

Ricerche sulla rifrazione terrestre eseguite a Lecce nel 1902.

Memoria di UBALDO BARBIERI

(presentata dal Socio V. CERRUTI, approvata dal Socio V. VOLTERRA).

Nella presente pubblicazione sono raccolti i risultati relativi a varie esperienze sulla rifrazione terrestre, da me eseguite a Lecce nei mesi d'estate, e nel dicembre dell'anno 1902.

Dopo la bella serie di lavori che da qualche anno a questa parte furono compiuti in Italia (1), sarebbe stato forse superfluo uno studio inteso ad indagare in quell'estremo lembo della nostra penisola il valore medio del coefficiente di rifrazione, ed il suo andamento giornaliero ed annuale.

Mi parve, però, che il carattere speciale della regione rendesse non privo d'interesse le ricerche compiute, e delle quali è oggetto il presente lavoro; i risultati, come si vedrà, lo dimostrano pienamente.

La regione circostante a Lecce è pianeggiante. Le traiettorie luminose che vanno da un punto ad un altro sono, quindi, pressochè orizzontali, e molto prossime al terreno. Tali circostanze, come insegna la teoria, non sono favorevoli alla regolarità del fenomeno della rifrazione. Ma, mentre dal punto di vista teorico presentava grande interesse lo studio delle anomalie dovute a siffatte speciali condizioni, ora, d'altra parte, importante dal punto di vista pratico stabilire se, ed in quali epoche, sia ivi applicabile l'ordinario procedimento di livellazione trigonometrica, e quali siano i valori del coefficiente di rifrazione da introdurre nelle formule.

Furono, perciò, instituite osservazioni nell'estate e nell'inverno. Quelle compiute nell'estate mostrarono grandi variazioni giornaliere, per quanto assai regolari, del coefficiente di rifrazione. Questo, da valori elevati al mattino ed alla sera, scendeva costantemente a valori negativi nelle ore meridiane.

Le osservazioni invernali condussero, invece, a valori del coefficiente di rifrazione contenuti entro limiti molto più ristretti, e presentanti un andamento molto più regolare.

(1) A. VENTURI ed E. SOLER, *Prime ricerche sul coefficiente di rifrazione in Sicilia*. Atti della R. Accademia di Palermo, vol. III, serie 3^a, 1893. — V. REINA e G. CICONETTI, *Ricerche sul coefficiente di rifrazione terrestre eseguite in Roma nel 1895*. Mem. della Soc. ital. delle Scienze (detta del XL), serie 3^a, tomo X. — G. CICONETTI e N. PIETROPAOLI, *Il coefficiente di rifrazione terrestre a Udine*. Mem. della Soc. ital. delle Scienze (detta del XL), serie 3^a, tomo XII.

Tali valori risultarono in buon accordo con quelli già determinati in altre parti d'Italia.

Nei riguardi delle applicazioni, le presenti ricerche mostrano come, nella regione in cui esse furono eseguite, siano in via normale da evitarsi le operazioni di livellazione trigonometrica nei mesi estivi, troppo incerta e troppo anormale risultando in quell'epoca la rifrazione.

Tali operazioni si potranno, invece, compiere con piena sicurezza nella stagione invernale, nella quale, per la poca irradiazione del suolo, e per la maggior regolarità della distribuzione degli strati atmosferici, il coefficiente di rifrazione assume un valore normale, malgrado la radenza delle visuali.

Il presente lavoro è diviso in tre parti principali.

Nella prima sono esposte le operazioni relative al collegamento trigonometrico dei punti fra i quali furono eseguite le osservazioni.

Nella seconda sono indicate le operazioni di livellazione, atte a stabilire i loro dislivelli.

Nella terza sono esposti e discussi i risultati delle osservazioni compiute.

PARTE PRIMA.

Misure angolari e riduzioni in centro.

Le osservazioni per la determinazione del coefficiente di rifrazione vennero eseguite da una torretta situata nel giardino annesso alla casa che lo abitavo a Lecce in via degli Alami: sul ripiano superiore di essa torre venne eretto un pilastro in muratura, e su di esso appoggiato il teodolite per le osservazioni.

I vertici scelti per essere collimati dalla torretta furono quattro, situati nella parte occidentale della campagna circostante a Lecce, e dalla qual parte aprivasi dalla torre largo orizzonte.

Essendo l'asse del campanile della cattedrale di Lecce vertice di primo ordine della rete dello Stato, si prese come base della rete necessaria alla determinazione delle distanze fra gli anzidetti punti, il lato Lecce-li Belli, essendo li Belli altro vertice di primo ordine, situato circa 9 Km. a sud di Lecce.

La lunghezza di detto lato, e l'azimut geodetico relativo, ci furono, dietro nostra richiesta, cortesemente forniti dall'Istituto Geografico Militare.

I quattro punti la cui determinazione appoggiammo alla base anzidetta, furono i seguenti:

asse del pilastro costruito sul ripiano superiore della torre quadrata del paese di Arnesano;

asse del campanile del paese di Salice;

asse del pilastro costruito sul ripiano superiore della torre quadrata del paese di Novoli;

asse del campanile della nuova cattedrale del paese di Trepuzzi.

Nella fig. 1 è rappresentata in scala la rete; le lettere L, B, A, S, N, Z stanno ad indicare rispettivamente i vertici di Lecce, li Belli, Arnesano, Salice, Novoli, Trepuzzi. Quanto alla torretta d'osservazione essa è indicata nel presente lavoro con la lettera O.

Le misure angolari furono eseguite nei primi giorni d'agosto 1902; in esse fu adoperato il teodolite Starke del Gabinetto di Geodesia della Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri di Roma.

Le stazioni furono eseguite in centro per li Belli, Arnesano, Novoli; ex-centro, sul lato ovest della balaustra superiore del campanile, per Lecce; ex-centro, sulla terrazza sovrastante alla cattedrale di Trepuzzi, per il campanile omonimo; a Salice non fu eseguita stazione.

Le direzioni furono misurate in ogni vertice 36 volte, alternativamente col cerchio zenitale a destra ed a sinistra, ruotando il cerchio azimutale di 10°, fra ogni coppia di strati coniugati.

I risultati ottenuti furono i seguenti:

Stazione a li Belli.		Stazione ad Arnesano.	
Direzione ad Arnesano	0° 00' 00",00	Direzione a Salice	0° 00' 00",00
• a Lecce	44 48 20, 83	• Novoli	25 01 40 28
		• Trepuzzi	50 58 04 92
		• Lecce	139 11 12 99
		• li Belli	210 08 47 93

Stazione a Lecce.	
Direzione a li Belli	0° 00' 00",00
• Arnesano	64 15 27 79
• Salice	90 25 10 49
• Novoli	93 11 59 94
• Trepuzzi	113 07 23 46

Stazione a Trepuzzi		Stazione a Novoli	
Direzione a Lecce	0° 00' 00",00	Direzione a Trepuzzi	0° 00' 00",00
• Arnesano	42 57 22 49	• Lecce	74 23 37 89
• Novoli	85 43 16 52	• Arnesano	111 17 49 89
• Salice	132 28 46 53	• Salice	247 40 25 36

Le riduzioni in centro furono eseguite applicando la nota formola

$$\frac{e \operatorname{sen} z}{s \operatorname{sen} 1''}$$

che dà la correzione da apportarsi ad una direzione facente l'angolo z con la direzione al centro, presa come origine; e rappresenta l'eccentricità lineare; s la distanza fra il centro, e il punto collimato.

Gli elementi e ed z relativi alle due stazioni eccentriche, risultarono i seguenti:

Lecce	$e = 3^m,424$	$z = 131^{\circ} 40' 08",61$
Trepuzzi	$e = 15 480$	$z = 246 49 40 92$

dove con z abbiamo indicato per Lecce, l'angolo della direzione li Belli, con la direzione centro; e per Trepuzzi, l'angolo della direzione Lecce, con la direzione centro.

Con questi elementi di ridazione, si ottennero le seguenti direzioni centrate

Stazione a Lecce		Stazione a Trepuzzi	
Direzione a li Belli	0° 00' 00",00	Direzione a Lecce	0° 00' 00",00
• Arnesano	64 14 02 55	• Arnesano	42 55 38 67
• Salice	90 23 46 87	• Novoli	85 41 15 57
• Novoli	93 10 15 34	• Salice	132 35 29 21
• Trepuzzi	113 05 23 31		

Con questi valori, e coi valori osservati nelle stazioni in centro di li Belli, Arnesano, e Novoli, si formarono gli angoli seguenti, indicati nella fig. 1^a:

Stazione a li Belli $\alpha_1 = 44^\circ 48' 20'',83$	Stazione ad Arnesano $\alpha_2 = 210^\circ 08' 47'',93$ $\alpha_3 = 139 11 12 99$ $\alpha_4 = 50 58 04 92$ $\alpha_5 = 25 01 40 28$	Stazione a Lecce $\alpha_6 = 113^\circ 05' 23'',31$ $\alpha_7 = 93 10 15 34$ $\alpha_8 = 90 23 46 87$ $\alpha_9 = 64 14 02 55$
Stazione a Trepuzzi $\alpha_{10} = 42^\circ 55' 38'',67$ $\alpha_{11} = 85 41 15 57$ $\alpha_{12} = 132 35 29 21$	Stazione a Novoli $\alpha_{13} = 74^\circ 23' 37'',89$ $\alpha_{14} = 111 17 49 89$ $\alpha_{15} = 247 40 25 36$	

Compensazione della rete.

Applicando al caso nostro le note formole teoriche che danno il numero delle equazioni di condizione angolari e laterali, si ottiene

$$\begin{aligned} L' - P' + 1 &= 4 \\ L - 2P + 3 &= 3 \end{aligned}$$

avremo dunque in tutto quattro equazioni di condizione angolari, e tre laterali.

Le prime ci saranno date p. es. dai quattro triangoli indipendenti ABL, LAN, LNZ, LAZ.

Se indichiamo con $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots$ i valori compensati degli angoli osservati $\alpha_1, \alpha_2, \dots$; con e_1, e_2, e_3, e_4 , gli eccessi sferici relativi ai detti quattro triangoli, le equazioni angolari risulteranno le seguenti:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_1^* + \alpha_2^* - \alpha_3^* + \alpha_4^* - 180^\circ - e_1 &= 0 \\ \alpha_1^* - \alpha_2^* + \alpha_3^* - \alpha_4^* - 180^\circ - e_2 &= 0 \\ \alpha_5^* + \alpha_6^* + \alpha_7^* - \alpha_8^* - 180^\circ - e_3 &= 0 \\ \alpha_9^* + \alpha_{10}^* - \alpha_{11}^* + \alpha_{12}^* - 180^\circ - e_4 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Calcolati gli eccessi sferici con la nota formola

$$e'' = \frac{A}{eN \text{ arc } 1''}$$

si ottennero i valori

$$e_1'' = 0'',15 \quad e_2'' = 0'',09 \quad e_3'' = 0'',09 \quad e_4'' = 0'',13.$$

Tenendo conto degli angoli osservati, di questi valori degli eccessi sferici, ed introducendo le correzioni più probabili v_1, v_2, \dots relative agli angoli osservati, le (1)

si trasformano nelle seguenti

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 + v_2 - v_3 + v_7 - 1'',83 = 0 \\ v_3 - v_6 + v_7 - v_8 + v_{14} - v_{13} - 2'',59 = 0 \\ v_6 - v_7 + v_{11} + v_{12} + 1'',33 = 0 \\ * v_3 - v_4 + v_6 - v_7 + v_{12} + 7'',37 = 0 \end{array} \right.$$

Quanto alle tre equazioni laterali, si avranno calcolando in doppio modo i tre lati SN, NZ, SZ.

Si ottiene così

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha_1^* - \alpha_2^*) \operatorname{sen}(\alpha_3^* - \alpha_4^*) \operatorname{sen}[\alpha_7^* + (\alpha_6^* - \alpha_5^*)]}{\operatorname{sen} \alpha_1^* \operatorname{sen}(\alpha_3^* - \alpha_4^*) \operatorname{sen}[(\alpha_5^* - \alpha_6^*) + (\alpha_7^* - \alpha_2^*)]} = 1$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha_2^* - \alpha_4^*) \operatorname{sen} \alpha_3^* \operatorname{sen}(\alpha_7^* - \alpha_5^*)}{\operatorname{sen}(\alpha_2^* - \alpha_5^*) \operatorname{sen} \alpha_4^* \operatorname{sen} \alpha_6^*} = 1$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha_7^* - \alpha_2^*) \operatorname{sen}(\alpha_3^* - \alpha_4^*) \operatorname{sen}[\alpha_2^* + (\alpha_4^* - \alpha_5^*)]}{\operatorname{sen} \alpha_7^* \operatorname{sen}(\alpha_3^* - \alpha_4^*) \operatorname{sen}[(\alpha_5^* - \alpha_6^*) + (\alpha_7^* - \alpha_2^*)]} = 1$$

Queste equazioni ridotte alla forma lineare si trasformano nelle altre seguenti

$$\begin{aligned} A_{\alpha_1, \alpha_2} (v_3 - v_6) + A_{\alpha_{11}, \alpha_{12}} (v_{13} - v_{12}) + A_{\alpha_{13}, \alpha_{14}} (v_2 + v_8 - v_7) - \\ - A_{\alpha_3} v_2 - A_{\alpha_{11}, \alpha_{12}} (v_{14} - v_{13}) - A_{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}} (v_{15} - v_{12} + v_7 - v_6) + \\ + \log \frac{\operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_3) \operatorname{sen}(\alpha_{12} - \alpha_{13}) \operatorname{sen}(\alpha_2 + \alpha_5 - \alpha_6)}{\operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen}(\alpha_{14} - \alpha_{13}) \operatorname{sen}(\alpha_{13} - \alpha_{12} + \alpha_7 - \alpha_6)} = 0 \\ \\ A_{\alpha_1, \alpha_2} (v_3 - v_6) + A_{\alpha_{11}, v_{13}} + A_{\alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_2} (v_2 + v_8 - v_7) - A_{\alpha_3} v_2 - A_{\alpha_{11}, v_{13}} - \\ - A_{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_2} (v_{13} + v_6 - v_3) + \log \frac{\operatorname{sen}(\alpha_3 - \alpha_4) \operatorname{sen} \alpha_{12} \operatorname{sen}(\alpha_2 + \alpha_6 - \alpha_5)}{\operatorname{sen} \alpha_3 \operatorname{sen} \alpha_{13} \operatorname{sen}(\alpha_{13} + \alpha_6 - \alpha_5)} = 0 \\ \\ A_{\alpha_1, \alpha_2} (v_3 - v_6) + A_{\alpha_{11}, v_{11}} + A_{\alpha_{11}, \alpha_{12}} (v_{14} - v_{13}) - A_{\alpha_{13}, \alpha_{14}} (v_2 - v_3) - \\ - A_{\alpha_{11}, v_{13}} - A_{\alpha_{11}, v_{13}} + \log \frac{\operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_4) \operatorname{sen} \alpha_{11} \operatorname{sen}(\alpha_{14} - \alpha_{13})}{\operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_3) \operatorname{sen} \alpha_{13} \operatorname{sen} \alpha_{13}} = 0 \end{aligned}$$

dove, com'è noto, con $A_{\alpha_m, \alpha_n, \dots}$ s'intende la differenza tavolare per $1''$ di

$$\log \operatorname{sen}(\alpha_m + \alpha_n + \dots).$$

Eseguite le relative sostituzioni numeriche, in base ai valori osservati, le equazioni di condizione laterali divengono le seguenti, nelle quali i coefficienti numerici sono espressi in unità della 7ª cifra decimale logaritmica:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} -6,56 v_3 + 0,94 v_6 + 30,6 v_7 - 38,66 v_8 + 8,06 v_9 - 9,92 v_{13} - 2,8 v_{14} + \\ + 12,73 v_{15} + 4,7 = 0 \\ -5,52 v_3 - 0,1 v_4 + 4,57 v_6 - 12,63 v_7 + 8,06 v_8 - 2,27 v_{13} + \\ + 2,64 v_{14} - 8,0 = 0 \\ 1,04 v_3 - 0,1 v_4 - 0,94 v_5 - 2,27 v_{10} + 0,2 v_{11} - 3,39 v_{13} + \\ + 2,80 v_{14} - 22,38 = 0. \end{array} \right.$$

Trattando le equazioni (2) e (3) col noto metodo dei correlativi, e indicando questi coi simboli I, II, ..., VII, si ottiene il seguente sistema di equazioni correlanti:

$$\begin{aligned}
 2808,19 \text{ I} + 589,45 \text{ II} + 18,03 \text{ III} + 14,62 \text{ IV} + 22,15 \text{ V} - 40,52 \text{ VI} - 14,62 \text{ VII} + 4,7 &= 0 \\
 589,45 \text{ I} + 287,97 \text{ II} - 0,58 \text{ III} + 13,58 \text{ IV} - 13,58 \text{ V} + 4,57 \text{ VI} - 11,18 \text{ VII} - 8,00 &= 0 \\
 18,03 \text{ I} - 0,58 \text{ II} + 26,56 \text{ III} - 1,04 \text{ IV} + 8,18 \text{ V} - 3,19 \text{ VI} - 1,13 \text{ VII} - 22,38 &= 0 \\
 14,62 \text{ I} + 13,58 \text{ II} - 1,04 \text{ III} + 4 \text{ IV} - 2 \text{ V} &= 2 \text{ VII} - 1,83 = 0 \\
 22,15 \text{ I} - 13,58 \text{ II} + 8,18 \text{ III} - 2 \text{ IV} + 6 \text{ V} - 2 \text{ VI} + 2 \text{ VII} - 2,59 &= 0 \\
 -40,52 \text{ I} + 4,57 \text{ II} - 3,19 \text{ III} &= -2 \text{ V} + 4 \text{ VI} + \text{VII} + 1,38 = 0 \\
 -14,62 \text{ I} - 11,18 \text{ II} - 1,13 \text{ III} - 2 \text{ IV} + 2 \text{ V} + \text{VI} + 5 \text{ VII} + 7,37 &= 0
 \end{aligned}$$

da cui le risolventi

$$\begin{aligned}
 2808,19 \text{ I} + 589,45 \text{ II} + 18,03 \text{ III} + 14,62 \text{ IV} + 22,15 \text{ V} - 40,52 \text{ VI} - 14,62 \text{ VII} + 4,7 &= 0 \\
 164,24 \text{ II} - 4,36 \text{ III} + 10,51 \text{ IV} - 18,23 \text{ V} + 13,08 \text{ VI} - 8,11 \text{ VII} - 9,01 &= 0 \\
 26,32 \text{ III} - 0,85 \text{ IV} + 7,55 \text{ V} - 2,58 \text{ VI} - 1,25 \text{ VII} - 22,65 &= 0 \\
 3,223 \text{ IV} - 0,703 \text{ V} - 0,710 \text{ VI} - 1,445 \text{ VII} - 2,010 &= 0 \\
 1,481 \text{ V} + 0,337 \text{ VI} + 1,259 \text{ VII} + 2,430 &= 0 \\
 1,8786 \text{ VI} + 0,0901 \text{ VII} - 1,1387 &= 0 \\
 3,49239 \text{ VII} + 3,32125 &= 0
 \end{aligned}$$

da queste otteniamo per i correlativi i valori seguenti

$$\begin{aligned}
 \text{I} &= + 0,03916 & \text{IV} &= + 0,09375 \\
 \text{II} &= - 0,16027 & \text{V} &= - 0,7726 & \text{VII} &= - 1,33255 \\
 \text{III} &= + 1,12943 & \text{VI} &= + 1,09567
 \end{aligned}$$

Applicando, allora, la nota formola

$$v_r = A_r \text{ I} + B_r \text{ II} + C_r \text{ III} + D_r \text{ IV} + E_r \text{ V} + F_r \text{ VI} + G_r \text{ VII}$$

dove con $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ s'intendono i coefficienti delle varie equazioni di condizione, si ottengono per le correzioni più probabili i seguenti valori

$$\begin{aligned}
 v_1 &= + 0",10 & v_6 &= - 0",97 & v_{11} &= + 1",32 \\
 v_2 &= + 0",10 & v_7 &= - 0",67 & v_{12} &= - 0",42 \\
 v_3 &= - 0",40 & v_8 &= + 0",51 & v_{13} &= - 2",35 \\
 v_4 &= + 1",24 & v_9 &= + 1",23 & v_{14} &= + 2",29 \\
 v_5 &= - 0",25 & v_{10} &= - 3",53 & v_{15} &= + 0",50
 \end{aligned}$$

In base a queste correzioni, gli angoli compensati risultano i seguenti:

Stazione a Li Belli	Stazione ad Arnesano	Stazione a Lecce
$\alpha_1^* = 44^\circ 48' 20",93$	$\alpha_1^* = 210^\circ 08' 48",03$	$\alpha_6^* = 113^\circ 05' 22",34$
	$\alpha_2^* = 139 \ 11 \ 12 \ 59$	$\alpha_7^* = 93 \ 10 \ 14 \ 67$
	$\alpha_3^* = 50 \ 58 \ 06 \ 16$	$\alpha_8^* = 90 \ 23 \ 47 \ 38$
	$\alpha_4^* = 25 \ 01 \ 40 \ 03$	$\alpha_9^* = 64 \ 14 \ 03 \ 78$

Stazione a Trepuzzi	Stazione a Novoli
$\alpha_{10}^* = 42^\circ 55' 35",14$	$\alpha_{10}^* = 74^\circ 23' 35",54$
$\alpha_{11}^* = 85 \ 41 \ 16 \ 89$	$\alpha_{11}^* = 111 \ 17 \ 52 \ 18$
$\alpha_{12}^* = 132 \ 35 \ 28 \ 79$	$\alpha_{12}^* = 247 \ 40 \ 25 \ 86$

Sostituendo questi valori nelle equazioni di condizione si ottiene

$$\log \frac{\text{sen}(\alpha_2^* - \alpha_1^*) \text{sen}(\alpha_6^* - \alpha_5^*) \text{sen}[\alpha_2^* + (\alpha_2^* - \alpha_1^*)]}{\text{sen} \alpha_2^* \text{sen}(\alpha_6^* - \alpha_5^*) \text{sen}[(\alpha_6^* - \alpha_5^*) + (\alpha_2^* - \alpha_1^*)]} = 0,0000000$$

$$\log \frac{\text{sen}(\alpha_2^* - \alpha_1^*) \text{sen} \alpha_6^* \text{sen}[\alpha_2^* + (\alpha_2^* - \alpha_1^*)]}{\text{sen} \alpha_2^* \text{sen} \alpha_6^* \text{sen}[\alpha_6^* + (\alpha_2^* - \alpha_1^*)]} = 0,0000001$$

$$\log \frac{\text{sen}(\alpha_2^* - \alpha_1^*) \text{sen} \alpha_1^* \text{sen}(\alpha_6^* - \alpha_5^*)}{\text{sen}(\alpha_6^* - \alpha_5^*) \text{sen} \alpha_5^* \text{sen} \alpha_6^*} = 0,0000001$$

$$\alpha_1^* + \alpha_2^* - \alpha_3^* + \alpha_4^* - 180^\circ - \varepsilon_1 = 0'',00$$

$$\alpha_2^* - \alpha_5^* + \alpha_2^* - \alpha_6^* - \alpha_5^* + \alpha_6^* - 180^\circ - \varepsilon_2 = 0'',00$$

$$\alpha_2^* - \alpha_1^* + \alpha_1^* + \alpha_5^* - 180^\circ - \varepsilon_3 = 0'',01$$

$$\alpha_2^* - \alpha_1^* + \alpha_2^* - \alpha_5^* + \alpha_5^* - 180^\circ - \varepsilon_4 = 0'',00$$

Questi risultati dimostrano l'esattezza del calcolo di compensazione eseguito.

Altro controllo ne è fornito dal calcolo per due vie differenti della sommatoria dei quadrati delle v ; calcolandola direttamente si ottiene

$$[vv] = 30,34$$

applicando, invece, la nota formola teorica

$$[vv] = -A_1 I - A_2 II - \dots - A_7 VII$$

ove A_1, A_2, \dots sono i termini noti nelle equazioni di condizione, si ha

$$[vv] = 30,35$$

in buon accordo col valore precedente.

L'errore medio di una direzione semplice osservata ci sarà dato dalla relazione

$$m'' = \sqrt{\frac{[vv]}{n}}$$

essendo n il numero delle equazioni di condizione, nel caso nostro uguale a 7.

Eseguito il calcolo si ottiene

$$m'' = 2'',08,$$

valore soddisfacente, tanto più quando si tenga conto delle dimensioni non molto grandi della rete, e delle due riduzioni in centro ai vertici L e Z.

Determinazione dei lati della rete e coordinate geodetiche dei vertici.

Indicando con (MN) l'azimut della geodetica MN, misurato da nord verso est, ossia l'azimut del punto N sull'orizzonte del punto M; con (NM) l'azimut reciproco, i valori relativi alla base LB, trasmessi dall'Istituto Geografico Militare furono i seguenti

$$(LB) = 191^\circ 45' 11'',66$$

$$(BL) = 11^\circ 44' 20'',12$$

$$\log LB = 3,9656726$$

$$LB = 9240^m,01$$

Partendo da questo valore di LB, ed applicando il metodo di Legendre successivamente ai vari triangoli della nostra rete, si ottennero per i lati di questa i valori qui appresso notati

log AB = 3,9446296	AB = 8802,98
log AL = 3,8381154	AL = 6888,35
log AS = 4,0794637	AS = 12007,81
log LS = 4,2504202	LS = 17800,01
log AN = 3,7443131	AN = 5550,26
log LN = 4,0198049	LN = 10469,58
log AZ = 3,8817540	AZ = 7616,47
log LZ = 4,0047210	LZ = 10109,30
log SN = 3,8670637	SN = 7363,15
log NZ = 3,5533925	NZ = 3575,96
log SZ = 3,9697798	SZ = 9327,81

Per renderci conto dell'esattezza raggiunta in queste determinazioni, calcoliamo l'errore medio da cui risulta affetto il lato maggiore della rete, SL.

Determinato in funzione della base BL, esso ha l'espressione

$$SL = BL \frac{\text{sen}(\alpha_1 + v_1) \text{sen}(\alpha_2 + v_2)}{\text{sen}(\alpha_2 + v_2 + \alpha_3 + v_3 - \alpha_2 - v_3) \text{sen}(\alpha_2 + v_2 - \alpha_3 - v_3)}$$

Considerandone il logaritmo come funzione di quantità osservate avremo

$$\begin{aligned} \log SL = H = v_1 A_{\alpha_1} - v_2 A_{\alpha_2 + v_2} + v_3 (A_{\alpha_3} - A_{\alpha_2 + \alpha_3 + v_3} + A_{\alpha_2 - v_3}) - v_2 A_{\alpha_2 - \alpha_3 - v_3} + \\ + v_3 A_{\alpha_2 - \alpha_3 - v_3} + BL \frac{\text{sen} \alpha_1 \text{sen} \alpha_3}{\text{sen}(\alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2) \text{sen}(\alpha_2 - \alpha_3)} = 0. \end{aligned}$$

Indicando con H_1, H_2, \dots le derivate della funzione H rispetto ad $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, si ha

$$\begin{aligned} H_1 = A_{\alpha_1} \quad H_2 = -A_{\alpha_2 + v_2} \quad H_3 = A_{\alpha_3} - A_{\alpha_2 + \alpha_3 + v_3} + A_{\alpha_2 - v_3} \\ H_4 = H_5 = H_6 = H_7 = 0 \quad H_8 = -A_{\alpha_2 - \alpha_3 - v_3} \quad H_9 = +A_{\alpha_2 - \alpha_3 - v_3} \\ H_{10} = H_{11} = H_{12} = H_{13} = H_{14} = H_{15} = 0. \end{aligned}$$

D'altra parte se si indicano con $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$, i vari coefficienti delle equazioni di condizione, il peso della funzione H sarà espresso, com'è noto, da

$$\frac{1}{P_H} = \frac{[HH]}{[AA]} - \frac{[BH1]^2}{[BB1]} - \frac{[CH2]^2}{[CC2]} - \frac{[DH3]^2}{[DD3]} - \frac{[EH4]^2}{[EE4]} - \frac{[FH5]^2}{[FF5]} - \frac{[GH6]^2}{[GG6]}$$

Eseguito le sostituzioni relative al caso nostro si ottiene

$$\frac{1}{P_H} = 1600 \quad \text{circa}$$

da cui l'errore medio

$$M = m \sqrt{\frac{1}{P_H}} = 83$$

in unità della 7^a cifra decimale logaritmica.

Sarà perciò, indicando con μ il modulo dei logaritmi decimali

$$d \log(SL) = \mu \frac{d(SL)}{SL} = \pm 0,0000088$$

da cui

$$d(SL) = \pm 0^m,340.$$

Essendo l'asse del campanile di Lecce vertice di primo ordine della rete nazionale, si credette opportuno riferire i vertici della rete ad un sistema d'assi ortogonali, aventi l'origine in detto punto trigonometrico, ed orientati astronomicamente: l'asse delle x tangente al parallelo, e diretto positivamente verso l'est; l'asse delle y tangente al meridiano, e diretto positivamente verso il nord.

Tenuto conto del valore di (LB) e degli angoli compensati della rete si ha subito

$$(LA) = (LB) + \alpha_1^* = 255^{\circ} 59' 15'',442$$

$$(LS) = (LB) + \alpha_2^* = 282 08 59 045$$

$$(LN) = (LB) + \alpha_3^* = 284 55 26 335$$

$$(LZ) = (LB) + \alpha_4^* = 304 50 33 996$$

Da questi azimut, e dalle distanze dei vertici della rete dal punto L, sarà facile mediante le formole (*)

$$3s = \frac{s^2 \operatorname{sen} z \cos z}{2qN \operatorname{sen} 1''} \quad X = s \operatorname{sen}(z - \varepsilon) \\ Y = s \cos(z - 2\varepsilon)$$

e tenendo conto della latitudine di Lecce

$$[\varphi = 40^{\circ} 21' 02''87$$

dedurre per i vertici medesimi le coordinate seguenti,

Punto B	$X_B = - 1882,163$	$Y_B = - 9046,287$
• A	$X_A = - 6683,379$	$Y_A = - 1667,888$
• S	$X_S = - 17401,304$	$Y_S = + 3736,327$
• N	$X_N = - 10113,527$	$Y_N = + 2695,537$
• Z	$X_Z = - 8296,931$	$Y_Z = + 5775,714$

Collegamento della torretta d'osservazione alla rete.

In occasione di altro lavoro (*), per il quale fu adoperato lo strumento medesimo qui impiegato, e nel quale le direzioni costituenti un giro d'orizzonte vennero misurate del pari 36 volte, cerchio zenitale a sinistra e cerchio zenitale a destra, si sviluppò sulla medesima base BL qui utilizzata, una rete BTLP, che in scala vedesi rappresentata nella fig. 2.

(*) Vedi N. JADANJA, *Guida al calcolo delle coordinate geodetiche*.

(*) *Triangolazione e livellazione di Lecce*, Rivista di Topografia e Catasto, vol. XVI.

Anche allora si determinarono le coordinate dei vertici rispetto allo stesso sistema d'assi, e per il punto T (rappresentato dall'asse di un pilastro costruito sul belvedere di un cascinale ad ovest di Lecce, denominato « masseria Tuzzo ») esse risultarono le seguenti

$$X_T = -1467^m,841$$

$$Y_T = -318^m,385$$

mentre per la lunghezza del lato TL si ebbe

$$\log LT = 3,1766623 \quad LT = 1501^m,97$$

con un errore medio in LT uguale a $\pm 0^m,082$.

Essendo la torretta visibile da T e da L si stimò sufficiente, per compiere il collegamento, misurare gli angoli del triangolo OTL; determinare LO dal lato TL come base, e quindi dedurre le coordinate rettangolari della torretta O rispetto al solito sistema d'assi.

Il vertice sulla torretta, come già si accennò in principio, venne individuato dall'asse di un pilastro in muratura, situato sul ripiano superiore di essa, e costruito per servir d'appoggio al teodolite, durante le osservazioni per le determinazioni di rifrazione.

Gli angoli del triangolo LTO vennero misurati con le medesime modalità tenute nelle precedenti misure; le stazioni furono concentriche per la torretta ed il vertice Tuzzo; ex-centro, e sul lato nord della balaustra superiore, per il campanile di Lecce.

I valori medi degli angoli osservati, a riduzione in centro eseguita per la stazione di Lecce, risultarono i seguenti:

$$\widehat{TLO} = 98^\circ 29' 45^{\prime\prime},95$$

$$\widehat{LTO} = 6^\circ 47' 26^{\prime\prime} 82$$

$$\widehat{LOT} = 74^\circ 42' 52^{\prime\prime} 18$$

con un errore di chiusura di $\pm 4^{\prime\prime},95$, sufficientemente piccolo, tenuto conto della breve lunghezza dei lati, e della riduzione in centro.

Ripartito detto errore di chiusura in parti uguali nei vari angoli, se ne trassero per questi i valori compensati coi quali si ebbero per i lati incogniti i valori

$$\log LO = 2,2650559 \quad LO = 184^m,101$$

$$\log TO = 3,1875133 \quad TO = 1539^m,974$$

Da calcoli precedenti, l'azimut del lato LT era risultato

$$(LT) = 257^\circ 45' 42^{\prime\prime},21$$

sarà quindi

$$(LO) = 356^\circ 15' 26^{\prime\prime},51$$

dopo di che sarà facile ottenere per le coordinate geodetiche rettangolari della torretta rispetto a Lecce, i valori seguenti:

$$\begin{aligned} X_0 &= -12^m,017 \\ Y_0 &= +183^m,708 \end{aligned}$$

Ciò premesso, note essendo le coordinate rettangolari di T ed O, si potranno calcolare le distanze di questi due punti dai vertici B, A, S, N, Z, della rete, applicando le note formole (1):

$$\begin{aligned} s_1 \operatorname{sen} \alpha_1 &= \mathcal{A}X + [4,38454 - 10] (E + 2\epsilon_1) \mathcal{A}Y \\ s_1 \cos \alpha_1 &= \mathcal{A}Y - [4,68557 - 10] (E + 2\epsilon_1) \mathcal{A}X - [4,38454 - 10] EX, \end{aligned}$$

essendo

$$\begin{cases} E = \frac{2X_1 \mathcal{A}Y}{2\varrho N \operatorname{sen} 1''} \\ 3\epsilon_1 = \frac{\mathcal{A}X \mathcal{A}Y}{2\varrho N \operatorname{sen} 1''} \end{cases}$$

Si ottiene in tal modo

log TB = 3,9413987	TB = 8737,73	log OT = 3,1875133	OT = 1539,97
log TL = 3,1766623	TL = 1501,97	log OA = 3,8403285	OA = 6923,55
log TZ = 3,9615559	TZ = 9152,84	log OS = 4,2492100	OS = 17750, 4
log TN = 3,9617038	TN = 9155,96	log ON = 4,0174140	ON = 10409,12
log TA = 3,7313711	TA = 5387,30	log OZ = 3,9998051	OZ = 9995,51
log OL = 2,2650559	OL = 184,10		

L'errore medio relativo al lato LO, calcolato nel modo solito, risultò

$$m_{ol} = \pm 0^m,016$$

ciò, peraltro, nell'ipotesi che il lato LT, assunto come base nella determinazione di OL, sia privo d'errore; invece, come si è accennato prima, LT è affetto da un errore medio $m_{LT} = \pm 0^m,082$; questo errore sul lato LO si riduce a

$$\frac{184,10}{1501,97} \cdot 0,082 = 0^m,010$$

di guisa che l'errore medio totale del lato LO diviene

$$M_{Lo} = \pm \sqrt{(0,016)^2 + (0,010)^2} = \pm 0^m,019.$$

Occorrendoci in appresso, sarà opportuno calcolare altresì l'errore medio relativo al lato OS.

(1) Vedi N. JADANKA, op. cit., pag. 15.

Noi abbiamo dedotto questo lato dalle coordinate dei suoi estremi, in funzione delle quali esso ha l'espressione

$$OS = [(x_s - x_o)^2 + (y_s - y_o)^2]^{\frac{1}{2}}$$

nella qual formola x_s, x_o, y_s, y_o saranno da riguardarsi come quantità osservate.

L'errore medio di OS sarà quindi

$$M_{OS} = \frac{1}{[(x_s - x_o)^2 + (y_s - y_o)^2]} [(x_s - x_o)^2 (m_{x_s}^2 + m_{x_o}^2) + (y_s - y_o)^2 (m_{y_s}^2 + m_{y_o}^2)]$$

avendo indicato con m_{x_s}, m_{x_o}, \dots gli errori medi relativi a x_s, x_o, \dots e che calcoleremo sulle formole

$$x_s = LS \operatorname{sen}(LS), \quad y_s = LS \operatorname{cos}(LS), \quad x_o = LO \operatorname{sen}(LO), \quad y_o = LO \operatorname{cos}(LO).$$

Eseguiti i calcoli si ottiene

$$M_{OS} = \pm 0^m,341.$$

PARTE SECONDA.

Generalità sulle operazioni di livellazione.

A causa della rilevante lunghezza delle distanze fra i punti di cui fu necessario determinare le differenze di livello; a causa del loro numero, del poco tempo disponibile, ed anziando per non incorrere in maggiori dispendi, si ritenne opportuno operare per via trigonometrica, anzichè ricorrere a livellazioni geometriche.

Inoltre, la bontà del teodolite Starke, e la sensibilità della sua livella zenitale, lasciavano larga speranza nel buon esito delle determinazioni a farsi, tanto più avuto riguardo allo scopo del nostro lavoro. Unica difficoltà da superare era quella di rendersi indipendenti dai gravi effetti della non esatta conoscenza del coefficiente di rifrazione in corrispondenza all'ora d'operazione; a questo riuscimmo eseguendo le livellazioni da punti intermedi.

I giorni impiegati per la misura delle distanze zenitali occorrenti, furono dal 10 al 20 settembre 1902; l'ora, in media, dalle 7^h alle 9^h,30^m, poichè in tale intervallo di tempo le immagini si presentavano stabili, e a contorno ben netto.

Le distanze zenitali venivano volta a volta calcolate con la formola

$$z = \frac{1}{2} [D + \frac{1}{2} p(s - d)] - [S + \frac{1}{2} p(s' - d)']$$

nella quale le lettere hanno un significato ben noto: quanto al valore angolare p della parte della livelletta zenitale dello Starke, da apposite determinazioni eseguite con il comparatore di livello del Gabinetto di Geodesia della Scuola d'Applicazione degli Ingegneri di Roma, all'inizio ed alla fine delle operazioni di campagna, venne riscontrato uguale a 2",30.

Le varie distanze zenitali vennero poi corrette in appresso della flessione del cannocchiale, sempre piccola, del resto, essendo il suo massimo valore 0",90 (1).

Per il nostro scopo era necessario determinare le differenze di livello fra la torretta O, ed i quattro vertici Arnosano, Salice, Novoli e Trepuzzi. Essendo assai difficoltoso collimare da questi punti la torretta, si stimò più opportuno determinare prima i dislivelli fra i tre vertici torretta, Lecce, Tuzzo, trattando a parte il piccolo triangolo LOT, quindi dedurre le differenze di livello fra Lecce, Tuzzo e i quattro vertici suddetti; e finalmente, noto essendo il dislivello Lecce-torretta, calcolare le differenze di livello incognite fra la torretta e i punti Arnesano, Salice, Novoli e Trepuzzi.

(1) Vedi V. REINA e G. CICONETTI, op. cit.

Dedotta dal triangolo LOT la differenza di livello fra i punti L e T, per determinare dopo le posizioni reciproche in altezza dei vertici A, S, N, Z, L, T sarebbe stato sufficiente determinare quattro soli dislivelli: furono, invece, eseguite determinazioni in numero maggiore, onde ricavare dalla rete di livellazione così formata, delle equazioni di condizione, necessarie per il controllo indispensabile delle determinazioni stesse.

Nella fig. 3 della tavola allegata alla presente pubblicazione, è rappresentata in scala questa rete di livellazione; la linea piena congiunge i punti T ed L; le linee a tratti congiungono i punti fra cui si determinarono i vari dislivelli di cui è qui discorso.

Riportiamo qui appresso le medie relative alle varie differenze di livello osservate nelle varie stazioni, avvertendo che il simbolo h_{XY} sta ad indicare la differenza di livello fra i due punti Y ed X, nel senso Y — X, ossia

$$h_{XY} = h_Y - h_X$$

in luogo degli indici X ed Y si sostituirono, naturalmente, le lettere relative ai vari vertici, già tenute nelle indicazioni riguardanti le operazioni planimetriche.

Stazione a Lecco	Stazione alla torretta	Stazione a Tuzzo
$h_{OT} = -0,963$	$h_{TL} = +42,608$	$h_{LO} = -41,675$
		$h_{TN} = -17,820$
Stazione a li Belli	Stazione ad Arnesano	Stazione a Novoli
$h_{AT} = +8,720$	$h_{TN} = -3,030$	$h_{NT} = -18,850$
$h_{AL} = +51,109$	$h_{LN} = -45,450$	$h_{NA} = -23,380$
	$h_{LX} = -27,690$	
	Stazione a Trepuzzi	
	$h_{LS} = -23,500$	

La differenza di livello fra due stazioni venne calcolata con la formola

$$(a) \quad h_2 - h_1 = s_2 \cotg \alpha_2 - s_1 \cotg \alpha_1 + \frac{1-k}{2r} (s_2^2 - s_1^2)$$

più che sufficiente al nostro scopo, tenuto conto delle distanze relativamente brevi. In tal formola h_2 ed h_1 sono le altezze dei due punti sul livello medio del mare; s_2 ed s_1 la loro distanza dal punto di stazione; k il coefficiente di rifrazione corrispondente all'istante d'osservazione; r la media geometrica fra la gran normale ed il raggio di curvatura del meridiano corrispondente al luogo d'osservazione.

L'influenza della rifrazione atmosferica nella formola (a) è rappresentata dall'ultimo termine, il quale si annulla per $s_2 = s_1$.

Se si tengono presenti le varie distanze tra i vertici, riportate nella Parte Prima, si vede subito che la condizione delle due distanze s_1 ed s_2 uguali, non è soddisfatta che per i due lati TN e TZ, per i quali si verifica la fortunata combinazione di appena 3 m. di differenza, circa, l'uno dall'altro.

Ne segue che un'inesattezza nel valore di k , porta un errore nella formola (α); di questo errore se ne terrà in appresso il dovuto conto, tuttavia è facile vedere fin da ora come esso sia nei casi nostri sufficientemente piccolo.

Di fatti le condizioni più sfavorevoli le troviamo quando si determina da Novoli la differenza di livello fra Tuzzo e Salice.

Se si indica con dk l'errore commesso nell'approssimamento del coefficiente di rifrazione, e con dh_k il conseguente errore nella determinazione della differenza di livello $h_2 - h_1$, a mezzo della (α), otteniamo subito da essa

$$dh_k = \frac{s_2^2 - s_1^2}{2r} dk$$

e ritenendo $dk = \frac{1}{4} k$ sarà $dh_k = k \frac{s_2^2 - s_1^2}{8r}$.

Riferendoci ora al caso dianzi accennato; sostituendo in luogo di s_1 ed s_2 i loro valori; ponendo $k = 0,14$ ed $r = 6,370,000^m$ si ottiene

$$dh_k = 0^{m},081$$

valore sufficientemente piccolo; nelle altre determinazioni, del resto, si hanno valori molto inferiori; alcuni sotto il centimetro.

Livellazione e compensazione del triangolo LOT.

In questo triangolo (vedi fig. 4) soltanto il vertice T trovasi quasi equidistante dagli altri due; unicamente per questo vertice sono, dunque, applicabili le considerazioni testè esposte. Giova però osservare che la piccolezza dei lati, rende qui poco sensibile l'errore nell'approssimamento del coefficiente di rifrazione, e per conseguenza non necessaria la determinazione dei dislivelli da un punto egualmente distante dai due a cui si collima.

I valori medi delle varie differenze di livello, quali furono dati dall'osservazione, sono, come già si disse, i seguenti

$$(m) \quad \begin{cases} h_{Lo} = -41,675 \\ h_{Or} = -0,963 \\ h_{rL} = +42,608 \end{cases}$$

Indicando con h_{Lo}^* , h_{Or}^* , h_{rL}^* i relativi valori corretti, avremo qui l'equazione di condizione

$$h_{Lo}^* + h_{Or}^* + h_{rL}^* = 0$$

od anche, tenendo conto dei valori (m) e designando con v_{Lo} , v_{Or} , v_{rL} le loro correzioni più probabili:

$$(n) \quad v_{Lo} + v_{Or} + v_{rL} - 0,030 = 0.$$

A determinare il peso relativo alle varie differenze di livello calcolate, sia per questo triangolo LOT, come per la rete di livellazione di cui diremo fra breve, si procedè nel modo seguente.

Indichiamo con dh , l'errore prodotto in h_{12} dalla non esatta conoscenza delle distanze dal punto di stazione ai vertici 1 e 2; risulterà

$$dh = ds_2 \cotg z_2 - ds_1 \cotg z_1 + \frac{1-k}{r} (s_2 ds_2 - s_1 ds_1)$$

dove con ds_2 e ds_1 , si sono indicati gli errori da cui sono rispettivamente affette s_2 ed s_1 .

A causa del fattore $\frac{1-k}{r}$ l'ultimo termine risulta trascurabile senz'altro; rimane di conseguenza

$$(b) \quad dh = ds_2 \cotg z_2 - ds_1 \cotg z_1.$$

Nella Parte Prima si calcolò l'errore medio corrispondente al lato LS, lungo circa 17 km.; detto errore risultò di 0^m,341, in media, dunque, 0^m,02 per km.; in tal proporzione, riferendoci al caso più sfavorevole: stazione a Trepuzzi, puntamento ai vertici Lecce e Salice, gli errori medi relativi ai lati ZL e ZS risulterebbero di circa 0^m,20 ciascuno.

Sostituendo allora questi valori nella equazione (b) in luogo di ds_2 e ds_1 , e ponendo per z_2 e z_1 , i valori medi delle distanze zenitali relative ai puntamenti fatti da Trepuzzi agli anzidetti vertici di Lecce e Salice, si ottiene per dh , un risultato dell'ordine del decimo di millimetro; appare, dunque, completamente trascurabile l'effetto nella determinazione di h , di un errore commesso nelle distanze s .

Considereremo, perciò, soltanto l'influenza in h della inesatta misura delle distanze zenitali z , e dell'inesatto apprezzamento del coefficiente di rifrazione k .

L'errore medio da cui è affetto h in merito a queste due ultime cause d'errore sarà dato da

$$(c) \quad m_h^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial z_1}\right)^2 m_{z_1}^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial z_2}\right)^2 m_{z_2}^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial k}\right)^2 m_k^2.$$

Avendo indicato con m_{z_1} , m_{z_2} , gli errori medi commessi nella misura delle due distanze zenitali z_1 , z_2 ; e con m_k l'errore medio commesso nell'apprezzamento di k .

Essendo z_1 e z_2 prossime a 90° risulterà.

$$m_h^2 = s_2^2 m_{z_2}^2 + s_1^2 m_{z_1}^2 + \left(\frac{s_2^2 - s_1^2}{2r}\right)^2 m_k^2$$

o anche, ponendo $m_{z_2} = m_{z_1} = m_z$; $m_k = \frac{1}{2} k$; $k = 0,14$

$$m_h^2 = (s_2^2 + s_1^2) m_z^2 + \left(\frac{s_2^2 - s_1^2}{2r}\right)^2 (0,03)^2$$

ed in secondi

$$(d) \quad m_h^2 = (s_2^2 + s_1^2) (m_z' \text{ arc } 1'')^2 + \left(\frac{s_2^2 - s_1^2}{2r}\right)^2 (0,03)^2$$

L'errore medio m'_r , relativo alla misura delle distanze zenitali osservate, ci risultò di circa 2",8; sarà quindi facile dalla (d) ricavare l'errore medio di ogni differenza di livello osservata e da essa dedurre il peso relativo. Si otterranno, così, per il triangolo LOT i valori seguenti

$$p_{Lo} = 10460 \quad p_{Or} = 12500 \quad p_{rL} = 19565.$$

Eseguendo la compensazione col metodo delle osservazioni condizionate, deduciamo dall'equazione (n) l'unica correlante

$$\left[\frac{1}{p} \right] I - 0,030 = 0$$

da cui

$$I = + 132,16$$

e quindi i seguenti valori delle v

$$v_{Lo} = \frac{1}{p_{Lo}} \frac{A}{\left[\frac{1}{p} \right]} = + 0,013$$

$$v_{Or} = \frac{1}{p_{Or}} \frac{A}{\left[\frac{1}{p} \right]} = + 0,010$$

$$v_{rL} = \frac{1}{p_{rL}} \frac{A}{\left[\frac{1}{p} \right]} = + 0,007$$

che sostituiti nella (n) la soddisfano esattamente. Otteniamo, in tal modo, i valori compensati seguenti:

$$h_{Lo}^* = - 41^m,662 \quad h_{Or}^* = - 0^m,953 \quad h_{rL}^* = + 42^m,615.$$

Ricerchiamo l'errore medio relativo alla differenza di livello compensata h_{Lo}^* .

Indicando con p_{Lo}^* il peso relativo, detto errore medio sarà dato da

$$m_{h_{Lo}^*} = \frac{m}{\sqrt{p_{Lo}^*}}$$

essendo m l'errore medio dell'unità di peso.

Nel nostro caso particolare risulta

$$\frac{1}{p_{Lo}^*} = \frac{1}{p_{Lo}} - \frac{\left(\frac{1}{p_{Lo}} \right)^2}{\frac{1}{p_{Lo}} + \frac{1}{p_{Or}} + \frac{1}{p_{rL}}}$$

ed eseguendo le relative sostituzioni numeriche

$$m_{h_{Lo}^*} = \pm 0^m,015.$$

Compensazione della rete di livellazione.

Indicando con n il numero delle differenze di livello osservate, con p i punti (dei quali due già determinati rispettivamente in altezza) il numero delle equazioni di condizione è dato, come è noto, dalla formola

$$n - (p - 2)$$

nel nostro caso risultano, dunque, cinque equazioni di condizione: esse ci saranno evidentemente fornite dai cinque triangoli AZL, ATL, TNL, LNZ, TSL.

Indicando con h_{XY}^* il vero valore della differenza di livello fra i due punti Y ed X, le anzidette equazioni saranno le seguenti:

$$(1) \quad \begin{cases} h_{AZ}^* + h_{ZL}^* + h_{LA}^* = 0 \\ h_{AT}^* + h_{TL}^* + h_{TA}^* = 0 \\ h_{TN}^* + h_{NL}^* + h_{LT}^* = 0 \\ h_{LN}^* + h_{NZ}^* + h_{ZL}^* = 0 \\ h_{TL}^* + h_{LZ}^* + h_{ZT}^* = 0 \end{cases}$$

Si ammette come nota la differenza di livello

$$h_{TL}^* = h_{TL} = + 42^m,61.$$

Ponendo allora nelle (1) in luogo dei valori corretti, i valori osservati, si trovano i residui seguenti

$$(2) \quad \begin{cases} h_{AZ} + h_{ZL} + h_{LA} = - 0^m,03 \\ h_{AT} + h_{TL} + h_{TA} = + 0^m,23 \\ h_{TN} + h_{NL} + h_{LT} = - 0^m,19 \\ h_{LN} + h_{NZ} + h_{ZL} = + 0^m,06 \\ h_{TL} + h_{LZ} + h_{ZT} = - 0^m,26 \end{cases}$$

Per eseguire la compensazione della rete seguiremo il metodo delle osservazioni indirette, presentandosi tal metodo, in questo caso, meno laborioso di quello delle osservazioni condizionate.

In corrispondenza ai valori osservati h_{AZ}, h_{ZL}, \dots potremo allora stabilire le seguenti equazioni generate

$$(3) \quad \begin{cases} h_{AZ}^* - h_{AZ} = v_1 \\ h_{ZL}^* - h_{ZL} = v_2 \\ h_{LA}^* - h_{LA} = v_3 \\ h_{AT}^* - h_{AT} = v_4 \\ h_{TN}^* - h_{TN} = v_5 \end{cases} \quad \begin{cases} h_{NL}^* - h_{NL} = v_6 \\ h_{NZ}^* - h_{NZ} = v_7 \\ h_{TN}^* - h_{TN} = v_8 \\ h_{LZ}^* - h_{LZ} = v_9 \end{cases}$$

Indicando ordinatamente con x_1, x_2, \dots le correzioni dei valori osservati, queste equazioni generate divengono

$$(4) \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= v_1 \\ x_2 &= v_2 \\ x_3 &= v_3 \\ x_4 &= v_4 \\ x_5 &= v_5 \end{aligned} \right\} \quad \left\{ \begin{aligned} x_6 &= v_6 \\ x_7 &= v_7 \\ x_8 &= v_8 \\ x_9 &= v_9 \end{aligned} \right.$$

mentre le equazioni di condizione (1), tenendo anche presenti le (2) diverranno

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 0,03 &= 0 \\ x_4 + x_5 &+ 0,23 = 0 \\ x_6 + x_7 &- 0,19 = 0 \\ -x_8 + x_9 + x_2 + 0,06 &= 0 \\ x_8 + x_9 &- 0,29 = 0 \end{aligned} \right.$$

Eliminando 5 delle incognite, per es. x_1, x_4, x_5, x_7, x_9 fra le (4) e le (5), e riducendo in pari tempo le equazioni risultanti allo stesso peso si ottiene:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} -\sqrt{p_1} x_2 - \sqrt{p_1} x_3 &+ \sqrt{p_1} 0,03 = V_1 \\ \sqrt{p_2} x_2 &= V_2 \\ \sqrt{p_3} x_3 &= V_3 \\ -\sqrt{p_4} x_3 &- \sqrt{p_4} 0,23 = V_4 \\ -\sqrt{p_5} x_3 &+ \sqrt{p_5} 0,19 = V_5 \\ \sqrt{p_6} x_4 &= V_6 \\ -\sqrt{p_7} x_2 &+ \sqrt{p_7} x_6 - \sqrt{p_7} 0,06 = V_7 \\ &- \sqrt{p_8} x_8 + \sqrt{p_8} 0,26 = V_8 \\ &+ \sqrt{p_9} x_9 &= V_9 \end{aligned} \right.$$

dove con p_1, p_2, \dots, p_9 , abbiamo indicato i pesi relativi alle varie differenze di livello $h_{12}, h_{23}, \dots, h_{98}$.

Dal sistema (6) otteniamo subito il seguente sistema di equazioni normali

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} (p_1 + p_2 + p_3) x_2 + p_1 x_3 - p_7 x_6 &+ (-0,03 p_1 + 0,06 p_7) = 0 \\ p_1 x_3 + (p_1 + p_2 + p_3) x_2 + &- (0,03 p_1 - 0,23 p_4) = 0 \\ -p_7 x_2 + (p_5 + p_6 + p_7) x_6 &- (0,19 p_5 + 0,06 p_7) = 0 \\ &(p_8 + p_9) x_8 - 0,26 p_8 = 0 \end{aligned} \right.$$

I pesi calcolati nel modo noto, risultarono i seguenti

$$\begin{array}{lll} p_1 = 760,5 & p_4 = 141,2 & p_7 = 226,7 \\ p_2 = 657,0 & p_5 = 633,3 & p_8 = 187,5 \\ p_3 = 65,7 & p_6 = 361,8 & p_9 = 163,8 \end{array}$$

Eseguendo allora le relative sostituzioni, il sistema (7) diviene

$$\begin{array}{rcl}
 1644,2 x_2 + 760,5 x_3 - 226,7 x_4 & - & 9,21 = 0 \\
 760,5 x_2 + 967,4 x_3 & + & 9,66 = 0 \\
 - 226,7 x_4 & + & 1231,8 x_5 - 133,93 = 0 \\
 & & 351,3 x_5 - 48,75 = 0
 \end{array}$$

da cui si trae il seguente sistema di equazioni risolventi

$$\left. \begin{array}{rcl}
 1644,2 x_2 + 760,5 x_3 - 226,7 x_4 & - & 9,21 = 0 \\
 615,6 x_3 + 104,9 x_4 & + & 13,92 = 0 \\
 1172,7 x_4 & - & 137,57 = 0 \\
 351,3 x_5 - 48,75 = 0
 \end{array} \right\}$$

Si ricava in conseguenza

$$x_2 = + 0^m,041 \quad x_3 = - 0^m,042 \quad x_4 = + 0^m,117 \quad x_5 = + 0^m,139$$

Da questi valori si deducono gli altri seguenti

$$x_1 = + 0^m,031 \quad x_4 = - 0^m,188 \quad x_3 = + 0^m,073 \quad x_1 = + 0^m,016 \quad x_5 = + 0^m,121$$

Dalle (3) ricaviamo allora le seguenti differenze di livello compensate

$$\begin{array}{ll}
 h_{Ax}^* = + 23^m,411 & h_{Bx}^* = + 45^m,567 \\
 h_{Lx}^* = + 27^m,731 & h_{Nx}^* = + 17^m,836 \\
 h_{Cx}^* = - 51^m,142 & h_{Tx}^* = + 18^m,971 \\
 h_{Vx}^* = + 8^m,532 & h_{Sx}^* = + 23^m,639 \\
 h_{Tx}^* = - 2^m,957 &
 \end{array}$$

essendo

$$h_{Tx}^* = + 42^m,61$$

Sostituiti questi valori nelle equazioni di condizione (1) si ottiene

$$\begin{array}{l}
 h_{Tx}^* + h_{Tx}^* + h_{Tx}^* = 0^m,000 \\
 h_{Tx}^* + h_{Tx}^* + h_{Tx}^* = 0^m,000 \\
 h_{Tx}^* + h_{Tx}^* + h_{Tx}^* = 0^m,000 \\
 h_{Tx}^* + h_{Tx}^* + h_{Tx}^* = 0^m,000 \\
 h_{Tx}^* + h_{Tx}^* + h_{Tx}^* = 0^m,000
 \end{array}$$

il che prova l'esattezza del calcolo di compensazione eseguito.

Onde renderci conto del grado di precisione raggiunto nella livellazione trigonometrica compiuta, sarà opportuno calcolare i vari errori medi da cui risultano affetti i valori determinati per le quattro incognite x_1, x_2, x_3, x_4 .

L'errore medio dell'unità di peso è dato, com'è noto, dalla formola

$$m = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n - \omega}}$$

essendo $[\lambda\lambda]$ la sommatoria dei quadrati dei residui ottenuti col sostituire nelle equazioni generate (6) i valori più probabili delle incognite; n è il numero di esse equazioni; ω il numero delle incognite.

Eseguita l'anzidetta sostituzione si ottiene

$$[\lambda\lambda] = 20,854 \\ m = \sqrt{4,17}.$$

Il valore di $[\lambda\lambda]$ si può anche calcolare per via indiretta con la nota formola teorica

$$[\lambda\lambda] = [U\omega]$$

ossia, per essere nel caso nostro $\omega = 4$,

$$[\lambda\lambda] = [U] - \frac{[a_1^2]}{[aa]} - \frac{[b_1^2]}{[bb]} - \frac{[c_1^2]}{[cc]} - \frac{[d_1^2]}{[dd]}$$

dove con l_1, l_2, \dots , si sono indicati i termini noti delle equazioni generate (6), e con $a_1, b_1, c_1, \dots; a_2, b_2, c_2, \dots$ i coefficienti delle medesime. Eseguito il calcolo si ottiene

$$[\lambda\lambda] = 20,876$$

in buon accordo col valore trovato direttamente.

L'errore medio relativo al valore compensato dall'incognita x_2 è dato (vedi p. es. Pucci, *Fondamenti di Geodesia*, vol. I, pag. 385 e segg.) dalla formola

$$m_{x_2} = m \sqrt{[\alpha\alpha]}$$

risulta nel caso nostro

$$m_{x_2} = m_{s_{x_2}} = \pm 0^m,065$$

In guisa analoga si ha

$$m_{x_3} = m \sqrt{[\beta\beta]} = m_{s_{x_3}} = \pm 0^m,082 \quad ; \quad m_{x_4} = m \sqrt{[\gamma\gamma]} = m_{s_{x_4}} = \pm 0^m,060$$

$$m_{x_5} = m \sqrt{[\delta\delta]} = m_{s_{x_5}} = \pm 0^m,109.$$

Dai valori compensati precedentemente calcolati

$$h_{L_0}^* = -41^m,662 \quad ; \quad h_{L_1}^* = -51^m,142 \quad ; \quad h_{L_2}^* = +23^m,639 \quad ; \quad h_{L_3}^* = +45^m,567 \\ h_{L_4}^* = +27^m,731$$

si ottengono, quali differenze di livello fra la torretta d'osservazione, e i punti Arnesano, Salice, Novoli e Trepuzzi, i valori seguenti

$$H_{L_0} = +9^m,480 \quad ; \quad H_{L_1} = -18^m,023 \quad ; \quad H_{L_2} = +3^m,905 \quad ; \quad H_{L_3} = -13^m,931.$$

Per il modo come queste differenze di livello sono state dedotte dai valori sopra riportati, ci sarà facile ricavare l'errore medio relativo ad esse, dagli errori medi relativi agli anzidetti valori.

Avremo, infatti, per l'errore medio relativo alla differenza di livello $H_{s,0}$

$$m_{H_{s,0}} = \sqrt{m_{h,0}^2 + m_{h,s}^2}$$

e formole analoghe per gli altri.

Eseguite le sostituzioni numeriche necessario si ottiene

$$m_{H_{s,0}} = \pm 0^m,083; m_{H_{s,20}} = \pm 0^m,110; m_{H_{s,30}} = \pm 0^m,062; m_{H_{s,40}} = \pm 0^m,067.$$

La quota del piano della balaustra superiore del campanile di Lecce, scelta come piano di paragone, è, secondo la comunicazione dell'Istituto Geografico Militare, di 106^m,99 sul livello medio del mare.

Ne consegnano per le quote dei nostri vertici i valori segnenti, a lato dei quali riportiamo, altresì, l'indicazione del piano di paragone scelto per essi:

Arsenano	55 ^m ,85	ripiano superiore della torre omonima, sul quale è costruito il pilastro individuando il vertice trigonometrico.
Novoli	61 ^m ,43	idem.
Salice	83 ^m ,35	sommità della piccola cupola terminale del campanile, all'innesto della croce.
Trepuzzi	79 ^m ,26	sommità del piccolo cono terminale del campanile.
Torretta	65 ^m ,33	piano superiore del pilastro su di essa costruito.

PARTE TERZA.

Le osservazioni eseguite sulla torretta per la determinazione del coefficiente di rifrazione, si svolsero in due periodi distinti: estate ed inverno: le prime ebbero luogo ad intervalli, dal 21 agosto al 26 settembre 1902; le seconde dal 21 al 26 dicembre dello stesso anno.

Apposita costruzione in legname, eretta sul ripiano superiore della torretta, riparava il teodolite dagli agenti atmosferici durante le osservazioni.

I vertici venivano collimati nell'ordine seguente: Arnesano, Salice, Novoli, Trepuzzi; per ogni vertice leggevasi le due distanze zenitali, cerchio a sinistra e cerchio a destra ed unitamente le indicazioni relative agli estremi della bolla della livelletta zenitale.

Contemporaneamente venivano ancor fatte osservazioni di temperatura e di pressione.

È ovvio rammentare in fine, che ad ogni lettura angolare rilevavasi l'ora corrispondente.

Misurata la distanza zenitale relativa ad un punto collimato, apportata ad essa la correzione dovuta all'indicazione della livelletta zenitale, ed alla flessione del canocchiale, il coefficiente di rifrazione venne volta per volta calcolato con la formola

$$(1) \quad 1 - k = \frac{2r}{s^2} (h - s \cotg z).$$

Determinati così i coefficienti di rifrazione relativi alle varie osservazioni, si mutarono di poi le ore corrispondenti in frazioni del semiarco diurno assumendo, in tal guisa, come unità di tempo l'intervallo compreso fra il mezzogiorno vero, ed il levare e tramontare del sole.

Per apprezzare il grado di precisione raggiunto nella determinazione di k calcolato con la (1), ricerchiamo separatamente l'influenza di un errore commesso nel determinare ciascuno dei tre elementi s, h, z , che entrano in essa.

Differenziando rispetto ad s si ottiene

$$(2) \quad dk_s = -\frac{4rh}{s^3} ds + \frac{2r}{s^2} ds \cotg z$$

il caso più sfavorevole si verifica nel puntamento ad Arnesano, vertice più vicino alla torretta; ritenendo per il lato OA un errore medio di 0^m,15, ed eseguite le necessarie sostituzioni numeriche, i due termini della (2) assumono i valori seguenti

$$\frac{4rh}{s^3} ds = 0,0001 \quad \frac{2r}{s^2} ds \cotg z = 0,00006$$

l'influenza dell'errore commesso nella misura della distanza s appare, dunque, completamente trascurabile.

Differenziando la (1) rispetto ad h si ha

$$dk_h = \frac{2r}{s^2} dh$$

per Arnesano si vide essere $dh = \pm 0^m,083$; sostituendo allora per s il valore numerico corrispondente si ottiene l'errore tollerabile

$$(3) \quad dk_h = 0,022.$$

Quest'errore diminuisce sensibilmente per gli altri vertici; per Novoli e Trepuzzi è circa 0,007; per Salice 0,004.

Derivando la (1) rispetto a z si ricava

$$dk_z = \frac{2r}{s} \frac{dz}{\sin^2 z}$$

e, per essere $\sin z$ prossimo all'unità,

$$dk_z = \frac{2r}{s} dz'' \text{ arc } 1''.$$

Da ricerche relative ci risultò $dz'' = 2''$ circa: tenuto conto di ciò si ottiene per Arnesano

$$(4) \quad dk_z = 0,018$$

e per Salice

$$dk_z = 0,007.$$

In fine, l'errore medio totale, dedotto con la consueta formula

$$dk = \pm \sqrt{dk_h^2 + dk_z^2 + dk_s^2}$$

risulta nel caso più sfavorevole, ossia sostituendo i valori (3) e (4)

$$dk = \pm 0,028.$$

Qui appresso riportiamo i risultati relativi alle esperienze compiute, distinguendo quelli dell'estate da quelli dell'inverno. Per i primi ci limitiamo a riportare una tabella nella quale sono indicati i coefficienti dedotti nei vari giorni, e la frazione del semiarco diurno corrispondente.

Come si vedrà da essa, la rifrazione per tutti i vertici collimati, senza eccezione, risultò negativa, meno che per le prime ore del mattino e le ultime della sera. In vista di tale risultato abbiamo ritenuto superfluo trascrivere gli ulteriori dati raccolti, relativi alle osservazioni di tale periodo.

Abbiamo, invece, riportato con maggior dettaglio le esperienze eseguite nell'inverno, poichè il coefficiente di rifrazione presentò allora un andamento assai più regolare, e giacchè si ebbero per esso in tale stagione, valori in buona armonia con quelli riscontrati in altre parti d'Italia.

**Valori del coefficiente di rifrazione
risultanti dalle osservazioni eseguite nell'estate espressi in un unità dei millesimi.**

Frazione del semicircolo diurno	AGOSTO					SETTEMBRE				
	Arsenico	Salice	Novelli	Trepuzzi	Media con- piastiva	Arsenico	Salice	Novelli	Trepuzzi	Media con- piastiva
6,85	123	..	123	165	..	254	238	219
80	142	95	118	..	275	171	214	220
75	86	165	118	..	123	189	189
70	77	108	90	95	92	112	133	102	118	116
65	..	105	..	103	104	67	100	94	90	88
60	59	108	66	86	80	67	93	78	77	79
55	..	92	45	91	76	67	83	92	..	81
50	5	87	27	57	44	51	88	64	81	71
45	..	81	31	57	56	62	92	52	72	69
40	8	70	16	56	34	..	99	44	53	65
35	..	80	14	69	54	19	86	32	..	46
30	..	72	11	55	46	..	92	13	46	50
25	8	80	7	..	27	16	85	3	43	27
20	26	74	1	37	21	..	72	15	41	33
15	39	34	8	38	6	18	32	30	..	5
10	87	4	20	16	24	24	29	26	15	1
05	39	0	43	22	20	26	28	14	4	4
00	86	12	72	5	41	14	18	1
05	62	41	72	4	45	24	2	16	3	10
10	69	52	64	29	53	40	19	23	21	16
15	61	61	60	50	58	1	8	27	30	16
20	80	38	93	20	58	9	13	..	2	2
25	71	38	95	47	63	19	12	26	..	1
30	41	25	72	55	48	16	26	20	3	5
35	52	22	60	44	45	..	41	4	..	11
40	42	2	39	8	18	34	17	25
45	3	25	11	57	..	12	26	32
50	14	7	3	120	59	33	14	56
55	8	25	15	28	28	34	34
60	18	40	4	51	51	148	54	64	..	89
65	17	40	6	..	6	107	107
70	6	47	9	..	15
75	60	65	15	..	47	137	83	104	90	104
80	82	68	75	146	110	103	114	118
85	86	73	27	63	62	150	133	100	116	126
90	113	85	56	66	80	165	139	112	120	134
95	131	118	93	98	110
1.00	150	123	156	91	130	168	167	167

Specchio riassuntivo delle osservazioni eseguite nel Dicembre 1902.

ARNERANO			SALICE			NOVOLI			TRIFUZZI		
Ora	Distanza zenitale	Coefficiente di rifrazione	Ora	Distanza zenitale	Coefficiente di rifrazione	Ora	Distanza zenitale	Coefficiente di rifrazione	Ora	Distanza zenitale	Coefficiente di rifrazione

21 Dicembre

	90°06'	0.	50°00'	0.	90°03'	0.	89°57'	0.			
12.25	26°0	162	12.35	48°6	140	12.45	41°1	124	
13	27°9	153	13.10	42°1	180	..	40°1	129	
13.45	24°3	177	13.50	40°2	190	
..	13.55	35°9	162	14.5	39°6	194	14.10	38°9	142
14.25	27°9	145	14.30	37°2	154	14.40	39°3	196	14.45	35°2	159
14.55	22°6	193	15	38°3	150	15.15	33°8	228	15.20	26°2	215

22 Dicembre

8.40	25°1	170	8.50	28°2	186	8.55	59°5	194	9	26°5	213
9.15	28°3	141	9.20	44°8	128	9.25	38°2	202	9.30	26°1	216
10	28°2	142	10.5	41°8	138	10.10	47°6	146	10.15	32°6	175
10.30	28°6	138	10.35	50°6	108	10.40	50°4	130	10.45	36°7	150
11	29°7	129	11.5	44°8	128	11.10	50°1	132	11.15	33°2	172
11.25	33°8	91	11.30	47°4	119	11.40	47°9	150	11.45	40°4	127
12.10	33°5	98	12.15	50°0	110	12.20	54°2	107	12.25	38°5	138
14.15	30°0	126	14.20	44°0	131	14.25	50°5	129	14.30	37°7	144
14.45	29°8	208	14.50	39°4	147	14.55	44°0	168	14.55	35°8	156
15.15	23°8	181	15.20	36°8	156	15.25	44°3	166	15.30	26°0	216
15.40	22°2	196	15.45	32°0	173	15.50	38°6	200
16.10	20°8	200	16.15	22°0	186	16.20	35°8	228

23 Dicembre

7.20	21°8	199	servizi ingegneristici non si può puntare	..	7.30	34°7	223	7.40	27°5	207
7.50	21°0	206
9.25	26°1	161	9.30	42°6	176	9.35	32°0	179
9.45	30°1	125	9.50	39°1	197	9.55	21°1	247

AKESANO			SALICE			NOVOLI			TREPUEZZI		
Ora	Distanza zenitale	Coefficiente di rifrazione	Ora	Distanza zenitale	Coefficiente di rifrazione	Ora	Distanza zenitale	Coefficiente di rifrazione	Ora	Distanza zenitale	Coefficiente di rifrazione

23 Dicembre

	90°06'	0.	90°00'	0.	90°03'	0.	89°57'	0.			
h ^m	25",3	168	10.10	39",8	145	10.15	42",6	176	10.30	27",3	208
14	27",2	159	14.10	36",5	212	14.15	22",6	237
14.30	20",7	209	14.40	34",0	227	14.50	23",0	235
15	26",6	156	15.5	37",0	209

25 Dicembre

8.50	20",3	211	8.55	15",7	249	9	39",1	197	9.5	25",6	219
9.20	25",3	168	9.25	32",3	172	9.30	37",1	209	9.35	35",5	187
9.50	28",0	144	9.55	40",3	144	10	48",0	144	10.5	31",0	185
10.20	29",0	135	10.25	44",7	128	10.30	52",5	117	10.35	35",1	160
11.15	32",7	102	11.25	50",1	110	11.30	56",4	094	11.35	42",7	113
..	11.50	48",6	115	12	54",4	106	12.5	40",5	130
12.15	35",7	075	12.20	48",8	114	12.25	58",7	080	12.35	36",0	154
13	33",8	092	13.5	50",5	108	13.10	57",6	087	13.15	41",4	121
13.30	31",4	113	13.35	51",4	105	13.40	55",8	087	13.50	39",0	136

26 Dicembre

9.5	24",2	179	9.10	32",4	172	9.15	39",3	195	9.25	16",9	272
9.40	26",6	156	9.45	40",2	145	9.50	40",0	190	10	39",3	194

Elenco dei valori precedenti del coefficiente di rifrazione
in corrispondenza alle varie frazioni del semilarco diurno, e medie relative.

Presidio di Piemonte di	ARSENIUM						SALICE						NOVOLI						TERTIZZI						Medie complessive		
	DICEMBRE						DICEMBRE						DICEMBRE						DICEMBRE						Media	Media	
	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31			
0,65	170	211	179	180	186	249	212	194	194	197	195	195	195	195	195	195	195	195	195	195	195	195	195	195	195	203	
0,60	141	161	168	156	137	172	172	150	202	176	209	190	196	196	196	196	196	196	196	196	196	196	196	196	196	196	203
0,55	141	153	144	135	128	144	144	144	146	197	144	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	162	172
0,50	142	169	135	135	135	145	128	135	146	176	117	146	146	146	146	146	146	146	146	146	146	146	146	146	146	146	182
0,45	138	138	138	138	138	138	108	108	139	139	139	139	139	139	139	139	139	139	139	139	139	139	139	139	139	139	184
0,40	129	129	102	129	128	110	128	128	139	139	139	139	139	139	139	139	139	139	139	139	139	139	139	139	139	188	
0,35	110	110	110	110	110	110	110	110	132	132	132	132	132	132	132	132	132	132	132	132	132	132	132	132	132	172	
0,30	691	691	691	691	691	691	691	691	691	691	691	691	691	691	691	691	691	691	691	691	691	691	691	691	691	172	
0,25	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	111	
0,20	102	102	102	102	102	102	102	102	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	111	
0,15	890	890	890	890	890	890	890	890	890	890	890	890	890	890	890	890	890	890	890	890	890	890	890	890	890	115	
0,10	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	680	115	
0,05	102	102	102	102	102	102	102	102	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	
0,00	102	102	102	102	102	102	102	102	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	115	
0,95	177	113	150	145	162	106	145	162	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	118	
0,90	146	136	209	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	118	
0,85	146	136	209	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	150	118	
0,80	193	208	156	186	147	147	186	150	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	147	129	
0,75	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	129	
0,70	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	181	129	
0,65	83	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	106	129	
0,60	200	200	200	200	173	173	173	173	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	
1,00	186	186	186	186	186	186	186	186	186	186	186	186	186	186	186	186	186	186	186	186	186	186	186	186	186	228	

I risultati che precedono, relativi alle osservazioni eseguite nell'estate, mostrano, dunque, per il coefficiente di rifrazione un andamento variabile fra limiti molto ampi: da valori positivi molto forti ai primi istanti del mattino, la rifrazione diminuisce fino a diventar negativa nelle ore meridiane.

Queste grandi variazioni sono, senza dubbio, dovute agli effetti della forte irradiazione del calore del suolo, ed alla limitata altezza delle traiettorie su di esso, altezza che da osservazioni eseguite sul posto, ci risultò di circa 30^m.

Che con visuali molto prossime al terreno si riscontrino talvolta anomalie nella rifrazione terrestre, fu dimostrato fin dal principio del secolo scorso dal BIOT, in una classica Memoria (1) nella quale egli studiò diffusamente il comportarsi delle traiettorie luminose molto radenti, esponendo il risultato di una serie di belle esperienze eseguite da lui e da MATHIEU con osservazioni dell'orizzonte del mare a Dunkerque, nell'inverno del 1808.

Di queste anomalie fa ancor cenno il prof. HARTL nella introduzione alle sue belle ricerche sulla rifrazione terrestre (2): a pag. 111, vol. III si leggono le seguenti parole: « Sopra terreno nudo, sassoso, o sabbioso, l'aria è relativamente molto asciutta, per conseguenza la diminuzione di calore con l'altezza, rapidissima. La rifrazione, allora, risulta molto piccola, e negli strati inferiori dell'aria, in vicinanza del terreno, per lo più negativa ».

Queste circostanze, così bene precisate da HARTL, si presentano appunto nella pianura lecceese durante l'estate, ed i risultati delle osservazioni non potevano, quindi, non risultare conformi alle previsioni teoriche.

Risultato identico si ottiene ancora deducendo dalle varie osservazioni eseguite per la livellazione trigonometrica, i corrispondenti valori del coefficiente di rifrazione. A prova di ciò riportiamo qui appresso una tabella nella quale sono elencati i vari valori così ottenuti per k : a fianco vedesi segnato l'istante corrispondente in frazione del semiarco diurno, avendo avuto previdenza, durante le operazioni di livellazione, di notare l'istante corrispondente ad ogni misura zenitale.

(1) M. BIOT, *Recherches sur les réfractons extraordinaires qui ont lieu près de l'horizon*. Paris, M.DCCCX.

(2) H. HARTL, *Beiträge zum Studium der terrestrischen Strahlenbrechung*, Mittheilungen des k. u. k. Militär-Geographischen Institut. B. III, IV.

STAGIONE A LI BELLI (9 settembre)				STAGIONE AD ARIMANZO (6 settembre)				STAGIONE A TUZZO (11-12 settembre)				STAGIONE A NOVOLI (15 settembre)				STAGIONE A LICEO (20 settembre)			
Valori di F ottenuti dal puntamento		Valori di F ottenuti dal puntamento a		Valori di F ottenuti dal puntamento a		Valori di F ottenuti dal puntamento a		Valori di F ottenuti dal puntamento a		Valori di F ottenuti dal puntamento a		Valori di F ottenuti dal puntamento a		Valori di F ottenuti dal puntamento a					
Trasversale	Longitudinale	Trasversale	Longitudinale	Trasversale	Longitudinale	Trasversale	Longitudinale	Trasversale	Longitudinale	Trasversale	Longitudinale	Trasversale	Longitudinale	Trasversale	Longitudinale				
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0				
0,50	209	159	131	0,75	130	133	...	0,55	163	075	...	0,70	203	170	209				
75	146	142	107	65	038	109	045	45	053	046	037	65	230	133	134				
70	139	083	046	60	078	101	109	33	071	108	...	60	155	121	202				
65	115	110	100	55	060	062	065	25	026	113	033	55	265	091	170				
60	074	106	097	50	-064	092	013	13	022	045	042	50	130	095	197				
55	089	139	090	45	-022	-018	056	06	025	-005	-027	45	171	112	144				
				40	004	046	061	028				40	146	097	091				
													35	146	100				
													30	128	066				
													05				

N. B. Mancano i dati relativi alla stazione di Tropani, perchè a questo vertice la stazione fu fatta est-centro, e si omise di prendere l'altezza del centro dello strumento, sul piano di paragone.

Questi valori ci risultarono in pieno accordo con quelli ottenuti dalla torretta nei giorni vicini, seguenti o precedenti; l'accordo appare anche buono facendo il confronto con la media delle osservazioni eseguite nel settembre, riportata nella prima tabella.

In queste osservazioni relative alla livellazione trigonometrica, non si riscontrano di massima valori negativi, perchè, come già si disse a suo tempo, le osservazioni si eseguirono solo nelle prime ore del mattino, o nelle ultime della sera, ad *immagine tranquilla*; ma è evidente che se si fossero protratte le osservazioni anche in tali condizioni, si sarebbero riscontrate le note anomalie: lo dimostrano i bassi valori degli ultimi istanti d'osservazione.

Portandosi altrove, le condizioni in provincia di Lecce non cambiano sensibilmente, epperò, da tutto quanto precede, mi pare si possa concluderne con sicurezza, non essere prudente eseguire in tale regione livellazioni per via trigonometrica nei mesi estivi, a causa della forte incertezza sui valori della rifrazione, e della grande variabilità di essa in limiti di tempo relativamente molto ristretti.

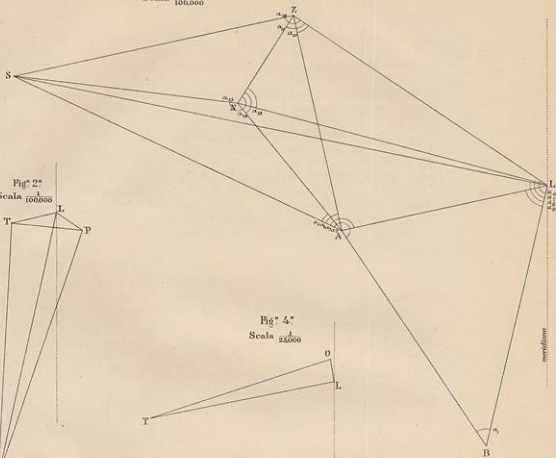
Nei riguardi della pratica, le osservazioni eseguite nell'inverno sono a differenza di quelle dell'estate, molto più suscettibili di applicazione; esse ci mostrano per il coefficiente di rifrazione un andamento molto più regolare e normale, sì che i valori che per esso ne risultano si potranno con sicurezza impiegare nei calcoli relativi alle operazioni di livellazione trigonometrica.

Come già accennammo in altra parte, questi valori ottenuti nella stagione invernale si presentano in buon accordo con quelli ottenuti in altre regioni d'Italia.

A prova di ciò, riportiamo qui appresso la media relativa a dette osservazioni, facendola precedere dai valori osservati in inverno a Udine e a Roma (1).

(1) V. REINA e G. CICONETTI. — G. CICONETTI e N. PIERPAOLI, Memorie già citate.

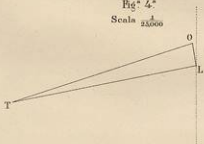
Fig^o 1^o
Scala $\frac{1}{100,000}$



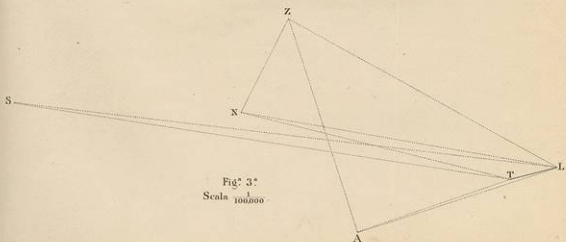
Fig^o 2^o
Scala $\frac{1}{100,000}$



Fig^o 4^o
Scala $\frac{1}{25,000}$



Fig^o 3^o
Scala $\frac{1}{100,000}$



I valori osservati a Lecce risultano tutti inferiori a quelli avuti a Udine e, fatta eccezione dei valori estremi, altresì inferiori a quelli ottenuti a Roma: è da notarsi, peraltro, che i valori riportati per questa città si riferiscono al mese di marzo, e non propriamente all'epoca invernale, nella quale i valori del coefficiente di rifrazione risultano in generale più grandi. — Si ha, ad ogni modo, la conferma della legge già riconosciuta, in virtù della quale, nella regione italiana il coefficiente di rifrazione va diminuendo col procedere dal Nord verso il Sud.