Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque a tre dimensioni.

Memoria del prof. G. RICCI

(presentata dal Socio CERRUTI, approvata dal Socio BIANCHI).

PREFAZIONE.

Il prof. BIANCHI in una sua recente Memoria (¹) ha determinato le forme tipiche degli elementi lineari di quegli spazî a tre dimensioni, che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni in loro stessi, ed ha indicato per ogni tipo le trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo corrispondente. Se poi un tale elemento lineare φ è dato in coordinate generali, per giovarsi dei risultati del BIANCHI onde determinare le trasformazioni infinitesime da esso ammesse, conviene procedere come segue. Si riconoscano con operazioni algebriche e di derivazione il numero dei parametri, da cui dipende il gruppo G, di cui si tratta, la sua composizione e la sua transitività od intransitività. Nelle tabelle costruite dal BIANCHI si troverà uno ed un solo gruppo G′ simile a G, e se ψ è l'elemento lineare, che ammette il gruppo G′, la forma differenziale quadratica φ sarà equivalente a ψ e per trasformare G′ in G rimarrà poi da determinare la sostituzione, per la quale ψ si cambia in φ, la quale, si noti, nella sua forma più generale dipenderà da tanti parametri, da quanti dipende il gruppo G.

Io mi sono proposto di pervenire direttamente alla soluzione di quest'ultimo problema, applicando i miei metodi di calcolo differenziale assoluto. Perciò, partendo dalle formole fondamentali di Killing, eseguisco appunto quei calcoli algebrici e di derivazione, che sono richiesti anche dal metodo accennato sopra, ma che applicati ad un elemento lineare qualunque dànno per ogni caso ed espresse sotto forma invariantiva le condizioni necessarie e sufficienti per la esistenza di un gruppo G e le sue equazioni di definizione. Quelle esprimono delle notevoli proprietà degli spazî,

(¹) *Sugli spazî a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti* (Tomo XI (1898) delle Memorie della Società Italiana delle scienze).

che ammettono dei gruppi continui di movimenti rigidi, ed applicate ai tipi del Bianchi porgerebbero dei facili criterî per riconoscere a quale tra questi sia riducibile un elemento lineare ternario comunque dato. Le seconde, la cui integrazione presenta le stesse difficoltà che quelle, a cui si è condotti col metodo del Bianchi, permettono di riconoscere le proprietà caratteristiche del gruppo da esse definito.

Quando il gruppo G è intransitivo, le sue equazioni di definizione determinano o le traiettorie percorse dai singoli punti dello spazio nel moto rigido corrispondente; ovvero un sistema semplicemente infinito di superficie tali, che per effetto del moto stesso ogni punto dello spazio rimane sempre in una determinata tra queste. Così, per ciò che riguarda i gruppi intransitivi, il problema si riconduce ad uno dei due seguenti: 1°) data in una varietà qualunque a tre dimensioni una congruenza di linee, determinare le condizioni necessarie e sufficienti perchè esse siano le traiettorie percorse dai diversi punti della varietà in un moto rigido di questa; 2°) dato nella stessa varietà un sistema semplicemente infinito di superficie, riconoscere se in essa sono possibili dei moti rigidi, pei quali ogni suo punto non esca mai da una determinata superficie del sistema. Ho premessa la risoluzione di questi problemi particolari a quella del problema generale; ed il primo ho anzi risoluto per una varietà di quante si vogliano dimensioni.

Esaurito il caso dei gruppi intransitivi, che si presenta ripetutamente nello studio del problema generale, è poi facile risolvere quest'ultimo per ciò che riguarda i gruppi transitivi. I risultati, a cui si è condotti in questo caso, sono interessanti, in quanto si presentano come una naturale estensione del teorema notissimo, che riguarda la proprietà geometrica caratteristica degli spazî a tre dimensioni, che ammettono un gruppo continuo a sei parametri di movimenti rigidi. Tale estensione è fondata sopra una opportuna espressione della curvatura di Riemann calcolata in un punto qualunque di una varietà a tre dimensioni e per una superficie geodetica normale ad una direzione comunque data.

Nella Introduzione ho stabilito appunto la espressione, di cui si tratta, e ne ho dedotte alcune importanti conseguenze. Di più ho richiamati brevemente i concetti ed i risultati fondamentali contenuti nella mia Memoria: *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*, dei quali queste ricerche possono riguardarsi in gran parte come una applicazione. Mentre poi ho creduto di potermi dispensare dal ritornare sui metodi e sulle notazioni del *Calcolo differenziale assoluto* da me ripetutamente esposti in altri miei scritti, ho dati nella Introduzione alcuni nuovi teoremi relativi al calcolo stesso, che saranno invocati nel seguito di questo lavoro.

(1) Reale Accademia dei Lincei, Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, serie 5ª, vol. II, Seduta 6 giugno 1896.

INTRODUZIONE

1. Siano

$$ds^2 = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s \equiv \varphi$$

la espressione del quadrato dell'elemento lineare di uno spazio S qualunque ad n dimensioni; λ_r e $\lambda^{(r)}$ $(r = 1, 2, \dots n)$ gli elementi di due sistemi semplici reciproci rispetto alla forma φ (che si assume come fondamentale) tali che si abbia

$$\sum_1^n {}_r\, \lambda^{(r)} \lambda_r = 1. \tag{1}$$

Le equazioni

$$\frac{dx_r}{ds} = \lambda^{(r)}$$

definiscono nello spazio S una congruenza di linee, che chiameremo congruenza λ. Se poi n sistemi rispettivamente di elementi $\lambda_{1/r}, \lambda_{2/r}, \dots \lambda_{n/r}$ soddisfanno alle equazioni

$$\sum_1^n \lambda_h^{(r)} \lambda_{k/r} = \varepsilon_{hk} \quad (h, k = 1, 2, \dots n) \tag{I}$$

(indicandosi con ε_{hk} l'unità o lo zero, secondo che gli indici h e k sono identici o distinti), le congruenze $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono tali che in ogni punto dello spazio le linee di due qualunque di esse si tagliano sotto angolo retto; in altri termini esse costituiscono *un sistema n^{uplo} ortogonale.*

Si indichino con $\lambda_{h/rs}$ gli elementi del primo sistema derivato covariantemente secondo φ da quello di elementi $\lambda_{h/r}$, e si facciano le posizioni

$$\gamma_{hij} = \sum_1^n {}_{rs}\, \lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)} \lambda_{h/rs}, \tag{2}$$

ovvero

$$\lambda_{i/rs} = \sum_1^n {}_{hk}\, \gamma_{ihk} \lambda_{h/r} \lambda_{k/s}. \tag{2'}$$

Gli invarianti γ_{hij} sono legati fra di loro dalle relazioni

$$\gamma_{hij} + \gamma_{ihj} = 0$$

ed hanno i significati cinematici seguenti. Si consideri, come è sempre permesso, lo spazio S come immerso in uno spazio piano Σ dotato di un numero sufficiente m di dimensioni, e per ogni suo punto P si conducano in Σ le tangenti alle linee delle congruenze $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Indicando con (hik) una qualunque disposizione semplice a tre a tre degli indici $1, 2, \dots n$, si consideri lo spazio piano a tre dimensioni, cui appartengono le tangenti in P alle linee delle congruenze $\lambda_h, \lambda_i, \lambda_k$ e su di esso si proiettino le linee stesse. Il triedro costituito da queste tangenti, che indicheremo rispettivamente con $(h), (i)$ e (k), per uno spostamento infinitesimo del suo vertice lungo uno qualunque (j) dei suoi spigoli subisce una rotazione, di cui γ_{hij} è la componente secondo lo spigolo (k), sempre che il senso positivo delle rotazioni intorno a questo vada dallo spigolo (h) allo spigolo (i).

Data una congruenza qualunque λ, si ponga $\lambda_r = \lambda_{n|r}$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ altre $n-1$ congruenze formanti con essa un sistema n^{uplo} ortogonale. Le condizioni necessarie e sufficienti perchè le linee della congruenza λ siano geodetiche sono espresse dalle equazioni

$$\gamma_{nin} = 0 \quad (i = 1, 1, \dots n-1). \tag{3}$$

Se queste condizioni non sono soddisfatte, si ponga

$$\gamma^2 = \sum_1^{n-1}{}_i \gamma_{nin}^2$$

e, assunto per γ il suo valore positivo,

$$\gamma \lambda'_r = \sum_1^{n}{}_i \gamma_{nin} \lambda_{i|r}. \tag{4}$$

Le λ'_r soddisfacendo alla equazione (1), definiscono una congruenza λ'. Per ogni punto P di S chiamo *curvatura geodetica* della congruenza λ in quel punto un vettore condotto in Σ di lunghezza γ e la cui direzione coincida con quella della tangente in P alla linea della congruenza λ'.

Le condizioni necessarie e sufficienti perchè la congruenza λ sia normale sono invece rappresentate dalle equazioni

$$\gamma_{nhk} = \gamma_{nkh}, \tag{5}$$

in cui h e k assumono tutti i valori $1, 2, \dots, n-1$. Verificate queste condizioni, perchè le varietà ad $n-1$ dimensioni tagliate ortogonalmente dalla congruenza λ costituiscano un sistema isotermo è ancora necessario e sufficiente che, posto

$$\psi_r = \lambda_r \sum_1^{n-1}{}_i \gamma_{ini} + \sum_1^{n}{}_i \gamma_{nin} \lambda_{i|r}, \tag{6}$$

le ψ_r siano le derivate di una funzione ψ rispetto alle x_r.

Se le n congruenze $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ fin qui considerate godono della proprietà rappresentata dalle equazioni

$$\gamma_{nhk} + \gamma_{nkh} = 0,$$

in cui, essendo $h \neq k$, h e k assumono del resto tutti i valori $1, 2, \dots n-1$, si dice che le congruenze $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{n-1}$ costituiscono un *sistema canonico ortogonale* rispetto alla congruenza λ e si ha il teorema:

Per ogni congruenza λ è sempre possibile in uno o più modi determinarne altre $n-1$, che costituiscano rispetto ad essa un sistema ortogonale canonico. Se lo spazio S è piano e la congruenza λ è normale ad un sistema di superficie σ, le congruenze, che appartengono ad un sistema ortogonale canonico rispetto a λ sono tutte e soltanto quelle, che sono costituite dalle linee di curvatura delle superficie σ.

2. Si supponga che una congruenza normale λ risulti di linee geodetiche. Saranno insieme soddisfatte le equazioni (3) e le (5), dalle quali è facile concludere che le λ_{rs} sono simmetriche, cioè che le λ_r sono le derivate di una funzione rispetto alle x_r. Ne segue che le λ_{rs} si possono mettere, in uno o più modi, sotto la forma canonica

$$\lambda_{rs}=\sum_{1}^{n}{}_h\,\gamma_h\,\lambda'_{h|r}\,\lambda'_{h|s}\,,$$

$\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ essendo numeri reali e $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_n$ n congruenze pure reali e costituenti un sistema ortogonale. Le identità

$$\sum{}_r\,\lambda^{(r)}\,\lambda_{rs}=0\,,$$

che seguono dalle (1), assumono la forma

$$\sum_{1}^{n}{}_h\,\lambda'_{h|s}\,.\,\gamma_h\sum_{1}^{n}{}_r\,\lambda^{(r)}\,\lambda'_{h|r}=0\quad(h=1\,,2\,,\ldots n),$$

ed equivalgono alle

$$\gamma_h\,.\sum{}_r\,\lambda^{(r)}\,\lambda'_{h|r}=0\quad(h=1\,,2\,,\ldots n).$$

Poichè il determinante $(\lambda'_{1|1}\,,\lambda'_{2|2}\,,\ldots\lambda'_{n|n})$ è eguale a $\sqrt{a}$, (a essendo il discriminante della forma positiva φ) non possono essere simultaneamente soddisfatte tutte le equazioni

$$\sum{}_r\,\lambda^{(r)}\,\lambda'_{h|r}=0\,,\tag{7}$$

e però alcune delle γ debbono essere nulle. Supponiamo che $\gamma_{i+1}, \gamma_{i+2}, \ldots, \gamma_n$ siano eguali a 0, e $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_i$ diverse da 0. Le equazioni (7) saranno soddisfatte per $h=1\,,2\,,\ldots i$ e le congruenze $\lambda'_{i+1}, \lambda'_{i+2}, \ldots \lambda'_n$ potranno scegliersi comunque, purchè ortogonali fra di loro ed alle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_i$; talchè si potrà prendere la congruenza λ come congruenza λ'_n. Concludiamo che:

Se una congruenza definita dalle equazioni

$$\frac{dx_r}{ds}=\lambda^{(r)}$$

è normale e risulta di linee geodetiche, gli elementi λ_{rs} del primo sistema derivato *covariantemente secondo* φ *da quello di elementi* λ_r *possono esprimersi sotto la forma*

$$\lambda_{rs} = \sum_1^{n-1}{}_h \gamma_h \lambda_{h|r} \lambda_{h|s} ,$$

le congruenze $\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_{n-1}$ *formando colla congruenza* λ *un sistema* n^{uplo} *ortogonale.*

3. Siano ancora $\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_n$ n congruenze di linee costituenti un sistema n^{uplo} ortogonale qualunque, si mantengano le notazioni stabilite sopra, e si ponga di più

$$\text{(8)} \qquad \gamma_{hi,kl} = \frac{d\gamma_{hik}}{ds_l} - \frac{d\gamma_{hil}}{ds_k} + \sum_j \gamma_{hij} (\gamma_{jkl} - \gamma_{jlk}) + \sum_j (\gamma_{jhl} \gamma_{jik} - \gamma_{jhk} \gamma_{jil}) ,$$

designando in generale con ds_i l'elemento d'arco della linea della congruenza λ_i passante pel punto $(x_1 , x_2 , \dots x_n)$ qualunque. Si avranno le identità

$$\gamma_{hi,kl} + \gamma_{ih,kl} = 0 \ , \ \gamma_{hi,kl} + \gamma_{hi,lk} = 0 .$$

Di più tra gli invarianti $\gamma_{hi,kl}$ ed i coefficienti $a_{qr,st}$ della nota forma covariante quadrilineare, il cui annullarsi rappresenta la condizione necessaria e sufficiente perchè lo spazio S sia piano, hanno luogo le relazioni

$$\gamma_{hi,kl} = \sum_1^n{}_{qrst} \lambda_h^{(q)} \lambda_i^{(r)} \lambda_k^{(s)} \lambda_l^{(t)} a_{qr,st} ,$$

dalle quali e dalle note proprietà dei coefficienti $a_{qr,st}$ seguono pure le

$$\text{(9)} \qquad \begin{gathered} \gamma_{hi,kl} = \gamma_{kl,hi} \\ \gamma_{hi,kl} + \gamma_{hl,ik} + \gamma_{hk,li} = 0 . \end{gathered}$$

Nel caso di $n = 3$ è opportuno considerare come equivalenti gli indici congrui rispetto al modulo 3. Con tale convenzione, posto

$$\text{(10)} \qquad a \, . \, \alpha^{(rs)} = a_{r+1\, r+2,\, s+1\, s+2} ,$$

$$\text{(11)} \qquad \gamma_{hk} = \gamma_{h+1\, h+2,\, k+1\, k+2} ,$$

il sistema di elementi $\alpha^{(rs)}$ è controvariante, e tra questi e gli invarianti γ_{hk} hanno luogo le relazioni

$$\text{(12)} \qquad \gamma_{hk} = \sum_{rs} \alpha^{(rs)} \lambda_{h|r} \lambda_{k|s} ,$$

da cui seguono le

$$\gamma_{hk} = \gamma_{kh} .$$

4. Si abbiano nello spazio S due congruenze di linee μ e ν e si indichi con R la curvatura totale della superficie geodetica condotta per un punto qualunque P di S tangenzialmente alle linee di quelle due congruenze, con ϑ l'angolo, sotto cui queste si incontrano. La espressione data per R da RIEMANN colle nostre notazioni assume la forma

$$\operatorname{sen}^2 \vartheta \,.\, \mathrm{R} = \sum\nolimits_{rstu} a_{rs,tu} (\mu^{(r)} \nu^{(s)} - \mu^{(s)} \nu^{(r)}) (\mu^{(t)} \nu^{(u)} - \mu^{(u)} \nu^{(t)}) \,.$$

Se, supposto che lo spazio S sia a tre dimensioni, si introducono i coefficienti $\alpha^{(rs)}$ in vece degli $a_{rs,tu}$ e si indica con λ la congruenza normale alle due μ e ν, la espressione sopra riportata per R equivale alla seguente

$$\mathrm{R} = \sum\nolimits_{rs} \alpha^{(rs)} \lambda_r \lambda_s \,. \tag{13}$$

Potremo perciò dire che questa espressione di R rappresenta la *curvatura riemanniana* di S nella direzione λ, chiamando così quella della tangente in un punto qualunque P alla linea della congruenza λ passante per questo punto. Confrontando poi la espressione stessa con quelle date dalle (12) per le γ_{hh}, vediamo che questi invarianti rappresentano le curvature riemanniane dello spazio S nelle direzioni λ_h.

Poichè il sistema di elementi α_{rs} è simmetrico, per teoremi noti, esistono nello spazio S almeno tre congruenze ortogonali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, per le quali risulta

$$\sum\nolimits_{rs} \alpha_{rs} \lambda^{(r)}_{h+1} \lambda^{(s)}_{h+2} = 0 \quad (h = 1, 2, 3) \,.$$

Ogni congruenza appartenente ad un sistema triplo dotato di questa proprietà si dirà *congruenza principale*, e per ogni punto P di S si diranno *direzioni principali* quelle delle tangenti in P alle linee delle congruenze principali, e *curvature riemanniane principali* quelle corrispondenti alle direzioni principali. Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono tre congruenze principali ortogonali fra di loro ed $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ le corrispondenti curvature riemanniane principali, si hanno per le α_{rs} le espressioni

$$\alpha_{rs} = \sum_{1}^{3}{}_h \, \omega_h \lambda_{h/r} \lambda_{h/s} \,, \tag{14}$$

per le quali la (13) assume la forma

$$\mathrm{R} = \sum_{1}^{3}{}_h \, \omega_h \cos^2 \alpha_h \,,$$

indicando con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gli angoli, sotto cui in un punto qualunque di S la linea della congruenza λ incontra rispettivamente quelle delle congruenze principali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Supponga si ora che lo spazio a tre dimensioni S fin qui considerato sia contenuto in uno spazio piano a quattro dimensioni Σ; e lo si riguardi appunto come una superficie appartenente a questo spazio. Se

$$\psi = \sum\nolimits_{rs} b_{rs} \, dx_r \, dx_s$$

ne è la seconda forma fondamentale, si hanno le relazioni

$$(15) \qquad a \, . \, \alpha^{(rs)} = b_{r+1\,s+1}\, b_{r+2\,s+2} - b_{r+1\,s+2}\, b_{r+2\,s+1}\,.$$

Indicando poi con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tre congruenze ortogonali di linee di curvatura, con $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ le inverse dei corrispondenti raggi principali di curvatura si hanno le identità

$$(16) \qquad b_{rs} = \sum_i \varrho_i\, \lambda_{i/r}\, \lambda_{i/s}\,.$$

Nel caso di $n = 3$ dalle (I) o dalle

$$a_{rs} = \sum_1^3{}_h\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{h/s}\,,$$

che ad esse equivalgono, si ricava facilmente che i due determinanti di elementi $\lambda_{h/r}$ e $\lambda_h^{(r)}$ sono rispettivamente eguali a $\sqrt{a}$ e ad $1 : \sqrt{a}$ e tali di più che il complemento algebrico di ciascun elemento dell' uno diviso pel determinante, a cui esso appartiene, è eguale all' elemento corrispondente dell' altro. Tenendo conto di questa osservazione si sostituiscano nelle (15) alle b_{rs} le espressioni date dalle (16), e si perverrà alle equazioni

$$\alpha^{(rs)} = \sum_1^3{}_i\, \varrho_{i+1}\, \varrho_{i+2}\, \lambda_i^{(r)}\, \lambda_i^{(s)}\,.$$

A queste equivalgono le reciproche

$$a_{rs} = \sum_1^3{}_i\, \varrho_{i+1}\, \varrho_{i+2}\, \lambda_{i/r}\, \lambda_{i/s}\,,$$

le quali confrontate colle (16) ci dicono che:

Se una superficie a tre dimensioni è contenuta in uno spazio piano a quattro dimensioni, le congruenze principali coincidono con quelle delle linee di curvatura, e la curvatura riemanniana in una qualunque direzione principale colla inversa del prodotto dei raggi principali di curvatura corrispondenti a due direzioni formanti con essa una terna ortogonale.

5. Si convenga che i simboli $\varepsilon_{r_1 r_2 \ldots r_n}$, in cui ciascuno degli indici può assumere tutti i valori $1, 2, 3, \ldots n$, rappresentino lo zero, se gli indici stessi non sono tutti distinti, e che nel caso opposto essi rappresentino il numero $(-1)^r . \sqrt{a}$, essendo r un numero pari o dispari assieme alla classe della sostituzione

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & \ldots & r_n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

mentre il segno di $\sqrt{a}$ fissato arbitrariamente per un certo sistema di variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ per ogni altro sistema $y_1, y_2, \ldots y_n$ cambia o non cambia, secondo che l' iacobiano delle variabili y rispetto alle x è negativo o positivo. Si hanno i teoremi seguenti, la cui dimostrazione dipende da facili verifiche:

1°. Il sistema di elementi $\varepsilon_{r_1 r_2 \ldots r_n}$ è covariante.

2°. Il sistema derivato da esso covariantemente secondo la forma fondamentale è identicamente nullo.

3°. Gli elementi $\varepsilon^{(r_1 r_2 \ldots r_n)}$ del suo sistema reciproco sono eguali a $(-1)^r : \sqrt{a}$, ovvero a *zero*, secondo che gli indici $r_1, r_2, \ldots r_n$ sono o non sono tutti distinti.

I.

Equazioni generali del problema per una varietà qualunque.

6. Sia ancora

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s = \varphi$$

la espressione del quadrato dell'elemento lineare di uno spazio qualunque ad n dimensioni in coordinate generali, e si supponga che per un certo movimento infinitesimo ogni suo punto di coordinate $x_1, x_2, \dots x_n$ assuma la posizione determinata dalle coordinate $x_1 + \xi^{(1)}, x_2 + \xi^{(2)}, \dots x_n + \xi^{(n)}$. Le $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots \xi^{(n)}$ saranno n funzioni infinitesime di $x_1, x_2, \dots x_n$ costituenti un sistema controvariante; ed il movimento, di cui si tratta, si dirà *rigido* se per esso la distanza di due punti qualunque dello spazio rimane inalterata; o, in altri termini, se la forma φ non si altera per effetto della trasformazione infinitesima

$$X(f) = \sum_{1}^{n} \xi^{(r)} \frac{df}{dx_r}.$$

Si dirà in questo caso che la forma φ ammette la trasformazione infinitesima $X(f)$; e le equazioni, cui debbono soddisfare $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots \xi^{(n)}$ perchè il corrispondente movimento sia rigido, si otterranno eguagliando identicamente a zero la variazione $\delta\varphi$, che φ subisce per effetto di detta trasformazione.

Ora si ha

$$\delta\varphi = \sum_{1}^{n}{}_{prs}\, dx_r\, dx_s \left(\frac{da_{rs}}{dx_p}\xi^{(p)} + 2a_{rp}\frac{d\xi^{(p)}}{dx_s}\right)$$

e, ponendo

$$\xi^{(p)} = \sum_{1}^{n}{}_{q}\, a^{(pq)}\, \xi_q$$

$$2a_{rs,p} = \frac{da_{rp}}{dx_s} + \frac{da_{sp}}{dx_r} - \frac{da_{rs}}{dx_p},$$

se ne trae

$$\delta\varphi = 2\sum_{1}^{n}{}_{rs}\, dx_r\, dx_s \left(\frac{d\xi_r}{dx_s} - \sum_{1}^{n}{}_{p}\, \xi^{(p)}\, a_{rs,p}\right),$$

ovvero

$$\delta\varphi = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, (\xi_{rs} + \xi_{sr})\, dx_r\, dx_s.$$

Perchè dunque la forma φ ammetta la sostituzione infinitesima $X(f)$ è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le equazioni

$$\xi_{rs} + \xi_{sr} = 0\,, \tag{A}$$

che sono le note equazioni di KILLING scritte colle notazioni del Calcolo Differenziale Assoluto, e che ho creduto di stabilire qui di nuovo con metodo diretto in causa della loro importanza fondamentale.

Se si indica con λ una qualunque congruenza di linee tracciate nello spazio di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$, le stesse equazioni rappresentano le condizioni necessarie e sufficienti perchè la equazione

$$\sum_1^n {}_r \xi^{(r)} \lambda_r = \text{cost}$$

sia un integrale primo per la equazione delle geodetiche nello spazio stesso. Si perviene così direttamente al noto teorema, secondo il quale in uno spazio qualunque ad ogni integrale primo della equazione delle geodetiche corrisponde una trasformazione infinitesima ammessa dall'elemento lineare dello spazio stesso e reciprocamente. Da questo teorema scende poi il seguente corollario:

Le varietà ad $n-1$ dimensioni di un sistema ∞^1 contenuto in uno spazio ad n dimensioni sono fra di loro parallele, se l'elemento lineare di quest' ultimo ammette $n-1$ trasformazioni infinitesime indipendenti, che lasciano inalterata ogni varietà del sistema.

In vero, se

$$X_h(f) = \sum_1^n \xi_h^{(r)} \frac{df}{dx_r} \quad (h = 1, 2, \dots n-1)$$

sono le trasformazioni infinitesime, di cui si tratta, e λ è la congruenza delle traiettorie ortogonali del sistema, varranno le equazioni

$$\sum_1^n {}_r \xi_h^{(r)} \lambda_r = 0\,,$$

le quali ci dicono appunto che le traiettorie stesse sono geodetiche.

7. Si ponga ora

$$\xi_r = e^{-\psi} \lambda_r\,,$$

indicando con λ la congruenza delle traiettorie di un moto rigido nello spazio di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$. Le equazioni fondamentali (A) assumeranno la forma

$$\psi_s \lambda_r + \psi_r \lambda_s = \lambda_{rs} + \lambda_{sr}\,.$$

Poniamo ancora $\lambda_r = \lambda_{n/r}$ e, indicando con $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{n-1}$ $n-1$ congruenze, che colla λ_n formino un sistema n^{uplo} ortogonale, richiamiamo le posizioni (2) della Introduzione. Le (A) equivarranno alle

$$\psi_r \lambda_s + \psi_s \lambda_r = \sum_1^{n-1} {}_{ij} \gamma_{nij} (\lambda_{i/r} \lambda_{j/s} + \lambda_{i/s} \lambda_{j/r})\,.$$

Se queste si moltiplicano per $\lambda^{(r)} \lambda^{(s)}$ e si sommano tutte quelle, che se ne ottengono dando ad r e ad s tutti i valori da 1 fino ad n, si ha la

$$\sum_r \psi^{(r)} \lambda_r = 0 .$$

Tenendo poi conto di questa e sommando analogamente dopo avere moltiplicato le precedenti per $\lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)}$ (con h o k designando uno qualunque degli indici $1, 2, \dots n-1$) si ottengono le

$$(\mathrm{A}_1) \qquad \gamma_{nhk} + \gamma_{nkh} = 0 \quad (h, k = 1, 2, \dots n-1) .$$

In fine moltiplicando sempre le stesse equazioni per $\lambda^{(s)}$ e sommando dopo avere dato all' indice s tutti i valori da 1 fino ad n si ottengono le

$$(\mathrm{A}_2) \qquad \psi_r = \sum_1^n {}_i \, \gamma_{nin} \lambda_{i/r} ;$$

ed è facile riconoscere che le (A_1) e le (A_2) insieme equivalgono ancora alle (A). Le (A_1) si scindono in due gruppi corrispondentemente ai casi di $h = k$ e di $h \neq k$, e per quelle del primo gruppo le espressioni delle ψ_r date dalle (A_2) coincidono con quelle date dalle (6) della Introduzione. Ricordando però quanto fu detto nel § 1 si ha il seguente teorema:

Data in uno spazio qualunque ad n dimensioni una congruenza di linee, perchè esista un moto rigido, pel quale i punti di S *percorrano queste linee è necessario e basta*

a) *Che $n-1$ congruenze di linee costituenti colla data un sistema n^{uplo} ortogonale qualunque costituiscano per la congruenza stessa un sistema ortogonale canonico.*

b) *Che ogni congruenza normale alla data sia geodetica o tale che la sua curvatura geodetica risulti in ogni punto normale alla linea di quest' ultima passante pel punto stesso.*

c) *Che la congruenza data risulti delle traiettorie ortogonali ad un sistema isotermo di varietà ad $n-1$ dimensioni.*

Per $n = 2$ la condizione (a) è identicamente soddisfatta; la (b) non può essere soddisfatta altrimenti che risultando la congruenza data di linee parallele, poichè, se le traiettorie ortogonali non sono geodetiche, la loro curvatura geodetica è necessariamente tangente alle linee della congruenza data. Tenendo conto anche della condizione (c), si ha dunque il teorema notissimo relativo alle superficie, sulle quali possono aver luogo movimenti rigidi.

II.

Equazioni generali del problema per uno spazio a tre dimensioni.

8. Veniamo ora a considerare il caso degli spazi a tre dimensioni, pel quale conserveremo le notazioni stabilite nel caso generale. Introducendo il sistema triplo covariante di elementi ε_{rst}, del quale è stata fatta parola nella Introduzione, ed un sistema semplice controvariante, i cui elementi $\mu^{(r)}$ si riguarderanno come indeterminati, le equazioni fondamentali (A) potranno in questo caso mettersi sotto la forma

$$(A_0) \qquad \xi_{rs} = \sum_{1}^{3}{}_t\, \varepsilon_{rst}\, \mu^{(t)}.$$

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tre congruenze costituenti un sistema triplo ortogonale e si facciano le posizioni

$$(1) \qquad \eta_i = \sum_{1}^{3}{}_r\, \xi^{(r)} \lambda_{i|r}\ ,\quad \vartheta_i = \sum_{1}^{3}{}_r\, \mu^{(r)} \lambda_{i|r} \quad (i = 1, 2, 3),$$

che equivalgono alle

$$(1') \qquad \xi_r = \sum_{1}^{3}{}_i\, \eta_i \lambda_{i|r}\ ,\quad \mu_r = \sum_{1}^{3}{}_i\, \vartheta_i \lambda_{i|r} \quad (r = 1, 2, 3).$$

Dalle (1) per derivazione covariante secondo la forma fondamentale φ si traggono le

$$\eta_{i|s} = \sum_{1}^{3}{}_r\, \lambda_i^{(r)} \xi_{rs} + \sum_{1}^{3} \xi_i^{(r)} \lambda_{i|rs}\,,$$

e queste, per le (1), per le (A_0) e per le (2') della Introduzione, si trasformano nelle

$$(2) \qquad \eta_{i|s} = \sum_{1}^{3}{}_j\, \vartheta_j \sum{}_{qr} \lambda_j^{(q)} \lambda_i^{(r)} \varepsilon_{rsq} + \sum_{1}^{3}{}_{hk}\, \gamma_{ihk}\, \eta_h\, \lambda_{k|s}\,.$$

Se si sviluppa la prima sommatoria e si tien conto delle relazioni, che passano tra gli elementi $\lambda_{h|r}$ e $\lambda_h^{(r)}$, che sono già state indicate nella Introduzione, le (2) si riducono facilmente alla forma

$$(A') \qquad \eta_{i|s} = \vartheta_{i+2}\, \lambda_{i+1|s} - \vartheta_{i+1}\, \lambda_{i+2|s} + \sum_{1}^{3}{}_{hk}\, \gamma_{ihk}\, \eta_h\, \lambda_{k|s}\,;$$

o alla equivalente, che segue, nella quale con ds_1, ds_2 e ds_3 si designeranno rispettivamente gli elementi d'arco delle linee appartenenti alle congruenze $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$(A'_1) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\eta_i}{ds_i} &= \sum_{1}^{3}{}_h\, \gamma_{ihi}\, \eta_h \\ \frac{d\eta_i}{ds_{i+1}} &= \sum_{1}^{3}{}_h\, \gamma_{ihi+1}\, \eta_h + \vartheta_{i+2} \\ \frac{d\eta_i}{ds_{i+2}} &= \sum_{1}^{3}{}_h\, \gamma_{ihi+2}\, \eta_h - \vartheta_{i+1}\,. \end{aligned}\right.$$

Le (A′) od (A′$_1$) tengono il posto delle (A); e dobbiamo stabilire le equazioni, cui debbono soddisfare le indeterminate $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ sostituite colle (1) alle $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \mu^{(3)}$, perchè le $\eta_{i/s}$ date dalle (A′) siano effettivamente le derivate di tre funzioni η_1, η_2, η_3 rispetto ad x_1, x_2, x_3.

9. Deriviamo perciò le (A′) ed osserviamo che le

$$\eta_{i/st} = \eta_{i/ts} \quad (i, s, t = 1, 2, \ldots n)$$

equivalgono alle

$$\sum_1^n{}_{st} \lambda_h^{(s)} \lambda_k^{(t)} \eta_{i/st} = \sum{}_{st} \lambda_h^{(t)} \lambda_k^{(s)} \eta_{i/st} \quad (i, h, k = 1, 2, \ldots n).$$

Le equazioni, che si tratta di stabilire, si presentano perciò dapprima sotto la forma

$$\varepsilon_{ki+1} \frac{d\vartheta_{i+2}}{ds_h} - \varepsilon_{ki+2} \frac{d\vartheta_{i+1}}{ds_h} + \varepsilon_{hi+2} \frac{d\vartheta_{i+1}}{ds_k} - \varepsilon_{hi+1} \frac{d\vartheta_{i+2}}{ds_k} =$$

$$= \sum{}_{tj} \eta_t \left\{ \varepsilon_{jk} \frac{d\gamma_{itj}}{ds_h} - \varepsilon_{jh} \frac{d\gamma_{itj}}{ds_k} + \gamma_{itj}(\gamma_{jkh} - \gamma_{jhk}) \right\} + \vartheta_{i+1}(\gamma_{i+2kh} - \gamma_{i+2hk}) +$$

$$+ \vartheta_{i+2}(\gamma_{i+1hk} - \gamma_{i+1kh}) + \sum{}_{jt} \gamma_{itj} \left(\varepsilon_{kj} \frac{d\eta_{jt}}{ds_h} - \mathrm{E}_{hj} \frac{d\eta_{jt}}{ds_k} \right),$$

essendo $\varepsilon_{hh} = 1$, $\varepsilon_{hh+1} = \varepsilon_{hh+2} = 0$. Queste equazioni si semplificano grandemente se si introducono i simboli $\gamma_{hi,kl}$ e per le derivate delle η si pongono le espressioni date dalle (A′$_1$). Ponendo dapprima $h = i+1$, $k = i+2$ si ottengono così le

$$\frac{d\vartheta_{i+1}}{ds_{i+1}} + \frac{d\vartheta_{i+2}}{ds_{i+2}} = \sum_1^3{}_h \eta_h \gamma_{hi,i+1\,i+2} - (\gamma_{i\,i+1\,i+1} + \gamma_{i\,i+2\,i+2})\vartheta_i - \gamma_{i+1\,i+2\,i+2}\vartheta_{i+1} - \gamma_{i+2\,i+1\,i+1}\vartheta_{i+2},$$

le quali equivalgono, come è facile riconoscere, alle

$$\frac{d\vartheta_i}{ds_i} = \sum_1^3{}_h (\gamma_{ih,i+1\,i+2}\,\eta_h + \gamma_{ihi}\,\vartheta_h).$$

Ponendovi in vece $h = i+2$, $k = i$; ovvero $h = i$, $k = i+1$ si ottengono rispettivamente le

$$\frac{d\vartheta_{i+1}}{ds_i} = \sum{}_h \gamma_{ih,i+2i}\,\eta_h + \sum{}_h \gamma_{i+1hi}\,\vartheta_h$$

$$\frac{d\vartheta_{i+2}}{ds_i} = \sum{}_h \gamma_{ih,ii+1}\,\eta_h + \sum{}_h \gamma_{i+2hi}\,\vartheta_h.$$

In conclusione la derivazione delle (A′) e la successiva eliminazione delle derivate prime e seconde di η_1, η_2, η_3 conduce alle equazioni

$$\frac{d\vartheta_i}{ds_j} = \sum_1^3{}_h \gamma_{jh,i+1\,i+2}\,\eta_h + \sum_1^3{}_h \gamma_{ihj}\,\vartheta_h \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

ovvero, sott'altra forma, alle

$$\vartheta_{i/r} = \sum_1^3{}_j \lambda_{j/r} \sum_1^3{}_h (\gamma_{jh,i+1\,i+2}\,\eta_h + \gamma_{ihj}\,\vartheta_h);$$

o anche, per le (1) della Introduzione,

(B) $$\vartheta_{i/r} = \sum_1^3{}_j \lambda_{j/r} \left(\sum_1^3{}_h \gamma_{ihj}\,\vartheta_h + \gamma_{ij+2}\,\eta_{j+1} - \gamma_{ij+1}\,\eta_{j+2} \right) \quad (i, r = 1, 2, 3).$$

Queste debbono essere soddisfatte assieme alle (A′).

III.

Dei gruppi continui non transitivi di movimenti.

10. Prima di procedere oltre nella ricerca generale intrapresa è opportuno esaurire il caso speciale, in cui il gruppo di movimenti continui ammessi dallo spazio, che si considera, è intransitivo. Ciò può avvenire in due modi, secondo che ogni punto dello spazio è costretto a rimanere sopra una determinata linea, ovvero sopra una determinata superficie. Nel primo caso la nostra Analisi ci condurrà a determinare le traiettorie del movimento, ed il problema potrà riguardarsi come risoluto per un teorema generale del § I. Nel secondo caso l'Analisi stessa determinerà in vece un sistema semplicemente infinito di superficie, ciascuna delle quali risulta per ogni movimento rigido dello spazio trasformata in sè stessa. Per risolvere in questo secondo caso il problema generale propostoci dobbiamo quindi risolvere e risolveremo ora il seguente problema:

Dato un sistema ∞^1, S, *di superficie in uno spazio qualunque a tre dimensioni, riconoscere se questo ammette un gruppo continuo di movimenti rigidi, pei quali ogni superficie del sistema risulti trasformata in sè stessa.*

Si indichi con λ, o con λ_3, la congruenza delle traiettorie ortogonali alle superficie del sistema S, con λ_1 e λ_2 altre due congruenze, che con essa formino un sistema triplo ortogonale. Per il dato del problema dovrà essere

$$(1) \qquad \sum_r \lambda_3^{(r)} \xi_r = \eta_3 = 0$$

e le equazioni (A'_i), per $i = 3$, assumeranno la forma

$$\sum_h \gamma_{3h3}\, \eta_h = 0$$

$$(2) \qquad \vartheta_1 = \sum_h \gamma_{3h2}\, \eta_h\,, \quad \vartheta_2 = -\sum_h \gamma_{3h1}\, \eta_h\,.$$

Se la prima di queste non è identicamente soddisfatta, essa determina il rapporto $\eta_1 : \eta_2$ e, ricordando la (1) del § II, anche i rapporti delle ξ e quindi le traiettorie del movimento continuo, che costituisce così un gruppo a un solo parametro. Lasciando però da parte questo caso già considerato, dovranno essere soddisfatte le condizioni

$$(3) \qquad \gamma_{313} = \gamma_{323} = 0\,,$$

le quali ci dicono che la congruenza λ_3 è geodetica. Abbiamo dunque il teorema:

Dato un sistema ∞^1, S, *di superficie in uno spazio qualunque a tre dimensioni, perchè questo ammetta un gruppo continuo a più di un parametro di movimenti* *rigidi, pei quali ogni superficie del sistema* S *risulti trasformata in sè stessa, è necessario che le superficie di* S *siano fra di loro parallele.*

11. Supposte soddisfatte le (3), la congruenza λ_3 è insieme normale e geodetica e però (n.° 2) le congruenze λ_1 e λ_2 si possono scegliere in modo che le espressioni delle λ_{rs} assumano la forma

$$\lambda_{rs} = \sum_1^2{}_h \gamma_h \lambda_{h/r} \lambda_{h/s}.$$

Il confronto di queste colle (2) della Introduzione ci dà le identità

$$\gamma_{312} = \gamma_{321} = 0 \tag{4}$$

$$\gamma_{311} = \gamma_1, \quad \gamma_{322} = \gamma_2, \tag{5}$$

per le quali le (2) assumono la forma

$$\vartheta_1 = \gamma_2 \eta_2, \quad \vartheta_2 = -\gamma_1 \eta_1. \tag{α}$$

Per queste e per la (1) rimangono incognite le sole funzioni η_1, η_2 e ϑ_3, delle quali le (A′) e le (B′) ci dànno le derivate prime espresse per le funzioni stesse e per le variabili indipendenti. Si può quindi asserire che

Il gruppo continuo dei movimenti rigidi, che trasformano in sè stessa ogni superficie di un sistema ∞^1, *è al più a tre parametri.*

12. Dobbiamo ora sostituire le espressioni di ϑ_1 e ϑ_2 date dalle (α) nelle equazioni (B) e in quelle tra le (A′$_1$) che corrispondono ai valori 1 e 2 dell'indice i, e ciò avendo sempre presente la (1). Nel calcolare dalle (α) le espressioni delle $\frac{d\vartheta_1}{ds_i}$ e $\frac{d\vartheta_2}{ds_i}$ da confrontare con quelle date dalle (B) giova poi avere presente la identità

$$\sum_1^3{}_h \eta_h \frac{d\psi}{ds_h} = \sum_1^3{}_r \xi^{(r)} \frac{d\psi}{dx_r}$$ [1].

Perveniamo così alle equazioni

$$(\gamma_2 - \gamma_1)\left(\sum_1^2{}_h \gamma_{12h} \eta_h + \vartheta\right) = 0 \tag{β}$$

$$\sum_1^3{}_r \xi^{(r)} \frac{d\gamma_i}{dx_r} = 0, \tag{β'}$$

nelle quali, come si farà in seguito, è stato scritto ϑ in vece di ϑ_3.

[1] Per dimostrare questa identità basta osservare che è

$$\frac{d\psi}{ds_h} = \sum_1^3{}_r \lambda_h^{(r)} \frac{d\psi}{dx_r} = \sum_1^3{}_{rs} a^{(rs)} \frac{d\psi}{dx_r} \lambda_{h/s},$$

$$\sum_1^3{}_h \eta_h \frac{d\psi}{ds_h} = \sum_1^3{}_p \xi^{(p)} \sum_1^3{}_r \frac{d\psi}{dx_r} \sum_1^3{}_s a^{(rs)} a_{ps},$$

dove ψ rappresenta una funzione qualunque.

Ricordiamo ora dalla Introduzione che la congruenza λ essendo insieme normale e geodetica, le λ_r sono le derivate di una funzione λ rispetto alle x_r, talchè la (1) equivale alla

$$\sum_1^3{}_r\, \xi^{(r)} \frac{d\lambda}{dx_r} = 0. \tag{6}$$

Per conseguenza affinchè le (β) e (β') non introducano alcuna nuova nuova relazione tra le funzioni incognite è necessario e basta: 1°) che sia $\gamma_2 = \gamma_1$; 2°) che il valore comune di γ_1 e γ_2 sia funzione soltanto di λ. Poniamo

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma, \tag{7}$$

e calcoliamo le espressioni $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{22}$ definite dalle (8) ed (11) della Introduzione.

Avendo presenti le (3), (4), (5) e (6) troveremo

$$\gamma_{12} = 0, \quad \gamma_{11} = \gamma_{22} = -\gamma^2 - \frac{d\gamma}{d\lambda}. \tag{8}$$

La prima di queste ci dice che le congruenze λ_1 e λ_2 si possono scegliere comunque purchè normali fra di loro ed alla congruenza λ. Potremo scegliere la λ_1 in modo da soddisfare alle equazioni

$$\sum_1^3{}_r\, \lambda_1^{(r)} \lambda_r = 0$$

$$\sum_1^3{}_r\, \lambda_1^{(r)} \sum_1^3{}_s\, \lambda^{(s)} \alpha_{rs} = 0,$$

e risulterà

$$\gamma_{13} = 0. \tag{9}$$

Le equazioni (A'_1) corrispondenti ai valori 1 e 2 dell'indice i, e le (B) corrispondenti al valore 3 dello stesso indice assumono poi la forma

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} \eta_{1|r} = \sum_1^2{}_i \sum_1^3{}_j\, \gamma_{1ij}\, \eta_i\, \lambda_{j|r} + \vartheta \lambda_{2|r} + \gamma \eta_1 \lambda_r \\ \eta_{2|r} = \sum_1^2{}_i \sum_1^3{}_j\, \gamma_{2ij}\, \eta_i\, \lambda_{j|r} - \vartheta \lambda_{1|r} + \gamma \eta_2 \lambda_r \end{cases}$$

$$\text{(D)} \quad \vartheta_r = (\gamma^2 + \gamma_{33})(\eta_2 \lambda_{1|r} - \eta_1 \lambda_{2|r}) + \gamma_{23}\, \eta_1 \lambda_r;$$

e perchè il gruppo di movimenti, di cui ci occupiamo, sia a tre parametri, sarà ancora necessario e sufficiente che il sistema di equazioni, che comprende le (C) e le (D) sia completo; per il che poi si richiede soltanto che la derivazione delle (D) e la successiva eliminazione delle derivate seconde di ϑ non conduca ad alcuna nuova equazione, o, in altri termini, che le equazioni

$$\sum_1^3{}_{rs}\, \lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)} \vartheta_{rs} = \sum_1^3{}_{rs}\, \lambda_j^{(r)} \lambda_i^{(s)} \vartheta_{rs}$$

divengano identità, tenuto conto delle (C). Posto

$$\varrho = \gamma^2 + \gamma_{33},$$

e ricordando che, per essere le superficie λ parallele, è $d\lambda = ds_3$, le equazioni, di cui si tratta, assumono la forma

$$(10) \qquad \sum_1^3 {}_r \xi^{(r)} \frac{d\varrho}{dx_r} = 0$$

$$(11) \qquad \eta_1 \frac{d\gamma_{32}}{ds_1} = \eta_2 \left(\gamma_{32}\gamma_{211} + 2\gamma\varrho + \frac{d\varrho}{d\lambda} \right)$$

$$(\mathrm{E}) \qquad \gamma_{32} \, . \, \vartheta = - \eta_1 \left(\frac{d\gamma_{32}}{ds_2} + \frac{d\varrho}{d\lambda} + 2\varrho\gamma \right) - \gamma_{32}\gamma_{122}\eta_2 \, .$$

Perchè poi queste non stabiliscano alcuna nuova relazione tra le funzioni incognite si richiede: 1°) che ϱ sia una funzione della sola λ, che soddisfi alla equazione $\frac{d \log \varrho}{d\lambda} = -\gamma$; 2°) che sia

$$(12) \qquad \gamma_{32} = 0 \, .$$

Avendo ora presenti assieme a questa le (7), (8) e (9), concludiamo che vale il teorema seguente:

Sia S *un sistema* ∞^1 *di superficie contenuto in uno spazio* Σ *a tre dimensioni, il quale ammette un gruppo continuo a tre parametri di movimenti rigidi tali, che per essi rimane inalterata ciascuna superficie del sistema* S. *Le direzioni principali di* Σ *in ogni suo punto* P *sono quelle tangenti alla superficie del sistema* S, *che passa per* P *e la normale alla superficie stessa in questo punto; e le curvature principali, di cui due sono necessariamente eguali fra di loro, variano soltanto da una superficie all'altra del sistema* S.

13. Sempre nella ipotesi che le equazioni (β) e (β') siano identicamente soddisfatte, tenuto conto della (1), e così pure le (10) ed (11) (poichè nel caso opposto il gruppo di movimenti sarebbe al più a un sol parametro), supponiamo che la (E) stabilisca una nuova relazione tra le funzioni incognite. In questo caso ϱ sarà funzione della sola λ e saranno soddisfatte le equazioni

$$\frac{d\gamma_{32}}{ds_1} = 0 \, , \quad \frac{d\varrho}{d\lambda} + \gamma_{32}\gamma_{211} + 2\varrho\gamma = 0 \, .$$

La (E) poi assumerà la forma

$$(\mathrm{E}_1) \qquad \vartheta = - \sum_1^2 {}_i \gamma_{12i}\eta_i - \eta_1 \frac{d \log \gamma_{32}}{ds_2} ,$$

e il gruppo di movimenti rigidi della natura considerata sarà al più a due parametri. Per ciò sarà poi ancora necessario e sufficiente che la espressione di ϑ data dalla (E_1) cambii le (D) in identità, poichè in tal caso le (C), nelle quali la stessa sostituzione s'intenderà eseguita, costituiranno un sistema completo, la cui integrazione ci fornirà le due incognite η_1 ed η_2 espresse per le variabili indipendenti e per due costanti arbitrarie; mentre la (1), le (α) e la (E) ci daranno η_3, ϑ_1, ϑ_2 e ϑ_3.

14. Se le equazioni (β') stabilissero tra le funzioni incognite delle nuove relazioni, il gruppo di movimenti rigidi, che cerchiamo, sarebbe al più a un sol parametro. Perciò ci rimane da considerare il caso in cui γ_1 e γ_2 sono due distinte funzioni della sola λ. In questo caso la (β) ci dà

$$(\beta_1) \qquad \vartheta_3 = \vartheta = \sum_1^2{}_i\, \gamma_{21i}\, \eta_i ,$$

e rimangono incognite soltanto le funzioni η_1 ed η_2, delle quali le (A′) ci dànno le derivate prime espresse per le funzioni stesse e per le variabili indipendenti, sempre che per ϑ_1, ϑ_2 e ϑ_3 si intendano poste le loro espressioni date dalle (α) e dalla (β_1) e per η_3 lo 0. Il gruppo risulterà quindi al più a due parametri, e per ciò sarà necessario e sufficiente che, tenuto conto delle (A′), il valore di ϑ_3 dato dalla (β_1) soddisfi identicamente alle equazioni (B) corrispondenti al valore 3 dell'indice i. E poichè la derivazione della (β_1), tenendo conto assieme alle (A′) delle (8) ed (11) della Introduzione, conduce alle

$$\frac{d\vartheta_3}{ds_h} = \sum_1^3{}_r\, \xi^{(r)} \frac{d\gamma_{12h}}{dx_r} + \sum_1^3{}_i\, \gamma_{3ih}\, \vartheta_i + \eta_{h+1}\, \gamma_{2h+2} - \eta_{h+2}\, \gamma_{2h+1} ,$$

e dal confronto di queste colle (B) scendono le

$$\sum_1^3{}_r\, \xi^{(r)} \frac{d\gamma_{12h}}{dx_r} = 0 ,$$

concludiamo che vale il teorema:

Sia S *un sistema* ∞^1 *di superficie parallele contenuto in uno spazio* Σ *a tre dimensioni,* λ *la distanza di una qualunque superficie* S *da una superficie fissa del sistema e per le* λ_{rs} *si abbiano le espressioni canoniche*

$$\lambda_{rs} = \sum_1^3{}_h\, \gamma_h\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{h/s} .$$

Se γ_1 *e* γ_2 *sono distinte fra di loro, il gruppo dei movimenti rigidi dello spazio* Σ*, pei quali rimane inalterata ogni superficie del sistema* S *è al più a due parametri, essendo per ciò necessario e sufficiente che le rotazioni* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{211}, \gamma_{122}, \gamma_{123}$ *siano funzioni della sola* λ*. Verificate queste condizioni, per ottenere il gruppo, di cui si tratta, basta integrare il sistema completo*

$$\frac{d\eta_1}{ds_1} = -\gamma_{211}\, \eta_1 , \qquad \frac{d\eta_1}{ds_2} = \gamma_{211}\, \eta_1 , \qquad \frac{d\eta_1}{ds_3} = \gamma_1\, \eta_1 + \gamma_{123}\, \eta_2$$

$$\frac{d\eta_2}{ds_1} = \gamma_{122}\, \eta_2 , \qquad \frac{d\eta_2}{ds_2} = -\gamma_{122}\, \eta_1 , \qquad \frac{d\eta_2}{ds_3} = \gamma_2\, \eta_2 + \gamma_{213}\, \eta_1 .$$

Per ciò che riguarda i gruppi intransitivi a più parametri facciamo ancora una osservazione. Quando i parametri sono tre, rimangono arbitrarî i valori iniziali di η_1, η_2 e ϑ_3, cioè delle componenti della traslazione sul piano tangente alla superficie, nella quale avviene il movimento, e quello della rotazione intorno alla normale alla superficie stessa; se i parametri sono due, rimangono arbitrarî soltanto i valori iniziali di η_1 ed η_2.

IV.

Dei gruppi transitivi di movimenti.

Riprendiamo ora l' Analisi interrotta alla fine del § II per vedere quali nuove equazioni si ottengono derivando le (B), eliminando tra le equazioni ottenute le derivate seconde delle ϑ e poi eliminando ancora le derivate prime delle η e delle ϑ mediante le (A') e le (B). Tutte le volte che questa Analisi ci condurrà a determinare o le traiettorie del movimento, o un sistema ∞^1 di superficie, che non si alterano pel movimento stesso, il problema sarà ricondotto a quelli già trattati; talchè rimarranno da studiare in questo paragrafo i casi, in cui il gruppo dei movimenti rigidi ammessi da uno spazio a tre dimensioni è transitivo.

Assumiamo come congruenze $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tre congruenze principali dello spazio considerato; e siano $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ le corrispondenti curvature principali riemanniane. Avremo

(1) $$\gamma_{ii} = \omega_i, \quad \gamma_{ii+1} = \gamma_{ii+2} = 0,$$

e le equazioni (B), posto

(2) $$\beta_{ij} = \sum_1^3{}_h \gamma_{ihj}\,\vartheta_h,$$

assumeranno la forma

(B_0) $$\vartheta_{i/r} = \sum_1^3{}_j \beta_{ij}\,\lambda_{j/r} + \omega_i(\eta_{i+2}\,\lambda_{i+1/r} - \eta_{i+1}\,\lambda_{i+2/r}).$$

Le equazioni

$$\vartheta_{i/rs} = \vartheta_{i/sr}$$

equivalgono alle

$$\sum_1^3{}_{rs} \lambda_{h+1}^{(r)}\,\lambda_{h+2}^{(s)}\,\vartheta_{i/rs} = \sum_1^3{}_{rs} \lambda_{h+2}^{(r)}\,\lambda_{h+1}^{(s)}\,\vartheta_{i/rs};$$

e, eseguite le eliminazioni indicate, secondo che è $h = i$, $i+1$ od $i+2$, si presentano dapprima sotto la forma

$$\sum_1^3{}_j \beta_{ij}(\gamma_{ji+1\,i+2} - \gamma_{ji+2\,i+1}) + \frac{d\beta_{ii+1}}{ds_{i+2}} - \frac{d\beta_{ii+2}}{ds_{i+1}} = \eta_i\left(\frac{d\omega_i}{ds_i} + \omega_i \sum{}_h \gamma_{ihh}\right) + \sum_1^3{}_r \xi^{(r)} \frac{d\omega_i}{dx_r},$$

$$\sum_1^3{}_j \beta_{ij}(\gamma_{ji+2\,i+1} - \gamma_{ji\,i+2}) + \frac{d\beta_{ii+2}}{ds_i} - \frac{d\beta_{ii}}{ds_{i+2}} =$$
$$= \eta_{i+1}\left(\frac{d\omega_i}{ds_i} + \omega_i \sum{}_h \gamma_{ihh}\right) + \omega_i\left(\vartheta_{i+2} + \sum{}_h \gamma_{ii+1h}\,\eta_h\right),$$

$$\sum_1^3{}_j \beta_{ij}(\gamma_{jii+1} - \gamma_{ji+1i}) + \frac{d\beta_{ii}}{ds_{i+1}} - \frac{d\beta_{ii+1}}{ds_i} =$$
$$= \eta_{i+2}\left(\frac{d\omega_i}{ds_i} + \omega_i \sum{}_h \gamma_{ihh}\right) + \omega_i\left(\vartheta_{i+1} + \sum{}_h \gamma_{i+2ih}\,\eta_h\right).$$

Derivando le (2) e sostituendo poi alle derivate delle ϑ le espressioni date dalle (B), troviamo le

$$\sum_j \beta_{ij}(\gamma_{ji+1\,i+2} - \gamma_{ji+2\,i+1}) + \frac{d\beta_{ii+1}}{ds_{i+2}} - \frac{d\beta_{ii+2}}{ds_{i+1}} = \eta_i \sum_h \omega_h \gamma_{ihh}\,,$$

$$\sum_j \beta_{ij}(\gamma_{ji+2\,i} - \gamma_{ji\,i+2}) + \frac{d\beta_{ii+2}}{ds_i} - \frac{d\beta_{ii}}{ds_{i+2}} = \eta_{i+1} \sum_h \omega_h \gamma_{ihh} - \omega_{i+1}(\vartheta_{i+2} + \sum_h \gamma_{ii+1\,h}\,\eta_h)\,,$$

$$\sum_j \beta_{ij}(\gamma_{ji\,i+1} - \gamma_{ji+1\,i}) + \frac{d\beta_{ii}}{ds_{i+1}} - \frac{d\beta_{ii+1}}{ds_i} = \eta_{i+2} \sum_h \omega_h \gamma_{ihh} + \omega_{i+2}(\vartheta_{i+1} + \sum_h \gamma_{i+2\,ih})\,.$$

Poniamo

$$\nu_i = \frac{d\omega_i}{ds_i} + \sum_h (\omega_i - \omega_h)\,\gamma_{ihh}\,,$$

e per le precedenti le equazioni, che si trattava di stabilire, assumeranno la forma

$$\sum_r \xi^r \frac{d\omega_i}{dx_r} = \eta_i\,\nu_i$$

$$(\omega_{i+1} - \omega_{i+2})\,(\vartheta_i + \sum_h \gamma_{i+1\,i+2\,h}\,\eta_h) = \eta_{i+2}\,\nu_{i+1}$$

$$(\omega_{i+1} - \omega_{i+2})\,(\vartheta_i + \sum_h \gamma_{i+1\,i+2\,h}\,\eta_h) = \eta_{i+1}\,\nu_{i+2}\,.$$

Queste, se non sono identicamente soddisfatte, sono da aggiungere alle (A′) e (B). Da esse seguono le

$$\eta_{i+1}\,\nu_{i+2} = \eta_{i+2}\,\nu_{i+1}\,,$$

e però, perchè il gruppo sia transitivo, dovranno prima di tutto essere identicamente soddisfatte le equazioni $\nu_i = 0$, cioè le

$$\text{(F)} \qquad \frac{d\omega_i}{ds_i} + \sum_1^3{}_h (\omega_i - \omega_h)\,\gamma_{ihh} = 0\,.$$

Verificate queste, rimangono ancora da soddisfare le equazioni

$$\sum_1^3{}_r \xi^{(r)} \frac{d\omega_i}{dx_r} = 0$$

$$\text{(C}_0\text{)} \qquad (\omega_{i+1} - \omega_{i+2})\,(\vartheta_i + \sum_1^3{}_h \gamma_{i+1\,i+2\,h}\,\eta_h) = 0\,.$$

Dalle prime ricaviamo i seguenti teoremi:

1°. *Se uno spazio a tre dimensioni ammette un gruppo di movimenti rigidi a più di un parametro, le sue curvature riemanniane principali sono invarianti rispetto al gruppo.*

2°. *Se questo gruppo è transitivo, le curvature principali riemanniane dello spazio sono costanti.*

Poichè noi ci occupiamo ora esclusivamente dei gruppi transitivi, possiamo dunque supporre le ω_i costanti, nella quale ipotesi le (F) assumono la forma

$$\text{(F}_0\text{)} \qquad (\omega_i - \omega_{i+1})\,\gamma_{i\,i+1\,i+2} = (\omega_{i+2} - \omega_i)\,\gamma_{i\,i+2\,i+1}\,.$$

Assieme a queste rimangono poi da considerare soltanto le equazioni (C₀).

16. Le equazioni (F_0) e (C_0) si riducono ad identità, se le tre curvature principali, oltre ad essere costanti, sono tutte eguali fra di loro. Posto

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = K, \tag{3}$$

siamo allora nel caso degli spazî a curvatura costante K. Per questi le sei trasformazioni infinitesime indipendenti generatrici del gruppo di moti rigidi a sei parametri, che loro compete, sono definite dalle equazioni (A′) e (B_0), nelle quali alle β_{ij} ed alle ω_i dovranno sostituirsi le espressioni date dalle (2) e dalle (3), e che costituiscono un sistema completo.

Si derivino le espressioni delle μ_r date dalle (1′) del § II e si sostituiscano per le derivate delle ϑ le espressioni date dalle (B_0). Si perviene così a delle equazioni, le quali facilmente si riducono alla forma

$$\mu_{rs} = K \sum_1^3{}_p\, \varepsilon_{rsp}\, \mu^{(p)}, \tag{4}$$

le quali confrontate colle (A) ci dicono che le equazioni di definizione delle trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo dei movimenti rigidi in uno spazio a curvatura costante $K \neq 0$ sono simmetriche rispetto ai due sistemi di incognite ζ_r e $\mu_r : \sqrt{K}$. Le identità

$$\mu_{rs} + \mu_{sr} = 0,$$

che seguono dalle (4) ci dicono anche che le μ_r soddisfanno alle equazioni fondamentali (A). Perciò, chiamando *coefficienti covarianti di traslazione* e rispettivamente di *rotazione* le ζ_r e le μ_r abbiamo il teorema:

Negli spazî a curvatura costante il sistema dei coefficienti covarianti di rotazione per un dato movimento rigido è anche il sistema dei coefficienti covarianti di traslazione per un altro movimento della stessa natura.

17. Prima di procedere ad esaminare altri casi è opportuno trasformare ancora le equazioni (B_0), le quali equivalgono alle

$$(B'_0) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\vartheta_i}{ds_i} &= \beta_{ii} \\ \frac{d\vartheta_i}{ds_{i+1}} &= \beta_{ii+1} + \omega_i\, \eta_{i+2} \\ \frac{d\vartheta_i}{ds_{i+2}} &= \beta_{ii+2} - \omega_i\, \eta_{i+1}\,. \end{aligned} \right.$$

Poniamo

$$\vartheta_i = \sum_1^3{}_h\, \gamma_{i+2\,i+1\,h}\, \eta_h + \psi_i\,. \tag{5}$$

Avremo

$$\frac{d\vartheta_i}{ds_j} = \sum_1^3{}_h\, \eta_h \frac{d\gamma_{i-2\,i+1\,h}}{ds_j} + \sum_1^3{}_h\, \gamma_{i+2\,i+1\,h} \frac{d\eta_h}{ds_j} + \frac{d\psi_i}{ds_j},$$

ovvero, ricordando le (A′), le (8) e le (11) della Introduzione, le

$$\frac{d\vartheta_i}{ds_j}=\beta_{ij}+\frac{d\psi_i}{ds_j}+\sum_r \xi^{(r)}\frac{d\gamma_{i+2\,i+1\,j}}{dx_r}+\sum_h \gamma_{hij}\,\psi_h+\gamma_{ij+2}\,\eta_{j+1}-\gamma_{ij+1}\,\eta_{j+2}+$$
$$+\gamma_{i+2\,i+1\,j+2}\,\psi_{j+1}-\gamma_{i+2\,i+1\,j+1}\,\psi_{j+2}.$$

Dal confronto di queste colle (B'_0), avendo presenti le (1), seguono le

$$(B_1)\qquad \frac{d\psi_i}{ds_j}=\gamma_{i+2\,i+1\,j+1}\,\psi_{j+2}-\gamma_{i+2\,i+1\,j+2}\,\psi_{j+1}+\sum_{1}^{3}{}_h\,\gamma_{ihj}\,\psi_h-\sum_{1}^{3}{}_r\,\xi^{(r)}\frac{d\gamma_{i+2\,i+1\,j}}{dx_r},$$

le quali equivalgono alle (B).

18. Ciò premesso, supponiamo in secondo luogo

$$(6)\qquad \omega_3=\omega_2\,,\quad \omega_1 \neq \omega_2\,.$$

Le equazioni (F_0) assumeranno la forma

$$(F_1)\qquad \gamma_{122}+\gamma_{133}=\gamma_{211}=\gamma_{311}=0\,,$$

e le (C_0) equivarranno alle

$$\vartheta_2=\sum_{1}^{3}{}_h\,\gamma_{13h}\,\eta_h\,,\quad \vartheta_3=\sum_h \gamma_{21h}\,\eta_h\,,$$

cioè, confrontando le (5), alle $\psi_2=\psi_3=0$. Ponendo ancora $\psi_1=\psi$ ed avendo presenti le (F_1), le (B_1) assumono la forma

$$(\beta)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\psi}{ds_1}=\displaystyle\sum_{1}^{3}{}_r\,\xi^{(r)}\frac{d\gamma_{231}}{dx_r} \\[2mm] \dfrac{d\psi}{ds_2}=\displaystyle\sum_{1}^{3}{}_r\,\xi^{(r)}\frac{d\gamma_{232}}{dx_r}+\gamma_{323}\,\psi \\[2mm] \dfrac{d\psi}{ds_3}=\displaystyle\sum_r \xi^{(r)}\frac{d\gamma_{233}}{dx_r}+\gamma_{232}\,\psi \end{cases}$$

$$(7)\qquad 2\gamma_{133}\cdot\psi=\sum_{1}^{3}{}_r\,\xi^{(r)}\frac{d\gamma_{132}}{dx_r}=\sum_r \xi^{(r)}\frac{d\gamma_{123}}{dx_r}-(\gamma_{123}+\gamma_{132})\,\psi=\sum_{1}^{3}{}_r\,\xi^{(r)}\frac{d\gamma_{133}}{dx_r}.$$

Supponiamo le equazioni (7) identicamente soddisfatte, cioè chè assieme alle (6) ed alle (F_1) si abbiano anche le identità

$$(6_1)\qquad \gamma_{133}=0\,,\quad \gamma_{123}=c\,,\quad \gamma_{132}=-c\,,$$

essendo c costante.

Il gruppo dei movimenti rigidi dello spazio dipenderà allora da quattro parametri e le trasformazioni infinitesime, che lo generano, saranno definite dal sistema completo che risulta delle (A′), in cui per le ϑ siano posti i valori dati dalle (5), fattovi $\psi_1=\psi\,,\ \psi_2=\psi_3=0$, e delle ($\beta$). In questo sistema le funzioni incognite sono $\eta_1\,,\eta_2\,,\eta_3$ e ψ, ovvero ϑ_1, e però i parametri del gruppo si possono determinare in modo che le tre componenti della traslazione e quella della rotazione secondo la tangente alla linea della congruenza λ_1 assumano valori iniziali arbitrarî.

Riassumendo, coll'avere presenti le equazioni (F_1) (6) e (6_1) possiamo concludere che:

Sono dotati di gruppi di movimenti rigidi a quattro parametri gli spazi a tre dimensioni, che, oltre ad avere costanti le loro curvature riemanniane principali, godono delle proprietà seguenti:

a) *Indicando con* $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ *queste curvature è* $\omega_3 = \omega_2$, $\omega_1 \neq \omega_2$.

b) *La congruenza principale determinata dalla curvatura* ω_1 *è geodetica e normale alle curvature geodetiche delle linee di curvatura ad essa normali.*

c) *Le rotazioni* γ_{123} *e* γ_{132} *hanno valori costanti opposti e però due congruenze qualunque normali fra di loro ed alla congruenza principale determinata dalla curvatura* ω_1 *costituiscono rispetto a questa un sistema ortogonale canonico.*

19. Si supponga ora che, essendo soddisfatte le (6) e le (F_0), non lo siano le (6_1). Le equazioni (7) equivalgono alle

$$(7_1)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_1^3{}_r\, \xi^{(r)} \frac{d(\gamma_{132} - \gamma_{123})}{dx_r} = 0 \\ &\sum_1^3{}_r\, \xi^{(r)} \frac{d}{dx_r} \left\{ (\gamma_{123} + \gamma_{132})^2 + 4\gamma_{133}^2 \right\} = 0 \end{aligned} \right.$$

$$(7_2)\qquad \left\{ (\gamma_{123} + \gamma_{132})^2 + 4\gamma_{133}^2 \right\} \psi = \sum_1^3{}_r\, \xi^{(r)} \left\{ \gamma_{133} \frac{d(\gamma_{123} + \gamma_{132})}{dx_r} - (\gamma_{123} + \gamma_{132}) \frac{d\gamma_{133}}{dx_r} \right\}.$$

Le (7_1) ci dicono che affinchè lo spazio considerato sia dotato di un gruppo transitivo di movimenti rigidi è necessario che siano soddisfatte le condizioni espresse dalle equazioni

$$(8)\qquad (\gamma_{123} + \gamma_{132})^2 + 4\gamma_{133}^2 = c^2, \quad \gamma_{132} - \gamma_{123} = \mathrm{C},$$

c e C essendo due costanti. Posto poi

$$2\gamma_{133} = c \operatorname{sen} \alpha, \quad \gamma_{123} + \gamma_{133} = c \cos \alpha,$$

le (7_2), se sono soddisfatte le (8), assumono la forma

$$(9)\qquad 2\psi = -\sum_1^3{}_r\, \xi^{(r)} \frac{d\alpha}{dx_r} = -\sum_1^3{}_h\, \eta_h \frac{d\alpha}{ds_h}.$$

Se da questa espressione di ψ le (β) risultano identicamente soddisfatte, le equazioni fondamentali (A') (§ II), in cui per ϑ_1, ϑ_2 e ϑ_3 siano poste le espressioni date dalle (5), fattovi $\psi_2 = \psi_3 = 0$, e postovi per ψ_1 il valore di ψ dato dalla (9), costituiranno un sistema completo, che definirà per mezzo delle sostituzioni infinitesime generatrici il gruppo dei moti rigidi ammessi in questo caso dallo spazio considerato. Tale gruppo sarà quindi a tre parametri, e questi potranno determinarsi in modo da dare valori arbitrarî iniziali alle tre componenti di traslazione. Anche in questo caso lo spazio gode delle proprietà (a) e (b) del caso considerato sopra.

20. Ci resta da considerare il caso, in cui le tre curvature riemanniane principali hanno valori costanti ma tutti distinti fra di loro. In questo caso le equazioni (F_0) ci dànno delle relazioni notevoli, che legano fra di loro le curvature principali e le

proiezioni delle curvature geodetiche delle congruenze principali sulle tangenti alle linee, che le costituiscono. Le equazioni (C_0) ci dànno poi per le ϑ dei valori, che coincidono con quelli dati dalle (5), se in queste si pone

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0 . \tag{10}$$

Le equazioni (B_1) assumono quindi in questo caso la forma

$$\sum_1^3 {}_r \xi^{(r)} \frac{d\gamma_{i+2\,i+1\,j}}{dx_r} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) .$$

Dunque:

Affinchè una varietà a tre dimensioni, le cui curvature principali riemanniane sono costanti e distinte, ammetta un gruppo transitivo di movimenti rigidi è necessario e basta che i nove coefficienti di rotazione relativi alle tre congruenze principali siano costanti. Verificate queste condizioni, il gruppo sarà a tre parametri e risulterà definito per mezzo delle trasformazioni infinitesime, che lo generano, dalle equazioni (A'), *in cui per le ϑ siano posti i valori dati dalle* (5), *tenuto conto delle* (10).

Poichè le funzioni incognite del sistema sono η_1 , η_2 , η_3 , i parametri del gruppo potranno anche in questo caso determinarsi in modo che le componenti di traslazione assumano valori iniziali arbitrarî.