

$$(31)\qquad \overline{\theta} = \theta + \frac{\theta_1 - \theta_2}{\Delta},$$

sarà $\overline{\theta}$ una soluzione della quarta equazione $\overline{E}$, e precisamente corrisponderà, come θ, alle soluzioni θ_1, θ_2 di E_1, E_2.

Basterà provare che la funzione $\overline{\theta}$ definita dalla (31) soddisferà alle equazioni seguenti che corrispondono alle (30), (30*):

$$(32)\qquad \frac{\partial(\overline{\theta} + \theta_1)}{\partial u} + (\overline{\theta} - \theta_1)\frac{\partial \log R'_1}{\partial u} = 0 \quad , \quad \frac{\partial(\overline{\theta} - \theta_1)}{\partial v} + (\overline{\theta} + \theta_1)\frac{\partial \log R'_1}{\partial v} = 0$$

$$(32^*)\qquad \frac{\partial(\overline{\theta} + \theta_2)}{\partial u} + (\overline{\theta} - \theta_2)\frac{\partial \log R'_2}{\partial u} = 0 \quad , \quad \frac{\partial(\overline{\theta} - \theta_2)}{\partial v} + (\overline{\theta} + \theta_2)\frac{\partial \log R'_2}{\partial v} = 0,$$

ossia, per le (28*) alle seguenti:

$$(33)\qquad \frac{\partial(\overline{\theta} + \theta_1)}{\partial u} + (\overline{\theta} - \theta_1)\frac{\partial \log(R_2 \Delta)}{\partial u} = 0 \quad , \quad \frac{\partial(\overline{\theta} - \theta_1)}{\partial v} + (\overline{\theta} + \theta_1)\frac{\partial \log(R_2 \Delta)}{\partial v} = 0$$

$$(33^*)\qquad \frac{\partial(\overline{\theta} + \theta_2)}{\partial u} + (\overline{\theta} - \theta_2)\frac{\partial \log(R_1 \Delta)}{\partial u} = 0 \quad , \quad \frac{\partial(\overline{\theta} - \theta_2)}{\partial v} + (\overline{\theta} + \theta_2)\frac{\partial \log(R_1 \Delta)}{\partial v} = 0.$$

Calcoliamo ad esempio il primo membro della prima delle (33) sostituendo per $\bar{\theta}$ il valore (31) ed osservando le (39), (30*) e la prima delle (29); troviamo:

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial u} + \frac{\partial \theta_1}{\partial u} + (\bar{\theta} - \theta_1) \frac{\partial \log (R_2 \Delta)}{\partial u} = (\theta - \theta_1) \frac{\partial \log R_1}{\partial u} +$$

$$+ \frac{1}{\Delta} \left\{ (\theta - \theta_1) \frac{\partial \log R_1}{\partial u} - (\theta - \theta_2) \frac{\partial \log R_2}{\partial u} \right\} - \frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial \Delta}{\partial u} (\theta_1 - \theta_2) +$$

$$+ (\theta - \theta_1) \frac{\partial \log R_2}{\partial u} + \frac{\theta - \theta_1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial u} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{\Delta^2} \frac{\partial \Delta}{\partial u} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{\Delta} \frac{\partial \log R_2}{\partial u} =$$

$$= \frac{\theta - \theta_1}{\Delta} \left[\frac{\partial \Delta}{\partial u} + \Delta \frac{\partial}{\partial u} \log (R_1 R_2) + \frac{\partial}{\partial u} \log \left(\frac{R_1}{R_2} \right) \right],$$

la quale espressione è identicamente nulla per la prima delle (29) stesse.

Del tutto similmente si compiono le verifiche per la seconda delle (33) e per le (33*), onde risulta stabilita la proprietà enunciata.

§ 7.

Enunciato e formole del teorema di permutabilità.

Per precisare il teorema di cui si tratta introduciamo un'opportuna notazione. Consideriamo un'equazione E di Moutard con un gruppo $(\theta_0, \theta_1 \ldots \theta_n)$ di $n+1$ soluzioni quadratiche, e fissato il valore della costante h nella formola (7) per $\cos\sigma$, consideriamo una qualunque delle ∞^{n-1} trasformazioni ortogonali della E di cui nei paragrafi precedenti abbiamo dimostrato l'esistenza; una tale trasformazione indicheremo col simbolo T_h [1]. Ciò premesso, ecco il preciso enunciato del teorema di permutabilità:

Se ad un'equazione E *di* Moutard, *con un gruppo di soluzioni quadratiche, sono contigue per trasformazioni ortogonali* T_{h_1}, T_{h_2}, *con costanti* h_1, h_2 *differenti, due altre equazioni* E_1, E_2, *esiste una quarta equazione* $\bar{E}$ *di* Moutard, *perfettamente determinata, contigua anch'essa alle due medesime* E_1, E_2 *per trasformazioni ortogonali* T'_{h_2}, T'_{h_1} *colle costanti* h_1, h_2 *invertite. Quando siano note* E, E_1, E_2, *coi loro rispettivi gruppi di soluzioni quadratiche, il calcolo della quarta equazione* $\bar{E}$ *e del gruppo corrispondente di soluzioni quadratiche si compie* ***in termini finiti.***

Essendo $(\theta_0, \theta_1 \ldots \theta_n)$ il gruppo di soluzioni quadratiche della E, indichiamo con

$$(\theta_0^{(1)}, \theta_1^{(1)}, \ldots \theta_n^{(1)}) \quad , \quad (\theta_0^{(2)}, \theta_1^{(2)}, \ldots \theta_n^{(2)})$$

i rispettivi gruppi corrispondenti di E_1, E_2, e inoltre con

$$\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots \lambda_n^{(1)}; \; R_1$$

i valori delle $n+1$ funzioni trasformatrici $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n, R$ del § 3 pel passaggio

[1] Nella T_h entrano, oltre h, altre $n-1$ costanti arbitrarie i cui valori non occorre per altro mettere in rilievo.

da E ad E_1 mediante la T_{h_1}, a cui corrisponderà un valore σ_1 dell'angolo σ dato dalla corrispondente formola (7)

$$\cos\sigma_1 = \frac{V - U + 2h_1}{U + V}.$$

Similmente indichiamo con

$$\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \dots \lambda_n^{(2)};\ R_2, \sigma_2$$

gli elementi analoghi pel passaggio da E ad E_2 colla T_{h_2}.

Secondo le formole (A) § 3, sussistono le relazioni:

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \lambda_k^{(i)}}{\partial u} = -(1+\cos\sigma_i)\, p_{0k} - \sum\limits_j^{1\dots n} p_{jk}\, \lambda_j^{(i)} + \\ \qquad\qquad + \left[\dfrac{U'}{U+V}\, \dfrac{\cos\sigma_i}{1-\cos\sigma_i} - \sum\limits_j^{1\dots n} \dfrac{p_{j0}\, \lambda_j^{(i)}}{1-\cos\sigma_i}\right] \cdot \lambda_k^{(i)} \\ \dfrac{\partial \lambda_k^{(i)}}{\partial v} = (1-\cos\sigma_i)\, q_{0k} - \sum\limits_j^{1\dots n} q_{jk}\, \lambda_j^{(i)} - \\ \qquad\qquad - \left[\dfrac{V'}{U+V}\, \dfrac{\cos\sigma_i}{1+\cos\sigma_i} - \sum\limits_j^{1\dots n} \dfrac{q_{j0}\, \lambda_k^{(i)}}{1+\cos\sigma_i}\right] \cdot \lambda_k^{(i)} \\ \qquad\qquad \text{per } k = 1, 2, \dots n;\ i = 1, 2. \end{cases}$$

Le formole (19) § 3 dànno inoltre

$$(35)\quad \theta_j^{(i)} = \sqrt{U+V}\left[x_j \cos\sigma_i + \sum_k^{1\dots n} \lambda_k^{(i)}\, x_j^{(k)}\right]$$
$$j = 0, 1, \dots n;\ i = 1, 2.$$

Ora, secondo quanto abbiamo dimostrato al paragrafo precedente, se determiniamo la funzione $\varDelta$ in guisa da soddisfare le equazioni simultanee (29), indi poniamo colle (31)

$$(36)\quad \overline{\theta}_j = \theta_j + \frac{\theta_j^{(1)} - \theta_j^{(2)}}{\varDelta},$$

saranno $\overline{\theta}_0, \overline{\theta}_1 \dots \overline{\theta}_n$ altrettante soluzioni della quarta equazione $\overline{E}$ ivi considerata. Per ipotesi abbiamo

$$(37)\quad \sum_j^{0\dots n} \theta_j^2 = \sum_j^{0\dots n} (\theta_j^{(1)})^2 = \sum_j^{0\dots n} (\theta_j^{(2)})^2 = U + V.$$

e se dimostriamo che $\varDelta$ può scegliersi in guisa da soddisfare le (29) ed insieme la condizione

$$\sum_j^{0\dots n} \overline{\theta}_j^2 = U + V,$$

sarà dimostrato il teorema di permutabilità. Ma dalle (36), quadrando e sommando da $j=0$ a $j=n$ e badando alle (37), deduciamo

$$2\frac{U+V-\sum\limits_j^{0\ldots n}\theta_j^{(1)}\theta_j^{(2)}}{\Delta^2}+2\frac{\sum\limits_j^{0\ldots n}\theta_j\theta_j^{(1)}-\sum\limits_j^{0\ldots n}\theta_j\theta_j^{(2)}}{\Delta}=0\,,$$

onde per Δ il valore unico e determinato:

$$\Delta=\frac{U+V-\sum\limits_j^{0\ldots n}\theta_j^{(1)}\theta_j^{(2)}}{\sum\limits_j^{0\ldots n}\theta_j\theta_j^{(2)}-\sum\limits_j^{0\ldots n}\theta_j\theta_j^{(1)}}\,.$$

Ora per le (35) si ha

$$\sum_j^{0\ldots n}\theta_j^{(1)}\theta_j^{(2)}=(U+V)\left[\cos\sigma_1\cos\sigma_2+\sum_k^{1\ldots n}\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}\right],$$

$$\sum_j^{0\ldots n}\theta_j\theta_j^{(1)}=(U+V)\cos\sigma_1\quad,\quad\sum_j^{0\ldots n}\theta_j\theta_j^{(2)}=(U+V)\cos\sigma_2\,,$$

e per ciò la formola precedente per Δ diventa

$$\Delta=\frac{1-\cos\sigma_1\cos\sigma_2-\sum\limits_k^{1\ldots n}\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}}{\cos\sigma_2-\cos\sigma_1}\,. \tag{38}$$

Così le formole (36) pel calcolo del gruppo delle soluzioni quadratiche $\overline{\theta}_0, \overline{\theta}_1 \ldots \overline{\theta}_n$ della quarta equazione $\overline{E}$ diventano

$$\overline{\theta}_j=\theta_j+\frac{\sum\limits_k^{0\ldots n}\theta_k\theta_k^{(2)}-\sum\limits_k^{0\ldots n}\theta_k\theta_k^{(1)}}{U+V-\sum\limits_k^{0\ldots n}\theta_k^{(1)}\theta_k^{(2)}}\left(\theta_j^{(1)}-\theta_j^{(2)}\right),\ j=0,1,\ldots n \tag{C}$$

ovvero

$$\overline{\theta}_j=\theta_j+\frac{\cos\sigma_2-\cos\sigma_1}{1-\cos\sigma_1\cos\sigma_2-\sum\limits_k^{1\ldots n}\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}}\left(\theta_j^{(1)}-\theta_j^{(2)}\right);\ j=0,1,\ldots n. \tag{C*}$$

Non tralascieremo di osservare che il teorema di permutabilità si può utilizzare non solo nel caso delle costanti h_1, h_2 reali, ma anche supponendole complesse coniugate. Allora si potranno prendere per le $\lambda_k^{(2)}, \theta_k^{(2)}$ rispettivamente le quantità coniugate delle $\lambda_k^{(1)}, \theta_k^{(1)}$, come risulta subito dalla forma delle equazioni fondamentali (A); le $\overline{\theta}_j$ risulteranno con ciò ancora reali per le formole (C) o (C*), e quindi la quarta equazione $\overline{E}$ del teorema di permutabilità sarà ancora reale.

§ 8.

Verifica e conseguenze del teorema di permutabilità.

Ci resta unicamente da dimostrare che col valore (38) di $\varDelta$ risultano soddisfatte le equazioni (29). Per compiere queste verifiche è opportuno calcolare in primo luogo dalle (34) le derivate rapporto ad u, v della somma $\sum_k^{1\dots n} \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)}$, per le quali troviamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} \sum_k^{1\dots n} \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)} = &-(1+\cos\sigma_1) \sum_k^{1\dots n} p_{0k} \lambda_k^{(2)} - (1+\cos\sigma_2) \sum_k^{1\dots n} p_{0k} \lambda_k^{(1)} + \\ &+ \left\{ \frac{U'}{U+V} \left(\frac{\cos\sigma_1}{1-\cos\sigma_1} + \frac{\cos\sigma_2}{1-\cos\sigma_2} \right) - \sum_j^{1\dots n} \frac{p_{j0} \lambda_j^{(1)}}{1-\cos\sigma_1} - \sum_j^{1\dots n} \frac{p_{j0} \lambda_j^{(2)}}{1-\cos\sigma_2} \right\} \times \\ &\times \left\{ \varDelta(\cos\sigma_1 - \cos\sigma_2) - \cos\sigma_1 \cos\sigma_2 + 1 \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v} \sum_k^{1\dots n} \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)} = &\quad (1-\cos\sigma_1) \sum_k^{1\dots n} q_{0k} \lambda_k^{(2)} + (1-\cos\sigma_2) \sum_k^{1\dots n} q_{0k} \lambda_k^{(1)} + \\ &+ \left\{ -\frac{V'}{U+V} \left(\frac{\cos\sigma_1}{1+\cos\sigma_1} + \frac{\cos\sigma_2}{1+\cos\sigma_2} \right) + \sum_j^{1\dots n} \frac{q_{j0} \lambda_j^{(1)}}{1+\cos\sigma_1} + \sum_j^{1\dots n} \frac{q_{j0} \lambda_j^{(2)}}{1+\cos\sigma_2} \right\} \times \\ &\times \left\{ \varDelta(\cos\sigma_1 - \cos\sigma_2) - \cos\sigma_1 \cos\sigma_2 + 1 \right\}.\end{aligned}$$

Si osservi ancora che, per le formole (24) § 3, abbiamo

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial \log R_i}{\partial u} &= -\frac{U'}{2(U+V)} \frac{1+\cos\sigma_i}{1-\cos\sigma_i} + \sum_j^{1\dots n} \frac{p_{j0} \lambda_j^{(i)}}{1-\cos\sigma_i} \\ \frac{\partial \log R_i}{\partial v} &= -\frac{V'}{2(U+V)} \frac{1-\cos\sigma_i}{1+\cos\sigma_i} - \sum_j^{1\dots n} \frac{q_{j0} \lambda_j^{(i)}}{1+\cos\sigma_i}.\end{aligned}\right.$$

Avendo riguardo a queste ed alle superiori, costruiamo i primi membri delle (29). calcolando dalla (38) le derivate di $\varDelta$ e dalle (23) quelle di $\cos\sigma_1$, $\cos\sigma_2$; con facili riduzioni si trova che essi sono identicamente nulli, onde il valore (38) di $\varDelta$ soddisfa le (29), c. d. d.

Siccome poi dalle formole (C) risulta

$$(38^*) \qquad \sum_j^{0\dots n} \bar\theta_j \theta_j^{(1)} = \sum_j^{0\dots n} \theta_j \theta_j^{(2)} \quad , \quad \sum_j^{0\dots n} \bar\theta_j \theta_j^{(2)} = \sum_j^{0\dots n} \theta_j \theta_j^{(1)},$$

così è anche provato che la trasformazione pel passaggio da E_1 ad $\bar E$ è una T'_{k_2}, e pel passaggio da E_2 ad $\bar E$ una T'_{k_1}, conforme all'enunciato del teorema di permutabilità. In fine si osserverà che se le costanti h_1, h_2 sono eguali e quindi $\cos\sigma_1 = \cos\sigma_2$ le (C^*) dànno $\overline{\theta}_j = \theta_j$ e la quarta equazione $\overline{E}$ coincide in questo caso colla primitiva E.

Dal teorema di permutabilità così completamente dimostrato si deducono ora, riguardo alla applicazione successiva del processo di trasformazione, le medesime conseguenze come nei casi analoghi già noti [1]; basterà qui rapidamente indicarle. Esse si riassumono nella proposizione seguente:

Se di un'equazione E *di* MOUTARD *si conoscono tutte le* ∞^n *trasformazioni ortogonali per un dato suo gruppo di* $n+1$ *soluzioni quadratiche, anche per ciascuna delle equazioni di* MOUTARD *contigue ad* E *si avranno, in termini finiti, le* ∞^n *trasformazioni ortogonali corrispondenti.*

In altre parole basta saper integrare *completamente* per la prima equazione E di MOUTARD il sistema delle equazioni di trasformazione (A), (B) § 3, e risulteranno senz'altro integrati tutti i sistemi analoghi relativi alle equazioni trasformate, e così via illimitatamente.

E infatti prendiamo una qualunque E_1 delle trasformate ortogonali della E, che derivi dalla E per mezzo di una T_{h_1}, e nelle formole (C^*) pensiamo h_1 (o σ_1) fissa ed h_2 (o σ_2) variabile. Finchè $h_2 \neq h_1$, le (C^*) fanno conoscere, pel teorema di permutabilità, *tutte* le trasformate ortogonali di E_1 per mezzo di una T_{h_2}. Per ottenere anche tutte le trasformate ortogonali di E_1 per mezzo delle T_{h_1}, basta eseguire un conveniente passaggio al limite sulle formole stesse (C^*). Per ciò immaginiamo h_2 variabile e tendente ad h_1, e nello stesso tempo facciamo convergere $\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)} \ldots \lambda_n^{(2)}$ rispettivamente verso $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)} \ldots \lambda_n^{(1)}$, disponendo dei loro valori iniziali, che si assumono come funzioni di h_2, riducentisi ai valori iniziali di $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)} \ldots \lambda_n^{(1)}$ per $h_2 = h_1$ e del resto arbitrarie. Al limite, per $h_2 = h_1$, i secondi termini delle formole (C^*):

$$(39) \qquad \frac{(\cos\sigma_2 - \cos\sigma_1)\,(\theta_j^{(1)} - \theta_j^{(2)})}{1 - \cos\sigma_1 \cos\sigma_2 - \sum\limits_k^{1\ldots n} \lambda_k^{(1)} \lambda_k^{(2)}}\,; \quad j = 0, 1, \ldots n,$$

si presentano sotto la forma indeterminata 0/0; e, come facilmente si vede, si annullano per $h_2 = h_1$ non solo il numeratore ed il denominatore di ciascuna espressione (39), ma ben anche le loro derivate prime rapporto ad h_2. Secondo note regole, i *veri valori* di questi rapporti per $h_2 = h_1$ si hanno dai quozienti delle derivate seconde rapporto ad h_2, fattovi $h_2 = h_1$. Le formole che così si ottengono dalle (C^*) sono le complementari domandate, o fanno conoscere le trasformate ortogonali della E_1 per mezzo delle T_{h_1}, che ancora mancavano.

[1] Cfr. per le trasformazioni di BÄCKLUND il § 385 delle *Lezioni* (vol. II, pag. 417); per le trasformazioni delle superficie isoterme la mia Nota nei Rendiconti dei Lincei (aprile 1904) e più diffusamente nella Memoria: *Ricerche sulle superficie isoterme e sulla deformazione delle quadriche* (Annali di Matematica, serie 3ª, t. XI, 1904).

§ 9.

Il teorema delle 8 equazioni di MOUTARD *e sua applicazione alle trasformazioni di* BÄCKLUND *delle superficie pseudosferiche.*

In ciò che precede abbiamo esposto le conseguenze del teorema di permutabilità nell'ipotesi che della equazione primitiva E di MOUTARD si conoscano *tutte* le trasformate ortogonali contigue. Possiamo ora domandare quale vantaggio si può trarre dal teorema stesso quando *alcune soltanto* delle trasformate ortogonali della E sono note. Se due di queste trasformate della E sono note, il teorema di permutabilità ci insegna a costruire una quarta equazione di MOUTARD con un corrispondente gruppo di soluzioni quadratiche. Ci limiteremo qui ad esaminare il caso successivo che della equazione E siano note *tre* trasformazioni ortogonali $T_{h_1}, T_{h_2}, T_{h_3}$ *con costanti* h_1, h_2, h_3 *diverse fra loro*, che cangino E nelle contigue E_1, E_2, E_3. Applicando il teorema di permutabilità, troveremo in termini finiti:

una quarta equazione dopo (E, E_2, E_3) che indicheremo con E'
» » (E, E_3, E_1) » » E''
» » (E, E_1, E_2) » » E'''.

Ora alle tre terne

$$(E_1, E'', E''') , (E_2, E''', E') , (E_3, E', E'') ,$$

applicando nuovamente il teorema di permutabilità, otteniamo da ciascuna una quarta equazione; e così proseguendo sembrerebbe a prima vista che si dovesse trovare un numero illimitato di nuove equazioni di MOUTARD, legate per trasformazioni ortogonali alle precedenti. Dimostreremo invece che le tre terne ultimamente scritte sono completate da una sola e medesima quarta equazione, la quale indicheremo con $\overline{E}$, ed avremo così stabilito il teorema seguente:

Se di una equazione E *di* MOUTARD, *con un gruppo di soluzioni quadratiche, sono note tre equazioni contigue* E_1, E_2, E_3, *dedotte da* E *mediante tre trasformazioni ortogonali* $T_{h_1}, T_{h_2}, T_{h_3}$ *a costanti differenti, l'applicazione del teorema di permutabilità a queste quattro equazioni ed alle successive conduce soltanto a quattro nuove equazioni* $E', E'', E''', \overline{E}$; *queste formano colle quattro date un ciclo chiuso di otto equazioni, costituite in guisa che a ciascuna equazione nel ciclo sono contigue tre altre equazioni del ciclo stesso, mediante tre trasformazioni ortogonali colle medesime costanti* h_1, h_2, h_3, *prese in ordine conveniente.*

Per dimostrare il teorema enunciato procediamo nel modo seguente. Indichiamo con (θ_j) $j = 1, 2 \ldots n$ il gruppo di soluzioni quadratiche della E, con $(\theta_j^{(1)}), (\theta_j^{(2)}), (\theta_j^{(3)})$ quelli rispettivamente corrispondenti di E_1, E_2, E_3 e così con $(\theta_j'), (\theta_j''), (\theta_j''')$ quelli di E', E'', E'''. Sia ora $\overline{E}$ la quarta equazione del teorema di permutabilità dopo (E_1, E'', E''') e indichiamo con $(\overline{\theta}_j)$ il suo gruppo corrispondente di soluzioni qua dratiche. Costruendo le espressioni effettive delle $(\overline{\theta}_j)$ mediante le $(\theta_j), (\theta_j^{(1)}), (\theta_j^{(2)}), (\theta_j^{(3)})$, secondo le formole (C) § 7 del teorema di permutabilità, noi dimostreremo che: *le espressioni delle $(\overline{\theta}_j)$ sono simmetriche nei tre sistemi di quantità $(\theta_j^{(1)}), (\theta_j^{(2)}), (\theta_j^{(3)})$*, onde segue che la stessa equazione $\overline{\mathrm{E}}$ completa anche le altre due terne $(\mathrm{E}_2, \mathrm{E}''', \mathrm{E}'')$, $(\mathrm{E}_3, \mathrm{E}', \mathrm{E}'')$, come si era enunciato. Le formole (C) ci dànno intanto

$$(a^*)\quad \begin{cases} \theta_j'' = \theta_j + \dfrac{\sum\limits_k^{0\ldots n} \theta_k \theta_k^{(3)} - \sum\limits_k^{0\ldots n} \theta_k \theta_k^{(1)}}{\mathrm{U} + \mathrm{V} - \sum\limits_k^{0\ldots n} \theta_k^{(1)} \theta_k^{(3)}} (\theta_j^{(1)} - \theta_j^{(3)}) \\[2ex] \theta_j''' = \theta_j + \dfrac{\sum\limits_k^{0\ldots n} \theta_k \theta_k^{(2)} - \sum\limits_k^{0\ldots n} \theta_k \theta_k^{(1)}}{\mathrm{U} + \mathrm{V} - \sum\limits_k^{0\ldots n} \theta_k^{(1)} \theta_k^{(2)}} (\theta_j^{(1)} - \theta_j^{(2)}) \end{cases}$$

$$(b^*)\quad \overline{\theta}_j = \theta_j^{(1)} + \frac{\sum\limits_k^{0\ldots n} \theta_k^{(1)} \theta_k''' - \sum\limits_k^{0\ldots n} \theta_k^{(1)} \theta_k''}{\mathrm{U} + \mathrm{V} - \sum\limits_k^{0\ldots n} \theta_k'' \theta_k'''} (\theta_j'' - \theta_j''')$$

per $j = 0, 1 \ldots n$.

Come già si è osservato colle (38*) § 8, si ha

$$\sum_k^{0\ldots n} \theta_k^{(1)} \theta_k'' = \sum_k^{0\ldots n} \theta_k \theta_k^{(3)} \quad , \quad \sum_k^{0\ldots n} \theta_k^{(1)} \theta_k''' = \sum_k^{0\ldots n} \theta_k \theta_k^{(2)} ,$$

e quindi la (b^*) si scrive

$$(c^*)\quad \overline{\theta}_j = \theta_j^{(1)} + \frac{\sum\limits_k^{0\ldots n} \theta_k \theta_k^{(2)} - \sum\limits_k^{0\ldots n} \theta_k \theta_k^{(3)}}{\mathrm{U} + \mathrm{V} - \sum\limits_k^{0\ldots n} \theta_k'' \theta_k'''} (\theta_j'' - \theta_j''') .$$

Poniamo ora per concisione e simmetria

$$\begin{cases} \sum\limits_k^{0\ldots n} \theta_k \theta_k^{(1)} = e_1 \quad , \quad \sum\limits_k^{0\ldots n} \theta_k \theta_k^{(2)} = e_2 \quad , \quad \sum\limits_k^{0\ldots n} \theta_k \theta_k^{(3)} = e_3 \\ \sum\limits_k^{0\ldots n} \theta_k^{(2)} \theta_k^{(3)} = \varepsilon_1 \quad , \quad \sum\limits_k^{0\ldots n} \theta_k^{(3)} \theta_k^{(1)} = \varepsilon_2 \quad , \quad \sum\limits_k^{0\ldots n} \theta_k^{(1)} \theta_k^{(2)} = \varepsilon_3 . \end{cases}$$

e le (a^*) si scriveranno

$$(d^*)\quad \theta_j'' = \theta_j + \frac{e_3 - e_1}{\mathrm{U} + \mathrm{V} - \varepsilon_2} (\theta_j^{(1)} - \theta_j^{(3)}) \ , \ \theta_j''' = \theta_j + \frac{e_2 - e_1}{\mathrm{U} + \mathrm{V} - \varepsilon_3} (\theta_j^{(1)} - \theta_j^{(2)}) .$$

Se mediante queste ultime calcoliamo la quantità $\mathrm{U} + \mathrm{V} - \sum\limits_j^{0\ldots n} \theta_j'' \theta_j'''$, che figura al denominatore nel secondo termine della (C*), troviamo:

$$\mathrm{U}+\mathrm{V}-\sum_{j}\theta_j''\theta_j'''=$$

$$=\frac{(e_2-e_1)^2(\mathrm{U}+\mathrm{V}-\varepsilon_2)+(e_3-e_1)^2(\mathrm{U}+\mathrm{V}-\varepsilon_3)-(e_2-e_1)(e_3-e_1)(\mathrm{U}+\mathrm{V}+\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3)}{(\mathrm{U}+\mathrm{V}-\varepsilon_2)(\mathrm{U}+\mathrm{V}-\varepsilon_3)}.$$

Indicando con Ω il numeratore nel secondo membro, e ordinando in altro modo i termini, abbiamo

$$(e^*)\qquad \Omega=e_1^2(\mathrm{U}+\mathrm{V}-\varepsilon_1)+e_2^2(\mathrm{U}+\mathrm{V}-\varepsilon_2)+e_3^2(\mathrm{U}+\mathrm{V}-\varepsilon_3)-$$
$$-e_1e_2(\mathrm{U}+\mathrm{V}-\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3)-e_2e_3(\mathrm{U}+\mathrm{V}-\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_1)-$$
$$-e_3e_1(\mathrm{U}+\mathrm{V}-\varepsilon_3-\varepsilon_1+\varepsilon_2);$$

questa espressione Ω è, come si vede, costruita simmetricamente rispetto ai tre sistemi di quantità $(\theta_j^{(1)}),(\theta_j^{(2)}),(\theta_j^{(3)})$. Avendo riguardo alle precedenti e sostituendo nella (b^*), abbiamo dapprima:

$$\bar\theta_j=\left\{1+\frac{(e_2-e_3)(e_3-e_1)(\mathrm{U}+\mathrm{V}-\varepsilon_3)}{\Omega}-\frac{(e_2-e_3)(e_2-e_1)(\mathrm{U}+\mathrm{V}-\varepsilon_2)}{\Omega}\right\}\theta_j^{(1)}+$$
$$+\frac{(e_2-e_3)(e_2-e_1)(\mathrm{U}+\mathrm{V}-\varepsilon_2)}{\Omega}\theta_j^{(2)}+\frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)(\mathrm{U}+\mathrm{V}-\varepsilon_3)}{\Omega}\theta_j^{(3)};$$

in fine, avendo riguardo all'identità

$$\Omega+(e_2-e_3)(e_3-e_1)(\mathrm{U}+\mathrm{V}-\varepsilon_3)-(e_2-e_3)(e_2-e_1)(\mathrm{U}+\mathrm{V}-\varepsilon_2)=$$
$$=(e_1-e_2)(e_1-e_3)(\mathrm{U}+\mathrm{V}-\varepsilon_1),$$

abbiamo la formola definitiva:

$$(f^*)\quad \bar\theta_j=\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)(\mathrm{U}+\mathrm{V}-\varepsilon_1)\theta_j^{(1)}+(e_2-e_3)(e_2-e_1)(\mathrm{U}+\mathrm{V}-\varepsilon_2)\theta_j^{(2)}+(e_3-e_1)(e_3-e_2)(\mathrm{U}+\mathrm{V}-\varepsilon_3)\theta_j^{(3)}}{\Omega}.$$

In questa, come il denominatore Ω, così anche il numeratore è un'espressione simmetrica nei tre sistemi di quantità $(\theta_j^{(1)}),(\theta_j^{(2)}),(\theta_j^{(3)})$, onde, per le osservazioni già fatte sopra, risulta dimostrato il nostro teorema.

Terminiamo questa prima parte segnalando un'applicazione geometrica del teorema ora dimostrato alla teoria delle *trasformazioni di* BÄCKLUND delle superficie pseudosferiche, che ne fa conoscere una proprietà non osservata fin qui. È ben noto che ad ogni superficie pseudosferica corrisponde un'equazione di MOUTARD $\dfrac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\mathrm{M}\theta$ con un gruppo di tre soluzioni quadratiche θ_1, θ_2, θ_3 legate dalla relazione $\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2=1$; ed inversamente ad ogni tale equazione di MOUTARD corrisponde una superficie pseudosferica (¹). Le trasformazioni di BÄCKLUND delle superficie

(¹) Questo discende dalle formole di LELIEUVRE (vol. I, pag. 164) applicate ad una superficie pseudosferica S, riferita alle sue linee assintotiche α,β; $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ hanno il significato dei coseni di direzione della normale alla S.

pseudosferiche non sono altro, dall'attuale punto di vista, che trasformazioni ortogonali delle corrispondenti equazioni di MOUTARD. Applicando il teorema generale del presente § a questo caso speciale, abbiamo la proprietà in discorso delle trasformazioni di BÄCKLUND, data dal teorema:

Se da una superficie pseudosferica S, *mediante tre trasformazioni di* BÄCKLUND $B_{\sigma_1}, B_{\sigma_2}, B_{\sigma_3}$, *a costanti* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ *differenti, si deducono tre nuove superficie pseudosferiche* S_1, S_2, S_3, *esistono quattro altre tali superficie* $S', S'', S''', \bar{S}$, *deducibili in termini finiti, che formano colle quattro precedenti un ciclo chiuso di 8 superficie pseudosferiche, così costituite che ciascuna delle 8 superficie ne ha tre contigue nel ciclo legate ad essa da tre trasformazioni di* BÄCKLUND *colle costanti* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ *in ordine conveniente.*

E invero indichino S', S'', S''' le superficie pseudosferiche che completano rispettivamente le terne $(S, S_2, S_3), (S, S_3, S_1), (S, S_1, S_2)$ secondo il teorema di permutabilità. Le tre nuove terne $(S_1, S'', S'''), (S_2, S''', S'), (S_3, S', S'')$ sono completate alla loro volta ciascuna da tre superficie pseudosferiche, diciamo $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$, le quali (in forza del nostro teorema generale) hanno in punti corrispondenti normali parallele. Conseguentemente esse coincidono in un'unica superficie $\bar{S}$; poichè in caso contrario sarebbero p. es. $\bar{S}_1, \bar{S}_2$ legate ad S''' da due trasformazioni di BÄCKLUND colla medesima costante σ_3 ed avrebbero in punti corrispondenti normali parallele, ciò che è assurdo se S_1, S_2 non coincidono.

PARTE SECONDA.

Le ipersuperficie deformabili nello spazio euclideo a quattro dimensioni e le superficie con sistema coniugato permanente negli spazi di curvatura costante.

§ 10.

Rappresentazione ipersferica delle congruenze nell' S_4.

Ho già indicato nella prefazione le applicazioni geometriche di cui tratterò in questa seconda parte. Premetterò alcune osservazioni sui risultati di SCHUR, limitandomi per altro a verificarli nelle parti per noi essenziali.

SCHUR ha dimostrato che se una varietà V_3 a tre dimensioni entro lo spazio S_4 euclideo è deformabile, la V_3 contiene necessariamente una doppia infinità di rette le quali inoltre debbono potersi distribuire in due serie ∞^1 di superficie sviluppabili, cioè tali che ciascuna sia formata dalle tangenti di una curva nello spazio. Questo sistema ∞^2 di rette è dunque una *congruenza* nel senso preciso che GUICHARD attribuisce a questo nome nelle ricerche citate.

Indicando ora con X_0, X_1, X_2, X_3 le coordinate cartesiane ortogonali nell'S_4, consideriamo in questo l'ipersfera

$$X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1,$$

e prendiamo l'immagine *ipersferica* della congruenza costruita nel modo seguente. Al raggio variabile r della congruenza, tiriamo pel centro dell'ipersfera il raggio parallelo che incontrerà l'ipersfera in un punto $P \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3)$; riguarderemo questo punto P come immagine del raggio r e l'immagine della congruenza sarà quindi una superficie Σ immersa nell'ipersfera o, se si vuole, nello spazio ellittico S_3 a curvatura $k_0 = +1$. Assumiamo poi a linee coordinate (u, v) sopra Σ quelle che corrispondono alle sviluppabili della congruenza; esse tracciano sopra Σ, come ora si vedrà, un sistema coniugato. Consideriamo poi sopra ogni raggio r i due fuochi F_1, F_2, cioè i due punti di contatto di r coi due spigoli di regresso delle sviluppabili della congruenza contenenti r; siano X_0, X_1, X_2, X_3 le coordinate del punto medio O fra i due fuochi F_1, F_2 e indichiamo con 2ϱ la distanza focale. Le coordinate dei due fuochi saranno quindi rispettivamente

$$X_0 + \varrho x_0\ ,\ X_1 + \varrho x_1\ ,\ X_2 + \varrho x_2\ ,\ X_3 + \varrho x_3$$

per l'uno e

$$X_0 - \varrho x_0\ ,\ X_1 - \varrho x_1\ ,\ X_2 - \varrho x_2\ ,\ X_3 - \varrho x_3$$

per l'altro.

Supposto che il primo corrisponda alle sviluppabili $v = \text{cost}$, il secondo alle $u = \text{cost}$, dovremo avere:

$$\frac{\partial(X_i + \rho x_i)}{\partial u} = h x_i \ , \quad \frac{\partial(X_i - \rho x_i)}{\partial v} = l x_i$$
$$i = 0, 1, 2, 3,$$

essendo h, l convenienti fattori di proporzionalità, formole che si scrivono

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_i}{\partial u} = \left(h - \dfrac{\partial \rho}{\partial u}\right) x_i - \rho \dfrac{\partial x_i}{\partial u} \\ \dfrac{\partial X_i}{\partial v} = \left(l + \dfrac{\partial \rho}{\partial v}\right) x_i + \rho \dfrac{\partial x_i}{\partial v} . \end{cases}$$

Ora, ritenendo per la superficie Σ dello spazio ellittico tutte le notazioni introdotte al Cap. XIV delle *Lezioni* (I. pag. 491), abbiamo

$$(41) \qquad \frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial v} - F x_i + D' \xi_i .$$

Derivando la seconda delle (40) rapporto a v, la prima rapporto ad u e sottraendo, deduciamo perciò:

$$\left(2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + \frac{\partial l}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial u} - 2F\rho\right) + \left[2 \frac{\partial \rho}{\partial v} + 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \rho + l\right] \frac{\partial x_i}{\partial u} +$$
$$+ \left[2 \frac{\partial \rho}{\partial u} + 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \rho - h\right] \frac{\partial x_i}{\partial v} + 2D' \rho \xi_i = 0 .$$

Dovendo questa sussistere per $i = 0, 1, 2, 3$, si risolve necessariamente in una identità, e sono quindi nulli separatamente i coefficienti di $\xi_i, x_i, \frac{\partial x_i}{\partial u}, \frac{\partial x_i}{\partial v}$. Abbiamo dunque in primo luogo $D' = 0$, onde il sistema (u, v) è coniugato sopra Σ, come si era asserito. In secondo luogo ne deduciamo che h, l si esprimono per ρ colle formole

$$h = 2\left[\frac{\partial \rho}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \rho\right] \ , \quad l = -2\left[\frac{\partial \rho}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \rho\right],$$

mentre ρ deve essere una soluzione dell'equazione

$$(a) \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial v} + \left[\frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} + F\right] \rho = 0;$$

questa non è altro che l'aggiunta dell'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial v} - F\theta ,$$

cui soddisfano le coordinate di Weierstrass x_0, x_1, x_2, x_3 di un punto variabile sopra Σ, riferita al sistema coniugato (u, v).

Viceversa, se ϱ è una soluzione qualunque della (a), le formole

$$(42)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial X_i}{\partial u} &= \left[\frac{\partial\varrho}{\partial u}+2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right]x_i-\varrho\frac{\partial x_i}{\partial u}\\ \frac{\partial X_i}{\partial v} &= -\left[\frac{\partial\varrho}{\partial v}+2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right]x_i+\varrho\frac{\partial x_i}{\partial v}\end{aligned}\right.$$

definiscono una congruenza dell' S_4 le cui sviluppabili sono le u, v e la cui immagine ipersferica coincide colla superficie data Σ.

§ 11.

Ipersuperficie deformabili nell' S_4.

Consideriamo la nostra congruenza come un'ipersuperficie (rigata) V_3 e siano $\overline{X}_0, \overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3$ le coordinate di un punto qualunque della V_3, situate sul raggio $r \equiv (u, v)$ alla distanza w dal punto centrale O; avremo

$$(43)\qquad \overline{X}_i = X_i + w x_i \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Queste formole, ove u, v, w sono tre variabili indipendenti definiscono la nostra ipersuperficie V_3, della quale andiamo ora a calcolare le due *forme quadratiche fondamentali* (I, pag. 359). Dalle (43) derivando abbiamo per le (42):

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \overline{X}_i}{\partial u} &= \left[\frac{\partial\varrho}{\partial u}+2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\varrho\right]x_i+(w-\varrho)\frac{\partial x_i}{\partial u}\\ \frac{\partial \overline{X}_i}{\partial v} &= -\left[\frac{\partial\varrho}{\partial v}+2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\varrho\right]x_i+(w+\varrho)\frac{\partial x_i}{\partial v}\\ \frac{\partial \overline{X}_i}{\partial w} &= x_i\end{aligned}\right.$$

e di qui pel quadrato

$$\overline{ds}^2 = d\overline{X}_0^2 + d\overline{X}_1^2 + d\overline{X}_2^2 + d\overline{X}_3^2$$

dell'elemento lineare di V_3:

$$\begin{aligned}\overline{ds}^2 = [\alpha^2 + E(w-\varrho)^2]\,du^2 + [\beta^2 + G(w+\varrho)^2]\,dv^2 + dw^2 +\\ + 2[F(w^2-\varrho^2) - \alpha\beta]\,du\,dv + 2\alpha\,du\,dw - 2\beta\,dv\,dw,\end{aligned}$$

avendo posto per brevità:

$$\alpha = \frac{\partial\varrho}{\partial u}+2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\varrho \quad , \quad \beta = \frac{\partial\varrho}{\partial v}+2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\varrho .$$

Si osservi che il $\overline{ds}^2$, cioè la prima forma quadratica fondamentale di V_3, dipende solo dai coefficienti dell'elemento lineare di Σ e dalla soluzione ϱ della (a) che è stata scelta, ma non dai coefficienti D, D'' della seconda forma fondamentale di Σ.

Per calcolare poi i coefficienti Ω_{rs} della seconda forma quadratica di V_3, basta osservare che i coseni di direzione della normale all'ipersuperficie coincidono con quelli $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ della normale a Σ, onde troviamo:

$$(44) \qquad \begin{cases} \Omega_{11} = (w - \varrho)\,D \quad , \quad \Omega_{22} = (w + \varrho)\,D'' \quad , \quad \Omega_{33} = 0 \\ \Omega_{12} = \Omega_{23} = \Omega_{13} = 0 \,. \end{cases}$$

Supponiamo ora che la Σ sia deformabile con conservazione del sistema coniugato (u, v); mentre la Σ si deforma la V_3 conserverà invariato il suo elemento lineare; ma cangieranno per le (44) i coefficienti Ω_{rs} della sua seconda forma fondamentale insieme con D, D''. Dunque la V_3 sarà deformabile, come si voleva, entro lo spazio euclideo. Viceversa se questo accade, la superficie Σ immagine della rigata V_3 entro lo spazio ellittico S_3 sarà deformabile con conservazione del sistema coniugato (u, v) immagine delle sviluppabili di V_3.

Si vedrà fra breve (§ 13) che la superficie Σ o possiede una sola tale deformazione ovvero ne ammette una continuità con un parametro, una serie ∞^1. Lo stesso vale quindi di ogni ipersuperficie deformabile nell' S_4.

Per citare un esempio semplice di siffatte deformazioni prendiamo l'elemento lineare

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\sigma\, du\, dv + dv^2$$

dove σ è un angolo costante, che appartiene al piano ordinario, riferito a due sistemi di rette parallele, e cerchiamo una superficie Σ dello spazio ellittico con questo elemento lineare e su cui le linee (geodetiche) u, v traccino un sistema coniugato.

I simboli di Christoffel essendo qui tutti nulli, le equazioni di Codazzi, poichè $D' = 0$, danno,

$$\frac{\partial D}{\partial v} = 0 \quad , \quad \frac{\partial D''}{\partial u} = 0$$

e quella di Gauss

$$DD'' = -\operatorname{sen}^2\sigma \text{ (1)}.$$

Occorre dunque e basta che D, D'' siano costanti di cui il prodotto soltanto è fissato $= -\operatorname{sen}^2\sigma$. La superficie corrispondente non è altro che la superficie di Clifford ed il sistema geodetico (u, v) è sopra di essa con sistema coniugato permanente. In questo caso l'equazione (a) da cui dipende la ricerca delle corrispondenti ipersuperficie deformabili nell' S_4 diventa

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial u\, \partial v} + \varrho\cos\sigma = 0$$

e si integra completamente, come è noto, mediante funzioni di Bessel.

(1) Cfr. vol. I, pag. 491, 492.

§ 12.

Formole relative a due superficie polari nello spazio ellittico.

Riassunti brevemente i risultati di Schur, veniamo ormai ad occuparci delle superficie Σ dello spazio ellittico con sistema coniugato permanente. Fonderemo la nostra ricerca sopra alcune relazioni che nello spazio ellittico hanno luogo fra una superficie Σ e la sua polare Σ' (superficie parallele e distanti fra loro di un quadrante), e che si riassumono in formole perfettamente analoghe a quelle che nello spazio euclideo sussistono fra gli elementi di una superficie qualunque e della sua immagine sferica di Gauss.

Indichiamo con

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2$$
$$ds'^2 = \mathrm{E}'\,du^2 + 2\mathrm{F}'\,du\,dv + \mathrm{G}'\,dv^2$$

i due elementi lineari delle superficie polari Σ, Σ', con $\begin{Bmatrix} rs \\ t \end{Bmatrix}$ i simboli di Christoffel costruiti pel ds^2, con $\begin{Bmatrix} rs \\ t \end{Bmatrix}'$ quelli del ds'^2. Sussistono allora le formole fondamentali (I, pag. 493)

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} &= \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial v} - \mathrm{E}x_i + \mathrm{D}\xi_i \\
\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v} &= \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial v} - \mathrm{F}x_i + \mathrm{D}'\xi_i \\
\frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} &= \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial v} - \mathrm{G}x_i + \mathrm{D}''\xi_i
\end{aligned}\right.$$

e le loro formole polari (o duali):

$$(45^*)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial u^2} &= \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}'\frac{\partial \xi_i}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}'\frac{\partial \xi_i}{\partial v} - \mathrm{E}'\xi_i + \mathrm{D}x_i \\
\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial u\,\partial v} &= \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}'\frac{\partial \xi_i}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}'\frac{\partial \xi_i}{\partial v} - \mathrm{F}'\xi_i + \mathrm{D}'x_i \\
\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial v^2} &= \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}'\frac{\partial \xi_i}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}'\frac{\partial \xi_i}{\partial v} - \mathrm{G}'\xi_i + \mathrm{D}''x_i .
\end{aligned}\right.$$

Come per la deduzione delle formole di Weingarten (I, pag. 156, nota) prendiamo le formole

$$\mathrm{D} = -\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial \xi_i}{\partial u}\,,\quad \mathrm{D}' = -\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial \xi_i}{\partial v} = -\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial \xi_i}{\partial u}\,,\quad \mathrm{D}'' = -\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial \xi_i}{\partial v}$$

e deriviamole ciascuna una volta rispetto ad u, una seconda rispetto a v, osservando le (45), (45*). Ne seguono le formole stesse di WEINGARTEN:

$$(46)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial u}&=\left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}'\right]D+\left[\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'\right]D'\,, &\frac{\partial D}{\partial v}&=\left[\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'\right]D+\left[\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'\right]D'\\
\frac{\partial D'}{\partial u}&=\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'D+\left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'\right]D'+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}D''\,, &\frac{\partial D'}{\partial v}&=\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'D+\left[\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}'\right]D'+\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}D''\\
\frac{\partial D'}{\partial u}&=\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}D+\left[\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}'\right]D'+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}D''\,, &\frac{\partial D'}{\partial v}&=\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}D+\left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'\right]D'+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'D''\\
\frac{\partial D''}{\partial u}&=\left[\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'\right]D'+\left[\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'\right]D''\,, &\frac{\partial D''}{\partial v}&=\left[\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'\right]D'+\left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}'\right]D''.
\end{aligned}\right.$$

Supponiamo ora che il sistema (u, v) sia coniugato sopra Σ (quindi anche sulle polare Σ'), cioè sia $D'=0$. Le formole (46) di WEINGARTEN ci danno fra i simboli di CHRISTOFFEL per Σ, Σ' le relazioni:

$$(b)\quad\left\{\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}'=\frac{\partial \log D}{\partial u}\,, &&\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}'=\frac{\partial \log D''}{\partial v}\\
&\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=-\frac{D''}{D}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'\,, &&\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=-\frac{D}{D''}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'\\
&\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=-\frac{D''}{D}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'\,, &&\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=-\frac{D}{D''}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'.
\end{aligned}\right.$$

Sono queste le formole, fondamentali pel nostro scopo, che volevamo stabilire.

Osserviamo di più che quando il sistema (u, v) è coniugato le coordinate di punto x_0, x_1, x_2, x_3, legate dalla relazione quadratica $\Sigma x_i^2=1$, sono soluzioni dell'equazione di LAPLACE

$$(c)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\theta}{\partial v}-F\theta,$$

e dualmente quelle ξ_i del piano tangente a Σ dell'altra:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v}=\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'\frac{\partial\xi}{\partial u}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'\frac{\partial\xi}{\partial v}-F'\xi.$$

Viceversa se un'equazione di LAPLACE

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=a\frac{\partial\theta}{\partial u}+b\frac{\partial\theta}{\partial v}+c\theta$$

possiede quattro soluzioni x_0, x_1, x_2, x_3 legate dall'identità quadratica $\sum_i x_i^2=1$, interpretando x_0, x_1, x_2, x_3 come coordinate di WEIERSTRASS di un punto mobile nello spazio ellittico, questo punto descriverà una superficie Σ su cui le linee u, v traccieranno un sistema coniugato. E infatti per questa superficie Σ sussistono ad un tempo le equazioni

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial v} = a\frac{\partial x_i}{\partial u} + b\frac{\partial x_i}{\partial v} + c x_i$$

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial v} = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial v} - \mathrm{F} x_i + \mathrm{D}'\xi_i$$

e sottraendo si ha

$$\left[\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - a\right]\frac{\partial x_i}{\partial u} + \left[\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - b\right]\frac{\partial x_i}{\partial v} - (c+\mathrm{F})\,x_i + \mathrm{D}'\xi_i = 0, \text{ per } i=0,1,2,3.$$

Dunque quest'ultima dev'essere un'identità e per ciò $\mathrm{D}'=0$; inoltre

$$a = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}, \quad b = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}, \quad c = -\mathrm{F}.$$

§ 13.

La superficie Σ dello spazio ellittico con sistema coniugato persistente.

Sulla superficie Σ il sistema (u, v) sia coniugato, indi $\mathrm{D}'=0$. Prendiamo le equazioni di Codazzi

$$(47)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{D}}{\partial v} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'\mathrm{D}'' - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'\mathrm{D} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \mathrm{D}''}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'\mathrm{D} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'\mathrm{D}'' = 0 \end{cases}$$

e ricerchiamo se è possibile deformare la Σ in guisa che il sistema (u, v) resti coniugato. Per ciò, ripetendo l'analisi esposta pel caso euclideo al § 239 delle *Lezioni* (II), pag. 41), osserviamo che dopo la deformazione i simboli $\begin{Bmatrix}rs\\t\end{Bmatrix}'$ per Σ restano gli stessi, mentre cangiano D, D'' in guisa che il prodotto DD'' rimanga invariato. Dunque D, D'' diventeranno dopo la deformazione $\lambda\mathrm{D}, \dfrac{\mathrm{D}''}{\mathrm{D}}$, essendo λ una conveniente funzione di u, v. Esprimendo che $\lambda\mathrm{D}, \dfrac{\mathrm{D}''}{\lambda}$ soddisfano nuovamente le (47), otteniamo per λ le due equazioni simultanee:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}''}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right), \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\mathrm{D}''}{\mathrm{D}}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right),$$

le quali, introducendo colle (b) i valori dei simboli di Christoffel per la polare Σ della Σ, si scrivono:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right), \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right).$$

Facendo il cambiamento di funzione incognita

$$\lambda^2 = 1 + \frac{1}{\nu},$$

avremo per la nuova incognita ν il sistema lineare:

$$\frac{\partial \nu}{\partial u} = 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\cdot(\nu+1) \quad , \quad \frac{\partial \nu}{\partial v} = 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\cdot \nu . \tag{48}$$

Per la condizione d'integrabilità troviamo

$$\left[\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right]\cdot \nu = 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix},$$

onde abbiamo per ν un valore unico e determinato, a meno che non sussistano le due relazioni

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}. \tag{49}$$

Se ciò accade le (48) ammettono una soluzione con una costante arbitraria, e però vediamo che: *Nello spazio ellittico* (come nell'euclideo) *se una superficie Σ' ammette più di una deformazione che conservi coniugato un sistema attualmente coniugato, ammette una deformazione continua di tale specie dipendente da un parametro.*

Fermandoci a quest'ultimo caso, che è quello per noi interessante, vediamo che: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè sopra una superficie Σ' dello spazio ellittico un sistema coniugato (u, v) sia persistente è che sulla sua superficie polare Σ il sistema coniugato corrispondente soddisfi alle condizioni*

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}. \tag{49}$$

La prima di queste eguaglianze esprime che l'equazione di LAPLACE relativa al sistema coniugato (u, v) della superficie polare Σ è *ad invarianti eguali.*

§ 14.

Riduzione del problema alla ricerca delle equazioni di MOUTARD *con gruppi di 4 soluzioni quadratiche.*

Ora non ci resta che un ultimo passo da compiere per ridurre la ricerca delle superficie Σ' con sistema coniugato persistente a quella delle equazioni di MOUTARD con gruppi di 4 soluzioni quadratiche. Per ciò osserviamo che, a causa della prima eguaglianza (49), possiamo porre:

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,,\quad\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,,$$

indicando con φ una funzione incognita, che, per la seconda delle (49), deve soddisfare alla equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}=2\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}\,.$$

L'integrale generale di questa è

$$\varphi=-\frac{1}{2}\log(\mathrm{U}+\mathrm{V}),$$

essendo U, V due funzioni arbitrarie, la prima di u, la seconda di v. Di qui vediamo che l'equazione (e) di Laplace, relativa al sistema coniugato (u, v) di Σ, assume la forma

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+\frac{\mathrm{V}'}{2(\mathrm{U}+\mathrm{V})}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\mathrm{U}'}{2(\mathrm{U}+\mathrm{V})}\frac{\partial x}{\partial v}+\mathrm{F}x=0\,. \tag{50}$$

Compiendo ora in senso inverso una trasformazione già esposta al § 2, cangiamo la funzione incognita x ponendo

$$x=\frac{\theta}{\sqrt{\mathrm{U}+\mathrm{V}}}\,,$$

e l'equazione per θ assumerà la forma di Moutard

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\mathrm{M}\theta, \tag{50*}$$

con $\mathrm{M}=-\mathrm{F}-\dfrac{\mathrm{U}'\,\mathrm{V}'}{4(\mathrm{U}+\mathrm{V})^2}$. Ora le (50*) possederà le quattro soluzioni

$$\theta_0=\sqrt{\mathrm{U}+\mathrm{V}}\cdot x_0\,,\ \theta_1=\sqrt{\mathrm{U}+\mathrm{V}}\cdot x_1\,,\ \theta_2=\sqrt{\mathrm{U}+\mathrm{V}}\cdot x_2\,,\ \theta_3=\sqrt{\mathrm{U}+\mathrm{V}}\cdot x_3,$$

che sono legate dall'identità quadratica

$$\theta_0^2+\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2=\mathrm{U}+\mathrm{V}. \tag{51}$$

Così dunque ad ogni superficie Σ' dello spazio ellittico con sistema coniugato persistente corrisponde un'equazione di Moutard con un gruppo di *quattro* soluzioni quadratiche; questa non è altro che l'equazione di Laplace, ad invarianti eguali, relativa al sistema coniugato sulla superficie polare, ridotta alla forma normale di Moutard.

Suppongasi inversamente che un'equazione di Moutard ammetta un gruppo di quattro soluzioni quadratiche $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ tali dunque che sussista una relazione della forma (51). Ponendo $\theta = x\sqrt{U+V}$, l'equazione per x assumerà la forma (50) ed avrà le quattro soluzioni

$$x_0 = \frac{\theta_0}{\sqrt{U+V}}\ ,\ x_1 = \frac{\theta_1}{\sqrt{U+V}}\ ,\ x_2 = \frac{\theta_2}{\sqrt{U+V}}\ ,\ x_3 = \frac{\theta_3}{\sqrt{U+V}}\ ,$$

la somma dei cui quadrati sarà $= 1$. Interpretando x_0, x_1, x_2, x_3 come coordinate di Weierstrass di un punto P mobile nello spazio ellittico, questo punto descriverà, per quanto abbiamo visto alla fine del § 12, una superficie Σ, su cui il sistema (u, v) sarà coniugato e, la corrispondente equazione di Laplace essendo la (50), saranno soddisfatte per l'elemento lineare di Σ le condizioni (49). Dunque sulla superficie Σ' polare di di Σ il sistema (u, v) sarà un sistema coniugato persistente.

Siamo così giunti al risultato finale: *Ogni equazione di Moutard con un gruppo di quattro soluzioni quadratiche determina una superficie dello spazio ellittico con sistema coniugato persistente; e viceversa ad ogni superficie dello spazio ellittico con sistema coniugato persistente corrisponde un'equazione di Moutard con un gruppo di quattro soluzioni quadratiche.*

È ora evidente come le teorie svolte nella prima parte della Memoria acquistano, nel caso $n = 4$, il significato geometrico di una teoria delle trasformazioni delle superficie con sistema coniugato persistente dello spazio ellittico, o delle loro polari. Noi ci fermeremo solo a considerare il caso di particolare interesse in cui le funzioni U, V si riducono ambedue a costanti.

§ 15.

Le superficie di Voss dello spazio ellittico.

Se nelle formole del § precedente supponiamo U, V costanti, ne risulta

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = 0\ ,\ \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 0$$

e le formule (b) del § 12 ci danno corrispondentemente

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}' = 0\ ,\ \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}' = 0\,.$$

Queste esprimono che sulla superficie Σ' le linee coordinate u, v sono geodetiche; dunque: *Quando* U, V *sono costanti, il sistema coniugato persistente* (u, v) *sulla superficie* Σ *è formato di linee geodetiche.*

Nello spazio euclideo le superficie con sistema coniugato geodetico portano il nome di *superficie di Voss* [1]; useremo la medesima denominazione per le superficie con sistema coniugato geodetico nello spazio di curvatura costante.

[1] Vedi *Lezioni*, vol. I, pag. 326, vol. II, pag. 86.

Inversamente supponiamo che la superficie Σ' dello spazio ellittico sia una superficie di Voss col sistema coniugato geodetico (u, v); sarà allora

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}' = 0 \quad , \quad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}' = 0$$

e quindi per le (b) § 12

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 0.$$

L'equazione (c) § 12 di Laplace relativa al sistema coniugato sopra la polare Σ di Σ' avrà dunque la forma di Moutard

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} + F\theta = 0$$

e possederà quattro soluzioni x_0, x_1, x_2, x_3 legate dall'identità

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Sussiste dunque il teorema: *Ad ogni superficie di Voss dello spazio ellittico corrisponde un'equazione di Moutard con un gruppo $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ di quattro soluzioni legate dall'identità $\theta_0^2 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = 1$, ed inversamente.*

Consideriamo la superficie Σ polare di una superficie di Voss, e sia

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

il suo elemento lineare. Poichè $\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = 0$, $\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 0$, abbiamo

$$G\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial G}{\partial u} = 0 \quad , \quad F\frac{\partial E}{\partial v} - E\frac{\partial G}{\partial u} = 0,$$

indi $\dfrac{\partial E}{\partial v} = \dfrac{\partial G}{\partial u} = 0$, cioè $E = \varphi(u)$, $G = \psi(v)$. Cangiando i parametri u, v, si può fare $E = 1$, $G = 1$ e l'elemento lineare di Σ assume la forma

$$ds^2 = du^2 + 2\cos(2\omega)\,du\,dv + dv^2, \tag{52}$$

indicando con 2ω l'angolo delle linee coordinate. Secondo una denominazione introdotta al § 379 delle *Lezioni* (II, pag. 401), le linee (u, v), dividendo la superficie in quadrilateri ad archi opposti eguali, formano una *rete di Tchebychef*. Inversamente se una superficie Σ possiede una rete (u, v) di Tchebichef *coniugata*, il suo elemento lineare ha la forma (52), indi $\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = 0$, $\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 0$; per la polare Σ' si ha $\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}' = 0$, $\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}' = 0$, ed il sistema coniugato (u, v) sopra Σ' è quindi di linee geodetiche. Concludiamo dunque: *Nella spazio ellittico sopra la superficie polare di ogni superficie di Voss le linee che corrispondono al sistema coniugato geodetico di questa formano una rete coniugata di* TCHEBYCHEF; *ed inversamente la polare di una superficie dotata di una rete coniugata di* TCHEBYCHEF *è una superficie di Voss.*

La ricerca delle superficie di Voss dello spazio ellittico equivale dunque perfettamente a quella delle superficie di questo spazio dotate di una rete coniugata di TCHEBYCHEF [1].

§ 16.

Le superficie dello spazio ellittico con rete coniugata di TCHEBYCHEF.

Consideriamo una superficie Σ dello spazio ellittico con rete coniugata di TCHEBYCHEF. Il suo elemento lineare riveste la forma caratteristica (52), e quindi i valori dei simboli di CHRISTOFFEL sono dati dalle formole:

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} = \cot(2\omega)\cdot\dfrac{\partial(2\omega)}{\partial u}\,, & \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=0\,, & \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}(2\omega)}\dfrac{\partial(2\omega)}{\partial v} \\[2ex] \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}(2\omega)}\dfrac{\partial(2\omega)}{\partial u}\,, & \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=0\,, & \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = \cot(2\omega)\dfrac{\partial(2\omega)}{\partial v}\,. \end{cases}$$

Essendo $D'=0$, le equazioni di CODAZZI (I, pag. 491) diventano

$$\frac{\partial D}{\partial v} = \frac{1}{\operatorname{sen}(2\omega)}\frac{\partial(2\omega)}{\partial u}\cdot D''\,,\quad \frac{\partial D''}{\partial u} = \frac{1}{\operatorname{sen}(2\omega)}\frac{\partial(2\omega)}{\partial v}\cdot D\,, \tag{53}$$

mentre l'equazione di GAUSS: $\dfrac{DD''-D'^2}{EG-F^2} = K-1$ (I, pag. 492) assume la forma

$$DD'' = -\operatorname{sen}(2\omega)\left[\frac{\partial^2(2\omega)}{\partial u\,\partial v} + \operatorname{sen}(2\omega)\right]. \tag{54}$$

Affinchè l'elemento lineare (52) appartenga ad una superficie Σ della nostra classe occorre e basta che $\Omega = 2\omega$ sia una tale funzione di u, v da rendere compatibili le tre equazioni (53), (54) nelle due incognite D, D''. Di qui si può facilmente vedere che la ricerca delle nostre superficie Σ dipende, come quella delle

[1] Nello spazio euclideo invece le cose procedono ben diversamente. Le superficie di Voss si collegano qui colle ordinarie pseudosferiche delle quali sono le *associate* (vol. II, pag. 86). Invece le superficie con rete coniugata di TCHEBYCHEF sono tutte e sole *le superficie di traslazione.* E infatti per queste l'equazione di LAPLACE relativa alla rete coniugata di TCHEBYCHEF ha la forma $\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=0$, e quindi ciascuna delle tre coordinate x, y, z di un punto mobile sulla superficie è la somma di due funzioni l'una della sola u, l'altra della sola v.

superficie isoterme, da un'equazione alle derivate parziali *del 4° ordine.* Questo vediamo p. es. nel modo seguente. Moltiplicando la prima delle (53) per 2D ed osservando la (54), abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[D^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right)^2\right]=2\frac{\partial\cos\Omega}{\partial u}\qquad(\Omega=2\omega);$$

si può quindi introdurre una funzione ausiliaria Φ tale che sia

$$\cos\Omega=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\quad,\quad D^2=\frac{\partial\Phi}{\partial u}-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right)^2,$$

ovvero

$$\cos\Omega=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial v}\quad,\quad D^2=\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\frac{\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}\right)^2}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2-4}.$$

Esprimendo colla (54) anche D″ per Φ e sostituendo nella seconda (53), otteniamo per la funzione incognita Φ l'indicata equazione del 4° ordine; ed inversamente ad ogni soluzione di questa corrisponde una superficie Σ a rete coniugata di Tchebychef, ovvero una superficie di Voss dello spazio ellittico.

Scriviamo ora un sistema di formole che ci servirà per dedurre dai risultati generali della Parte Prima la teoria delle *trasformazioni* delle nostre superficie. In ogni punto della superficie Σ consideriamo un triedro trirettangolo, i cui spigoli siano diretti rispettivamente secondo la normale a Σ e secondo le direzioni delle due bisettrici dell'angolo 2ω fra le linee coordinate. Indicheremo al solito con $(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ i coseni di direzione della normale e con $(\eta_0,\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ quelli della prima bisettrice, con $(\zeta_0,\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$ quelli della seconda. Potremo porre

$$\eta_i=\frac{1}{2\cos\omega}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}+\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)\quad,\quad\zeta_i=\frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,\omega}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}-\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)\quad(i=0,1,2,3)$$

e dalle formole generali (45) § 12 dedurremo le seguenti:

$$(55)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial x_i}{\partial u}=\eta_i\cos\omega+\zeta_i\,\mathrm{sen}\,\omega &&,\ \frac{\partial x_i}{\partial v}=\eta_i\cos\omega-\zeta_i\,\mathrm{sen}\,\omega\\
&\frac{\partial\xi_i}{\partial u}=-\frac{D}{2\cos\omega}\eta_i-\frac{D}{2\,\mathrm{sen}\,\omega}\zeta_i &&,\ \frac{\partial\xi_i}{\partial v}=-\frac{D''}{2\cos\omega}\eta_i+\frac{D''}{2\,\mathrm{sen}\,\omega}\zeta_i\\
&\frac{\partial\eta_i}{\partial u}=-x_i\cos\omega+\frac{D}{2\cos\omega}\xi_i+\frac{\partial\omega}{\partial u}\zeta_i &&,\ \frac{\partial\eta_i}{\partial v}=-x_i\cos\omega+\frac{D''}{2\cos\omega}\xi_i-\frac{\partial\omega}{\partial v}\zeta_i\\
&\frac{\partial\zeta_i}{\partial u}=-x_i\,\mathrm{sen}\,\omega+\frac{D}{2\,\mathrm{sen}\,\omega}\xi_i-\frac{\partial\omega}{\partial u}\eta_i &&,\ \frac{\partial\zeta_i}{\partial v}=x_i\,\mathrm{sen}\,\omega-\frac{D''}{2\,\mathrm{sen}\,\omega}\xi_i+\frac{\partial\omega}{\partial v}\eta_i\\
&\qquad\qquad i=0,1,2,3;
\end{aligned}\right.$$

queste sono le formole domandate.

§ 17.

Trasformazioni delle superficie di Voss dello spazio ellittico.

Applichiamo ora i risultati della Parte Prima relativi alle trasformazioni ortogonali delle equazioni di Moutard con gruppi di quattro soluzioni quadratiche supponendo U, V costanti. Ne deduciamo evidentemente un metodo geometrico di trasformazioni per le superficie Σ dello spazio ellittico con rete coniugata di Tchebychef, ovvero (passando alle loro polari) delle superficie di Voss.

Le coordinate x_0, x_1, x_2, x_3 di un punto mobile sopra Σ sono soluzioni della equazione di Moutard $\frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} + x \cos 2\omega = 0$, legate dalla relazione $\sum_i x_i^2 = 1$. Con una trasformazione ortogonale cangiamo l'equazione di Moutard in una contigua di cui sia $\overline{x}_0, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$ il corrispondente gruppo di soluzioni quadratiche, legate dunque dalla medesima relazione $\sum_i \overline{x}_i^2 = 1$. Il punto $(\overline{x}_0, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ dello spazio ellittico descrive una seconda superficie $\overline{\Sigma}$, con rete (u, v) coniugata di Tchebychef, che diremo la trasformata di Σ.

Per scrivere le formole relative alla superficie trasformata $\overline{\Sigma}$ possiamo fare nelle formole generali del § 2

$$x_i^{(1)} = \xi_i \quad , \quad x_i^{(2)} = \eta_i \quad , \quad x_i^{(3)} = \zeta_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

onde paragonando le superiori (55) colle formole (15) § 2 che definiscono le rotazioni, troviamo:

$$(56) \qquad \left\{ \begin{aligned} & p_{01} = 0 \ , \ p_{02} = \cos\omega \ , \ p_{03} = \operatorname{sen}\omega \ , \ p_{12} = \\ & \qquad = -\frac{D}{2\cos\omega} \ , \ p_{13} = -\frac{D}{2\operatorname{sen}\omega} \ , \ p_{23} = \frac{\partial\omega}{\partial u} \\ & q_{01} = 0 \ , \ q_{02} = \cos\omega \ , \ q_{03} = -\operatorname{sen}\omega \ , \ q_{12} = \\ & \qquad = -\frac{D''}{2\cos\omega} \ , \ q_{13} = \frac{D''}{2\cos\omega} \ , \ q_{23} = -\frac{\partial\omega}{\partial v} \ ; \end{aligned} \right.$$

conviene inoltre ricordare che si ha in generale

$$p_{ki} = -p_{ik} \quad , \quad q_{ki} = -q_{ik} \quad , \quad p_{ii} = 0 \quad , \quad q_{ii} = 0 \, .$$

Siccome nel caso nostro U, V sono costanti, la formola (7) § 1 dimostra che l'angolo σ ha pure un valore costante (arbitrario). Secondo le (19) § 3, le coordinate $\overline{x}_i$ del punto mobile sulla superficie trasformata Σ sono date dalle formole

$$(57) \qquad \overline{x}_i = x_i \cos\sigma + \lambda_1 \xi_i + \lambda_2 \eta_i + \lambda_3 \zeta_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3);$$

le funzioni $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ debbono essere determinate in guisa da soddisfare al corrispondente sistema (A), (B) § 3, che pei valori (56) delle rotazioni assume qui la forma.

$$
(\mathrm{A}^*)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial u} = -\dfrac{\lambda_2 \operatorname{sen}\omega + \lambda_3 \cos\omega}{\operatorname{sen} 2\omega}\,\mathrm{D} + \dfrac{\lambda_2 \cos\omega + \lambda_3 \operatorname{sen}\omega}{1-\cos\sigma}\cdot\lambda_1 \\[2ex]
\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial v} = \dfrac{-\lambda_2 \operatorname{sen}\omega + \lambda_3 \cos\omega}{\operatorname{sen} 2\omega}\,\mathrm{D}'' + \dfrac{-\lambda_2 \cos\omega + \lambda_3 \operatorname{sen}\omega}{1+\cos\sigma}\cdot\lambda_1 \\[2ex]
\dfrac{\partial \lambda_2}{\partial u} = -(1+\cos\sigma)\cos\omega + \dfrac{\mathrm{D}}{2\cos\omega}\,\lambda_1 + \dfrac{\partial\omega}{\partial u}\,\lambda_3 + \dfrac{\lambda_2 \cos\omega + \lambda_3 \operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen} 2\omega}\cdot\lambda_2 \\[2ex]
\dfrac{\partial \lambda_2}{\partial v} = (1-\cos\sigma)\cos\omega + \dfrac{\mathrm{D}''}{2\cos\omega}\,\lambda_1 - \dfrac{\partial\omega}{\partial v}\,\lambda_3 + \dfrac{-\lambda_2 \cos\omega + \lambda_3 \operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen} 2\omega}\cdot\lambda_2 \\[2ex]
\dfrac{\partial \lambda_3}{\partial u} = -(1+\cos\sigma)\operatorname{sen}\omega + \dfrac{\mathrm{D}}{2\operatorname{sen}\omega}\,\lambda_1 - \dfrac{\partial\omega}{\partial u}\,\lambda_2 + \dfrac{\lambda_2 \cos\omega + \lambda_3 \operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen} 2\omega}\cdot\lambda_3 \\[2ex]
\dfrac{\partial \lambda_3}{\partial v} = -(1-\cos\sigma)\cos\omega - \dfrac{\mathrm{D}''}{2\operatorname{sen}\omega}\,\lambda_1 + \dfrac{\partial\omega}{\partial v}\,\lambda_2 + \dfrac{-\lambda_2 \cos\omega + \lambda_3 \operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen} 2\omega}\cdot\lambda_3
\end{cases}
$$

$$
(\mathrm{B}^*)\qquad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \operatorname{sen}^2\sigma .
$$

Possiamo dare a queste formole l'aspetto trigonometrico, esprimendo, secondo la (B*), $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ per due angoli ausigliari θ, φ, col porre

$$
\lambda_1 = \operatorname{sen}\sigma\cos\theta \quad , \quad \lambda_2 = \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \quad , \quad \lambda_3 = \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi .
$$

Così il sistema (A*) diventa:

$$
(58)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial\theta}{\partial u} = \dfrac{\operatorname{sen}(\varphi+\omega)}{\operatorname{sen} 2\omega}\,\mathrm{D} - \cot\dfrac{\sigma}{2}\cos\theta\cos(\varphi-\omega) \\[2ex]
\dfrac{\partial\theta}{\partial v} = -\dfrac{\operatorname{sen}(\varphi-\omega)}{\operatorname{sen} 2\omega}\,\mathrm{D}'' + \operatorname{tg}\dfrac{\sigma}{2}\cos\theta\cos(\varphi+\omega) \\[2ex]
\dfrac{\partial(\varphi+\omega)}{\partial u} = \dfrac{\cot\theta\cos(\varphi+\omega)}{\operatorname{sen} 2\omega}\,\mathrm{D} + \cot\dfrac{\sigma}{2}\,\dfrac{\operatorname{sen}(\varphi-\omega)}{\operatorname{sen}\theta} \\[2ex]
\dfrac{\partial(\varphi-\omega)}{\partial v} = -\dfrac{\cot\theta\cos(\varphi-\omega)}{\operatorname{sen} 2\omega}\,\mathrm{D}'' - \operatorname{tg}\dfrac{\sigma}{2}\,\dfrac{\operatorname{sen}(\varphi+\omega)}{\operatorname{sen}\theta} ;
\end{cases}
$$

queste formano, come è naturale, un sistema completamente integrabile, ciò che si conferma con calcolo diretto osservando le (53), (54).

Se ora deriviamo le (57) rapporto ad u, v ed osserviamo le (55), nonchè le (A*), troviamo:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\bar{x}_i}{\partial u} = -(\lambda_2\cos\omega + \lambda_3\operatorname{sen}\omega)\cdot x_i + \dfrac{\lambda_2\cos\omega+\lambda_3\operatorname{sen}\omega}{1-\cos\sigma}\cdot\lambda_1\,\xi_i + \\[1ex]
\quad + \left[\dfrac{\lambda_2\cos\omega+\lambda_3\operatorname{sen}\omega}{1-\cos\sigma}\cdot\lambda_2 - \cos\omega\right]\cdot\eta_i + \left[\dfrac{\lambda_2\cos\omega+\lambda_3\operatorname{sen}\omega}{1-\cos\sigma}\cdot\lambda_3 - \operatorname{sen}\omega\right]\cdot\zeta_i \\[2ex]
\dfrac{\partial\bar{x}_i}{\partial v} = (-\lambda_2\cos\omega + \lambda_3\operatorname{sen}\omega)\cdot x_i + \dfrac{-\lambda_2\cos\omega+\lambda_3\operatorname{sen}\omega}{1+\cos\sigma}\cdot\lambda_1\,\xi_i + \\[1ex]
\quad + \left[\dfrac{-\lambda_2\cos\omega+\lambda_3\operatorname{sen}\omega}{1+\cos\sigma}\cdot\lambda_2 + \cos\omega\right]\cdot\eta_i + \left[\dfrac{-\lambda_2\cos\omega+\lambda_3\operatorname{sen}\omega}{1+\cos\sigma}\cdot\lambda_3 - \operatorname{sen}\omega\right]\cdot\zeta_i ,
\end{cases}
$$

dalle quali formole, calcolando il quadrato $\overline{ds}^2 = \sum_i d\overline{x}_i^2$ dell'elemento lineare della superficie trasformata $\overline{\Sigma}$, troviamo

$$(59) \qquad \overline{ds}^2 = dw^2 + 2\left[\frac{\lambda_2^2 \cos^2\omega - \lambda_3^2 \operatorname{sen}^2\omega}{\operatorname{sen}^2\sigma} - \cos 2\omega\right] du\, dv + dv^2.$$

Le formole stabilite pongono in evidenza le seguenti due proprietà della trasformazione: 1ª. *Due punti corrispondenti della superficie primitiva Σ e della trasformata $\overline{\Sigma}$ si trovano a distanza costante σ* (1); 2ª *gli archi corrispondenti delle linee u, v costituenti la rete coniugata di* Tchebychef *hanno eguale lunghezza.*

Osserviamo ancora che da ogni superficie Σ a rete coniugata di Tchebychef le nostre trasformazioni fanno derivare una *tripla infinita* di superficie della medesima specie. Per individuare una trasformata $\overline{\Sigma}$ di Σ basta fissare (ad arbitrio) il punto $\overline{P}$ della prima che deve corrispondere ad un determinato punto P della seconda.

Se in fine applichiamo il teorema di permutabilità (§ 8), vediamo che: *Note tutte le trasformate contigue di una data superficie Σ, con rete coniugata di* Tchebychef, *di ciascuna superficie derivata $\overline{\Sigma}$ si conosceranno altresì, in termini finiti, tutte le trasformate, e così via.*

§ 18.

Coppie di superficie applicabili dello spazio euclideo con reti di Tchebychef *di eguale flessione.*

La teoria delle superficie di Voss nello spazio ellittico è suscettibile di una notevole interpretazione geometrica *nell'ordinario spazio euclideo*. Essa equivale alla teoria di quelle coppie di superficie applicabili dell'ordinario spazio per le quali il doppio sistema di linee *cinematicamente autoconiugate* (vol. II, pag. 39), ossia di quelle linee che conservano invariata dopo la deformazione la prima curvatura, è formato da una rete di Tchebychef. Otteniamo questa nuova interpretazione applicando il metodo generale esposto in una Nota inserita nei Rendiconti dei Lincei (gennaio 1904) (2).

Prendiamo una superficie Σ dello spazio ellittico con rete (u, v) coniugata di Tchebychef e, mantenendo le notazioni del § 16, indichiamo con X_1, Y_1, Z_1 i *parametri di scorrimento destrorsi* (I, pag. 450) della direzione $(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$, con $\overline{X}_1, \overline{Y}_1, \overline{Z}_1$ quelli sinistrorsi; avremo

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ \eta_0 & \eta_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}, \quad Y_1 = \begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ \eta_0 & \eta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ \eta_3 & \eta_1 \end{vmatrix}, \quad Z_1 = \begin{vmatrix} x_0 & x_3 \\ \eta_0 & \eta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} \\ \overline{X}_1 &= \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ \eta_0 & \eta_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}, \quad \overline{Y}_1 = \begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ \eta_0 & \eta_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ \eta_3 & \eta_1 \end{vmatrix}, \quad \overline{Z}_1 = \begin{vmatrix} x_0 & x_3 \\ \eta_0 & \eta_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}\right.$$

(1) Per le superficie polari di Voss questa proprietà si traduce nell'altra che: *è costante l'angolo dei piani tangenti in due punti corrispondenti*, proprietà perfettamente analoga a quella che ha luogo nello spazio euclideo per le trasformazioni *di Bäcklund* delle superficie di Voss.

(2) *Sopra le rappresentazioni equivalenti della sfera e le coppie di superficie applicabili.*

Analogamente siano (X_2, Y_2, Z_2), $(\overline{X}_2, \overline{Y}_2, \overline{Z}_2)$ i parametri di scorrimento destrorsi e sinistrorsi della seconda bisettrice $(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, ed in fine (X_3, Y_3, Z_3), $(\overline{X}_3, \overline{Y}_3, \overline{Z}_3)$ quelli della direzione $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ normale a Σ. Essendo ogni volta

$$X_i X_k + Y_i Y_k + Z_i Z_k = \varepsilon_{ik}$$
$$\overline{X}_i \overline{X}_k + \overline{Y}_i \overline{Y}_k + Z_i Z_k = \varepsilon_{ik},$$

i due determinanti

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \overline{X}_1 & \overline{Y}_1 & \overline{Z}_1 \\ \overline{X}_2 & \overline{Y}_2 & \overline{Z}_2 \\ \overline{X}_3 & \overline{Y}_3 & \overline{Z}_3 \end{vmatrix}$$

sono ortogonali e le formole generali (I) § 2 diventano per essi, a causa delle (55), le seguenti:

$$(\alpha) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial u} &= \frac{\partial \omega}{\partial u} X_2 - \left(\operatorname{sen}\omega - \frac{D}{2\cos\omega}\right) X_3, \\ \frac{\partial X_1}{\partial v} &= -\frac{\partial \omega}{\partial v} X_2 + \left(\operatorname{sen}\omega + \frac{D''}{2\cos\omega}\right) X_3, \\ \frac{\partial X_2}{\partial u} &= \left(\cos\omega + \frac{D}{2\operatorname{sen}\omega}\right) X_3 - \frac{\partial \omega}{\partial u} X_1, \\ \frac{\partial X_2}{\partial v} &= \left(\cos\omega - \frac{D''}{2\operatorname{sen}\omega}\right) X_3 + \frac{\partial \omega}{\partial v} X_1, \\ \frac{\partial X_3}{\partial u} &= \left(\operatorname{sen}\omega - \frac{D}{2\cos\omega}\right) X_1 - \left(\cos\omega + \frac{D}{2\operatorname{sen}\omega}\right) X_2, \\ \frac{\partial X_3}{\partial v} &= -\left(\operatorname{sen}\omega + \frac{D''}{2\cos\omega}\right) X_1 - \left(\cos\omega - \frac{D''}{2\operatorname{sen}\omega}\right) X_2, \end{aligned} \right.$$

$$(\alpha^*) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial u} &= \frac{\partial \omega}{\partial u} \overline{X}_2 + \left(\operatorname{sen}\omega + \frac{D}{2\cos\omega}\right) \overline{X}_3, \\ \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial v} &= -\frac{\partial \omega}{\partial v} \overline{X}_2 - \left(\operatorname{sen}\omega - \frac{D''}{2\cos\omega}\right) \overline{X}_3, \\ \frac{\partial \overline{X}_2}{\partial u} &= \left(-\cos\omega + \frac{D}{2\operatorname{sen}\omega}\right) \overline{X}_3 - \frac{\partial \omega}{\partial u} \overline{X}_1, \\ \frac{\partial \overline{X}_2}{\partial v} &= -\left(\cos\omega + \frac{D''}{2\operatorname{sen}\omega}\right) \overline{X}_3 + \frac{\partial \omega}{\partial v} \overline{X}_1, \\ \frac{\partial \overline{X}_3}{\partial u} &= -\left(\operatorname{sen}\omega + \frac{D}{2\cos\omega}\right) \overline{X}_1 - \left(-\cos\omega + \frac{D}{2\operatorname{sen}\omega}\right) \overline{X}_2, \\ \frac{\partial \overline{X}_3}{\partial v} &= \left(\operatorname{sen}\omega - \frac{D''}{2\cos\omega}\right) \overline{X}_1 + \left(\cos\omega + \frac{D''}{2\operatorname{sen}\omega}\right) \overline{X}_2, \end{aligned} \right.$$

che valgono ancora sostituendo alle lettere $(X, \overline{X})$ le $(Y, \overline{Y})$ e le $Z, \overline{Z})$.

Ciò posto, se consideriamo le tre espressioni differenziali

$$\begin{cases} (X_1 \cos\omega + X_2 \operatorname{sen}\omega)\, du + (X_2 \operatorname{sen}\omega - X_1 \cos\omega)\, dv \\ (Y_1 \cos\omega + Y_2 \operatorname{sen}\omega)\, du + (Y_2 \operatorname{sen}\omega - Y_1 \cos\omega)\, dv \\ (Z_1 \cos\omega + Z_2 \operatorname{sen}\omega)\, du + (Z_2 \operatorname{sen}\omega - Z_1 \cos\omega)\, dv \end{cases}$$

vediamo che, in forza delle (α), sono tre differenziali esatti; e lo stesso accade ponendo al posto dei parametri destrorsi X , Y , Z i sinistrorsi $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ a causa delle (α^*). Poniamo allora:

$$(60) \qquad \begin{cases} x_0 = \int \{(X_1 \cos\omega + X_2 \operatorname{sen}\omega)\, du + (X_2 \operatorname{sen}\omega - X_1 \cos\omega)\, dv\} \\ y_0 = \int \{(Y_1 \cos\omega + Y_2 \operatorname{sen}\omega)\, du + (Y_2 \operatorname{sen}\omega - Y_1 \cos\omega)\, dv\} \\ z_0 = \int \{(Z_1 \cos\omega + Z_2 \operatorname{sen}\omega\, du) + (Z_2 \operatorname{sen}\omega - Z_1 \cos\omega)\, dv\} \end{cases}$$

$$(60^*) \qquad \begin{cases} \overline{x}_0 = \int \{(\overline{X}_1 \cos\omega + \overline{X}_2 \operatorname{sen}\omega)\, du + (\overline{X}_2 \operatorname{sen}\omega - \overline{X}_1 \cos\omega)\, dv\} \\ \overline{y}_0 = \int \{(\overline{Y}_1 \cos\omega + \overline{Y}_2 \operatorname{sen}\omega)\, du + (\overline{Y}_2 \operatorname{sen}\omega - \overline{Y}_1 \cos\omega)\, dv\} \\ \overline{z}_0 - \int \{(\overline{Z}_1 \cos\omega + \overline{Z}_2 \operatorname{sen}\omega)\, du + (\overline{Z}_2 \operatorname{sen}\omega - \overline{Z}_1 \cos\omega)\, dv\}. \end{cases}$$

Riguardando x_0, y_0, z_0 come coordinate cartesiane ortogonali di un punto P_0 mobile nello spazio euclideo, e così $\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0$ come coordinate di un secondo punto $\overline{P}_0$, questi due punti descriveranno due superficie $S_0, \overline{S}_0$ pei cui elementi lineari $ds_0, \overline{ds}_0$ troviamo subito dalle (60) (60*)

$$(61) \qquad ds_0^2 = \overline{ds}_0^2 = du^2 - 2\cos(2\omega)\, du\, dv + dv^2.$$

Le due superficie $S_0, \overline{S}_0$ sono dunque applicabili e le linee (u, v) corrispondenti alla rete coniugata di TCHEBYCHEF della superficie Σ dello spazio ellittico formano pure sopra $S_0, \overline{S}_0$ una rete di TCHEBYCHEF (non coniugata) supplementare della rete di Σ.

Calcoliamo ora per $S_0, \overline{S}_0$ le due rispettive seconde forme quadratiche fondamentali

$$D_0\, du^2 + 2D_0'\, du\, dv + D_0''\, dv^2 \quad , \quad \overline{D}_0\, du^2 + 2\overline{D}_0'\, du\, da + \overline{D}_0''\, dv^2.$$

Poichè i coseni di direzione della normale a S_0 sono X_3, Y_3, Z_3, e così quelli della $\overline{S}_0$ sono $\overline{X}_3, \overline{Y}_3, \overline{Z}_3$, dalle ultime ($\alpha$), ($\alpha^*$) e dalle (60), (60*) deduciamo

$$(62) \qquad \begin{cases} D_0 = D \quad , \quad D_0' = \operatorname{sen} 2\omega \quad , \quad D_0'' = -D'' \\ \overline{D}_0 = D \quad , \quad \overline{D}_0' = -\operatorname{sen} 2\omega \quad , \quad \overline{D}_0'' = -D''. \end{cases}$$

Queste dimostrano appunto (vol. II, pag. 41) che la rete di Tchebychef (u, v) è composta delle linee cinematicamente antoconiugate delle due superficie applicabile S_0 $\bar{S}_0$.

Questi risultati sono poi confermati da ciò che i valori (62) di $\bar{D}_0, \pm D'_0, D''_0$ soddisfano alle equazioni di Codazzi e Gauss relative allo spazio euclideo per un elemento lineare della forma (61). Colle considerazioni stesse si vede inversamente che ogni coppia $(S_0, \bar{S}_0)$ di superficie applicabili dello spazio euclideo per le quali il sistema delle linne cinematicamente autoconiugate formi una rete di Tchebychef deriva, nel modo superiore, da una superficie Σ dello spazio ellittico con rete di Tchebychef coniugata (supplementare).

Dopo ciò è chiaro come la teoria delle trasformazioni delle superficie di Voss, o delle loro polari, nello spazio ellittico, di cui abbiamo trattato al § precedente, possa anche riguardarsi come una teoria delle trasformazioni delle coppie $(S_0, \bar{S}_0)$ di superficie applicabili dello spazio euclideo con rete di Tchebychef di linee cinematicamente autoconiugate.

§ 19.

Classi di superficie di Voss dello spazio ellittico dipendenti dalle flessioni di superficie di rotazione dello spazio euclideo.

Le superficie generali di Voss dello spazio ellittico dipendono da un'equazione a derivate parziali del 4° ordine e quindi da *quattro* funzioni arbitrarie. Ora esistono tre classi particolari di superficie di Voss, dipendenti da due sole funzioni arbitrarie, e che si collegano in modo notevole alla deformazione di tre diversi tipi di superficie di rotazione dello spazio euclideo; di queste vogliamo ora trattare.

Siamo condotti a queste particolari superficie di Voss dalla teoria delle deformazioni infinitesime delle superficie nello spazio euclideo (*Lezioni*, cap. XV), nel modo seguente. Consideriamo nello spazio ordinario una superficie di rotazione d'elemento lineare

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2 \quad , \quad r = \varphi(u) \tag{63}$$

ed una qualunque sua deformata S. Supposta negativa la curvatura

$$K = -\frac{1}{r}\frac{d^2r}{du^2} = -\frac{r''}{r},$$

poniamo

$$K = -\frac{1}{\varrho^2} \quad , \quad \text{indi} \quad \frac{1}{\varrho^2} = \frac{r''}{r},$$

e siano α, β i parametri delle linee assintotiche (reali) della S. Se indichiamo con X, Y, Z i coseni di direzione della normale alla S e poniamo

$$\theta_1 = \sqrt{\varrho} \cdot X \quad , \quad \theta_2 = \sqrt{\varrho} \cdot Y \quad , \quad \theta_3 = \sqrt{\varrho} \cdot Z$$

saranno, per le formole di Lelieuvre (I, pag. 163), $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ soluzioni di una medesima equazione di Moutard

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} = \mathrm{M}\theta , \tag{64}$$

che è altresì l'equazione per le deformazioni infinitesime per la superficie S (II, pag. 10). D'altronde per la nostra superficie S la funzione $\varphi = r'$ è la funzione caratteristica di Weingarten per quella particolare deformazione infinitesima di S che la fa strisciare sopra sè stessa (II, pag. 60); ne segue che

$$\theta_0 = h r' \sqrt{\varrho} \qquad (h \text{ costante arbitraria})$$

è una quarta soluzione della (64). Se prendiamo la superficie di rotazione in guisa che si abbia

$$\theta_0^2 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \varrho (1 + h^2 r'^2) = b^2 \qquad (b \text{ costante}), \tag{65}$$

per la qual cosa basterà assumere per r una conveniente funzione di u, l'equazione (64) di Moutard avrà le quattro soluzioni

$$\frac{\theta_0}{b}, \ \frac{\theta_1}{b}, \ \frac{\theta_2}{b}, \ \frac{\theta_3}{b},$$

la somma dei cui quadrati sarà l'unità ed alla superficie S, deformata della nostra superficie di rotazione, corrisponderà pel § 15 una determinata superficie Σ dello spazio ellittico a rete coniugata (α, β) di Tchebychef e quindi una particolare superficie di Voss.

La condizione (65) ci dà

$$(1 + h^2 r'^2)^2 = \frac{l^2}{\varrho^2} = l^2 \frac{r''}{r} ,$$

la costante l avendo il valore b^2. Questa equazione differenziale per r si può scrivere

$$r r' = l^2 \frac{r'' r'}{(1 + h^2 r'^2)^2} ,$$

ed una prima integrazione ci dà

$$h^2 r^2 = k^2 - \frac{l^2}{1 + h^2 r'^2} ,$$

essendo k un'altra costante arbitraria. Di qui si trae

$$r'^2 = \frac{l^2 - k^2 + h^2 r^2}{h^2 (k^2 - h^2 r^2)} ,$$

indi

$$ds^2 = \frac{dr^2}{r'^2} + r^2 \, dv^2 = \frac{k^2 - h^2 r^2}{l^2 - k^2 + h^2 r^2} \cdot h^2 \, dr^2 + r^2 \, dv^2 ,$$

e vediamo che, senza alterare la generalità, possiamo fare $h=1$, ciò equivalendo a cangiare r in $\frac{r}{h}$ e v in hv. Così l'elemento lineare della nostra superficie S assume la forma

$$ds^2 = \frac{k^2 - r^2}{l^2 - k^2 + r^2}\, dr^2 + r^2\, dv^2, \tag{66}$$

essendo l, k due costanti arbitrarie. Ogni superficie S di questo elemento lineare fa conoscere una particolare superficie di Voss dello spazio ellittico. Abbiamo dunque il risultato: *Ad ogni deformata* S *della superficie di rotazione d'elemento lineare* (66) *corrisponde una superficie di Voss dello spazio ellittico, che si ottiene dalla* S *in termini finiti.*

L'elemento lineare (66) appartiene alla quadrica (immaginaria) di rotazione, la cui curva meridiana ha l'equazione

$$\frac{z^2}{l^2} + \frac{\varrho^2}{k^2} = -1;$$

così anche il problema geometrico attuale di queste speciali superficie di Voss viene a collegarsi colla teoria della deformazione delle quadriche di rotazione, che ripetutamente figurano nelle più recenti ricerche sulla teoria dell'applicabilità.

Ma noi, collocandoci dal punto di vista reale, vedremo che le superficie di rotazione (66) debbono distinguersi in tre tipi, due dei quali si collegano immediatamente alle ordinarie superficie pseudosferiche.

§ 20.

Distinzione delle superficie di rotazione (66) in tre tipi.

Per compiere la classificazione ora accennata calcoliamo, colle formole generali del § 136* delle *Lezioni* (I, pag. 295), l'elemento lineare ds' della superficie *complementare* della (66). Per ciò, ponendo

$$ds'^2 = [1 + \psi'^2(\varrho)]\, d\varrho^2 + \varrho^2\, dv_1^2,$$

avremo (dalla formola (I*) loc. cit., pag. 296)

$$\varrho = \frac{m}{r'} = \frac{m\sqrt{k^2 - r^2}}{l^2 - k^2 + r^2} \qquad (m \text{ costante arbitraria}) \tag{67}$$

e sarà

$$ds'^2 = \frac{r'^2}{m^2}\, d\varrho^2 + \varrho^2\, dv_1^2.$$

Ma dalla (67) abbiamo

$$r^2 = \frac{m^2 k^2 + (k^2 - l^2)\,\varrho^2}{\varrho^2 + m^2}$$

e quindi

$$(68) \qquad ds'^2 = \frac{k^2 + \frac{k^2 - l^2}{m^2}\varrho^2}{\varrho^2 + m^2} d\varrho^2 + \varrho^2 dv^2 .$$

Ora distinguiamo i tre casi

$$(a) \quad k^2 = l^2 \quad , \qquad (b) \quad k^2 > l^2 \quad , \qquad (c) \quad k^2 < l^2$$

ed avremo i seguenti risultati.

Caso (a). Allora

$$ds'^2 = \frac{k^2}{\varrho^2 + m^2} d\varrho^2 + \varrho^2 dv^2$$

e ponendo $\varrho = m \operatorname{sen} h\left(\frac{u}{k}\right)$ ne segue

$$ds'^2 = du^2 + m^2 \operatorname{senh}^2\left(\frac{u}{k}\right) dv^2 .$$

Questo è l'elemento lineare di una superficie di curvatura costante negativa $K = -\frac{1}{k^2}$ e precisamente appartiene al tipo ellittico (vol. I, pag. 224), cioè le geodetiche $v = \text{cost}$ escono da un punto reale a distanza finita della superficie.

Caso (b) $k^2 > l^2$. Poniamo in questo caso $m^2 = k^2 - l^2$ ed avremo

$$1 + \psi'^2(\varrho) = \frac{\varrho^2 + k^2}{\varrho^2 + (k^2 - l^2)} \quad , \quad \psi'(\varrho) = \frac{h}{\sqrt{\varrho^2 + (k^2 - l^2)}} ,$$

indi pel meridiano della superficie di rotazione

$$\varrho = \sqrt{k^2 - l^2} \operatorname{senh}\left(\frac{z}{l}\right) .$$

La corrispondente superficie è il *sinusoide iperbolico* (vol. II, pag. 451); la ricerca delle sue flessioni sappiamo ridursi alla teoria delle superficie pseudosferiche, e più precisamente alla composizione di due trasformazioni immaginarie opposte di Bäcklund.

Caso (c) $k^2 > l^2$. Poniamo allora $m^2 = l^2 - k^2$ e la (68) ci dà:

$$ds'^2 = \frac{k^2 - \varrho^2}{\varrho^2 + m^2} d\varrho^2 + \varrho^2 dv^2 ,$$

elemento lineare che coincide col (66). In questo caso adunque la superficie di rotazione coincide colla propria complementare.

Corrispondentemente abbiamo tre tipi di superficie di Voss dello spazio ellittico, dipendenti ciascuno da due funzioni arbitrarie. I due primi tipi dipendono dalle ordinarie superficie pseudosferiche e dalle loro trasformazioni di Bäcklund. Noi qui ci limiteremo a scrivere le formole per le superficie di Voss del primo tipo che più direttamente si collegano alle superficie pseudosferiche ed alle loro complementari.

§ 21.

Formole relative alle superficie di Voss del primo tipo.

Le superficie di Voss del primo tipo si ottengono da una superficie pseudosferica, fissato sopra questa un punto da cui escono le geodetiche, rispetto alle quali dobbiamo assumere la superficie complementare della pseudosferica.

Prendiamo per semplicità $=1$ il raggio della superficie pseudosferica ed assumiamo a linee coordinate le geodetiche $\psi = \text{cost}$ uscenti dal punto e i loro circoli geodetici ortogonali $\omega = \text{cost}$; l'elemento lineare prenderà la forma ellittica

$$ds^2 = d\omega^2 + \text{senh}^2 \omega \, d\psi^2. \tag{69}$$

Indicando con $K_0 = -\frac{1}{\varrho^2}$ la curvatura della superficie complementare, abbiamo per es. dal teorema di Halphen (vol. I, pag. 282): $\varrho = \text{tgh}^2 \omega$.

Allora se si indicano con α, β i parametri delle linee assintotiche sopra S, alle quali corrispondono pure le assintotiche sulla complementare S', le quattro corrispondenti soluzioni $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ dell'equazione di Moutard $\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \, \partial \beta} = M\theta$, legate dalla relazione $\theta_0^2 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = 1$, si ottengono, secondo il § 19, nel modo seguente. Si ha $\theta_0 = \sqrt{1-\varrho}$ e $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sono proporzionali ai coseni di direzione X', Y', Z' della normale a S'; dunque

$$\theta_0 = \frac{1}{\cosh \omega} \quad , \quad \theta_1 = \text{tgh}\,\omega \cdot X' \quad , \quad \theta_2 = \text{tgh}\,\omega \cdot Y' \quad , \quad \theta_3 = \text{tgh}\,\omega \, Z',$$

ovvero

$$\theta_0 = \frac{1}{\cosh \omega} \quad , \quad \theta_1 = \frac{1}{\cosh \omega} \frac{\partial x}{\partial \psi} \quad , \quad \theta_2 = \frac{1}{\cosh \omega} \frac{\partial y}{\partial \psi} \quad , \quad \theta_3 = \frac{1}{\cosh \omega} \frac{\partial z}{\partial \psi}. \tag{70}$$

Riguardando $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ come le coordinate di Weierstrass di un punto mobile nello spazio ellittico, questo punto descrive una superficie Σ sulla quale le linee (α, β), corrispondenti alle assintotiche della pseudosferica, tracciano una rete coniugata di Tchebychef, e nella polare Σ' di Σ abbiamo la richiesta superficie di Voss.

Trasformiamo facilmente le formole (70) ottenute in coordinate curvilinee qualunque (u, v), che supponiamo diano all'elemento lineare di S la forma

$$ds^2 = \mathcal{E} du^2 + 2\mathcal{F} du\, dv + \mathcal{G} dv^2.$$

Allora la funzione $\Phi = \cosh \omega$ è caratterizzata da ciò che deve essere una soluzione delle equazioni di WEINGARTEN

$$(C)\quad \begin{cases} \Phi_{11} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} = \mathcal{E}\Phi \\ \Phi_{12} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial u\, \partial v} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} = \mathcal{F}\Phi \\ \Phi_{22} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} = \mathcal{G}\Phi \end{cases}$$

e deve soddisfare inoltre la condizione

$$(C^*)\qquad \Delta_1 \Phi = \Phi^2 - 1 .$$

Le formole (70) diventano

$$(70^*)\quad \begin{gathered} \theta_0 = \frac{1}{\Phi}\,,\ \theta_1 = \frac{1}{\Phi\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}\,,\ \theta_2 = \frac{1}{\Phi\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\,, \\ \theta_3 = \frac{1}{\Phi\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} . \end{gathered}$$

Abbiamo dunque il teorema:

Se $ds^2 = \mathcal{E}du^2 + 2\mathcal{F}du\,dv + \mathcal{G}dv^2$ è l'elemento lineare di una superficie pseudosferica di raggio $=1$ e Φ una qualunque delle ∞^2 soluzioni del sistema (C) *di* WEINGARTEN *e della* (C*), *le funzioni $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ date dalle* (70*), *quando si introducano i parametri α, β delle assintotiche della superficie pseudosferica, danno quattro soluzioni di un'equazione di* MOUTARD: $\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} = M\theta$, *legate dall'identità quadratica* $\theta_0^2 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = 1$.

Siamo pervenuti indirettamente a questo risultato applicando la teoria delle superficie di Voss dello spazio ellittico. Ma sarebbe facile verificarlo per via diretta sulle (70*) stesse, prendendo per u, v i parametri α, β delle assintotiche; qui omettiamo per brevità tale verifica.

§ 22.

Superficie con sistema coniugato persistente in geometria iperbolica.

La teoria delle superficie dotate di un sistema coniugato persistente nello spazio ellittico, che abbiamo svolta dal § 12 in poi, può facilmente estendersi alle superficie analoghe nello spazio iperbolico, come ora da ultimo dimostreremo in tutta brevità.

In primo luogo è necessario di osservare che le formole del § 12 relative a due superficie polari dello spazio ellittico hanno le loro analoghe in geometria iperbolica. Nello spazio iperbolico, la cui curvatura K_0 porremo per semplicità $= -1$ consideriamo una superficie qualunque Σ e, ritenendo le nostre solite notazioni (vol. I, § 213), indichiamo con x_0, x_1, x_2, x_3 le coordinate di un punto mobile sopra Σ, con $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ quelle del suo piano tangente, legate le prime dalla relazione

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = -1,$$

le seconde dall'altra

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_0^2 = 1.$$

Ponendo

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_0^2 = \mathcal{E}du^2 + 2\mathcal{F}du\,dv + \mathcal{G}dv^2$$
$$d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 - d\xi_0^2 = \mathcal{E}'du^2 + 2\mathcal{F}'du\,dv + \mathcal{G}'dv^2,$$

e indicando con $\begin{Bmatrix} rs \\ t \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} rs \\ t \end{Bmatrix}'$ i rispettivi simboli di Christoffel per queste due forme quadratiche, sussistono ancora le (45), (46) § 12 con questa sola differenza che *nelle prime debbono ora cangiarsi di segno nei secondi membri i coefficienti di* x_i (vol. I, pag. 480). Valgono dunque invariate le deduzioni del § 12 e in particolare: *sussistono anche qui le formole* (b) § 12.

Ciò premesso, supponiamo che sopra la superficie Σ il sistema delle linee (u, v) sia coniugato, e quindi $D' = 0$; allora saranno x_0, x_1, x_2, x_3 soluzioni dell'equazione di Laplace

$$(\beta) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} + Fx,$$

e $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ soluzioni dell'altra

$$(\beta^*) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' \frac{\partial \xi}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' \frac{\partial \xi}{\partial v} - F'\xi.$$

Suppongasi ora di più che il sistema (u, v) sia sopra Σ *coniugato persistente.*

Ripetendo il calcolo del § 13, tutto fondato sulle formole (b) § 12, che valgono anche nel caso attuale, troviamo essere per ciò necessario e sufficiente che siano soddisfatte le condizioni:

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' = 2\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}'.$$

Di qui segue (§ 14) che l'equazione (β^*) di Laplace, relativa al sistema coniugato (u, v) ed alle coordinate tangenziali ξ, assume la forma

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v} + \frac{V'}{2(U+V)}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{U'}{2(U+V)}\frac{\partial \xi}{\partial v} + F'\xi = 0.$$

Se limitiamo il campo di variabilità per u, v in guisa che $U + V$ serbi sempre lo stesso segno e poniamo

$$\theta = \xi\sqrt{(U+V)} \quad , \quad \theta_i = \xi_i\sqrt{(U+V)} \qquad i = 0, 1, 2, 3,$$

ridurremo l'equazione superiore alla forma normale di Moutard

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = M\theta \quad , \quad M = -F' - \frac{U'V'}{4(U+V)^2}\,,$$

e questa ammetterà le quattro soluzioni $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ legate dall'identità quadratica

$$(\gamma) \qquad \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - \theta_0^2 = (U+V).$$

Viceversa se un'equazione di Moutard possiede un gruppo di quattro soluzioni $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ legate dalla (γ), ponendo $\xi_i = \dfrac{\theta_i}{\sqrt{(U+V)}}$ e riguardando $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ come coordinate di piano di Weierstrass nello spazio iperbolico, questo piano invilupperà una superficie che (nella regione interna all'assoluto) rappresenterà una superficie con sistema coniugato (u, v) persistente. Concludiamo dunque: *La ricerca delle superficie con sistema coniugato persistente in geometria iperbolica si riduce a quella delle equazioni di Moutard con gruppi di quattro soluzioni $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ legati dalla relazione quadratica* (γ).

Nel campo generale delle quantità complesse questo è il medesimo problema che già abbiamo trattato nella Parte Prima; ma nel campo *reale* quale noi consideriamo la questione è ben differente, sebbene a priori possa dirsi che varranno qui proprietà analitiche affatto analoghe. E così noi potremmo stabilire una teoria generale delle trasformazioni delle superficie con sistema coniugato persistente in geometria iperbolica. Ci limiteremo a far questo pel caso più interessante in cui U, V essendo costanti si ha

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' = 0$$

e quindi $\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = 0$; allora il sistema coniugato (u, v) sulla Σ è di linee geodetiche e la Σ è una *superficie di Voss*.

§ 23.

Trasformazioni delle superficie con rete coniugata di Tchebychef in geometria iperbolica.

Insieme e prima delle superficie di Voss considereremo quelle superficie Σ dello spazio iperbolico che posseggono una rete coniugata di Tchebychef. Le ricerche delle due classi di superficie si confondono nello spazio ellittico, ma sono invece ben distinte (dal punto di vista reale) nello spazio iperbolico.

Supposto che la Σ abbia la rete coniugata (u, v) di Tchebychef, abbiamo pel suo ds:

$$(71) \qquad ds^2 = du^2 + 2\cos(2\omega)\, du\, dv + dv^2,$$

e la relativa equazione (β) di LAPLACE prende la forma di MOUTARD ed ha le quattro soluzioni x_0, x_1, x_2, x_3 legate dall' identità

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = -1.$$

Viceversa se un'equazione di MOUTARD possiede tali quattro soluzioni, il punto (x_0, x_1, x_2, x_3) nello spazio iperbolico descrive una superficie sulla quale il sistema (u, v) è una rete coniugata di TCHEBYCHEF.

Per procedere ora alla ricerca delle *trasformazioni* delle attuali superficie, affatto analoghe a quelle del § 17 per lo spazio ellittico, cominciamo anche qui dallo scrivere le equazioni di CODAZZI che serbano la medesima forma

$$(72)\qquad \frac{\partial D}{\partial u} = \frac{1}{\operatorname{sen}(2\omega)}\frac{\partial(2\omega)}{\partial u}\cdot D'' \;,\quad \frac{\partial D''}{\partial v} = \frac{1}{\operatorname{sen}(2\omega)}\frac{\partial(2\omega)}{\partial v}\cdot D,$$

mentre quella di GAUSS ha la forma leggiermente modificata:

$$(73)\qquad DD'' = \operatorname{sen}(2\omega)\left[\operatorname{sen}(2\omega) - \frac{\partial^2(2\omega)}{\partial u\,\partial v}\right].$$

Introducendo poi anche qui un triedro trirettangolo in ogni punto di Σ, come al § 16, scriviamo le formole corrispondenti alle (55) ibid:

$$(74)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial x_i}{\partial u} &= \eta_i\cos\omega + \zeta_i\operatorname{sen}\omega &,\quad \frac{\partial x_i}{\partial v} &= \eta_i\cos\omega - \zeta_i\operatorname{sen}\omega\\
\frac{\partial \xi_i}{\partial u} &= -\frac{D}{2\cos\omega}\eta_i - \frac{D}{2\operatorname{sen}\omega}\xi_i &,\quad \frac{\partial \xi_i}{\partial v} &= -\frac{D''}{2\cos\omega}\eta_i + \frac{D''}{2\operatorname{sen}\omega}\zeta_i\\
\frac{\partial \eta_i}{\partial u} &= x_i\cos\omega + \frac{D}{2\cos\omega}\xi_i + \frac{\partial\omega}{\partial u}\zeta_i &,\quad \frac{\partial \eta_i}{\partial v} &= x_i\cos\omega + \frac{D''}{2\cos\omega}\xi_i - \frac{\partial\omega}{\partial v}\zeta_i\\
\frac{\partial \zeta_i}{\partial u} &= x_i\operatorname{sen}\omega + \frac{D}{2\operatorname{sen}\omega}\xi_i - \frac{\partial\omega}{\partial u}\eta_i &,\quad \frac{\partial \zeta_i}{\partial v} &= -x_i\operatorname{sen}\omega - \frac{D''}{2\operatorname{sen}\omega}\xi_i + \frac{\partial\omega}{\partial v}\eta_i.
\end{aligned}\right.$$

Dimostreremo che ogni superficie Σ possiede ∞^3 trasformate $\overline{\Sigma}$ tali che per una qualunque $\overline{\Sigma}$ di esse è costante la distanza σ fra un punto $(\overline{x}_0, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ di $\overline{\Sigma}$ ed il corrispondente (x_0, x_1, x_2, x_3) di Σ, cioè si ha (vol. I, pag. 438)

$$x_0\overline{x}_0 - x_1\overline{x}_1 - x_2\overline{x}_2 - x_3\overline{x}_3 = \cosh\sigma.$$

Poniamo adunque

$$(75)\qquad \overline{x}_i = x_i\cosh\sigma + \operatorname{senh}\sigma(\lambda\xi_i + \mu\eta_i + \nu\zeta_i),$$

dove λ, μ, ν sono tre funzioni incognite di u, v legate dalla relazione

$$(76)\qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Dovremo determinare λ, μ, ν in guisa che sussistano le formole:

$$(77)\qquad \frac{\partial(\overline{x}_i + x_i)}{\partial u} + (\overline{x}_i - x_i)\frac{\partial\log R}{\partial u} = 0 \;,\quad \frac{\partial(\overline{x}_i - x_i)}{\partial v} + (\overline{x}_i + x_i)\frac{\partial\log R}{\partial v} = 0$$
$$i = 0, 1, 2, 3$$

e la funzione R risulti una soluzione dell'equazione (β) di MOUTARD (§ 22)

$$\frac{\partial^2 \mathrm{R}}{\partial u\, \partial v} = \mathrm{R} \,.\, \cos 2\omega \tag{78}$$

a cui soddisfano le x.

Ora calcolando effettivamente le formole (77), osservando le (74), (75), troviamo in primo luogo per determinare R, note che siano λ, μ, ν, le formole

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial u} &= -\coth\left(\frac{\sigma}{2}\right)(\mu \cos\omega + \nu \operatorname{sen}\omega) \\ \frac{\partial \log \mathrm{R}}{\partial v} &= -\operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma}{2}\right)(\mu \operatorname{sen}\omega - \nu \cos\omega)\,, \end{aligned}\right. \tag{79}$$

indi per determinare λ, μ, ν il sistema di equazioni ai differenziali totali:

$$\text{(D)}\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= -\frac{\mu \operatorname{sen}\omega + \nu \cos\omega}{\operatorname{sen}(2\omega)} \,.\, \mathrm{D} + \coth\left(\frac{\sigma}{2}\right)(\mu\cos\omega + \nu\operatorname{sen}\omega) \,.\, \lambda \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= -\frac{\mu \operatorname{sen}\omega - \nu \cos\omega}{\operatorname{sen}(2\omega)} \,.\, \mathrm{D}'' + \operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma}{2}\right)(\mu\cos\omega - \nu\operatorname{sen}\omega) \,.\, \lambda \\ \frac{\partial \mu}{\partial u} &= \frac{\mathrm{D}}{2\cos\omega}\lambda + \frac{\partial\omega}{\partial u}\nu + \coth\left(\frac{\sigma}{2}\right)(\mu\cos\omega + \nu\operatorname{sen}\omega) \,.\, \mu - \coth\left(\frac{\sigma}{2}\right)\cos\omega \\ \frac{\partial \mu}{\partial u} &= \frac{\mathrm{D}''}{2\cos\omega}\lambda - \frac{\partial\omega}{\partial v}\nu + \operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma}{2}\right)(\mu\cos\omega + \nu\operatorname{sen}\omega) \,.\, \mu - \operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\cos\omega \\ \frac{\partial \nu}{\partial u} &= \frac{\mathrm{D}}{2\operatorname{sen}\omega}\lambda - \frac{\partial\omega}{\partial u}\mu + \coth\left(\frac{\sigma}{2}\right)(\mu\cos\omega + \nu\operatorname{sen}\omega)\,\nu - \coth\left(\frac{\sigma}{2}\right)\operatorname{sen}\omega \\ \frac{\partial \nu}{\partial v} &= -\frac{\mathrm{D}''}{2\operatorname{sen}\omega}\lambda + \frac{\partial\omega}{\partial v}\mu + \operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma}{2}\right)(\mu\cos\omega - \nu\operatorname{sen}\omega)\,\nu + \operatorname{tgh}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\operatorname{sen}\omega\,, \end{aligned}\right.$$

al quale è da aggiungersi l'equazione (76) in termini finiti:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1\,. \tag{D*}$$

Tenendo conto delle equazioni (72), (73) di CODAZZI e di GAUSS, si riscontrano facilmente le proprietà seguenti: 1° il sistema (D) è di per sè completamente integrabile, e tale rimane aggiungendovi l'equazione in termini finiti (D*); 2° scelta per (λ, μ, ν) una qualunque delle ∞^2 soluzioni del sistema (D), (D*), le (79) sono compatibili e danno per R una soluzione della (78).

In fine se calcoliamo l'elemento lineare $\overline{ds}$ della superficie trasformata Σ, troviamo

$$\overline{ds}^2 = du^2 + 2\cos 2\overline{\omega}\, du\, dv + dv^2,$$

posto

$$\cos 2\overline{\omega} = 2(\mu^2\cos^2\omega - \nu^2\operatorname{sen}^2\omega) - \cos 2\omega\,.$$

Questa ci dimostra che le nostre trasformazioni conservano gli archi delle linee u, v costituenti la rete coniugata di TCHEBYCHEF, precisamente come nello spazio ellittico.

§ 24.

Trasformazioni delle superficie di Voss in geometria iperbolica.

Sia ora Σ una superficie di Voss dello spazio iperbolico col sistema coniugato geodetico (u, v). In questo caso è la terza forma quadratica fondamentale di Σ

$$ds'^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 - d\xi_0^2,$$

che assume la forma di Tchebychef

$$ds'^2 = du^2 + 2\cos(2\omega)\, du\, dv + dv^2,$$

e $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ sono soluzioni dell'equazione di Moutard

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} + \xi \cos 2\omega = 0. \tag{80}$$

Le equazioni di Codazzi e di Gauss diventano ora rispettivamente:

$$\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial v} = \frac{1}{\operatorname{sen}(2\omega)} \frac{\partial(2\omega)}{\partial u} \cdot \mathrm{D}'', \quad \frac{\partial \mathrm{D}''}{\partial u} = \frac{1}{\operatorname{sen}(2\omega)} \frac{\partial(2\omega)}{\partial v} \cdot \mathrm{D} \tag{81}$$

$$\mathrm{D}\mathrm{D}'' = \operatorname{sen}(2\omega) \left[\operatorname{sen}(2\omega) + \frac{\partial^2(2\omega)}{\partial u\, \partial v} \right]. \tag{82}$$

Al sistema di formole (74) si sostituisce poi nel caso attuale il seguente:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial x_i}{\partial u} &= -\frac{\mathrm{D}}{2\cos\omega}\eta_i - \frac{\mathrm{D}}{2\operatorname{sen}\omega}\zeta_i, & \frac{\partial x_i}{\partial v} &= -\frac{\mathrm{D}''}{2\cos\omega}\eta_i + \frac{\mathrm{D}''}{2\operatorname{sen}\omega}\zeta_i \\
\frac{\partial \xi_i}{\partial u} &= \eta_i \cos\omega + \zeta_i \operatorname{sen}\omega, & \frac{\partial \xi_i}{\partial v} &= \eta_i \cos\omega - \zeta_i \operatorname{sen}\omega \\
\frac{\partial \eta_i}{\partial u} &= -\xi_i \cos\omega - \frac{\mathrm{D}}{2\cos\omega} x_i + \frac{\partial\omega}{\partial u}\zeta_i, & \frac{\partial \eta_i}{\partial v} &= -\xi_i \cos\omega - \frac{\mathrm{D}''}{2\operatorname{sen}\omega} x_i - \frac{\partial\omega}{\partial v}\zeta_i \\
\frac{\partial \zeta_i}{\partial u} &= -\xi_i \operatorname{sen}\omega - \frac{\mathrm{D}}{2\operatorname{sen}\omega} x_i - \frac{\partial\omega}{\partial u}\eta_i, & \frac{\partial \zeta_i}{\partial v} &= \xi_i \operatorname{sen}\omega + \frac{\mathrm{D}''}{2\operatorname{sen}\omega} x_i + \frac{\partial\omega}{\partial v}\eta_i.
\end{aligned}\right. \tag{83}$$

Ora dimostreremo che la superficie di Voss Σ può trasformarsi in ∞^3 modi in un'altra superficie di Voss $\overline{\Sigma}$ in guisa che i piani tangenti $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $(\overline{\xi}_0, \overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \overline{\xi}_3)$ in punti corrispondenti di $\Sigma, \overline{\Sigma}$ facciano fra loro un angolo costante σ. Poniamo per ciò

$$\overline{\xi}_i = \xi_i \cos\sigma + \operatorname{sen}\sigma(\lambda x_i + \mu\eta_i + \nu\zeta_i), \tag{84}$$

dove λ, μ, ν sono tre funzioni incognite di u, v legate dalla relazione

$$\mu^2 + \nu^2 - \lambda^2 = 1; \tag{85}$$

con ciò appunto avremo

$$\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2 + \bar{\xi}_3^2 - \bar{\xi}_0^2 = 1.$$

Basterà determinare λ, μ, ν ed una quarta funzione incognita R in guisa che sussistano le formole di MOUTARD

$$\frac{\partial(\bar{\xi}_i + \xi_i)}{\partial u} + (\bar{\xi}_i - \xi_i)\frac{\partial \log R}{\partial u} = 0 \quad , \quad \frac{\partial(\bar{\xi}_i - \xi_i)}{\partial v} + (\bar{\xi}_i + \xi_i)\frac{\partial \log R}{\partial v} = 0, \tag{86}$$

ed R risulti una soluzione della (80), cioè sia

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u \, \partial v} + R \cos 2\omega = 0.$$

Calcolando colle formole precedenti i primi membri delle (86), ed eguagliando a zero ordinatamente i coefficienti di $\xi_i, x_i, \eta_i, \zeta_i$ otteniamo in primo luogo:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \log R}{\partial u} &= -\cot\frac{\sigma}{2}(\mu\cos\omega + \nu \operatorname{sen}\omega) \\ \frac{\partial \log R}{\partial v} &= \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}(\mu\cos\omega + \nu \operatorname{sen}\omega); \end{aligned}\right. \tag{87}$$

e in secondo luogo il sistema di equazioni ai differenziali totali per λ, μ, ν:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial u} &= \frac{\mu \operatorname{sen}\omega + \nu\cos\omega}{\operatorname{sen} 2\omega} D + \cot\frac{\sigma}{2}(\mu\cos\omega + \nu\operatorname{sen}\omega) \, . \, \lambda \\ \frac{\partial\lambda}{\partial v} &= \frac{\mu \operatorname{sen}\omega - \nu\cos\omega}{\operatorname{sen} 2\omega} D'' - \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}(\mu\cos\omega - \nu\operatorname{sen}\omega) \, . \, \lambda \\ \frac{\partial\mu}{\partial u} &= \frac{D}{2\cos\omega}\lambda + \frac{\partial\omega}{\partial u}\nu + \cot\frac{\sigma}{2}(\mu\cos\omega + \nu\operatorname{sen}\omega) \, . \, \mu - \cot\frac{\sigma}{2}\cos\omega \\ \frac{\partial\mu}{\partial v} &= \frac{D''}{2\cos\omega}\lambda - \frac{\partial\omega}{\partial v}\nu - \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}(\mu\cos\omega - \nu\operatorname{sen}\omega) \, . \, \mu + \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cos\omega \\ \frac{\partial\nu}{\partial u} &= \frac{D}{2\operatorname{sen}\omega}\lambda - \frac{\partial\omega}{\partial u}\mu + \cot\frac{\sigma}{2}(\mu\cos\omega + \nu\operatorname{sen}\omega) \, . \, \nu - \cot\frac{\sigma}{2}\operatorname{sen}\omega \\ \frac{\partial\nu}{\partial v} &= -\frac{D''}{2\operatorname{sen}\omega}\lambda + \frac{\partial\omega}{\partial v}\mu - \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}(\mu\cos\omega - \nu\operatorname{sen}\omega) \, . \, \nu - \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\operatorname{sen}\omega. \end{aligned}\right. \tag{E}$$

al quale occorre aggregare l'equazione (85) in termini finiti

$$\mu^2 + \nu^2 - \lambda^2 = 1. \tag{E*}$$

Le proprietà di questo sistema sono le stesse come pel sistema (D), (D*) del § precedente e non occorre ripeterne l'enunciato. Si trova inoltre

$$d\bar{\xi}_1^2 + d\bar{\xi}_2^2 + d\bar{\xi}_3^2 - d\bar{\xi}_0^2 = du^2 + 2\cos 2\bar{\omega} \, du \, dv + dv^2,$$

posto

$$\cos 2\overline{\omega} = 2(\mu^2 \cos^2\omega - \nu^2 \operatorname{sen}^2\omega) - \cos 2\omega .$$

È dimostrata così l'esistenza delle ∞^3 trasformazioni di una superficie di Voss.

Osserveremo ancora che se nelle formole superiori cangiamo da per tutto $\sigma, \lambda, \mu, \nu$ in $\sigma\sqrt{-1}, \lambda\sqrt{-1}, \mu\sqrt{-1}, \nu\sqrt{-1}$, le formole si presentano nuovamente sotto forma *reale*. Così le indicate trasformazioni delle superficie di Voss nello spazio iperbolico possono distinguersi in due classi, essendo per le une reale per le altre puramente immaginario l'angolo costante σ fra due piani tangenti corrispondenti, il che significa che per le prime questi due piani si tagliano effettivamente, per le seconde non s'incontrano.

§ 25.

Superficie di Voss dipendenti dalle flessioni di ordinarie superficie di rotazione.

Estenderemo ancora alle superficie di Voss dello spazio iperbolico le ricerche dei §§ 19, 20 relative a quelle speciali superficie di Voss dello spazio ellittico che abbiamo visto collegarsi alle deformazioni di tre diversi tipi di superficie di rotazione dello spazio euclideo.

Riprendiamo per ciò le notazioni e la discussione del § 19 e ponendo

$$\theta_1 = X\sqrt{\varrho}\ ,\ \theta_2 = Y\sqrt{\varrho}\ ,\ \theta_3 = Z\sqrt{\varrho}\ ,\ \theta_0 = hr'\sqrt{\varrho} \quad (h \text{ costante})$$

cerchiamo di determinare r in funzione di u in guisa che si abbia

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - \theta_0^2 = b^2 \quad (b \text{ costante}). \tag{88}$$

Allora ponendo $\xi_0 = \frac{\theta_0}{b}\ ,\ \xi_1 = \frac{\theta_1}{b}\ ,\ \xi_2 = \frac{\theta_2}{b}\ ,\ \xi_3 = \frac{\theta_3}{b}$, avremo quattro soluzioni di una medesima equazione di Moutard legate dalla relazione

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_0^2 = 1 ,$$

ed il piano $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ inviluppera nello spazio iperbolico una corrispondente superficie di Voss. La condizione (88) dà

$$\varrho(1 - h^2 r'^2) = b^2,$$

ovvero, posto $m = b^2$:

$$(1 - h^2 r'^2) = m^2 \frac{r''}{r'} .$$

Una prima integrazione porge

$$h^2 r^2 = k + \frac{m^2}{1 - h^2 r'^2} \quad (k \text{ costante}) ,$$

da cui

$$\frac{1}{r'^2} = \frac{h^2(h^2 r^2 - k)}{h^2 r^2 - m^2 - k} .$$

Per l'elemento lineare della superficie S abbiamo

$$ds^2 = \frac{du^2}{r^2} + r^2 dv^2 = \frac{h^2 r^2 - k}{h^2 r^2 - m^2 - k} dr^2 + r^2 dv^2.$$

Senza alterare la generalità possiamo fare $h = 1$ e, indicando con $z = \psi(r)$ l'equazione della curva meridiana della superficie S, conformata a superficie di rotazione, abbiamo

$$1 + \psi'^2(r) = \frac{r^2 - k}{r^2 - (m^2 + k)}, \quad \psi'^2(r) = \frac{m^2}{r^2 - (m^2 + k)},$$

indi

$$z = m \int \frac{dr}{\sqrt{r^2 - (m^2 + k)}}.$$

Essendo k, e quindi $m^2 + k$, una costante affatto arbitraria, abbiamo da distinguere i tre casi seguenti:

$$1^\circ)\ m^2 + k = 0, \qquad 2^\circ)\ m^2 + k > 0, \qquad 3^\circ)\ m^2 + k < 0.$$

1° caso $m^2 + k = 0$. Si ha

$$z = m \log r$$

e il meridiano è quindi la curva logaritmica.

2° caso $m^2 + k > 0$. Poniamo $m^2 + k = n^2$ ed avremo

$$z = m \int \frac{dn}{\sqrt{r^2 - n^2}},$$

da cui

$$r = n \cosh\left(\frac{z}{m}\right).$$

Questo caso si scinde nei tre sotto casi seguenti:

a) $n = m$ la superficie di rotazione è il *catenoide ordinario*
b) $n < m$ » » *catenoide accorciato*
c) $n > m$ » » *catenoide allungato*

3° caso $m^2 + k < 0$. Poniamo $m^2 + k = -n^2$, indi $z = m \int \frac{dr}{\sqrt{r^2 + n^2}}$, e integrando

$$r = n \operatorname{senh}\left(\frac{z}{m}\right).$$

Questa è la medesima superficie di rotazione incontrata al § 25, e cioè il *sinusoide iperbolico*.

Come si vede, abbiamo nello spazio iperbolico *cinque* diversi tipi di superficie di Voss dipendenti dalle flessioni di ordinarie superficie di rotazioni. Le deformate di tutte queste superficie di rotazione, eccezione fatta dal catenoide allungato, si collegano alla teoria delle superficie pseudosferiche ordinarie. E invero le deformate della superficie logoritmica di rotazione sono le complementari delle superficie pseudosferiche rispetto al sistema di géodetiche normali ad una geodetica fissa (vol. II, pag. 428); le deformate del catenoide ordinario sono le evolute delle pseudosferiche; in fine quelle del catenoide accorciato e del sinusoide iperbolico si ottengono mediante composizione di due trasformazioni di Bäcklund $B_\sigma, B_{-\sigma}$ opposte di una superficie pseudosferica, essendo σ reale nel primo caso, puramente immaginario nel secondo (vol. II, pagg. 432 e 451).

§ 26.

Superficie di Voss dipendenti dalla superficie logaritmica di rotazione e dal catenoide.

Scriviamo da ultimo le formole che danno le superficie di Voss dello spazio iperbolico, corrispondenti alla superficie logaritmica di rotazione ed al catenoide, che più da vicino si collegano alle superficie pseudosferiche.

Per quelle del primo tipo basta ripetere i calcoli del § 21 sostituendo alla forma ellittica (69) dell'elemento lineare di S la iperbolica $ds^2 = d\omega^2 + \cosh^2\omega\, d\psi^2$. Allora basta associare alle equazioni (C) di Weingarten (§ 20) in luogo della (C*) l'altra

$$\Delta_1 \Phi = \Phi^2 + 1,$$

e le medesime formole (70*) daranno quattro soluzioni $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ di una medesima equazione di Moutard legate dalla relazione $\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 - \theta_0^2 = 1$.

Passando ora al caso delle deformate del catenoide, supponiamo dapprima che la deformata in considerazione non sia rigata e sia quindi l'evoluta di una superficie pseudosferica, il cui raggio R faremo $=1$. Riferendo la S alle sue linee di curvatura (u, v), abbiasi

$$ds^2 = \operatorname{sen}^2\theta\, du^2 + \cos^2\theta\, dv^2$$

e valgano quindi le formole del § 373 delle *Lezioni* (vol. I, pag. 391). Considerando allora la prima falda dell'evoluta e applicando i nostri risultati generali, troviamo che: *Le quattro funzioni*:

$$\xi_0 = \operatorname{tg}\theta\ ,\ \xi_1 = \frac{X_2}{\cos\theta}\ ,\ \xi_2 = \frac{Y_2}{\cos\theta}\ ,\ \xi_3 = \frac{Z_2}{\cos\theta}\ ,$$

espresse per i parametri $\alpha = \dfrac{u+v}{2}$, $\beta = \dfrac{u-v}{2}$ *delle linee assintotiche di* S, *soddisfano ad una medesima equazione di* Moutard $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial\alpha\,\partial\beta} = M\xi$, *essendo legate dalla relazione* $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_0^2 = 1$.

La verifica diretta si desume facilmente dalle citate formole delle *Lezioni* che danno

$$d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 - d\xi_0^2 = dv^2 + \frac{1}{\cos^2\theta}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2\right](dv^2 - du^2)$$

e dimostrano che si ha per ciascuna delle quattro ξ

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = \left\{1 - \frac{2}{\cos^2\theta}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2\right]\right\}.\xi .$$

In coordinate α, β queste formole diventano

$$d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 - d\xi_0^2 = d\alpha^2 + 2F\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial\alpha\,\partial\beta} + F\xi = 0,$$

posto

$$F = \frac{2}{\cos^2\theta}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2\right] - 1 .$$

Se la deformata del catenoide è poi rigata, essa è la superficie luogo delle binormali di una curva C a torsione costante. Indicando ora v l'arco di C e mantenendo per la curva C le notazioni consuete, col fare il raggio T di torsione $=1$, si vede che le quattro soluzioni $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ dell'equazione di Moutard $\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M\theta$ sono date nel caso attuale dalle formole

$$\theta_0 = \operatorname{tg}\tau \quad , \quad \theta_1 = \alpha \operatorname{tg}\tau - \xi \quad , \quad \theta_2 = \beta\operatorname{tg}\tau - \eta \quad , \quad \theta_3 = \gamma\operatorname{tg}\tau - \zeta$$

con

$$\tau = \frac{1}{2}\left(u - \int\frac{dv}{\varrho}\right).$$

Ed in effetto si verifica immediatamente che per ciascuna di queste quattro θ, legate dalla solita identità, si ha

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} + \frac{\theta}{2\varrho\cos^2\tau} = 0 .$$

È poi da osservarsi che nel caso attuale la corrispondente superficie di Voss si riduce ad una curva ideale, cioè nella metrica del Cayley l'inviluppo del piano $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ è una curva esterna all'assoluto.