Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica.

Memoria di GUIDO CASTELNUOVO

premiata dalla Società Italiana.

Quando si studiano quelle proprietà di una superficie algebrica che non vengono alterate da una trasformazione birazionale della superficie (che si trasmettono adunque a tutte le superficie in corrispondenza birazionale colla primitiva), conviene anzitutto di fissar l'attenzione sui sistemi lineari di curve giacenti sulla superficie [1], i quali godono importanza analoga a quella delle serie lineari di gruppi di punti nella geometria sopra una curva algebrica.

E tra i caratteri dei nominati sistemi vanno considerati quelli soltanto che hanno proprietà invariantive rispetto alle trasformazioni birazionali; dei quali caratteri alcuni variano al variar del sistema che sulla superficie si considera (come sarebbe ad es. la dimensione del sistema), altri invece si riconoscono indipendenti dal particolare sistema sul quale vengono considerati, appartengono a tutti sistemi lineari di curve giacenti su quella superficie, e dànno altrettanti caratteri invariantivi della superficie stessa.

Le relazioni che passano tra le due classi di caratteri presentano il massimo interesse; ma solo in questi ultimi tempi vennero studiate, sicchè per ora si conoscono pochi risultati sull'argomento, e si riducono quasi interamente (almeno per quanto riguarda la teoria generale delle superficie) [2] a quelli contenuti nelle « *Ricerche di*

(1) Come è noto, per *sistema lineare di curve* sopra una superficie si intende l'insieme delle curve segate sulla superficie (supposta ad es. nello spazio ordinario) da un sistema lineare di superficie costrette eventualmente a passare una o più volte per curve fisse della superficie primitiva, le quali ultime possono o no riguardarsi come formanti parte della curva generica del sistema.

Diremo (col sig. ENRIQUES) che un sistema lineare (la cui curva generica è) irriducibile è *semplice*, quando le curve di esso passanti per un punto generico della superficie non vengono tutte in conseguenza a passare per altri punti determinati dal primo e con esso variabili (ciò esige che il sistema sia almeno ∞^3, tolto il caso delle reti omaloidiche di curve razionali, possibile solo sulle superficie razionali). Diremo ancora che il sistema è *normale* quando non è contenuto in un sistema più ampio avente lo stesso numero di intersezioni variabili di due curve generiche.

(2) Vari risultati si posseggono invece per superficie particolari, ad es. per le superficie razionali (proprietà invariantive dei sistemi lineari di curve piane), per le superficie rigate (SEGRE), per le superficie *iperellittiche* (PICARD e HUMBERT).

geometria sulle superficie algebriche » del sig. Enriques [1], e nella « *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* » dello stesso autore, pubblicata or ora nelle Memorie di questa Società.

Un nuovo contributo a questa teoria si propone di portare il presente lavoro, nel quale accanto ad alcuni teoremi del sig. Enriques che qui vengono enunciati sotto una forma più semplice, si troveranno altri risultati nuovi.

Le questioni di cui mi occupo riguardano specialmente la *serie caratteristica* di un sistema lineare, ed indirettamente il *sistema lineare aggiunto* al sistema primitivo; due enti che sono legati in modo invariantivo col dato sistema, e che vennero già adoperati con frutto in precedenti ricerche [2].

La *serie caratteristica* di un sistema lineare $|C|$ ∞^r di curve irriducibili (sopra una superficie), secantisi a due a due in n punti variabili, è la serie lineare (di gruppi di punti) g_n^{r-1} segata sopra una curva generica C del sistema dalle rimanenti curve di esso. È chiaro che se il sistema $|C|$ *non è normale,* vale a dire se esiste un sistema di dimensione $s > r$ il quale contenga $|C|$, ed abbia sempre n come numero delle intersezioni variabili di due curve generiche, la serie caratteristica g_n^{r-1} di $|C|$ è contenuta entro una serie lineare più vasta g_n^{s-1} dello stesso ordine n (la serie caratteristica del secondo sistema); in altre parole la serie g_n^{r-1} *non è completa,* ha un *difetto di completezza*, o *deficienza*, che uguaglia o supera la differenza $(s-1)-(r-1)=s-r$. Supponiamo all'incontro che il sistema $|C|$ sia *normale;* si potrà chiedere allora *se risulti completa in conseguenza la serie caratteristica del sistema stesso.* E questa domanda si presenta tanto più spontanea, in quanto che si sa che tale fatto (l'esser completa la serie) si verifica nei sistemi lineari di curve sul piano [3] (o sulle superficie razionali), e (come si vedrebbe senza difficoltà) sulle superficie generali di dato ordine. D'altra parte si sono presentati in questi ultimi tempi esempi di superficie sulle quali esistono sistemi normali aventi la serie caratteristica *incompleta;* basterà citare, oltre alle rigate [4], le superficie *iperellittiche* [5]. Quale relazione passa adunque tra la deficienza della serie caratteristica di un sistema normale, ed i caratteri invariantivi della superficie cui il sistema appartiene? Ecco la questione alla quale il presente lavoro è dedicato.

Per potervi rispondere conviene di ricordare quali sono i due caratteri invariantivi più importanti di una superficie [6]; i due *generi superficiali* (*Flächengeschlechte*)

[1] Mem. Accad. d. Scienze di Torino, serie 2ª, t. XLIV (1893).

[2] I due nominati enti si trovano introdotti per la prima volta (per quanto riguarda lo studio metodico dei sistemi lineari) nelle mie « *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* » (Mem. Acc. d. Sc. di Torino, serie 2ª, t. XLII, 1891); ma in modo meno esplicito compariscono pure in precedenti lavori; e nelle ricerche sopra argomenti affini pubblicati in Italia negli ultimi tre anni, continuamente intervengono (si veda ad es. il citato lavoro del sig. Enriques).

[3] Si veda ad es. le mie « *Ricerche* » citate, n. 18.

[4] Segre « *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques* » (Mathem. Annalen, 34).

[5] Humbert « *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques* » n. 114 (Journal de Mathém., 4ª série, t.ª IX, 1893).

[6] Si veda a questo proposito il lavoro fondamentale del sig. Nöther « *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens* ... » (Mathem. Annalen 8). Le definizioni dei due generi vengono riportate con qualche modificazione di forma nel n. 1 del presente lavoro.

che vengono chiamati l'uno *genere geometrico* p_g, l'altro genere numerico p_n. Il primo dà il numero ($\geqq 0$) delle superficie linearmente indipendenti di ordine $n-4$ che sono *aggiunte* alla data superficie (1) (supposta di ordine n nello spazio ordinario); il secondo è il valore $\left(\gtreqqless 0\right)$ assunto dalla formola che permette di calcolare il numero delle superficie aggiunte alla data linearmente indipendenti, di ordine ν superiore a un certo limite, quando nella formola stessa si pone in luogo di ν il numero $n-4$ (eventualmente inferiore a quel limite). Ora per molte superficie (superficie razionali $p_g = p_n = 0$, superficie generali di dato ordine . . .) sussiste l'ugualianza tra i due generi; e si vedrà appunto da questo lavoro che *sopra una qualsiasi superficie per cui* $p_g = p_n$, *è completa la serie caratteristica di ogni sistema lineare normale.*

Ma vi sono superficie che hanno il genere geometrico diverso dal genere numerico (precisamente $p_g > p_n$); e sopra di esse si dimostra che esistono sistemi lineari normali aventi la serie caratteristica incompleta, tali anzi che la corrispondente deficienza risulta non inferiore alla differenza $p_g - p_n$ (2).

Intorno a questo risultato altri si raggruppano che qui mi limito ad accennare: così si vedrà (n. 3) in quali casi dall'esistenza di una serie speciale sopra $p_g - p_n + 1$ curve di un sistema lineare ∞^1 sulla superficie, si possa concludere l'esistenza di una serie analoga sopra ogni altra curva del sistema stesso; e si vedrà come la conoscenza di un sistema lineare di curve (almeno ∞^2), e del sistema ad esso aggiunto, sopra una superficie sia sufficiente per decidere se la superficie ha i due generi uguali, oppur no (n. 6).

Ma un'altra proposizione che indirettamente qui si presenta (n. 10), va messa in luce. La proprietà che può spettare ad una superficie, di avere il genere geometrico uguale al genere numerico, si trasmette non solo alle superficie in corrispondenza birazionale colla data, ma pure alle superficie in corrispondenza semplicemente *razionale* con essa, o per essere più precisi, si trasmette ad ogni superficie il cui punto generico abbia coordinate esprimibili razionalmente mediante le coordinate del punto generico della superficie primitiva. Da ciò si deduce, come immediato corollario, che *sopra una superficie avente* $p_g = p_n$, *ogni serie algebrica* ∞^1 *di curve dotata della proprietà che per il punto generico della superficie passi una sola curva della serie, può farsi dipendere razionalmente* (*anzi linearmente*) *da un parametro, è un sistema lineare* ∞^1; proposizione questa che può assumersi anche come definizione

(1) Una superficie di ordine ν si dice *aggiunta* ad una superficie di ordine n dello spazio ordinario, quando (secondo il sig. NÖTHER) la prima superficie passa $h-1$ volte per ogni curva h-upla della seconda, e $k-2$ volte per ogni punto k-uplo di questa. In questa definizione si suppone che le linee e i punti multipli della superficie primitiva siano *ordinari*. La difficoltà che presenterebbe l'estensione di una siffatta definizione al caso di singolarità straordinarie può ovviarsi cercando di definire direttamente il sistema di curve segato sulla superficie primitiva dalle superficie aggiunte di ordine ν (*sistema canonico* se $\nu = n-4$, *sistema aggiunto* al sistema delle sezioni piane della superficie primitiva se $\nu = n-3$) mediante i legami invariantivi che passa tra il sistema stesso ed il sistema delle sezioni piane della superficie. Ciò appunto si propone di fare il sig. ENRIQUES nella Memoria citata, « *Introduzione* . . . . » § 31.

(2) Si può dir di più: $p_g - p_n$ *è precisamente il valor massimo raggiunto dalla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare sulla superficie.* Esporrò prossimamente la dimostrazione di questo teorema, alla quale pervenni troppo tardi per inserirla qui (ottobre 1895).

del sistema lineare ∞^1. Ciò invece non è più lecito per le superficie con $p_g > p_n$; le rigate irrazionali colle loro serie ∞^1 di generatrici dànno un esempio del contrario [1].

Ora si osservi che il sig. Humbert in un recente lavoro [2] giunge ad un teorema analogo al precedente: *Sopra una superficie priva di integrali di differenziale totale di prima specie* (integrali introdotti dal sig. Picard nella teoria delle superficie algebriche) *ogni serie ∞^1 di curve dotata della proprietà che per un punto generico della superficie passi una sola curva della serie, è un sistema lineare.* Il confronto dei due teoremi mostra che sotto alcuni rapporti l'uguaglianza dei due generi, e la mancanza di integrali di differenziale totale di prima specie sono caratteri equivalenti di una superficie. Ora l'uno dei due caratteri porterà di conseguenza l'altro? Più in generale, quali relazioni passsano tra la differenza $p_g - p_n$ dei due generi ed il numero degli integrali nominati che sono linearmente indipendenti tra di loro? Ecco una questione molto importante che ora si affaccia, e di cui il progresso della teoria delle superficie algebriche esige la soluzione.

1. La superficie algebrica irreducibile F su cui si ragiona nel seguito, considerata proiettivamente, ad esempio nello spazio ordinario, può esser dotata di singolarità (curve multiple e punti multipli) *qualisivogliano.* Si suppone però che sia possibile di trasformare birazionalmente la superficie F in una superficie di un iperspazio priva di punti multipli, o, ciò che fa lo stesso, in una superficie dello spazio ordinario non avente curva multipla all'infuori di una curva doppia, nè punti di molteplicità superiore, all'infuori di qualche (eventualmente nessuno) punto triplo, il quale sia pur triplo per la curva doppia. Una siffatta ipotesi apparisce necessaria per poter approfittare dei principali teoremi che si posseggono nella teoria delle superficie algebriche, nei quali in modo più o meno esplicito quella ipotesi interviene. Essa però, a quanto sembra, non costituisce una restrizione, ma si verifica per *tutte le superficie algebriche*; d'altronde siccome le dimostrazioni che finora si sono date in proposito [3] sembrano in qualche punto incomplete, pur lasciando prevedere la verità del risultato, è bene per maggiore precisione avvertire, che se esistessero superficie non soddisfacenti a quella ipotesi, tali superficie si riterrebbero senz'altro escluse dal nostro lavoro.

Sia dunque F una superficie di ordine n dello spazio ordinario la quale, pur

(1) L'ultimo teorema si riattacca al teorema del sig. Enriques «*Una questione sulla linearità* ...» (Rend. Acc. d. Lincei 1893) secondo il quale *Sopra una qualsiasi superficie è lineare un sistema ∞^r ($r > 1$) quando per r punti generici della superficie passa una sola curva del sistema.*

(2) «*Sur quelques points de la théorie des courbes et des surfaces algébriques*» III, 5 (Journal de Mathématiques 4e s.e, t.e X, 1894).

(3) Tali sono la dimostrazione accennata dal sig. Nöther nella Nota «*Anzahl der Moduln* ...» (Sitzsber. d. Ak. d. W. zu Berlin 1888), e quella fondata sopra altri concetti che è dovuta al sig. Del Pezzo «*Estensione di un teorema di Nöther*» (Rendic. Circolo Matem. di Palermo, t. II; si veda pure una Nota complementare dello stesso autore nel t. III di quella raccolta); per quanto riguarda le singolarità di una superficie si consulti inoltre una Memoria del sig. Kobb (Journ. de Mathém., 4e s.e, t.e VIII). Data l'importanza dell'argomento (del quale presentemente sta occupandosi anche il sig. Segre), è da augurarsi che si abbia presto una risposta definitiva sopra di esso.

avendo singolarità qualisivogliano, soddisfa alla detta condizione. Consideriamo quelle superficie Φ^ν di ordine ν che diconsi *aggiunte* ad F, e sono definite dalla condizione di segare un piano generico lungo curve aggiunte alla corrispondente sezione piana di F, e di comportarsi inoltre in modo determinato (indipendente da ν) nei punti multipli *isolati* di F (ossia in ogni punto che produca una diminuzione nel genere della sezione piana generica di F passante per esso). Sopra quest'ultima condizione imposta alle Φ^ν non occorre pel seguito di insistere; ricorderò soltanto che se il punto isolato è un punto i. uplo ordinario di F, per esso le Φ^ν devono passare $i-2$ volte ([1]).

Le Φ^ν esistono certo (come è facile persuadersi) per valori abbastanza elevati di ν (ad es. per $\nu \geqq n-1$); esse segano sopra F (all'infuori delle curve multiple di F) curve che diremo *aggiunte* (*di rango* $\nu-(n-3) \gtreqqless 0$) al sistema lineare delle sezioni piane di F ([2]).

Le Φ^ν (e quindi le curve da esse segate su F) formano evidentemente un sistema lineare (*aggiunto*); sia r_ν la dimensione di esso. All'indice ν dovremo attribuire in seguito valori $\geqq n-4$; siccome è possibile che per i primi valori dell'indice non esistano superficie Φ^ν, daremo convenzionalmente il valore -1 ai corrispondenti r_ν.

Il sistema delle Φ^ν sega sopra un piano generico (il quale appartiene a $\infty^{r_{\nu-1}}$ Φ^ν) un sistema lineare $\infty^{r_\nu - r_{\nu-1}-1}$ di curve di ordine ν, aggiunte alla curva sezione f di F ottenuta con quel piano. Questo sistema è adunque contenuto nel sistema di *tutte* le curve piane ψ^ν di ordine ν aggiunte ad f. Se indichiamo con ϱ_ν la dimensione dell'ultimo sistema, avremo quindi la relazione:

$$(1) \qquad r_\nu - r_{\nu-1} - 1 = \varrho_\nu - \delta_\nu \qquad (\nu \geqq n-3)$$

dove è $\delta_\nu \geqq 0$.

Se $\delta_\nu = 0$, il sistema delle superficie Φ^ν sega sopra un piano generico il sistema di tutte le curve di ordine ν aggiunte alla curva f, e quindi esso (o, in altre parole, il sistema delle curve aggiunte determinato su F dalle Φ^ν) sega su f una serie lineare (di gruppi di punti) *completa*. Ciò non accade più quando $\delta_\nu > 0$; allora la serie lineare segata sulla curva f dalle superficie Φ^ν (o dalle corrispondenti curve aggiunte) è incompleta, e si vede facilmente che δ_ν è appunto la sua *deficienza* (numero che va aggiunto alla dimensione della serie per ottenere la dimensione della serie *completa* a cui quella appartiene) ([3]).

([1]) NÖTHER « *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens* ... » (Math. Annalen, 8).
Un modo indiretto per superare la difficoltà che presenta il caso di singolarità superiori si trova nella citata « *Introduzione* . . . » del sig. ENRIQUES, cap. IV.

([2]) Ed attribuiremo carattere invariantivo (rispetto alle trasformazioni birazionali) al legame che passa tra un sistema lineare S di curve sopra una superficie e le curve C ad esso aggiunte di dato rango i; di guisa che se una trasformazione birazionale muta il sistema S e le curve C nel sistema S' e nelle curve C' (di altra superficie) si dica ancora che le C' sono aggiunte di rango i ad S'. Il sig. ENRIQUES dimostra appunto come i sistemi aggiunti ad un dato sistema lineare S sopra una data superficie (od ente algebrico ∞^2) possano definirsi senza ricorrere a considerazioni proiettive. Si veda: ENRIQUES « *Introduzione* . . . » citata, cap. IV.

([3]) Infatti la serie segata dalle Φ^ν sulla curva f ha la dimensione $r_\nu - r_{\nu-1} - 1 - (\sigma+1)$, indicando con σ la dimensione del sistema di quelle sezioni delle Φ^ν (col piano di f) che si spez-

Ma quest'ultimo caso si presenta solo per i primi valori di ν, poichè si dimostra che esiste sempre un numero l ($\geqq n-3$) tale che per $\nu \geqq l$ è $\delta_\nu = 0$ (¹), e sussiste quindi l'uguaglianza

$$(2) \qquad r_\nu - r_{\nu-1} - 1 = \varrho_\nu \qquad (\nu \geqq l).$$

Nella (2) il secondo membro al variare di ν, da $n-3$ in su, percorre una progressione aritmetica del secondo ordine (poichè si ha, come è noto, $\varrho_\nu = \binom{\nu+2}{2} - \text{cost.}$); ne viene che al variare di ν da l ($\geqq n-3$) in su, r_ν percorre una progressione aritmetica di terzo ordine alla quale appartiene pure r_{l-1}. Prolunghiamo ora (aritmeticamente) quella progressione anche al disotto del termine r_{l-1}, ed indichiamone con r'_ν il termine generale (che uguaglia r_ν quando $\nu \geqq l-1$); avremo dunque per definizione (limitandoci ai valori di ν superiori ad $n-4$)

$$(1)' \qquad r'_\nu - r'_{\nu-1} - 1 = \varrho_\nu \qquad (\nu \geqq n-3).$$

Noi diremo che r'_ν è la *dimensione virtuale* del sistema delle superficie Ψ^ν (²), mentre r_ν è la *dimensione effettiva* del sistema stesso. Le due dimensioni coincidono quando $\nu \geqq l-1$; mentre per $n-4 \leqq \nu < l-1$ la dimensione effettiva r_ν supera o uguaglia la dimensione virtuale r'_ν, poichè decrescendo ν in quell'intervallo, r_ν decresce più (od altrettanto) lentamente che r'_ν, come risulta dal confronto delle (1) e (1)'.

Queste considerazioni ci giovano per dare una semplice definizione di un numero che continuamente si presenta nel seguito; intendiamo parlare di

$$(3) \qquad \varDelta = \sum_{n-3}^{l-1} \delta_\nu$$

(convenzionalmente $\varDelta = 0$ se $l = n-3$) che è *la somma delle deficienze delle serie segate sulla sezione piana generica f di F dalle superficie aggiunte di ordine* $\geqq n-3$, o, ciò che fa lo stesso, *dalle curve aggiunte di rango* $\geqq 0$.

Se nella (1) poniamo al posto di ν i successivi valori $n-3$, $n-2$..., $l-1$, e sommiamo le uguaglianze così ottenute, abbiamo

$$r_{l-1} - r_{n-4} - (l-n+3) = \sum_{n-3}^{l-1} \varrho_\nu - \varDelta;$$

zano nella f ed in curve residue di ordine $\nu - n$; dunque σ è la dimensione del sistema di tutte le curve di ordine $\nu - n$ se $\nu \geqq n$; e se $\nu < n$, è convenzionalmente $\sigma = -1$. D'altronde la serie, certo completa, segata sulla curva f da tutte le curve ad essa aggiunte di ordine ν ha la dimensione $\varrho_\nu - (\sigma + 1)$; dunque la deficienza della prima serie vale

$$\{\varrho_\nu - (\sigma+1)\} - \{r_\nu - r_{\nu-1} - 1 - (\sigma+1)\} = \delta_\nu$$

(¹) Enriques « *Introduzione* ... » citata, § 37.

(²) Si può anche dire che r'_ν è la dimensione dedotta dalle *formole di postulazione*, perchè queste formole calcolate in qualche caso dal sig. Cayley e sotto ipotesi più generali (relative però a singolarità ordinarie di F) dal Sig. Nöther (Annali di Matem. s. II, t. V) permettono di calcolare effettivamente r'_ν quando si conoscono le singolarità della superficie F.

eseguendo le stesse operazioni sulla (1)' troviamo invece:

$$r'_{l-1} - r'_{n-4} - (l - n + 3) = \sum_{n-3}^{l-1} \varrho_\nu .$$

Confrontando e ricordando che $r_{l-1} = r'_{l-1}$, otteniamo in fine la relazione

$$\Delta = r_{n-4} - r'_{n-4} . \tag{4}$$

Ora le dimensioni effettiva e virtuale del sistema delle superficie aggiunte di ordine $n-4$ non dipendono più dai caratteri proiettivi della superficie F che si considera, ma dànno quei due caratteri invariantivi di F (o dell'ente algebrico doppiamente infinito di cui la F è una immagine proiettiva), i quali aumentati di una unità prendono il nome di *genere geometrico* (o effettivo) p_g, e *genere numerico* (o virtuale) p_n della superficie F, o del corrispondente ente algebrico [1].

Possiamo adunque concludere che *la somma delle deficienze delle serie segate sopra la curva generica di un sistema lineare dai sistemi ad esso aggiunti di rango $\geqq 0$ uguaglia la differenza tra i due generi p_g, p_n della superficie*. In particolare se la superficie ha il genere geometrico uguale al genere numerico, la serie segata sopra la curva generica di un sistema da un sistema ad esso aggiunto di rango $\geqq 0$ è completa.

2. Ciò premesso, veniamo ad una prima questione sulle superficie aggiunte.

Riprendiamo la superficie F d'ordine n e le superficie aggiunte Ψ^ν. Poi condotto un piano generico γ_1 il quale seghi F lungo una curva f (il cui genere supponiamo >0), segniamo su γ_1 una curva ψ_1^ν d'ordine $\nu (\geqq n-3)$ aggiunta ad f, e cerchiamo se per ψ_1^ν passino superficie Ψ^ν, e come si comportino. Due casi possono darsi:

1) o le superficie Ψ^ν passanti per la curva ψ_1^ν si spezzano tutte nel piano γ_1 di quest'ultima curva ed in superficie $\Psi^{\nu-1}$, ed allora la dimensione del sistema delle nominate Ψ^ν è $r_{\nu-1}$; (se $r_{\nu-1} = -1$, non esistono Ψ^ν per ψ_1^ν);

2) oppure esistono superficie Ψ^ν irriducibili passanti per la curva ψ_1^ν, e formano un sistema lineare di dimensione $r_{\nu-1}+1$ (perchè una di queste Ψ^ν costretta a passare per un ulteriore punto del piano γ_1, si spezza in γ_1 ed in una $\Psi^{\nu-1}$); questo caso si presenta certo quando è $\nu \geqq l$, perchè per tali valori di ν le superficie Ψ^ν segano sul piano generico γ_1 il sistema di *tutte* le curve aggiunte ψ_1^ν.

Ciò vale anche se la curva ψ_1^ν da cui si parte si spezza in una curva ψ_1^{n-3} d'ordine $n-3$ aggiunta generica alla f e in una retta g del piano γ_1 contata $\nu-(n-3)$ volte; nel qual caso la ψ_1^ν sarà indicata brevemente con $\bar{\psi}_1^\nu$.

Ora per la retta g conduciamo un secondo piano generico γ_2, e su questo fissiamo una curva d'ordine $n-3$ aggiunta generica alla corrispondente sezione di F,

[1] Nöther « *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens* ... » (Mathem. Annalen, 8). Qui, seguendo il sig. Enriques « *Introduzione* ... » § 1, facciamo distinzione tra *superficie* (della quale si intendono dati i caratteri proiettivi, ordine, spazio cui appartiene ...) ed *ente algebrico* ∞^2, che è li tipo della *classe* costituita da tutte le superficie riferibili birazionalmente tra loro.

e consideriamo la curva $\overline{\varphi}_2{}^\nu$ composta di quell'aggiunta e della retta g contata $\nu-(n-3)$ volte. Se esistono superficie Ψ^ν passanti per $\overline{\varphi}_1{}^\nu$ e $\overline{\varphi}_2{}^\nu$, queste o si spezzano tutte nei due piani γ_1, γ_2 ed in una $\Psi^{\nu-2}$ generica, ed in tal caso formano un sistema $\infty^{r_{\nu-2}}$; oppure non si spezzano tutte, e allora (si vede come nel caso 2)) formano un sistema la cui dimensione supera di una unità la dimensione del sistema delle superficie $\Psi^{\nu-1}$ che passano per la curva $\overline{\varphi}_1{}^{\nu-1}$, ottenuta dalla $\overline{\varphi}_1{}^\nu$ sopprimendo una volta la retta g. Quest'ultimo caso si presenta quando $\nu \geqq l+1$, perchè allora le $\infty^{r_{\nu-2}+1}$ superficie Ψ^ν che passano per la curva data $\overline{\varphi}_1{}^\nu$ e quindi (semplicemente) per la retta g, segano sul piano γ_2 (che appartiene ad $\infty^{r_{\nu-2}+1}$ tra esse) fuori di g il sistema completo delle curve aggiunte $\psi^{\nu-1}$ (poichè $r_{\nu-1}+1-(r_{\nu-2}+1)-1=\varrho_{\nu-1}$); vi sarà quindi tra quelle superficie Ψ^ν passanti per la curva $\overline{\varphi}_1{}^\nu$ una superficie irriducibile passante inoltre per la curva $\overline{\varphi}_2{}^\nu$ fissata su γ. Ma un ragionamento analogo mostrerebbe l'esistenza di superficie Ψ^ν passanti per $\overline{\varphi}_1{}^\nu$ e $\overline{\varphi}_2{}^\nu$ anche nella ipotesi $\nu=l$, purchè fosse $\delta_{l-1} \leqq 1$.

Più in generale per questa via si vedrebbe che fissate comunque su $\nu-k (\geqq 0)$ piani per la retta g altrettante curve $\overline{\varphi}^\nu$ (composte di ψ^{n-3} prese insieme con g contata $\nu-n+3$ volte), esistono certo superficie Ψ^ν le quali passano per quelle curve senza contenere i loro piani, quando $k \geqq l-1$. Anzi esistono superficie Ψ^ν siffatte anche per $k=l-2$ se $\nu \geqq l+\delta_{l-1}-1$; e per valori superiori di ν si troverebbero in corrispondenza valori inferiori di $k (\geqq n-4)$.

Al metodo di induzione suggerito da questi esempi, è preferibile sostituire, quando si vogliano trovare relazioni generali tra ν e k, il metodo ricorrente che ora esporrò.

Introduciamo anzitutto alcune notazioni. Condotti per la retta g $\nu-k$ piani, $\gamma_1 \ldots \gamma_{\nu-k}$ $(n-4 \leqq k \leqq \nu)$, e fissata su ciascuno di questi una curva $\overline{\varphi}^\nu$ indichiamo con $\Psi^{\nu,\nu-k}$ le superficie Ψ^ν che passano per le $\nu-k$ curve $\overline{\varphi}^\nu$, e con $r_{\nu,\nu-k}$ la dimensione del sistema lineare che quelle superficie formano [1]. Per $\nu (\geqq l)$ sufficientemente alto rispetto a k esistono certo (come segue dal nostro ragionamento) superficie $\Psi^{\nu,\nu-k}$ le quali non contengono i piani $\gamma_1 \ldots \gamma_{\nu-k}$ (e sono irriducibili); ma se tenendo fisso k facciamo decrescere ν, arriveremo finalmente ad un valore, che dipendendo esclusivamente da k indicheremo con $[k]$, tale che per $\nu \geqq [k]$ esistono ancora $\Psi^{\nu,\nu-k}$ irriducibili, mentre per $\nu < [k]$ *ogni* $\Psi^{\nu,\nu-k}$ si compone dei $\nu-k$ piani γ e di una delle $\infty^{r_k} \Psi^k$ [2].

In un caso particolare, quando $k=l-1$, la determinazione di $[k]=[l-1]$ si fa subito; in virtù di considerazioni precedenti si trova infatti

$$[l-1]=l. \tag{5}$$

Ma per i valori di k che avremo da considerare $(n-4 \leqq k < l-1)$, occorre premettere alcune relazioni tra i simboli introdotti.

Segue intanto dalla stessa definizione

$$r_{[k]-1,\,[k]-1-k}=r_k \quad , \quad (k \leqq l-1); \tag{6}$$

(1) Per $k=\nu$ si ha evidentemente $\Psi^{\nu,0} \equiv \Psi^\nu$, $r_{\nu,0}=r_\nu$.

(2) L'ultimo fatto si presenta certo se $\nu=l-1$ sicchè qualunque sia k è $[k]>l-1$.

perchè le superficie Φ d'ordine $[k]-1$ che segano su $[k]-1-k$ piani γ per g altrettante curve $\bar{\varphi}$, si compongono tutte dei piani γ presi insieme con una delle $\infty^{r_k}\,\Phi^k$.

Una seconda relazione si ottiene osservando che se $\nu \geqq [k]$, ed esistono quindi $\Phi^{\nu,\nu-k}$ irriducibili seganti i piani $\gamma_1 \dots \gamma_{\nu-k}$ lungo curve $\bar{\varphi}^\nu$ date, costringendo una di queste superficie a contenere un ulteriore punto del piano $\gamma_{\nu-k}$, la superficie si spezza nel piano stesso ed in una $\Phi^{\nu-1,\nu-1-k}$ che sega i piani $\gamma_1, \dots, \gamma_{\nu-1-k}$ in curve $\bar{\varphi}^{\nu-1}$ fisse; si ha dunque la relazione

$$r_{\nu,\nu-k} = r_{\nu-1,\nu-1-k} + 1 \qquad (\nu \geqq [k]).$$

Se in questa facciamo decrescere ν di una unità per volta finchè esso raggiunge il valore $[k]$, e sommiamo membro a membro le relazioni così ottenute, avremo, tenendo conto della (6)

$$\text{(7)} \qquad r_{\nu,\nu-k} = r_k - [k] + \nu + 1 \qquad (k \leqq l-1\ ,\ \nu \geqq [k]).$$

Per giungere ad un'ultima relazione osserviamo che le $\Phi^{\nu,\nu-k}$ (segando sui piani $\gamma_1, \dots, \gamma_{\nu-k}$ per la retta g curve $\bar{\varphi}^\nu$ che contengono la g contata $\nu-n+3$ volte) passano $\nu-k$ volte almeno per la retta g, quando $\nu-k \leqq \nu-n+3$, ossia quando $k \geqq n-3$. Quindi le $\Phi^{\nu,\nu-k}$, le quali formano un sistema di dimensione $r_{\nu,\nu-k}$, segano sopra un ulteriore piano $\gamma_{\nu-k+1}$ passante per g, curve d'ordine ν che si spezzano nella retta g contata $\nu-k$ volte (almeno) ed in curve ψ^k; e poichè il piano $\gamma_{\nu-k+1}$, se si stacca da una $\Phi^{\nu,\nu-k}$, dà per residuo una superficie $\Phi^{\nu-1,\nu-k}$, ne viene che il sistema delle nominate curve ψ^k ha la dimensione

$$r_{\nu,\nu-k} - r_{\nu-1,\nu-k} - 1.$$

In virtù della (7) (nelle ipotesi $\nu \geqq [k]$, $\nu-1 \geqq [k-1]$, $k \leqq l-1$), questa espressione può scriversi così:

$$r_k - r_{k-1} - ([k]-[k-1]),$$

od anche per le (1)

$$\varrho_k - \delta_k + 1 - ([k]-[k-1]).$$

D'altronde il nominato sistema delle curve ψ^k sul piano $\gamma_{\nu-k+1}$ è certo contenuto entro al sistema di *tutte* le curve ψ^k (aggiunte ad f), del quale sistema la dimensione è ϱ_k; dunque

$$-\delta_k + 1 - ([k]-[k-1]) \leqq 0$$

ossia

$$[k]-[k-1] \geqq 1 - \delta_k \qquad (n-3 \leqq k \leqq l-1).$$

Se in questa relazione attribuiamo successivamente a k i valori $n-3$, $n-2$, ..., $l-1$, e sommiamo le relazioni che così si ottengono, abbiamo in fine

$$[l-1]-[n-4] \geqq l-n+3 - \sum_{n-3}^{l-1} \delta_k$$

ossia per la (5) e (3)

$$\text{(8)} \qquad [n-4] \leqq n-3+\varDelta.$$

Interpretiamo questo risultato tenendo conto della definizione del simbolo $[k]$; troviamo che per ogni valore di $\nu \geqq [n-4]$, quindi certamente per ogni valore di $\nu \geqq n-3+\Delta$, esistono superficie irriducibili $\Phi^{\nu,\nu-n+4}$, vale a dire superficie Φ^ν le quali segano su ciascuno di $\nu-n+4$ piani scelti in un fascio, una curva $\overline{\varphi}^\nu$ generica assegnata (curva spezzata nell'asse del fascio contato $\nu-n+3$ volte e in un'aggiunta generica d'ordine $n-3$); l'asse del fascio è multiplo $\nu-n+3$ volte per quelle Φ^ν. Enunciamo il teorema limitandoci al valore $\nu = n-3+\Delta$; avremo la seguente proposizione:

Sia F una superficie algebrica irriducibile di ordine n (dello spazio ordinario), e sia Δ la differenza tra il genere geometrico ed il genere numerico della superficie. Condotti $\Delta+1$ piani di un fascio e fissata sopra ognuno di questi una curva generica di ordine $n-3$ aggiunta alla relativa sezione di F, esistono certo superficie aggiunte ad F di ordine $n-3+\Delta$, le quali passano Δ volte per l'asse del fascio e segano inoltre quei $\Delta+1$ piani lungo le curve fissate senza contenere i piani stessi.

Il ragionamento che precede, mentre dimostra che il teorema continua a valere quando al posto di Δ si sostituisca un numero $\delta > \Delta$, non esclude che possa valere anche per $\delta < \Delta$ (anzi vale certo per $\delta \geqq [n-4] - n + 3$). Così se le superficie aggiunte di ordine $n-3$ segano sulla curva sezione piana generica di F una serie lineare completa (vale a dire se $\delta_{n-3} = 0$), allora il teorema vale quando al posto di Δ si ponga 0, perchè in quel caso per ogni curva aggiunta ψ^{n-3} passa una superficie aggiunta Φ^{n-3} che non contiene il piano della curva.

3. Il teorema che precede ha carattere proiettivo; e si può estendere facilmente ad un qualsiasi sistema lineare di superficie definito da un gruppo base (di linee e punti) anche se le superficie non sono aggiunte ad una F. A noi però interessa non già questa estensione, ma piuttosto un corollario del teorema che può enunciarsi sotto forma invariantiva per trasformazioni birazionali della F.

Riprendiamo perciò la superficie F, le superficie aggiunte Φ ed il corrispondente $\Delta = p_g - p_n$; fissata poi una retta generica g conduciamo per essa $\Delta+1$ piani $\gamma_1 \dots \gamma_{\Delta+1}$ e su ciascuno fissiamo una curva ψ^{n-3}; coll'avvertenza questa volta che le $\Delta+1$ curve ψ^{n-3} passino tutte per certi punti $a_1, a_2 \dots a_{m-1}$ fissati sulla retta g. Allora ogni superficie $\Phi^{n-3+\Delta}$ la quale (secondo il teorema precedente) passi Δ volte (almeno) per la retta g e seghi inoltre i piani $\gamma_1 \dots \gamma_{\Delta+1}$ lungo le curve ψ^{n-3} prefisse senza contenere i piani stessi, avrà, questa volta, la molteplicità $\Delta+1$ (almeno) in ciascuno dei punti $a_1 \dots a_{m-1}$; e quindi segherà ogni altro piano per g, nella retta g contata Δ volte ed inoltre in una curva ψ^{n-3} passante per i punti $a_1 \dots a_{m-1}$.

Ciò premesso si consideri la più generale superficie di ordine $n-3+\Delta$ aggiunta ad F, costretta inoltre a passare Δ volte per una retta generica g e $\Delta+1$ volte per i punti $a_1 \dots a_{m-1}$ fissati ad arbitrio su g. La curva di ordine $n-3$ che quella superficie sega (fuori di g) sopra un piano generico γ condotto per g è la più generale curva ψ^{n-3} (aggiunta alla sezione di F con γ) che passi per i punti $a_1 \dots a_{m-1}$; poichè fissate comunque sopra una, anzi sopra $\Delta+1$ posizioni di γ altrettante curve ψ^{n-3} passanti pei punti $a_1 \dots a_{m-1}$, si sa già che per quelle passa una superficie $\varphi^{n-3+\Delta}$ del tipo nominato.

Ora sopra $\Delta + 1$ posizioni del piano γ accada che *ogni* curva ψ^{n-3} passante per i punti fissi $a_1 \dots a_{m-1}$ di g venga a passare in conseguenza per un ulteriore punto fisso a_m; allora dovrà a_m riuscire multiplo secondo $\Delta + 1$ per *ogni* superficie $\varphi^{n-3+\Delta}$ la quale passi Δ volte per la retta g, e $\Delta + 1$ volte per i punti $a_1 \dots a_{m-1}$; e quindi sopra *ciascuna* posizione generica di γ ogni curva ψ^{n-3} passante per i punti $a_1 \dots a_{m-1}$, andrà a passare in conseguenza pel punto a_m.

Questo risultato acquista una particolare importanza quando i punti $a_1 \dots a_{m-1}$, a_m di g stanno anche su F ($m \leqq n$). Consideriamo infatti una sezione f di F ottenuta con un piano γ per g; se accade che tutte le curve ψ^{n-3} (aggiunte ad f) le quali passano per i punti $a_1, \dots, a_{m-1}$ di f, passino in conseguenza per un ulteriore punto a_m di f, allora (per il teorema di Riemann-Roch) risulta che i punti $a_1 \dots a_{m-1}$, a_m costituiscono un gruppo di una serie speciale g_m^1 appartenente alla curva f; e viceversa. Abbiamo dunque il teorema:

Se m tra le intersezioni di una superficie con una retta generica costituiscono un gruppo di una serie (speciale) g_m^1 su ciascuna di $p_g - p_n + 1$ sezioni della superficie ottenute con piani per la retta, altrettanto accade sopra ogni altra sezione della superficie con un piano per quella retta.

O sotto forma invariantiva:

Se un ente algebrico ∞^2 di generi p_g, p_n possiede un sistema lineare semplice di curve, ed accade che un gruppo di punti scelti tra le intersezioni variabili di due curve del sistema appartenga ad una serie speciale ∞^1 su ciascuna di $p_g - p_n + 1$ curve del fascio determinato da quelle due, allora lo stesso fatto si verifica sopra ogni altra curva di quel fascio.

4. In casi particolari si può giungere a teoremi anche più espressivi; mi limiterò ad un esempio notevole.

Sopra un ente algebrico si abbia un sistema lineare |C| almeno ∞^2 di curve C di genere π (> 1); e sia |C′| il sistema *aggiunto a* |C| (di rango 0) (sistema le cui curve segano gruppi della serie canonica $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$ sulla curva C generica).

Se accade che |C′| seghi *tutta* la serie canonica su C, allora la condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo di m ($\leqq \pi$) punti di C appartenga ad una serie speciale g_m^1 su C è (pel teorema di Riemann-Roch) che quel gruppo presenti $m - 1$ condizioni soltanto (ad ogni gruppo della serie canonica e quindi) ad ogni curva C′ che debba contenerlo. Ne vien subito che se per un gruppo di una g_m^1 speciale giacente sulla curva generica C passano altre (e quindi infinite) curve di |C|, su ciascuna di esse esisterà una serie speciale g_m^1 contenente quel gruppo. Dunque:

Se il sistema aggiunto ad un sistema lineare |C| almeno ∞^2 sopra un ente algebrico ∞^2 sega sulla curva C generica la serie canonica completa, un gruppo di C il quale appartenga ad una serie speciale ∞^1 su C, appartiene ad una serie analoga su ciascuna altra curva di |C| passante per esso.

Il teorema si applica per es. ad ogni sistema lineare (semplice) sopra un ente algebrico avente i due generi p_g, p_n uguali; perchè allora, come fu osservato, è $\delta_{n-3} = 0$.

5. La osservazione del n. precedente fu dedotta da proprietà notissime delle curve algebriche, e non dai risultati più generali ottenuti nei n. 2, 3.

Ora noi partiremo appunto da quella osservazione per dimostrare un teorema fondamentale nella teoria delle superficie algebriche.

Sia ancora F una superficie di ordine n dello spazio ordinario; noi questa volta faremo la ipotesi che F sia priva di punti multipli *isolati*, tali cioè da abbassare il genere di una sezione piana di F ottenuta con un piano passante per uno qualunque di essi; in altre parole supporremo che *ogni* piano dello spazio seghi la F lungo una curva di genere *costante* $\pi > 0$ (anche se il piano è tangente, nel qual caso si intenderà convenientemente fissata la connessione della curva sezione nel punto di contatto ([1])).

Facciamo ora una seconda ipotesi su F: che le superficie φ^{n-3} aggiunte ad F seghino sulla sezione piana generica f di F (e quindi sopra ogni sezione piana di F) la serie canonica completa $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$. Con ciò veniamo intanto ad escludere il caso che F sia rigata, poichè una rigata di ordine n non ammette superficie aggiunte di ordine $n-3$; per una retta generica non passeranno dunque piani secanti la F lungo curve riducibili.

Ma un'altra osservazione segue pure dalla seconda ipotesi. Si consideri una sezione piana f di F, e la serie g_n^2 che le rette del piano segano su f, *serie caratteristica* del sistema ∞^3 costituito dalle sezioni piane di F. Questa serie può non esser completa; e certo non lo è se il sistema lineare *normale* di curve, al quale appartengono le sezioni piane di F, ha la dimensione $r > 3$, poichè in tal caso la g_n^2 è contenuta nella serie caratteristica del sistema normale, serie che ha lo stesso ordine n e la dimensione uguale a $r-1 > 2$. In ogni caso indichiamo con g_n^s $(s \geqq 2)$ la serie completa che contiene g_n^2. Allora, pel teorema di Riemann-Roch, il gruppo delle n intersezioni della curva f con una retta generica g del suo piano presenta $n-s$ condizioni ad un gruppo della serie canonica $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$, o, ciò che fa lo stesso, ad una superficie φ^{n-3} che debba contenere le n intersezioni. Si possono quindi scegliere, tra queste, $n-s-1$ punti $b_1, b_2 \dots b_{n-s-1}$, i quali presentino condizioni tutte indipendenti ad una φ^{n-3} che debba contenerli, e siano in conseguenza tali che la φ^{n-3} generica per essi non contenga tutta la retta g. Non esistono allora piani per g sui quali quei punti $b_1 \dots b_{n-s-1}$ formino parte di una serie speciale almeno ∞^1 (cfr. n. 4).

Ciò premesso proponiamoci di costruire il sistema lineare normale contenente il sistema ∞^3 delle sezioni piane di F. Il *Restsatz* sulle superficie ([2]) ci dà il modo di costruire il nominato sistema normale. Si conduca una superficie φ_0^{n-3} aggiunta ad F di un certo ordine $n-3$, la quale ci conviene di supporre che passi per i punti $b_1 \dots b_{n-s-1}$ già fissati tra le intersezioni di g con F. La φ_0^{n-3} sega la superficie F (fuori delle linee multiple di questa) in una curva di ordine $2\pi-2$ che indicheremo

([1]) Enriques « *Introduzione* . . . » Cap. I.

([2]) Il teorema a cui si allude è dovuto al sig. Nöther « *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens* . . . » (Mathem. Annalen, Bd. VIII); nella forma sotto cui qui lo si adopera viene esposto dal sig. Enriques « *Introduzione* . . . » § 35.

con C_0. Allora il sistema di tutte le superficie aggiunte di ordine $n-2$ che passano per C_0 e che indicheremo perciò con Ψ_0^{n-2}, segherà ulteriormente su F il sistema *normale* di curve contenente il sistema delle sezioni piane di F; e precisamente ogni curva del sistema normale verrà segata da una Ψ_0^{n-2}.

Noi vogliamo dimostrare che il detto sistema normale (ossia il sistema delle Ψ_0^{n-2}) ha la dimensione $s+1$, e determina dunque sopra ogni sua curva una serie caratteristica g_n^s *completa*. Ora, poichè una retta generica g appartiene ad ∞^1 superficie Ψ_0^{n-2} (spezzate nella Ψ_0^{n-3} ed in un piano generico per g), tutto si riduce a dimostrare che fissati $s-1$ punti generici $a_1\ a_2 \dots a_{s-1}$ su g (dei quali a_1 almeno supporremo non appartenga alla superficie Ψ_0^{n-3}), esistono ∞^2 superficie Ψ_0^{n-2} passanti per essi; una delle quali rimane individuata quando ne sia assegnato il piano tangente α_1 in a_1.

Proviamoci a costruire la superficie Ψ_0^{n-2} che passa per i punti $a_1 \dots a_{s-1}$ di g e tocca in a_1 il piano α_1. La sezione della superficie con un piano generico γ per g sarà una curva ψ_0^{n-2} aggiunta alla sezione f di F, passante per il gruppo $G_{2\pi-2}$ sezione di C_0 con γ (al qual gruppo appartengono pure i punti $b_1 \dots b_{n-s-1}$ di g) ed inoltre per i punti $a_1 \dots a_{s-1}$ di g, e finalmente tangente in a_1 alla retta $\alpha_1 \gamma$. Ora esiste infatti su γ una ed una sola curva ψ_0^{n-2} soddisfacente alle nominate condizioni; perchè le curve aggiunte ψ_0^{n-2} che passano pel gruppo $G_{2\pi-2}$ segano (in virtù del Restsatz sulle curve piane) la serie completa g_n^s sulla f, e formano un sistema ∞^s a cui appartiene la curva $\psi_0^{n-3}+g$ (essendo ψ_0^{n-3} la sezione della Ψ_0^{n-3} con γ); sicchè una tra le curve ψ_0^{n-2} è individuata da $s-1$ punti di g e dalla tangente in uno di essi. Facciamo variare il piano γ intorno a g (lasciando fissi i punti $a_1 \dots a_{s-1}$ ed il piano α_1 per a_1), e su ciascuna posizione di γ costruiamo la corrispondente curva ψ_0^{n-2}. Il luogo di queste ∞^1 ψ_0^{n-2} sarà una superficie Ψ_0 il cui ordine, come ora dimostreremo, è $n-2$. Pel momento possiamo affermare soltanto che la superficie Ψ_0 ha un certo ordine $n-2+\delta$ $(\delta \geqq 0)$, e passa δ volte per la retta g e $\delta+1$ volte per i punti $a_1 \dots a_{s-1}$, $b_1 \dots b_{n-s-1}$ di g.

Supponiamo, se è possibile, $\delta > 0$. Allora in un punto generico a_s di g la superficie Ψ_0 avrà δ piani tangenti passanti per g; uno qualsiasi γ tra questi segherà Ψ_0 (oltre che in g contata δ volte) in una curva ψ_0^{n-2} passante per gli $n-1$ punti $a_1 \dots a_{s-1}$, a_s, $b_1 \dots b_{n-s-1}$ di g e tangente inoltre al piano α_1 in a_1. La ψ_0^{n-2} si spezzerà quindi nella retta g ed in una ψ^{n-3} aggiunta ad f, passante per a_1 ed avente in comune colla ψ_0^{n-3} (sezione di Ψ_0^{n-3}) quei punti del gruppo $G_{2\pi-2}$ (sezione di C_0) che non cadono sopra g. Le due curve ψ^{n-3}, ψ_0^{n-3} certo distinte (poichè la prima e non la seconda passa per a_1) determinano un fascio di curve, il quale sega sulla curva f una serie g^1_{n-s-1} a cui appartiene il gruppo $b_1 \dots b_{n-s-1}$. Ora ciò non è possibile poichè quel gruppo fu appunto scelto in modo da non appartenere ad una siffatta serie lineare. Dunque è assurda l'ipotesi $\delta > 0$.

Concludiamo in conseguenza che il sistema delle Ψ_0^{n-2}, e quindi il sistema normale $|C|$ contenente le sezioni piane di f, ha la dimensione $s+1$; e la *serie caratteristica dell'ultimo sistema è completa.*

Il teorema a cui siamo giunti può enunciarsi nel seguente modo sotto forma invariantiva:

Un sistema lineare normale di curve (semplice, irriducibile, privo di curve fondamentali proprie) sulla cui curva generica il sistema aggiunto seghi la serie canonica completa, ha pure la serie caratteristica completa.

Qui per curva fondamentale *propria* di un sistema ∞^r si deve intendere una curva fondamentale il cui sistema residuo ∞^{r-1} abbia il genere (della curva generica) inferiore al genere del sistema primitivo.

6. Un primo corollario del teorema ci dà, sotto la forma più semplice, la condizione affinchè un ente algebrico abbia il genere geometrico uguale al genere numerico.

Consideriamo sopra l'ente un sistema lineare $|C|$ irriducibile, semplice, normale, privo di curve fondamentali proprie, e formiamone i sistemi aggiunti di rango $\geqq 0$, che indicheremo con $|C'_0|, |C'_1| \dots, |C'_k| \dots$; per definizione il sistema aggiunto di rango $k\,|C'_k|$ non è altro che il sistema normale somma dell'aggiunto di rango $0\,|C'_0|$ e del sistema primitivo $|C|$ ripetuto k volte. Dunque la serie lineare che $|C'_k|$ sega sulla curva generica C di $|C|$ contiene la *somma minima* (¹) della serie segata da $|C'_0|$ su C, e della serie segata da $|C|$ su C, quest'ultima ripetuta k volte. Supponiamo ora che il sistema aggiunto $|C'_0|$ seghi su C la serie canonica *completa* $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$; allora pel teorema del n. 5 è pur completa la serie segata da $|C|$ su C, cioè la *serie caratteristica* di $|C|$, che indicheremo con g_n^s. D'altra parte si dimostra facilmente che sopra una curva la somma minima della serie canonica $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$ e di una seconda serie *completa* qualsiasi g_n^s ripetuta $k (\geqq 1)$ volte, è essa stessa una serie completa (²); dunque nel caso nostro è pur completa la serie segata su C dal sistema aggiunto a $|C|$ di rango $k \geqq 0$. Ne viene che la differenza $p_g - p_n$ (somma delle deficienze delle serie segate su C dai sistemi aggiunti di rango $\geqq 0$) è nulla. Si ha quindi il teorema:

Se sopra un ente algebrico esiste un sistema lineare di curve (semplice, irriducibile, privo di curve fondamentali proprie) il cui aggiunto seghi sulla curva generica del sistema primitivo la serie canonica completa, l'ente ha il genere geometrico uguale al genere numerico; ed in conseguenza sulla curva generica di ogni altro sistema di curve (irriducibile) sull'ente il corrispondente aggiunto sega la serie canonica completa.

(¹) Per *somma minima* di due o più serie appartenenti ad una stessa curva si intende la serie lineare di minima dimensione che contiene tutti i gruppi ottenuti prendendo un gruppo da ciascuna delle serie date e riunendoli. Questa definizione si trova nella mia Nota « *Sui multipli di una serie lineare...* » n. 1 (Rendic. Circolo Matem. di Palermo, t. VII).

(²) Indichiamo infatti con $g^{\pi-1}_{2\pi-2}+kg_n^s$ quella somma minima e con σ_k la sua dimensione. Poichè nel gruppo Γ generico di g_n^s, $n-s$ punti arbitrari presentano condizioni indipendenti ad un gruppo della serie canonica $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$, che debba contenerli, mentre s punti arbitrari di Γ presentano condizioni indipendenti ad un gruppo di g_n^s che debba contenerli, segue che il gruppo Γ presenta ad un gruppo della serie somma $(g^{\pi-1}_{2\pi-2}+kg_n^s)$ $n-1$ od n condizioni (almeno) secondo che $k=1$, o >1; (si veda in proposito la mia Nota sopra citata; n. 2, 3). Da ciò si deducono le relazioni

$$\sigma_1-\sigma_0 \geqq n-1\ ,\ \sigma_k-\sigma_{k-1} \geqq n \quad (k>1),$$

donde si trae

$$\sigma_k \geqq \sigma_0+kn-1$$

ossia

$$\sigma_k \geqq kn+\pi-2 \quad (k \geqq 1).$$

L'esistenza del primo sistema dà quindi la condizione necessaria e sufficiente affinchè i due generi dell'ente siano uguali [1].

7. Ma il corollario più importante del teorema 5 si ottiene ricordando che sopra un ente algebrico ∞^2 il cui genere geometrico uguagli il genere numerico, il sistema aggiunto ad un sistema lineare qualsiasi sega sulla curva generica di questo la serie canonica completa. Segue che sopra un siffatto ente algebrico ogni sistema lineare normale di curve, il quale sia *semplice, privo di curve fondamentali proprie*, ha la serie caratteristica completa. Ora è notevole il fatto che le due restrizioni sottolineate non sono necessarie: il teorema vale per ogni sistema lineare normale almeno ∞^2 di curve irriducibili. Per veder ciò non conviene seguire il procedimento che ci ha condotto al teorema del n. 5, chè si incontrerebbero serie difficoltà; ma piuttosto conviene di applicare al teorema stesso un metodo che in un caso analogo ha servito al sig. Enriques [2].

In uno spazio elevato S_r a $r (\geqq 3)$ dimensioni costruiamo una superficie F che non abbia punti multipli e sia in corrispondenza birazionale colla data. Il sistema di curve dato, normale, almeno ∞^2, verrà rappresentato su F da un sistema $|C|$ dotato eventualmente di punti base; nei quali soltanto possono cadere i punti multipli della curva generica C del sistema (se esistono). Ora si può facilmente costruire un sistema lineare di varietà V a $r-1$ dimensioni di ordine abbastanza elevato e comportantisi in tal guisa nei punti multipli base del sistema $|C|$, che le V seghino sulla curva C generica una serie completa [3]; la serie stessa sarà pure segata su C dal sistema normale $|K|$ di curve a cui appartengono le intersezioni delle V con F. Consideriamo ancora il sistema normale $|D| = |K - C|$ residuo di $|C|$ rispetto a $|K|$: scegliendo l'ordine delle V abbastanza alto noi possiamo sempre ottenere che il sistema $|D|$ sia semplice (di dimensione > 2) e sia privo di curve fondamentali, perchè si può ottenere ad es. che $|D|$ contenga come curve parziali le sezioni iperpiane di F. Soddisfatte queste condizioni, trasformiamo birazionalmente la superficie F in un'altra superficie F' appartenente ad uno spazio S_s (se s è la dimensione del sistema $|K|$), sulla quale gli iperpiani S_{s-1} seghino il sistema corrispondente a $|K|$; e indichiamo con $|C|$ e $|D|$ i due sistemi in F' immagini di quelli cui spettavano gli stessi simboli su F. Siano S_c, S_d gli spazi a cui appartengono rispettivamente una C ed una

Ora l'ordine della serie somma $g^{\pi-1}_{2\pi-2} + k g_n^{r}$ è $kn + 2\pi - 2$; dunque la dimensione σ_k non può superare $kn + \pi - 2$, e se uguaglia questo valore (come qui è il caso) la serie somma è completa.

(1) Il sig. Enriques nelle sue « *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche* » (III, n. 2) stabilisce la condizione affinchè sia $p_g = p_n$ sotto un'altra forma; colà si esige infatti, che sia $|C|$ il sistema doppio di un altro sistema esistente sull'ente. Il procedimento qui tenuto differisce da quello seguito dal sig. Enriques, solo in ciò che noi abbiamo potuto approfittare del teorema del n. 5.

(2) « *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche* » (IV, 1).

(3) Intorno alla esistenza del sistema delle V si veda la mia Nota sopra citata « *Sui multipli di una serie lineare* . . . » n. 9.

D generica di F′; risulta anzitutto da una delle ipotesi fatte sul sistema $|K|$ che la C è una curva *normale* entro a S_c (1). E poichè $|C|$ e $|D|$ sono mutuamente residui rispetto a $|K|$, risulta che il sistema $|C|$ è segato sulla F′ dagli iperpiani S_{r-1} passanti per D, mentre $|D|$ è segato dagli iperpiani passanti per C. Sicchè la serie caratteristica di $|C|$ è segata sulla C di S_c dagli spazi S_{c-1} che passano per lo spazio intersezione di S_c ed S_d, spazio che indicheremo con S_i; e similmente la serie caratteristica di $|D|$ è segata sulla D di S_d dagli S_{d-1} passanti per S_i. Ora se lo spazio S_i è individuato dai punti che esso sega su F′, punti comuni alle due curve C e D, gli spazi S_{c-1} per S_i segano sulla C, normale in S_c, una serie *completa* (2) che è precisamente la serie caratteristica di $|C|$; più in generale se le intersezioni di S_i con F′ individuano soltanto uno spazio $S_{i-\delta}$ ($\delta \geqq 0$), la serie segata su C dagli S_{c-1} per S_i, che è la serie caratteristica di $|C|$, ha la deficienza δ. Per la stessa ragione, e tenendo conto inoltre del fatto che la curva D di S_d può non essere normale, si conclude che la deficienza della serie caratteristica di $|D|$ è $\geqq \delta$. D'altronde il sistema normale $|D|$ è per ipotesi semplice (almeno ∞^3), privo di curve fondamentali proprie, e ad esso quindi è applicabile il teorema del n. 5, il quale afferma che la serie caratteristica di $|D|$ è completa; dunque è $\delta = 0$, e si ha il teorema:

Sopra un ente algebrico ∞^2 avente il genere geometrico uguale al genere numerico, ogni sistema lineare normale almeno ∞^2 di curve irriducibili ha la serie caratteristica completa (3).

8. Ora si può chiedere se un teorema analogo al precedente valga per gli enti algebrici aventi $p_g > p_n$.

Senza affrontare pel momento la difficile questione (4), ci limiteremo a mostrare che sopra un ente algebrico di generi p_g, p_n esistono sempre sistemi lineari di cui la serie caratteristica ha una deficienza non inferiore alla differenza $p_g - p_n$.

Riprendiamo perciò una superficie F dello spazio S_r ($r \geqq 3$) che sia priva di punti multipli, e sia in corrispondenza birazionale coll'ente algebrico dato; indichiamo

(1) Vale a dire che C non può ottenersi come proiezione da una curva dello stesso ordine appartenente a S_{c+1}.

(2) Infatti sopra una curva normale di S_c tutti gli S_{c-1} passanti per uno o più punti fissi della curva segano una serie completa, che è la residua di quei punti fissi rispetto alla serie completa segata sulla curva da tutti gli iperpiani di S_c.

(3) Sotto forma proiettiva il teorema può enunciarsi così: *Se una superficie di genere geometrico uguale al genere numerico è normale per uno spazio ad r dimensioni* S_r (vale a dire, appartiene ad S_r ma non è proiezione di una superficie dello stesso ordine appartenente ad S_{r+1}), *le curve sezioni iperpiane* (con S_{r-1}) *della superficie sono pure normali*. — Il sig. Enriques, nelle sue « *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche* » (IV, 1) dà il risultato del testo aggiungendo però alla ipotesi $p_g = p_n$ quella che sia completa la serie caratteristica del sistema canonico (segato sopra la superficie supposta d'ordine n in S_3 dalle superficie aggiunte d'ordine $n - 4$). Ora si è visto che l'ultima restrizione è superflua, perchè conseguenza della $p_g = p_n$. Ma rimane da esaminare se viceversa la ipotesi che sia completa la serie caratteristica del sistema canonico tragga con sè la relazione $p_g = p_n$, e quindi l'esser completa la serie caratteristica di ogni altro sistema normale sulla superficie.

(4) Si veda a questo proposito una nota all'introduzione del presente lavoro.

questa volta con $|C|$ il sistema delle sezioni iperpiane di F (sistema che diremo *non singolare* perchè la corrispondente superficie F è priva di punti multipli); e siano π il genere della sezione generica C ed n l'ordine di F. Consideriamo poi sopra F i sistemi $|C_0'|, |C_1'| \dots |C'_k| \dots$ aggiunti a $|C|$ dei successivi ranghi $0, 1, \dots k \dots$, ed indichiamo con s_k, π_k, n_k la dimensione, il genere ed il grado (numero delle intersezioni variabili di due curve) di $|C_k'|$. Per definizione $|C_0'|$ è il più vasto sistema secante gruppi della serie canonica sopra la curva generica C di $|C|$, mentre $|C'_k|$ è definito dalle relazioni

$$|C'_k| = |C'_0 + kC| = |C'_1 + (k-1)\,C| = \dots = |C'_{k-1} + C|.$$

Dunque la serie che $|C'_k|$ sega sulla curva C è una $g_{2\pi-2+kn}$ (somma della serie canonica e della serie caratteristica, quest'ultima ripetuta k volte).

La dimensione di questa serie vale $s_k - s_{k-1} - 1$, dove per $k=0$ al posto di s_{-1} si deve porre la dimensione $p_g - 1$ del sistema canonico $|K|$ sulla superficie F (sistema residuo di $|C|$ rispetto a $|C'_0|$).

D'altra parte quella serie $g_{2\pi-2+kn}^{s_k - s_{k-1} - 1}$ è contenuta in una serie completa la cui dimensione è $\pi - 2 + kn$ per $k > 0$, e $\pi - 1$ per $k = 0$; indicando perciò con ε_k la deficienza della prima serie (numero che al n. 1 fu indicato con δ_{n-3+k}) si ha

$$\begin{aligned} s_k - s_{k-1} - 1 &= \pi - 2 + kn - \varepsilon_k \qquad (k>0) \\ s_0 - p_g \quad &= \pi - 1 - \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Scrivendo nella prima relazione al posto di k i successivi valori $k, k-1, \dots, 1$, e aggiungendo le uguaglianze che così si ottengono all'ultima, avremo

$$s_k = p_g + (k+1)(\pi - 1) + \frac{k(k+1)}{2}\,n - \sum_0^k \varepsilon_k .$$

Ora se k è scelto così grande che la serie segata da $|C'_k|$ (ed anche da $|C'_{k-1}|$ per ciò che poi si dovrà dire) sulla curva C sia completa (il che è sempre possibile, n. 1) allora $\sum_0^k \varepsilon_k$ è la somma delle deficienze di tutte le serie segate su C dai sistemi aggiunti di rango $\geqq 0$; si ha dunque (n. 1)

$$\sum_0^k \varepsilon_k = p_g - p_n$$

e quindi sostituendo

$$s_k = p_n + (k+1)(\pi - 1) + \frac{k(k+1)}{2}\,n , \tag{9}$$

relazione la quale ci esprime la dimensione del sistema $|C'_k|$ in funzione di k e dei caratteri di $|C|$ e di F.

Ora noi vogliamo procurarci una relazione tra il genere π_k ed il grado n_k di $|C'_k|$ ed i caratteri di $|C|$.

Consideriamo perciò il sistema aggiunto (di rango 0) a $|C'_k|$ che noi indicheremo con $|C''_k|$.

Poichè $\qquad |C'_k| = |C'_{k-1} + C|$

e poichè inoltre il sistema $|C'_{k-1}|$ non ha punti base sulla superficie F le cui sezioni iperpiane costituiscono il sistema $|C|$ (1), ne viene, in virtù della proprietà caratteristica del sistema aggiunto (2), che

$$\text{aggiunto a } |C'_k| = |C'_{k-1}| + \text{aggiunto a } |C|$$

ossia

$$|C''_k| = |C'_{k-1} + C'_0|.$$

Da questa si deduce subito aggiungendo ai due membri il sistema $|(k+1)\,C|$ (costituito da $|C|$ ripetuto $(k+1)$ volte)

$$\begin{aligned} |C''_k + (k+1)\,C| &= |(C'_{k-1} + C) + (C'_0 + kC)| \\ &= |2C'_k|. \end{aligned}$$

Ora una curva del sistema $|C''_k + (k+1)\,C|$ sega sopra una curva generica di $|C'_k|$ un gruppo di

$$(2\pi_k - 2) + (k+1)(2\pi - 2 + kn)$$

punti, poichè $2\pi_k - 2$ punti sono segati sull'ultima curva da una C''_k e $2\pi - 2 + kn$ punti sono segati da una C. Una curva di $|2C'_k|$ sega alla sua volta sulla curva generica di $|C'_k|$ un gruppo di $2n_k$ punti; si deve aver dunque

$$2n_k = 2\pi_k - 2 + (k+1)(2\pi - 2 + kn)$$

ossia (3)

$$n_k - \pi_k = (k+1)(\pi - 1) + \frac{k\,(k+1)}{2}\,n - 1 \tag{10}$$

(1) Se infatti $|C'_{k-1}|$ avesse un punto base sulla superficie F, sopra una curva generica C (sezione iperpiana di F) condotta per quel punto base il sistema $|C'_{k-1}|$ segherebbe una serie $g^{\pi-2+(k-1)n}_{2\pi-2+(k-1)n-1}$, e quindi la curva C dovrebbe avere il genere $< \pi$, ed il punto base sarebbe multiplo per F, contro la ipotesi fatta che F sia priva di punti multipli.

(2) La detta proprietà si enuncia così: Se $|C|$ e $|D|$ sono due sistemi lineari sopra un ente algebrico, il sistema $|C'|$ aggiunto al primo, sommato col secondo sistema $|D|$, dà un sistema $|C' + D|$ che forma parte del sistema aggiunto a $|C + D|$, e da esso differisce pel fatto che $|C' + D|$ ha come punti i .upli, anzichè $(i-1)$ .upli, quei punti dell'ente (se esistono) che sono base i . upli per $|D|$ ma non sono base per $|C|$. La dimostrazione di questo teorema, dovuto al sig. ENRIQUES, si trova nella citata « *Introduzione* ... » § 27.

(3) La formola (10) si potrebbe anche ottenere per la seguente via, che però non differisce in sostanza da quella seguita nel testo. Si consideri quella superficie F' di ordine n dello spazio ordinario che si ottiene dalla F con una proiezione. Sulla F' il sistema (proiezione di) $|C'_k|$ vien segato dalle superficie aggiunte di ordine $n - 3 + k$; quindi la curva generica del sistema ha come superficie aggiunte (nel senso di NÖTHER) le superficie di ordine $n + (n - 3 + k) - 4$ che passano in modo conveniente per le curve e i punti multipli di F'. Ora una di queste superficie presa insieme con $k + 1$ piani sega sopra una C'_k un gruppo di $2\pi_k - 2 + (k+1)(2\pi - 2 + kn)$ punti, gruppo equivalente al gruppo di $2n_k$ punti segato su C'_k dall'insieme di due superficie aggiunte ad F' di ordine $n - 3 + k$; di qua risulta subito la (10).

Paragonando colla (9) si ottiene

$$\pi_k - n_k + s_k - 1 = p_n \tag{11}$$

nella quale relazione compariscono soltanto i caratteri del sistema $|C'_k|$ (non più quelli di $|C|$) ed il genere numerico p_n della superficie.

Ora quando un sistema lineare di curve, normale, non speciale (cioè non contenuto nel sistema canonico $|K|$), comunque ottenuto, ha tali caratteri (grado, dimensione, genere) che tra essi e tra il genere numerico dell'ente su cui il sistema giace, passi una relazione del tipo (11), noi diremo che il sistema è *regolare*. Il ragionamento che precede dimostra *l'esistenza di infiniti sistemi regolari sopra l'ente*, ed anzi dà il modo di costruirne, perchè è *regolare ogni sistema che sia aggiunto di rango abbastanza alto ad un sistema non singolare.*

Per giungere al risultato che ci siamo proposti, rimane da dimostrare che *la deficienza della serie caratteristica di un sistema regolare non è inferiore alla differenza $p_g - p_n$ tra i generi geometrico e numerico dell'ente a cui il sistema appartiene.*

Consideriamo perciò un sistema regolare $|C|$ di grado n, dimensione s, e genere π (¹); sarà per definizione

$$\pi - n + s - 1 = p_n . \tag{11)'$$

La serie caratteristica del sistema è una g_n^{s-1} sopra una C di genere π; se con δ ne indichiamo la deficienza, essa è contenuta in una serie *completa* $g_n^{s-1+\delta}$ sulla C.

Ora o questa serie è non speciale, nel qual caso manca il sistema canonico $|K|$ sull'ente ed è $p_g = 0$ (²), ed allora si deve avere

$$n - (s - 1 + \delta) = \pi$$

ossia per la (11)'

$$\delta = - p_n = p_g - p_n .$$

Oppure la serie completa $g_n^{s-1+\delta}$ è speciale ed allora essa ammette una serie residua (rispetto alla $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$) di dimensione

$$\pi - 1 - n + (s - 1 + \delta) = p_n + \delta - 1 ;$$

d'altronde questa serie contiene (o coincide con) quella che il sistema canonico $|K|$ $\infty^{p_g - 1}$ sega sulla stessa curva C; si ha dunque

$$p_g - 1 \leqq p_n + \delta - 1$$

ossia

$$\delta \geqq p_g - p_n .$$

(¹) Per stare in armonia con ciò che precede si sarebbe dovuto scrivere $|C'_k|$, n_k, π_k, s_k; ma si è ommesso l'indice k perchè ormai basta sapere che il sistema è regolare, poco importando qual ne sia la legge di generazione.

(²) Il sistema canonico $|K|$ se esiste, sega per definizione sopra la curva generica di un sistema lineare $|C|$ una serie contenuta nella residua della serie caratteristica; se questa è non speciale, deve mancare $|K|$.

Con ciò l'ultimo teorema è completamente dimostrato; anzi si vede per incidenza dalla relazione (11)' che *sopra una superficie avente il genere geometrico e numerico nullo ogni sistema regolare ha la serie caratteristica (completa) non speciale.*

9. Le considerazioni precedenti, le quali mostrano l'esistenza di sistemi normali di curve le cui serie caratteristiche hanno la deficienza $\geqq p_g - p_n$ (sopra un ente di generi p_g, p_n) conducono alle seguenti proposizioni:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un ente algebrico ∞^2 *abbia il genere geometrico uguale al genere numerico è che ogni sistema lineare normale giacente sull'ente abbia la serie caratteristica completa.*

Un ente algebrico di genere geometrico e numerico zero è caratterizzato dal fatto che ogni sistema lineare normale sull'ente ha la serie caratteristica completa, e che inoltre esistono sull'ente sistemi lineari aventi la serie caratteristica non speciale.

10. Per mostrare la fecondità degli ultimi teoremi, esporrò qui una proprietà delle involuzioni tracciate sopra gli enti algebrici di genere geometrico uguale al genere numerico.

Supponiamo che le coordinate del punto generico di una superficie Φ si possano esprimere mediante funzioni razionali delle coordinate del punto generico di una superficie F; per modo che tra le superficie (od enti algebrici ∞^2) Φ ed F passi una corrispondenza algebrica $(1, n)$ dove supporremo $n > 1$. Ai punti di Φ corrispondono su F gruppi di n punti costituenti una involuzione I di ordine n; ad ogni sistema lineare di curve $|\Gamma|$ su Φ corrisponde su F un sistema lineare $|C|$ il quale *appartiene alla involuzione* I (è tale cioè che ogni C passante per un punto generico di F contiene in conseguenza tutti i punti del gruppo di I determinato dal primo punto). Ora se supponiamo che la F abbia il genere geometrico uguale al genere numerico, allora ogni sistema lineare normale su F ha la serie caratteristica completa (n. 7). Di qua, coll'identico ragionamento che adoperai in un precedente lavoro nella ipotesi che F fosse un piano [1], si dimostra che la stessa proprietà relativa all'esser completa la serie caratteristica appartiene pure alla superficie Φ, e si conclude quindi (n. 9) che Φ ha il genere geometrico uguale al genere numerico. Dunque:

Se tra due enti algebrici ∞^2 *passa una corrispondenza algebrica* $(1, n)$ *ed il secondo dei due enti ha il genere geometrico uguale al genere numerico, la stessa proprietà appartiene anche al primo ente.*

Od anche: *la proprietà di una superficie di aver il genere geometrico uguale al genere numerico si trasmette ad ogni superficie il cui punto generico abbia coordinate esprimibili razionalmente mediante le coordinate del punto generico della prima superficie* [2].

[1] « *Sulla razionalità delle involuzioni piane* »; Capitolo I, in particolare n. 10 (Mathem. Annalen, Bd. 44).

[2] Si aggiunga che, come risulta subito per via geometrica o trascendente, il genere geometrico dell'ente F su cui sta la involuzione è maggiore od eguale al genere geometrico dell'ente Φ involuzione.

Il teorema ha un corollario molto notevole. Supponiamo che una superficie F contenga una serie ∞^1 algebrica non razionale di curve, tale che per ogni punto generico di F passi una sola curva della serie; in breve su F giaccia un *fascio irrazionale* di curve K. Costruiamo su F un secondo fascio di curve, quest'ultimo razionale, il che in infiniti modi è possibile. I gruppi di punti intersezioni di una curva K con una curva del secondo fascio costituiscono come è chiaro una involuzione su F, tale che sopra ogni K sta una serie lineare ∞^1 di gruppi. In conseguenza i gruppi della involuzione possono rappresentarsi binnivocamente sopra una superficie rigata Φ le cui generatrici corrispondono elemento per elemento alle curve K (1). Il genere della serie delle generatrici di Φ uguaglia il genere del fascio delle K (considerando le K come elementi). Ora questo genere è per ipotesi un certo numero $\pi > 0$; dunque il genere geometrico $p_g = 0$, ed il genere numerico $p_n = -\pi$ di Φ sono diversi, e per conseguenza differiscono anche i due generi di F.

Si ha dunque il teorema:

Una superficie la quale contenga un fascio irrazionale di curve ha il genere geometrico diverso dal genere numerico; e quindi:

Sopra una superficie avente il genere geometrico uguale al genere numerico ogni fascio di curve è lineare.

Roma, Novembre 1894.

(1) Nöther « *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen* » (Mathem. Annalen, Bd. 3).

Sulle superficie di genere zero.

Memoria di GUIDO CASTELNUOVO

premiata dalla Società Italiana.

Nella *Geometria sopra una superficie algebrica* i primi enti che si incontrano sono quelli che possono porsi in corrispondenza birazionale con un piano, gli *enti (o superficie) razionali*, come brevemente li chiameremo. Sorge adunque sin dal principio la necessità di aver dei criteri per decidere se una data superficie sia razionale, oppur no.

Tali criteri variano naturalmente secondo i caratteri della superficie che si suppongono dati; e perciò possono dividersi in varie categorie.

D'ordinario si parte da un sistema lineare di curve di cui sia nota l'esistenza su quella superficie, e si chiede se la presenza di un siffatto sistema sia caratteristica per una superficie razionale. Ma i sistemi lineari sopra una superficie possono classificarsi in più guise; ed a queste corrispondono altrettanti gruppi di ricerche. Infatti si può far attenzione al *grado* del sistema, vale a dire al numero delle intersezioni variabili di due curve generiche di esso; ed allora si presentano, ad esempio, le ricerche sulla razionalità dei *piani doppi* (grado = 2) (1), delle superficie dello spazio ordinario dei primi ordini (grado = ordine = 2, 3... 6) (2), delle superficie di ordine n appartenenti allo spazio a $n+1$ o ad n dimensioni (3).

Si può invece tener conto dei caratteri invariantivi della curva generica del sistema (genere, serie lineare minima di gruppi appartenente a quella,...), e si affaccia allora

(1) Clebsch « *Ueber den Zusammenhang...* » (Math. Annalen, 3); Nöther « *Ueber die eindeutigen Ebenentransformationen* » (Sitzungsb. d. ph. med. Soc. zu Erlangen 1878).

(2) Si consultino i classici lavori di Cremona, Clebsch, Nöther, Sturm, Caporali..., dei quali le citazioni esatte si trovano raccolte nella Nota di quest'ultimo; « *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti...* » (Collectanea Mathematica, Milano 1881). Alla bibliografia sull'argomento va aggiunto il lavoro posteriore di Nöther « *Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung* » (Math. Annalen, Bd. 33).

(3) Del Pezzo « *Sulle superficie di ordine n immerse nello spazio di n+1 dimensioni* » (Rendic. Acc. di Napoli, 1885); « *Sulle superficie dell' n^{mo} ordine immerse nello spazio di n dimensioni* » (Rendic. Circolo Matem. di Palermo, t.° I).

una teoria la quale inaugurata da un notissimo teorema del Sig. Nœther (1), si è arricchita in questi ultimi anni di parecchi risultati (2).

Ma il problema della razionalità delle superficie può porsi sotto una forma ben diversa, la quale vien suggerita dalla questione analoga che si incontra nello studio delle curve algebriche. È noto infatti che nella geometria delle trasformazioni birazionali le superficie algebriche (come le curve) si sogliono classificare secondo i valori (interi) che assumono certi caratteri invariantivi della superficie, detti *generi* (3).

A tutte le superficie di una *classe* (superficie trasformabili birazionalmente l'una nell'altra) corrispondono determinati valori dei generi; ed in particolare alle superficie razionali corrispondono speciali valori che, con una scelta conveniente delle costanti, possono ritenersi tutti nulli. Viceversa l'aver nulli tutti i generi sarà una proprietà caratteristica delle superficie razionali? Si è indotti a farsi una simile domanda ricordando che un fatto analogo si presenta realmente per le curve; l'esser nullo il genere di una curva è condizione, non solo necessaria ma pur sufficiente, affinchè la curva sia razionale (4). Se la questione sopra enunciata è rimasta sinora senza risposta, ciò va attribuito alle grandi differenze che (accanto alle analogie) presentano le due teorie delle curve e delle superficie.

Una prima differenza si incontra subito nella definizione di *genere*. Per le curve (piane), come è noto, si sogliono dare due definizioni di questo carattere: la *definizione geometrica* (numero delle curve linearmente indipendenti di ordine $n-3$ aggiunte alla curva primitiva, supposta di ordine n), e la definizione *numerica* (numero calcolato in base ad una certa formola in cui compariscono l'ordine della curva primitiva e le molteplicità dei punti singolari che possiede); si dimostra però che le due definizioni conducono *sempre* ad uno stesso risultato (quando si considerano curve irreducibili). Le due definizioni si estendono, è vero, alle superficie, ma i due caratteri a cui esse conducono (*genere geometrico* p_g e *genere numerico* p_n) possono per

(1) « *Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen* » (Math. Annalen, 3).

(2) Razionalità delle superficie a sezioni ellittiche (Castelnuovo, Rendic. Acc. d. Lincei, gennaio 1894), a sezioni iperellittiche (Enriques, Rendic. Acc. d. Lincei, dicembre 1893); superficie contenenti una rete di curve ellittiche od iperellittiche (Castelnuovo, Rend. Acc. d. Lincei, maggio 1894). Per le superficie a sezioni di genere 3 alcuni risultati si trovano in una mia Nota pubblicata nei Rend. dell'Acc. di Torino 1890.

(3) Per la definizione di genere di un ente algebrico si veda Clebsch (Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc. 1868); Nöther (Math. Annalen 2, 8). Il nome di *genere* potrebbe anche estendersi ad ogni altro carattere invariantivo dell'ente che di sua natura fosse numero *intero*; condizione questa che distingue i generi dai *moduli*, i quali costituiscono pure dei caratteri invarianti dell'ente, ma possono variare con continuità quando si passa da un ente ad un altro.

(4) Teorema notissimo dovuto a Clebsch.

Si osservi qui il fatto notevole che mentre la classe delle curve e (come vedremo) delle superficie *razionali* è pienamente definita dai valori (nulli) dei *generi* (uno per le curve, due indipendenti per le superficie) ad essa corrispondenti, accade invece in generale che assegnati ai generi valori arbitrari (entro certi limiti) non rimane definita in corrispondenza una *unica classe* di enti, ma *infinite* classi le quali formano per così dire una varietà continua. Per determinare *una* classe entro questa varietà occorre inoltre assegnare i valori di quei caratteri detti *moduli* che variano con continuità da classe a classe.

le superficie esser distinti tra loro (¹). Per le superficie razionali si ha tuttavia $p_g = p_n = 0$; sicchè la questione di cui ci occupiamo può ora formularsi così: *È razionale ogni superficie avente nulli i due generi*, geometrico e numerico? Ad essa appunto è dedicato il presente lavoro.

Ecco quale via si presenta per risolverla. Stabilite le proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve sopra una superficie avente $p_g = p_n = 0$, si consideri un sistema lineare $|C|$ sulla superficie, e ad esso si applichi quella determinata operazione colla quale si passa da un sistema lineare al sistema aggiunto (²). Si ottiene così un sistema $|C'|$ *primo aggiunto* di $|C|$, al quale si applica di nuovo la operazione stessa; altrettanto si fa sul nuovo sistema $|C''|$ *secondo aggiunto* ottenuto in tal guisa, e così si continua finchè è possibile.

Ora due casi possono presentarsi: infatti o la serie dei successivi aggiunti $|C|, |C'|, |C''|, ..$ dopo un certo termine si arresta, ed allora l'ultimo sistema della serie è di genere così basso che la razionalità della superficie segue immediatamente. Oppure quella serie è infinita, ed allora la superficie non è certo razionale, poichè sul piano e quindi sulle superficie razionali, l'operazione di aggiunzione non può applicarsi indefinitamente ad un sistema lineare. Tutta la difficoltà sta dunque nel decidere quando si presenti il primo caso e quando il secondo. Ora questa distinzione si può già fare dal confronto del sistema dato $|C|$ col sistema *secondo aggiunto* $|C''|$. Si dimostra infatti che o $|C''|$ non contiene il sistema primitivo $|C|$, ed allora la nominata serie è finita; oppure $|C''|$ contiene $|C|$, ed allora ogni sistema della serie contiene quello che lo precede di due posti, e la serie è infinita. Anzi in questo ultimo caso si dimostra (Enriques) (³) che ogni altro sistema $|D|$ sulla superficie ha la proprietà di esser contenuto nel suo secondo aggiunto $|D''|$; e che il sistema residuo di $|D|$ rispetto a $|D''|$ (costituito dalle curve che insieme alla curva generica di $|D|$ compongono curve particolari di $|D''|$) coincide (fatta astrazione eventualmente da curve fisse) col sistema residuo di $|C|$ rispetto a $|C''|$; quel sistema residuo è adunque invariantivamente collegato colla superficie, e la dimensione di esso aumentata di una unità dà un nuovo carattere invariantivo P (*bigenere*) della superficie. Le superficie aventi $p_g = p_n = 0$ (come del resto le altre superficie algebriche) possono ancora classificarsi secondo i valori ($\geqq 0$) di P. Colla introduzione del nuovo carattere

(¹) Nöther, l. c. (Math. Ann. 8).

(²) Se $|C|$ è il sistema delle sezioni piane di una superficie F di ordine n dello spazio ordinario, $|C'|$ è il sistema segato sulla F dalle superficie ad essa aggiunte di ordine $n-3$ (passanti $h-1$ volte per ogni curva h. upla e $k-2$ volte per ogni punto k. uplo). Alla definizione si attribuisce carattere invariantivo, per modo che se la F subisce una trasformazione birazionale, $|C|$ e $|C'|$ si mutano in due sistemi di cui il secondo è l'*aggiunto* al primo. In particolare se F è razionale e $|C|$ ne è il sistema rappresentativo sul piano, composto ad es. di curve di ordine m, $|C'|$ si riconosce esser il sistema delle curve di ordine $m-3$ aggiunte alle C.

Appunto per mettere in evidenza il legame invariantivo che passa tra un sistema lineare ed il suo aggiunto, e per evitare le difficoltà a cui condurrebbe la definizione sopra ricordata nel caso che la F avesse singolarità straordinarie, il Sig. Enriques definisce la operazione di *aggiunzione* sotto forma invariativa (per trasformazioni birazionali). Questa nuova definizione si trova riportata nel n. 1 del presente lavoro; con maggiori particolari il lettore la troverà esposta nella Memoria del sig. Enriques: « *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* » capit. III (queste Memorie, 1895).

(³) « *Introduzione* » citata, cap. VI.

tutta la discussione precedente può riassumersi in breve. Data una superficie avente $p_g = p_n = 0$ si esamini quale valore abbia il carattere P; se $P=0$ la superficie è razionale, se $P>0$ la superficie certo non è razionale. In altre parole: *Affinchè una superficie sia razionale è necessario e sufficiente che siano verificate le condizioni* $p_n=0, p_g=0, P=0$ (delle quali però la seconda, come si vede facilmente, segue dalla terza, ma non inversamente).

Ma la terza condizione non sarà forse conseguenza delle due prime? A questo dubbio, che l'analogia colla teoria delle curve razionali fa sorgere, si risponde negativamente. Si dànno infatti esempi di superficie (qui riportati) le quali hanno uguale a zero sia il genere geometrico sia il genere numerico; eppure quelle superficie hanno $P>0$ e quindi *non sono razionali.*

Le condizioni di razionalità di una superficie si troveranno in seguito presentate sotto vari aspetti, sui quali non è il caso da fermarsi qui; solo perchè il lettore possa scorgere come quelle condizioni siano applicabili in pratica, quando la superficie è data mediante i suoi caratteri proiettivi, accenno alla forma che assume l'enunciato dell'ultimo teorema, nel caso che è più semplice dal punto di vista proiettivo.

Sia data nello spazio ordinario una superficie di ordine n non avente linee multiple all'infuori di una curva doppia di ordine D e genere π, nè punti multipli all'infuori di T punti tripli tanto per la superficie quanto per la curva doppia: condizioni necessarie e sufficienti affinchè una tal superficie sia razionale sono le due seguenti:

$$1)\quad \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} - (n-4)\,D + 2\,T + \pi - 1 = 0\,.$$

2) *non esistano superficie di ordine* $2\,(n-4)$ *passanti doppiamente per la curva doppia della superficie primitiva, all'infuori di quelle che si spezzano nella superficie stessa ed in una superficie residua di ordine* $n-8$.

1. Quando sopra un ente algebrico (irreducibile) ∞^2 di punti *(superficie)* (¹) è dato un sistema lineare S almeno ∞^2 di curve irreducibili di genere $\pi>0$, rimane determinato sull'ente un secondo sistema lineare di curve S', il *sistema aggiunto ad* S, il quale è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

1) la curva generica del sistema S' sega sulla curva generica del sistema S (fuori dei punti base di questo) un gruppo canonico dell'ultima curva (cioè un gruppo della serie canonica $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$, giacente su questa curva);

2) comunque si scelga un nuovo sistema lineare T sull'ente, la curva generica del sistema lineare *somma* S'+T sega sulla curva generica (irreducibile) del sistema lineare S+T (fuori dei punti base di questo) un gruppo che è contenuto in un gruppo

(¹) Seguendo il sig. Enriques distingueremo d'ordinario nel seguito le *superficie* dagli *enti algebrici* ∞^2. Parlando di *superficie* faremo attenzione ai caratteri proiettivi (spazio cui la superficie appartiene, ordine..); mentre per *ente algebrico* ∞^2 intenderemo il tipo di una intera *classe* di superficie (birazionalmente identiche).

canonico dell'ultima curva, e da esso differisce per la somma dei gruppi di i $(=1,2...)$ punti raccolti in quei punti i.upli della curva stessa che sono base pel sistema $S+T$ ma non pel sistema S [1].

Dalle relazioni che passano tra un sistema lineare S dell'ente ed il sistema aggiunto S', si possono dedurre i principali caratteri invariantivi dell'ente. Così se il sistema S non è contenuto nel sistema S', la stessa proprietà (di non esser contenuto nel proprio sistema aggiunto) spetta ad ogni altro sistema lineare sull'ente; si dice in tal caso che l'ente ha il *genere geometrico uguale a zero* [2]. Se sulla curva di ogni sistema lineare, comunque scelto, il sistema aggiunto sega la serie canonica *completa*, l'ente ha *il genere geometrico uguale al genere numerico* [3]. In conseguenza l'ente algebrico di genere geometrico e numerico zero è completamente definito dalla seguente proprietà:

a) Il sistema lineare S' aggiunto ad un qualsiasi sistema lineare S (irreducibile, almeno ∞^2) dell'ente non contiene il sistema S, e sega sulla curva generica di questo la serie canonica completa; la dimensione di S' è dunque $\pi-1$ se π è il genere di quella curva.

Dalla proprietà *a*) si deducono altre due proprietà fondamentali per un ente di genere (geom. = num.) zero, e capaci (prese insieme) di caratterizzarlo [4]:

b) La serie caratteristica di ogni sistema lineare normale almeno ∞^2 sull'ente è completa.

c) Sull'ente esistono sistemi lineari irreducibili (almeno ∞^3) aventi la serie caratteristica non speciale; ed anzi si può sempre scegliere uno di siffatti sistemi, il quale sia inoltre semplice e privo di curve fondamentali proprie (tale adunque che le curve del sistema passanti per un punto generico dell'ente non abbiano in comune altri punti variabili col primo, e tale ancora che entro al sistema, supposto ∞^r, non esitano sistemi lineari ∞^{r-1} composti di curve di genere inferiore al genere della curva generica).

Il teorema *b*) e la prima parte del teorema *c*) si trovano dimostrati nel mio lavoro citato ai n.^{i} 7 e 8. Quanto alla seconda parte del teorema *c*), si osservi che se S è il sistema delle sezioni iperpiane di una superficie di un certo iperspazio, la quale sia una immagine proiettiva dell'ente, e sia inoltre priva di punti multipli, allora il sistema S'_k aggiunto di rango k ad S (vale a dire somma dell'aggiunto ad S

[1] La seconda parte di questa definizione (dovuta, come ho detto nella prefazione, al sig. Enriques) può enunciarsi pure sotto forma di teorema, e come tale verrà adoperata in seguito:

Se S e T sono due sistemi lineari sopra un ente algebrico, il sistema S' aggiunto al primo, sommato col secondo sistema T, dà un sistema $S'+T$ che forma parte del sistema aggiunto ad $S+T$, e da esso differisce pel fatto che $S'+T$ ha come punti i.upli anzichè (i—1).upli quei punti dell'ente (se esistono) che sono base i.upli per T, ma non sono base per S.

Si veda la citata « *Introduzione...* » cap. III.

[2] Per la definizione di *genere geometrico* partendo dai sistemi S, S' si veda Enriques « *Introduzione..* » cap. VI.

La definizione è riportata più avanti nel presente lavoro (n. 9).

[3] Enriques « *Introduzione...* » cap. VI.

[4] Si veda in proposito la mia Memoria «*Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve...*» (queste Memorie, 1895).

sopra definito e del sistema S contato k volte) ha la serie caratteristica non speciale quando k è abbastanza alto (l. c. n° 8). Ora S'_k è la somma di S e di S'_{k-1} sistema aggiunto di rango $k-1$; questi due sistemi (nella ipotesi di k abbastanza alto, per quanto riguarda il secondo) non hanno punti base sulla superficie [1], ed inoltre le curve di S che passano per un punto a comunque scelto sulla superficie sono (per ipotesi) irreducibili, hanno un punto semplice in a, e nessun altro punto fisso comune. Segue di qua che le curve di S'_k che passano per a sono irreducibili, hanno un punto semplice in a, e nessun altro punto fisso comune; hanno quindi lo stesso genere della curva generica di S'_k. E ciò appunto dimostra che il sistema S'_k è semplice e privo di curve fondamentali proprie.

Nel seguito indicheremo con $|C|$ un sistema lineare normale sull'ente, il quale sia *irreducibile, semplice, privo di curve fondamentali proprie, ed a serie caratteristica non speciale;* e indicheremo rispettivamente con r, n, π la *dimensione* di $|C|$, il suo *grado* (numero delle intersezioni variabili di due curve generiche), ed il *genere* (della C generica); poichè la serie caratteristica g_n^{r-1} su C è completa, pel teorema b), ed è per ipotesi non speciale, sarà

$$n = \pi + r - 1.$$

Di ogni altro sistema sull'ente che goda le quattro propietà ora enunciate diremo che *soddisfa alle condizioni di* $|C|$, o che *ha le proprietà di* $|C|$.

Tutta la discussione che segue è fondata sulle tre proposizioni a), b), c).

2. Per render più semplici alcuni ragionamenti conviene di riferirci ad una superficie che sia una immagine proiettiva dell'ente algebrico considerato e del sistema $|C|$. Supporremo perciò costruita in uno spazio S_r ad r dimensioni una superficie F in tale corrispondenza birazionale coll'ente dato, che gli iperpiani S_{r-1} di S_r seghino su F quel sistema lineare di curve che corrisponde al sistema $|C|$. Il nuovo sistema (delle sezioni iperpiane) di F sarà ancora indicato con $|C|$. La superficie F è non rigata [2], il suo ordine è n, e π è il genere della sezione iperpiana generica. Anzi π è il genere della sezione di F praticata con un iperpiano generico tra quelli che passano per un punto di F *comunque scelto* (sia pur singolare), poichè si è supposto che entro a $|C|$ non esistano sistemi lineari ∞^{r-1} di genere $<\pi$; quest'ultimo fatto si esprime dicendo che la F non ha punti multipli *isolati*, cioè tali da influire sul genere di una sezione iperpiana per essi.

Consideriamo ora sopra F il sistema lineare $\infty^{\pi-1}$ $|C'|$ aggiunto a $|C|$; esso sega sopra la curva C *generica* (sezione iperpiana di F) la serie canonica $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$; (quindi la curva C' generica di $|C'|$ ha l'ordine $2\pi-2$). Anzi possiamo veder subito che la serie segata dal sistema $|C'|$ sopra una curva C_0 sia pur *particolare* di $|C|$ (purchè irreducibile e di genere π), è ancora la serie canonica *completa* $\infty^{\pi-1}$; poichè se quella serie avesse una dimensione $<\pi-1$, la curva C_0 farebbe parte di qualche curva C',

[1] L. c. n. 8, seconda nota a pie' di pagina.

[2] Una superficie rigata a sezioni di genere $\pi > 0$ ha il genere numerico $= -\pi < 0$, e quindi non può essere immagine dell'ente dato, che ha il genere geometrico e numerico uguale a zero.

e quindi il gruppo segato dalla C_0 sopra una C generica (giacerebbe entro al gruppo C′C e perciò) sarebbe *speciale*, mentre abbiamo supposto non speciale la serie caratteristica di $|C|$ alla quale quel gruppo appartiene [1].

Di qua segue subito (poichè la serie canonica su C_0 non ha punti fissi comuni a tutti i suoi gruppi) che il *sistema aggiunto* $|C'|$ *sulla superficie* F *non ha punti base* (comuni a tutte le sue curve).

Premesse queste osservazioni noi vogliamo esaminare sotto quali restrizioni il sistema aggiunto $|C'|$ goda le *proprietà del sistema* $|C|$.

Noi possiamo limitare la nostra ricerca al caso in cui il genere π di C sia $\geqq 3$; poichè in corrispondenza ai valori $\pi = 1, 2$ la superficie F di S_r ha rispettivamente l'ordine $n = r$, $r+1$, e quindi mediante proiezione da $r-3$ suoi punti dà una superficie non rigata del terzo o quarto ordine (quest'ultima con retta doppia) dello spazio ordinario; ed è noto che ambedue queste superficie sono razionali, il che ci dispensa da ogni ulteriore ricerca.

3. Vediamo anzitutto se $|C'|$ possa esser *riducibile*.

Se $|C'|$ è riducibile (non potendo esister punti fissi comuni a tutte le C′), ciascuna delle $\infty^{\pi-1}$ C′ (di ordine $2\pi-2$) si spezza in $\pi-1$ coniche [2] variabili in un fascio, il quale è razionale come la serie di coppie di punti che esso sega sopra una C generica. La F dunque è *razionale* [3], e le sue sezioni iperpiane sono curve iperellittiche.

Viceversa se le sezioni iperpiane di F sono iperellittiche, si vede subito che ogni curva aggiunta si spezza in $\pi-1$ coniche di un fascio [4].

Dunque: *eccettuato il caso che le curve* C *siano iperellittiche (ed in conseguenza sia* F *razionale) il sistema* $|C'|$ *è irreducibile.*

4. Se il sistema $|C'|$ supposto ora irreducibile *non è semplice*, allora le $\infty^{\pi-2}$ curve C′ che passano per un punto a_1 generico di F passano in conseguenza per uno o più punti $a_2 \ldots a_m$ $(m \geqq 2)$ determinati dal primo a_1, e con esso variabili. Il gruppo di punti $a_1, a_2 \ldots a_m$ ed i suoi analoghi determinano su F una involuzione I di ∞^2 gruppi. Ora deve presentarsi uno dei due seguenti casi: o ciascuna delle ∞^r sezioni iperpiane C di F contiene un certo numero finito di coppie (di punti) appartenenti a gruppi della I; oppure la C generica non contiene coppie siffatte, ma ogni C condotta per due punti di uno stesso gruppo di I, contiene ∞^1 coppie analoghe.

[1] Lo stesso ragionamento prova che $|C'|$ è il sistema di dimensione più elevata tra quelli che segano gruppi della serie canonica sulla curva C generica; è il sistema *subaggiunto* (= aggiunto nel caso che trattiamo) a $|C|$; dove per sistema subaggiunto (di rango 0) a $|C|$ si deve intendere il più vasto sistema segante sulla C generica gruppi della serie canonica (Enriques).

[2] La curva C′ si spezza necessariamente in più (almeno $\pi-1$) curve variabili (Enriques « *Introduzione...* » cap. I) e queste non possono esser rette perchè la F non è rigata.

[3] Pel noto teorema del sig. Nöther « *Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen* » (Mathem. Annalen, Bd. 3).

[4] Si veda ad es. la mia Nota « *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche* » (Rendic. Circolo Matem. di Palermo, t. IV).

Il primo caso si esclude subito, perchè se due punti di una C generica presentano una sola condizione (ad ogni C′ per essi e quindi) ad ogni gruppo della serie canonica che debba contenerli, la C è iperellittica, mentre abbiamo supposto che la C generica non sia iperellittica (ammettendo che $|C'|$ sia irreducibile).

Rimane dunque da trattare la seconda ipotesi la quale porta con sè l'esistenza di ∞^{r-1} C iperellittiche comprese entro al sistema delle ∞^r C non iperellittiche. È iperellittica ogni C che contenga due punti a_1, a_2 appartenenti ad uno stesso gruppo di I; quei due punti sono coniugati (nella serie g_2^1 giacente) sulla C; ed ogni altra coppia di punti coniugati sulla C appartiene ad un gruppo di I. Se dunque tra le ∞^{r-2} curve iperellittiche C che passano per $a_1\, a_2$, noi fissiamo ∞^1 curve formanti un sistema lineare, le coppie di punti coniugati giacenti sopra queste determinano una involuzione I′, la quale o coincide colla I (se $m=2$), od è componente della I in guisa che ogni gruppo di I è costituito da $\frac{m}{2}$ gruppi di I′. Ogni curva C contenente una coppia di I′ contiene ∞^1 coppie di I′, e quindi due coppie di I′ presentano tre (non quattro) condizioni ad ogni C che debba contenerle. In linguaggio proiettivo, due rette determinate da due coppie di I′ giacenti sulla superficie F di S_r, presentano tre sole condizioni ad un iperpiano S_{r-1} che debba contenerle, e quindi le due rette si segano. In conseguenza le ∞^2 rette contenenti le singole coppie di I′ si segano a due a due, e (non potendo giacer tutte in uno stesso piano) passano tutte per uno stesso punto O. Ogni retta congiungente O con un punto di F passa dunque per un secondo punto di F coniugato al primo nella I′; ed ogni iperpiano S_{r-1} per O sega F in una curva iperellittica; due curve iperellittiche ottenute con due iperpiani per O si segano (fuori di O) in un certo numero di coppie di punti coniugati. Ogni curva C′ (di ordine $2\pi-2$) del sistema aggiunto $|C'|$ contiene ∞^1 coppie di punti coniugati, e viene quindi proiettata doppiamente da O mediante un cono di ordine $\pi-1$ (¹).

Viceversa se una superficie F dello spazio S_r, di cui la sezione iperpiana generica C ha il genere π e non è iperellittica, viene segata da tutti gli iperpiani passanti per un punto O lungo curve iperellittiche di genere π, allora due punti $a_1\, a_2$ che siano coniugati sopra una di queste curve iperellittiche, presentano una sola condizione alle curve C′ del sistema aggiunto che debbono contenerli, e quindi il sistema aggiunto non è semplice.

Enunciando questi risultati sotto forma invariantiva, abbiamo:

Il sistema $|C'|$ aggiunto al sistema ∞^r $|C|$ è semplice, eccettuato il caso in cui esiste entro a $|C|$ un sistema lineare ∞^{r-1} costituito da curve iperellittiche, secantisi a due a due in coppie di punti coniugati.

Della superficie F studiata nel presente numero possiamo procurarci una immagine semplice dal punto di vista proiettivo, purchè proiettiamo la F di S_r da $r-3$ suoi punti generici, sopra lo spazio ordinario. Se osserviamo che una curva iperellittica di ordine $n=\pi+r-1$ e genere π di S_{r-1} (quale è una sezione di F ottenuta con un iperpiano per O) viene proiettata da $r-3$ suoi punti generici in una curva piana di ordine $\nu=\pi+2$ e genere $\nu-2$ dotata di un punto o (proiezione di O)

(¹) Le C′ non passano tutte per O perchè il sistema $|C'|$ non ha punti base sulla F.

multiplo secondo $\nu - 2$, e di nessun altro punto multiplo, vediamo subito che la nominata proiezione di F è *una superficie f dello spazio ordinario, di un certo ordine ν, dotata di un punto o multiplo secondo $\nu - 2$, la quale non può avere come curve multiple che rette uscenti da o, ed è priva di punti multipli isolati* (poichè questi mancano sulla F). Le sezioni piane della superficie f sono curve di genere $\pi = \nu - 2$, anche se il piano passa per o; in questo ultimo caso però sono curve iperellittiche.

Le $\infty^{\nu-3}$ curve di ordine $2\nu - 6$ di f aggiunte alle sezioni piane (e proiezioni delle C' di F) stanno sopra coni di ordine $\nu - 3$ che le proiettano doppiamente da o, e che costituiscono le superficie di ordine $\nu - 3$ aggiunte alla f di ordine ν; quei coni si ottengono pure proiettando da o le curve piane di ordine $\nu - 3$ aggiunte alla sezione piana generica di f.

5. Riprendiamo la superficie F di S_r (n. 2), e supponiamo questa volta che il sistema ∞^r $|C|$ delle sezioni iperpiane di F nè si componga di curve tutte iperellittiche, nè contenga un sistema ∞^{r-1} di curve iperellittiche. Potremo affermare allora che il sistema aggiunto $|C'|$ è irreducibile (n. 3), e semplice (n. 4).

Ora facendo un altro passo vogliamo dimostrare che il sistema $\infty^{\pi-1}$ $|C'|$ è *privo di curve fondamentali proprie*, come $|C|$; vale a dire che scelto comunque un punto P su F, le $\infty^{\pi-2}$ curve C' per P (tolte, ove si spezzino, le componenti fisse comuni) hanno lo stesso genere π' della C' generica.

Indichiamo infatti con C_0 una curva generica del sistema $|C|$ passante per P, ed osserviamo che ciascuna delle $\infty^{\pi-2}$ curve C' per P sega la C_0 (fuori di P contato *una sola volta*) in $2\pi - 3$ punti che variano al variare della C'; poichè se una almeno delle $2\pi - 3$ intersezioni rimanesse ferma, la curva C_0 nominata sarebbe iperellittica, contro la ipotesi fatta. Da ciò segue anzitutto che P è punto semplice per quelle $\infty^{\pi-2}$ C', di guisa che ciascuna di esse, se non si spezza, ha lo stesso genere π' della C' generica.

Se poi tutte le $\infty^{\pi-2}$ C' per P sono spezzate, vi deve essere una parte fissa ϱ ad esse comune, poichè in caso opposto ciascuna delle due o più curve componenti variabili della C' generica per P, dovrebbe passare per P, mentre si è visto che P è punto semplice della C'. Quella parte fissa ϱ dovrà passare (semplicemente) per P, poichè se non vi passasse, essa segherebbe la C_0 in un punto almeno distinto da P e comune a tutte le C' passanti per P; mentre ciò fu escluso dalle considerazioni precedenti. E fuori di P la curva ϱ non ha altri punti comuni colla C_0 generica (per la stessa ragione). Dunque sulla superficie F dello spazio S_r la curva ϱ è segata solo in P (contato una sola volta) da un iperpiano generico condotto per P; è in conseguenza una *retta*; retta *fondamentale* pel sistema $|C'|$ poichè tutte le C' condotte per P contengono la retta ϱ. Segue da questo ragionamento che *il sistema* $|C'|$ *non può aver altre curve fondamentali che rette*; ed in realtà può avere rette fondamentali [1].

[1] Si vede subito che se F è proiezione di una superficie di ordine $n+1$ dello spazio S_{r+1} eseguita da un suo punto, la retta che su F rappresenta quel punto è fondamentale per $|C'|$.

Se la retta ϱ è fondamentale per $|C'|$, indicheremo con $C' - \varrho$ la curva generica residua di ϱ rispetto a $|C'|$ (curva che insieme a ϱ dà una curva di $|C'|$). La curva $C' - \varrho$ ha l'ordine $2\pi - 3$, non contiene parti fisse (per le considerazioni precedenti), e varia in un sistema $\infty^{\pi-2}$; essa è dunque irreducibile (poichè in caso opposto si spezzerebbe in $\pi - 2 > 1$, o più, curve tutte dello stesso ordine >1, e dovrebbe esser $2\pi - 3$ multiplo di $\pi - 2$ o di un numero più elevato). Se ora noi riusciamo a dimostrare che il genere di $C' - \varrho$ uguaglia il genere π' della C' generica, avremo provato che ϱ è una curva fondamentale *impropria*, e quindi che il sistema $|C'|$ non possiede curve fondamentali proprie, al che appunto vogliamo arrivare.

Indichiamo a tal fine con ω il numero dei punti che la curva $C' - \varrho$ ha in comune colla retta ϱ, numero che certo supera zero (¹). Un iperpiano S_{r-1} condotto per la retta ϱ sega la curva $C' - \varrho$ (di ordine $2\pi - 3$) in $2\pi - 3 - \omega$ punti fuori di ϱ, punti comuni alla $C' - \varrho$ ed alla curva $C - \varrho$ intersezione residua di quell'iperpiano colla superficie F; quindi sulla $C - \varrho$ le $\infty^{\pi-2}$ curve $C' - \varrho$ segano una serie $g^{\pi-2}_{2\pi-3-\omega}$. Questa serie è certo speciale, perchè in virtù del teorema fondamentale sul sistema aggiunto (²), è certo $C' - \varrho$ aggiunta (o parte di aggiunta) a $C - \varrho$; ora la serie $g^{\pi-2}_{2\pi-3-\omega}$ non può esser speciale se non quando

$$2\pi - 3 - \omega \geqq 2(\pi - 2) \quad \text{ossia} \quad \omega = 1,$$

poichè il valore $\omega = 0$ va respinto. Dunque le curve $C' - \varrho$ residue di ϱ rispetto al sistema $|C'|$ segano la retta ϱ in un sol punto; e tanto basta per affermare che il genere di $C' - \varrho$ è uguale al genere di C', come si doveva dimostrare (³).

Possiamo dunque concludere che *se il sistema* $|C'|$ *aggiunto a* $|C|$ *è irreducibile e semplice, esso* $|C'|$ *è privo di curve fondamentali proprie.*

6. Una ultima questione rimane da trattare sul sistema $|C'|$ (n. 2); se la sua serie caratteristica $g_{n'}^{r'-1} = g_{n'}^{\pi-2}$ sia essa pure non speciale, come è per ipotesi la serie caratteristica g_n^{r-1} del sistema $|C|$; vale a dire (poichè il sistema aggiunto $\infty^{\pi-1}|C'|$ è normale ed ha quindi la serie caratteristica completa) rimane da vedere se il numero n' delle intersezioni (variabili) di due C' sia uguale a

$$\pi' + r' - 1 = \pi + \pi' - 2$$

dove π' è sempre il genere di C'. Naturalmente affinchè questa ricerca abbia senso, si deve supporre che il sistema $|C'|$ sia irreducibile, in altre parole che $|C|$ non sia costituito da curve tutte iperellittiche; ma nessun'altra restrizione (oltre a quelle contenute nel n. 1, *c*)) è necessaria (⁴).

(¹) Enriques « *Introduzione...* » cap. I.

(²) Teorema ricordato nella seconda nota al n. 1.

(³) Enriques « *Introduzione...* » cap. I.

(⁴) Veramente non occorre nemmeno la condizione che la serie caratteristica di $|C|$ sia non speciale (di cui si parla al n. 1, *c*)), perchè questa non comparisce nella dimostrazione. Di qua si deduce anzi un modo per procurarsi sopra un ente algebrico di genere (geom. = num.) zero un sistema $|C|$ a serie caratteristica non speciale; poichè basta scegliere un sistema che sia il primo aggiunto di un altro sistema semplice irreducibile privo di curve fondamentali proprie.

Per calcolare n' riprendiamo l'ente algebrico (già considerato al n. 1) del quale F è una immagine proiettiva; ai punti dell'ente corrispondono i punti e le curve eccezionali di F. I sistemi lineari $|C|$ e $|C'|$ sopra F sono immagini di due sistemi lineari (che indicheremo cogli stessi simboli) sopra l'ente; e questi avranno certi punti base, in parte comuni, in parte no.

In particolare un punto dell'ente che sia base per $|C|$ e non per $|C'|$, ha per immagine su F una curva (eccezionale) fondamentale pel sistema $|C'|$ su F, curva che deve ridursi ad una di quelle rette nominate nel n. 5 (essendo queste le sole curve fondamentali di $|C'|$). Invece un punto dell'ente che sia base per $|C'|$ e non per $|C|$ ha per immagine un punto di F base pel sistema $|C'|$ su F; ma fu già osservato (n. 2) che il sistema $|C'|$ su F non ha punti base, dunque sopra l'ente non esistono punti che siano base per $|C'|$ e non per $|C|$. Ne viene (applicando il teorema fondamentale sui sistemi aggiunti più volte ricordato) che *il sistema aggiunto al sistema somma di* $|C|$ *e* $|C'|$ *ossia a* $|C+C'|$ *coincide col sistema* $|2C'|$, *e contiene il sistema* $|C+C''|$ *dove* $|C''|$ *è il sistema aggiunto a* $|C'|$ (*o il secondo aggiunto* a $|C|$).

Di questa doppia proposizione noi ora applichiamo la prima parte, riserbandoci di sfruttare in seguito la seconda parte.

La curva generica di $|C+C'|$ ha il genere

$$\pi_0 = \pi + \pi' + 2\pi - 3 = 3\pi - 3 + \pi'$$

perchè C e C' hanno i generi π, π' e si segano in $2\pi - 2$ punti [1]. La curva generica di $|2C'|$ aggiunta alla curva generica di $|C+C'|$ sega quest'ultima in $2\pi_0 - 2$ punti; dunque la C' generica sega la curva generica di $|C+C'|$ in

$$\pi_0 - 1 = 3\pi - 4 + \pi'$$

punti. Se in particolare l'ultima curva si spezza in due curve C_1, C_1' generiche entro ai sistemi $|C|$, $|C'|$ (il che non altera quel numero di intersezioni), tra le nominate $3\pi - 4 + \pi'$ intersezioni si trovano i $2\pi - 2$ punti di incontro della C' colla C_1; le residue $\pi - 2 + \pi'$ intersezioni sono determinate dalla C' colla C_1'. Dunque sta il fatto che il numero delle intersezioni di due C' generiche, ossia il grado del sistema $|C'|$, è

$$n' = \pi + \pi' - 2$$

come si doveva dimostrare. Di qua il teorema: *la serie caratteristica del sistema* $|C'|$ *è essa pure non speciale*, come per ipotesi è quella del sistema $|C|$.

7. Riunendo i risultati contenuti nei nn. precedenti possiamo ora enunciare il seguente teorema:

Sopra un ente algebrico di genere (*geom. = num.*) *zero un sistema lineare* $\infty^r |C|$ *di curve* C *non iperellittiche* (*quindi di genere* $\pi > 2$), *sistema irreducibile, semplice, privo di curve fondamentali proprie, a serie caratteristica non speciale, ha il sistema aggiunto* $|C'|$ *che è pure irreducibile ed a serie caratteristica non*

[1] Enriques « *Introduzione...* » cap. I.

speciale; se inoltre entro a $|C|$ *non esiste un sistema lineare* ∞^{r-1} *tutto composto di curve iperellittiche, allora* $|C'|$ *è esso pure semplice e privo di curve fondamentali proprie.*

Nell'ultima ipotesi al sistema $|C'|$ ed al suo aggiunto $|C''|$ si possono applicare gli stessi ragionamenti fatti or ora per $|C|$ e $|C'|$. Così continuando e costruendo l'aggiunto $|C'''|$ di $|C''|$, ecc., uno dei due seguenti casi deve presentarsi:

1) o i successivi aggiunti $|C'|, |C''| \ldots$, per quanto si prolunghi la serie, soddisfano tutti alle proprietà di $|C|$; vale a dire sono irreducibili, semplici (di dimensione >2), privi di curve fondamentali proprie, ed a serie caratteristica non speciale;

2) oppure si arriva ad un primo sistema $|C^{(i)}|$ $(i \geqq 1)$ il quale non soddisfa più a qualcuna delle proprietà di $|C|$. Questo caso si spezza nei due seguenti:

2') o il sistema $|C^{(i)}|$ è riducibile e quindi la curva generica del sistema precedente $|C^{(i-1)}|$ è iperellittica;

2'') o il sistema $|C^{(i)}|$ non è semplice (in particolare ha dimensione <3, a parte il caso che la curva $C^{(i)}$ generica sia razionale, caso che porta come immediata conseguenza la *razionalità* dell'ente considerato), ed allora entro al sistema precedente $|C^{(i-1)}|$ che ha la dimensione r_{i-1} ($\geqq 3$, poichè esso per ipotesi è semplice), esiste un sistema lineare di dimensione $r_{i-1} - 1$ tutto composto di curve iperellittiche.

Nel caso 1) l'ente algebrico che si considera certamente non è razionale, poichè l'operazione di aggiunzione non ha termine, mentre il contrario accade sugli enti razionali (ad es. sul piano).

Nel caso 2') invece l'ente algebrico è razionale (cfr. n. 3); finalmente il caso 2'') si presenta, come mostrerà l'ulteriore discussione, tanto sopra enti razionali, quanto sopra enti irrazionali.

Noi ora appunto vogliamo stabilire un criterio per decidere in base ai caratteri del sistema $|C|$ dato sull'ente, quando si presenti il caso 1) e quando il caso 2), e sotto quali restrizioni il caso 2'') conduca ad enti razionali.

8. Conviene perciò che noi mettiamo in relazione il sistema lineare $|C|$ col sistema secondo aggiunto $|C''|$ (o aggiunto di $|C'|$), il quale certo esiste ed è $\infty^{\pi'-1}$ se la curva generica C non è iperellittica, e se inoltre la curva generica C' del sistema primo aggiunto ha il genere $\pi'>0$; (le ipotesi opposte conducono a superficie razionali). La via da seguire ci è suggerita da un lemma di cui una sola parte abbiamo adoperato nel n. 6. Si è visto infatti colà che il sistema $|C+C''|$ è contenuto (non esclusa la coincidenza) nel sistema $|2C'|$ (aggiunto a $|C+C'|$). Segue che la serie segata sopra una C generica dal sistema $|C+C''|$ è contenuta nella serie $g^{3\pi-3}_{4\pi-4}$ che sulla C stessa sega il sistema $|2C'|$; la prima serie adunque avrà l'ordine $4\pi-4-\delta$ (con $\delta \geqq 0$), e in conseguenza la serie segata sulla $|C|$ dal sistema $|C''|$ avrà l'ordine $4\pi-4-n-\delta$ (poichè n sono le intersezioni di due C).

Quanto alla dimensione dell'ultima serie, possiamo dire che essa è uguale alla dimensione $\pi'-1$ del sistema $|C''|$, se la curva C generica non fa parte di qualche curva C''; ed è invece minore di $\pi'-1$ se ogni curva C fa parte di qualche curva C''.

La stessa condizione può anche esprimersi in forma diversa. Se infatti $|C|$ è contenuto in $|C''|$, allora $|2C|$ è contenuto in $|C+C''|$; d'altronde quest'ultimo sistema è contenuto in $|2C'|$, dunque in fine $|2C|$ è contenuto in $|2C'|$. Viceversa se $|2C|$ è contenuto in $|2C'|$, il sistema $|C+C'|$ aggiunto al primo è contenuto nel sistema $|C'+C''|$ aggiunto al secondo; una curva spezzata $C+C'$ fa parte adunque di una curva di $|C'+C''|$ che certo deve spezzarsi nella C' ed in una curva di $|C''|$ contenente la C; sicchè $|C|$ è contenuto in $|C''|$. Possiamo dunque enunciar così il risultato a cui siamo arrivati:

La serie $g_{4\pi-4-n-\delta}$ $(\delta \geqq 0)$ *segata sopra una curva* C *generica dal sistema secondo aggiunto* $|C''|$, *ha la dimensione* $\pi'-1$ *se il doppio* $|2C|$ *del sistema primitivo non è contenuto nel doppio* $|2C'|$ *del sistema aggiunto; ha la dimensione* $<\pi'-1$ *nel caso opposto.*

9. Per veder l'importanza della distinzione che qui ci si presenta è opportuno richiamare qualche nozione della teoria generale degli enti algebrici doppiamente infiniti.

Quando sopra un ente algebrico ∞^2 si mette in relazione un sistema lineare S (almeno ∞^2) col sistema aggiunto S', due casi possono darsi secondo che l'ultimo sistema contiene o non contiene il primo. Si dimostra però (¹) che il presentarsi del primo o del secondo caso costituisce una proprietà indipendente dal sistema S che si fissa su quell'ente; la stessa proprietà sussiste qualunque sistema si sostituisca ad S, ed è intimamente legata colla natura dell'ente. Si può anzi dir di più: se S è contenuto in S', il sistema Σ residuo di S rispetto ad S' (liberato se occorre da punti che siano componenti fisse) non varia quando al posto di S ed S' si sostituiscano due nuovi sistemi di cui il secondo sia l'aggiunto al primo; il sistema Σ è dunque legato invariantivamente coll'ente, e dicesi *sistema canonico* dell'ente; la dimensione di Σ aumentata di una unità (ossia il numero delle curve canoniche linearmente indipendenti) dicesi (come è noto) *genere geometrico* p_g dell'ente algebrico. Ora è chiaro che se $p_g > 0$, se adunque uno (e quindi ogni) sistema lineare S è contenuto nel suo aggiunto S', allora anche il doppio 2S di ogni sistema lineare è contenuto nel doppio 2S' del proprio aggiunto; e le curve residue di 2S rispetto a 2S' costituiscono (a meno di punti fissi) il sistema 2Σ doppio del canonico, detto perciò *bicanonico*, il quale è pure legato invariantivamente coll'ente; la dimensione del sistema 2Σ aumentata di una unità, ossia *il numero delle curve bicanoniche linearmente indipendenti*, dà un nuovo carattere invariantivo $P\ (\geqq p_g)$ dell'ente (carattere che dipende da p_g e dal genere di una curva canonica).

Ma se, come accade nel caso che ci interessa, l'ente algebrico ha il genere geometrico $p_g=0$, non risulta più a priori (e non è sempre vero) che il doppio 2S di un sistema lineare possa esser contenuto nel doppio 2S' del proprio sistema aggiunto; si possono, è vero, citare esempi di enti algebrici sui quali quella proprietà si verifica per un certo sistema S (²); ma la stessa proprietà si verificherà in conseguenza per ogni altro sistema sulla superficie? Ed il sistema residuo del doppio 2S di un sistema rispetto al doppio 2S' del suo aggiunto sarà indipendente dal sistema da cui si parte?

(¹) Enriques « *Introduzione...* » cap. VI.

(²) Si veda per es. il n. 15 del presente lavoro.

Alle due domande si può rispondere affermativamente; il sig. ENRIQUES dimostra infatti [1] che il sistema residuo di 2 S rispetto a 2 S' ha proprietà invariantive anche sugli enti algebrici di genere geometrico zero; gli conserveremo il nome di *sistema bicanonico*, e continueremo a indicare con P il numero delle curve bicanoniche linearmente indipendenti, numero che sarà sempre un carattere invariantivo dell'ente. Questa volta ($p_g=0$) potrà anche essere P=0; ciò accadrà quando 2 S non appartenga a 2 S'. E sarà poi P=1 nel caso che la curva generica di 2 S formi parte di una sola curva di 2 S', anche se non vi è curva residua (se 2 S coincide con 2 S').

Siamo così condotti a classificare gli enti algebrici di genere (geom. = num). zero secondo il valore di P ($\geqq 0$). Ora tra gli enti nominati si trovano gli enti razionali (rappresentabili punto per punto sul piano); a qual valore di P corrispondono enti siffatti? Al valore P=0, come è chiaro; poichè sopra un ente razionale (ad es. sopra un piano) esistono sistemi S (ad es. il sistema di tutte le curve piane di dato ordine) tali che 2 S non è contenuto nel doppio 2 S' del sistema aggiunto. Vediamo dunque che *condizione necessaria affinchè un ente algebrico* (superficie) *di genere* (geom. = num.) *zero sia razionale, è che anche il carattere* P *sia nullo.*

Ma tutto l'interesse sta nel decidere se questa condizione sia pur sufficiente; che fosse necessaria poteva ritenersi evidente a priori.

10. Per trattar la questione ora proposta conviene premettere due osservazioni sul sistema bicanonico. La prima è di natura invariantiva.

Sopra un ente algebrico consideriamo un sistema lineare S irreducibile ∞^r ($r>2$), di grado n e genere π; e sia S' il sistema aggiunto ad S. *Il sistema bicanonico* (se esiste) è per definizione il residuo di 2 S rispetto a 2 S' (a parte eventuali curve eccezionali fisse), e *sega quindi sulla curva generica di* S *una serie che è residua di quella segata sulla curva stessa da* 2 S *(serie doppia della caratteristica* $= 2\,g_n^{r-1}$) *rispetto alla serie segata da* 2 S' *(serie doppia della canonica* $= 2\,g_{2\pi-2}^{\pi-1}$) [2]. La proprietà qui enunciata, non è però sufficiente a caratterizzare in generale il sistema bicanonico; ma è sufficiente nel caso che il sistema S sia privo di curve fondamentali proprie [3].

11. E veniamo ora alla osservazione di indole proiettiva sul sistema bicanonico.

Consideriamo nello spazio ordinario una superficie f di ordine n. È noto che le curve canoniche di f (ove esistano) vengono segate dalle superficie *aggiunte ad* f *di ordine* $n-4$, superficie costrette a passare $h-1$ volte per ogni curva h.upla di f ($h \geqq 2$) e $k-2$ volte per ogni punto k.uplo isolato di f ($k \geqq 3$), nella ipotesi che le singolarità di f siano ordinarie [4].

(1) « *Introduzione...* » cap. VI.

(2) Di qua segue per es. che se $n>2\pi-2$ od $r>\pi$ non esiste sistema bicanonico ed è quindi P=0; se $n=2\pi-2$ od $r=\pi$ allora $P \leqq 1$, ecc.

(3) ENRIQUES « *Introduzione...* » cap. VI.

(4) NÖTHER « *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens...* » (Mathem. Annalen, 8).

Più in generale, nella ipotesi di singolarità qualisivogliano, la prima condizione si traduce nell'altra di segare i piani generici in curve aggiunte alle corrispondenti sezioni di f, e questa

Ora è chiaro che l'insieme di due superficie aggiunte ad f di ordine $n-4$, od anche ogni superficie di ordine $2(n-4)$ la quale si comporti come la precedente superficie composta (abbia le stesse molteplicità) lungo le curve ed i punti multipli isolati di f (senza contener la f), sega sopra f una *curva bicanonica* (cioè appartenente al sistema doppio del canonico); sicchè la presenza di una siffatta superficie è già di per sè sufficiente per asserire che la f ha il carattere $P > 0$ [1].

Non deve credersi però che tutte le curve bicanoniche possano in generale ottenersi mediante le nominate superficie; ma si dimostra che ogni curva bicanonica di f può ottenersi mediante una superficie di ordine $2(n-4)$, la quale (nella ipotesi di singolarità ordinarie) sia costretta a passare h volte per ogni curva h. upla di f ($h \geqq 2$), in guisa però chè le sezioni delle due superficie con uno stesso piano generico abbiano in comune ancora $h-2$ punti infinitamente vicini sopra ciascuno degli h rami uscenti dal punto h. uplo (in tutto $2\,h(h-1)$ intersezioni assorbite dal punto h. uplo); e sia costretta inoltre a passare doppiamente per ogni punto triplo isolato di f, e k volte per ogni punto k. uplo isolato di f ($k \geqq 4$), in guisa però che nell'ultimo caso le sezioni delle due superficie con uno stesso piano generico passante per quel punto abbiano in comune ancora $k-4$ punti infinitamente vicini su ciascuno dei k rami uscenti dal punto (in tutto $2\,k\,(k-2)$ intersezioni assorbite dal punto k. uplo) [2]. Una siffatta superficie di ordine $2(n-4)$ si darà *biaggiunta* ad f.

Nella ipotesi più semplice che la f sia dotata soltanto di curva doppia e non abbia punti multipli isolati [3], *le superficie di ordine* $2(n-4)$ *biaggiunte ad* f (secanti dunque su f tutto il sistema bicanonico) *sono caratterizzate dal fatto di passar doppiamente per la nominata curva doppia.*

12. Ciò posto riprendiamo il nostro ente algebrico di genere (geom. = num.) zero, e supponiamo ora che sia pure $P = 0$. Consideriamo sull'ente il sistema $|C|$ dotato delle proprietà nominate al n. 1 *c*), e costruiamone i successivi sistemi aggiunti $|C'|, |C''|, \ldots$; noi vogliamo dimostrare anzitutto che la serie di questi non può prolungarsi indefinitamente.

---

condizione è sufficiente a caratterizzare una superficie aggiunta allorchè f non possiede punti multipli *isolati* (tali da influire sul genere di una sezione piana di f ottenuta con un piano condotto per uno di essi). Se invece f possiede punti multipli isolati occorre inoltre precisare il comportamento di una superficie aggiunta in ciascuno di quelli, e qui si possono presentare notevoli complicazioni dipendenti dalla natura della singolarità.

[1] Per una superficie f dotata di curve multiple qualsivogliono, ma priva di punti multipli isolati, si può anzi dire che ogni superficie di ordine $2(n-4)$ la quale determini sopra un piano generico una curva che (rispetto alla corrispondente sezione di f, nei punti multipli di questa) si comporti come l'insieme di due curve aggiunte, e non contenga f, sega su f una curva bicanonica (n. 10) sicchè l'esistenza di una siffatta superficie prova che $P > 0$; di questa osservazione dovremo tener conto tra poco.

[2] Enriques « *Introduzione...* » cap. VI.

[3] Con ciò non si esclude la presenza di punti k. upli ($k > 2$) sulla superficie, ma si esige che per ogni punto k. uplo la curva doppia passi $\frac{k(k-1)}{2}$ volte.

Supponiamo il contrario, e supponiamo che ciascuno dei sistemi

$$|C|, |C'|, |C''|, \ldots, |C^{(i)}|, \ldots$$

di dimensioni $r, r', r'', \ldots, r^{(i)}, \ldots$, abbia le *stesse proprietà di* $|C|$. Scelti tra quelli, tre sistemi consecutivi, ad es. $|C|, |C'|, |C''|$, consideriamo la serie di gruppi, che il terzo sega sulla curva generica C del primo. Abbiamo già visto (n. 8) che questa serie ha l'ordine $4\pi - 4 - n - \delta$ (dove π ed n sono il genere ed il grado di $|C|$, ed è $\delta \geqq 0$), e la dimensione r'' (poichè, essendo $P = 0$, $|C''|$ non contiene $|C|$). Ora la serie $g_{4\pi-4-n-\delta}^{r''}$ sopra una curva C di genere π è certo non speciale se $\pi - 1 < r''$ ossia se $r' < r''$; ed è pure non speciale (nel caso che stiamo trattando) se $r' = r''$, poichè nella ipotesi opposta quella serie (avendo la dimensione $r' = \pi - 1$) dovrebbe coincider colla serie canonica $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ di C, ed il sistema $|C''|$ segando sulla curva generica di $|C|$ la serie canonica, dovrebbe coincidere con $|C'|$ (n. 2, ultima nota), il che è impossibile (n. 1, *a*)).

Dunque o si ha:

(1) $$r'' < r',$$

oppure la serie $g_{4\pi-4-n-\delta}^{r''}$ è non speciale, ed è in conseguenza:

$$(4\pi - 4 - n - \delta) - r'' \geqq \pi$$

ossia (ricordando che $n = \pi + r - 1$, $\pi = r' + 1$, $\delta \geqq 0$)

(2) $$r'' - r' < r' - r$$

Similmente ragionando sui tre sistemi consecutivi $|C'|, |C''|, |C'''|$, si trova che o

(1)' $$r''' < r''$$

oppure

(2)' $$r''' - r'' < r'' - r'.$$

E qui va notato che se sussiste la (1), allora sussiste pure la (1)', poichè la stessa (2)' sommata membro a membro colla (1) ci dà la (1)'.

Questo ragionamento naturalmente si può continuare e conduce al seguente risultato: *nella serie dei numeri (interi, positivi)* $r, r', r'', r''', \ldots, r^{(i)}, \ldots$, *od uno dei termini è inferiore al termine precedente, ed allora da quel posto in poi i termini vanno successivamente decrescendo; oppure le differenze tra ciascun termine e il precedente vanno successivamente decrescendo:*

$$r' - r > r'' - r' > r''' - r'' > \ldots$$

Ora entrambi questi casi (dei quali il secondo finisce per ridursi al primo) sono incompatibili colla ipotesi che sia infinita la serie dei numeri r, ossia dei sistemi successivi aggiunti. Dobbiamo dunque concludere che percorrendo questa ultima serie si giunge necessariamente ad un primo sistema $|C^{(i)}|$, il quale più non soddisfa alla condizioni di $|C|$.

13. Abbiamo già visto (n. 7, 2)) come questo fatto possa presentarsi; dei due casi 2′), 2″) a cui esso dà luogo, abbiamo già notato che il primo è possibile soltanto sopra enti *razionali*, e ci siamo riservati di discutere in seguito il caso 2″), in cui sull'ente sta un sistema $|C^{(i-1)}|$ di dimensione $r_{i-1} \geqq 3$ godente le proprietà di $|C|$ e contenente un sistema di dimensione $r_{i-1} - 1$ tutto composto di curve iperellittiche. Ora siamo in grado di compiere la discussione.

Possiamo anzitutto assumere come immagine proiettiva dell'ente algebrico (n. 4) una superficie f dello spazio ordinario, di un certo ordine ν, dotata di un punto o multiplo secondo $\nu - 2$, non avente altre curve multiple che rette uscenti da o, di tali molteplicità che il genere della sezione piana generica c risulti uguale a $\nu - 2$, sia che il piano passi o non passi per o; la f è priva inoltre di punti singolari isolati. Il sistema $|c'|\,\infty^{\nu-3}$ delle curve di ordine $2\nu - 6$ aggiunte al sistema $|c|$ delle sezioni piane di f vien segato su f dai coni di ordine $\nu - 3$ che passano $h - 1$ volte per ogni retta h. upla di f, e sono quindi aggiunti ad f ed alla sezione piana generica di f. Ora io dico che se il carattere P (dell'ente e quindi) di f è zero, quei coni sono razionali. Supponiamo l'opposto se è possibile; esisterà allora almeno un cono di ordine $\nu - 6$ aggiunto ad essi, il quale passerà $h - 2$ volte per ogni retta h. upla di f. Un siffatto cono preso insieme al cono di ordine $\nu - 2$ tangente ad f in o, il quale passa h volte (almeno) per ogni retta h. upla di f, dà complessivamente una superficie (cono) di ordine $2(\nu - 4)$ passante $2(h - 1)$ volte (almeno) per ogni retta h. upla di f; superficie la quale, segando un piano generico lungo una curva che, rispetto alla corrispondente sezione di f, si comporta come l'insieme di due curve aggiunte, è una particolare superficie biaggiunta ad f: e ciò non è possibile poichè la f per ipotesi (P = 0) non ammette superficie biaggiunte di ordine $2(\nu - 4)$ (pel n. 11). Concludiamo dunque che i coni d'ordine $\nu - 3$ aggiunti ad f sono razionali, e quindi sono iperellittiche le $\infty^{\nu-3}$ curve c' di ordine $2(\nu - 3)$ che essi segano sopra f. Ora poichè il sistema $|c|$ ha le proprietà di $|C|$ (n. 1 c)), il sistema aggiunto $|c'|$ ha la serie caratteristica non speciale (n. 6). D'altra parte è noto (¹) che una superficie la quale contenga un sistema lineare di curve iperellittiche a serie caratteristica non speciale, è razionale (escluse al solito le rigate irrazionali); concludiamo dunque che anche in quest'ultimo caso che ci rimaneva da esaminare, la f, ossia l'ente algebrico che essa rappresenta, è razionale.

14. Ed ora possiamo enunciare il risultato finale della nostra ricerca:

Affinchè un ente algebrico ∞^2 (superficie) sia razionale (rappresentabile punto per punto sul piano) è necessario e sufficiente che siano nulli il genere numerico p_n, il genere geometrico p_g ed il carattere P (definito al n. 9). Le tre condizioni non sono però indipendenti, perchè la $p_g = 0$ è conseguenza della terza P = 0 (e non viceversa), come si è mostrato al n. 9. Invece la prima e terza condizione $p_n = 0$, P = 0 sono indipendenti, ed esistono superficie per cui si verifica una sola delle due.

(¹) Si veda ad es. la mia Nota « *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche* » n. 4 (Rendic. Accad. d. Lincei, 1894); la questione si riduce subito a quella della razionalità dei piani doppi già risolta dai lavori di Clebsch e Nöther.

Sotto varie forme può presentarsi l' enunciato dello stesso teorema; notevole è la seguente:

Un ente algebrico ∞^2 *di genere numerico zero è razionale se esso contiene un sistema lineare di curve irreducibili, sistema almeno* ∞^2, *il cui grado* n *superi* $2\pi - 2$, *dove* π *è il genere del sistema stesso* (o la cui dimensione r superi π); poichè in tale ipotesi è $P=0$ (n. 10, prima nota)([1]).

Dal punto di vista proiettivo può riuscire utile anche il seguente enunciato:

Affinchè una superficie di ordine n *dello spazio ordinario sia razionale è necessario e sufficiente che oltre ad avere il genere numerico zero, essa non ammetta superficie biaggiunte di ordine* $2(n-4)$ (all'infuori di quelle che contengono tutta la superficie primitiva) (n. 11).

15. Per esaurire la nostra ricerca rimane ora da mostrare con effettivi esempi che esistono superficie aventi il genere geometrico e numerico zero, ma $P>0$.

1) Un primo esempio molto semplice di siffatte superficie mi fu suggerito dal sig. Enriques. Si immagini una superficie F^6 del *sesto ordine*, la quale *passi doppiamente per i sei spigoli di un tetraedro e tre volte per ciascun vertice*, superficie certo esistente come mostra l'equazione:

$$(1)\ f_2\,(x_2 x_3 x_4,\ x_1 x_3 x_4,\ x_1 x_2 x_4,\ x_1 x_2 x_3) + x_1 x_2 x_3 x_4 \cdot \varphi_2\,(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

dove f_2 e φ_2 sono forme quadratiche quaternarie nelle variabili indicate tra parentesi, ed $x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$ è il nominato tetraedro. La F^6 è priva di punti multipli *isolati*, poichè comunque si scelga un punto sulla superficie (sia pure in un vertice del tetraedro), sempre il piano generico condotto pel punto sega F^6 lungo una curva C di genere costante $\pi = 4$. Quindi le superficie aggiunte ad F^6 sono soggette alla sola condizione di passare semplicemente per le sei rette doppie di F^6; e le superficie biaggiunte alla sola condizione di passare doppiamente per le stesse sei rette (n. 11). Ne viene che la F^6 non possiede superficie aggiunte di ordine $6-4=2$, ed ha quindi il *genere geometrico* $p_g = 0$, mentre il *genere numerico è pur esso* $p_n = 0$, poichè i sei spigoli di un tetraedro impongono ad una delle ∞^9 quadriche dello spazio 10 condizioni. Invece esiste *una* ($=\infty^0$) superficie di ordine $2\,(6-4)=4$ biaggiunta ad F^6, e si compone delle quattro faccie del tetraedro; quindi (n. 11) *la* F^6 *ha* $P=1$; ed in conseguenza *non è razionale*. La superficie biaggiunta del

([1]) L'ultimo teorema rende superflua la discussione che si trova nel capitolo II della mia Nota « *Sulla razionalità delle involuzioni piane* » (Mathem. Annalen, Bd. 44); poichè quando sia dimostrato (capitolo I di quella Nota) che sopra una superficie i cui punti rappresentino i gruppi di una involuzione piana, ogni sistema lineare di curve ha la serie caratteristica completa (quindi $p_g = p_n$) ed esistono sistemi di dimensione superiore al genere (quindi $p_g = P = 0$), si può concludere senz'altro la razionalità di quella superficie o di quella involuzione in base al presente lavoro (le cui considerazioni però hanno vari punti di contatto colla Nota dei Math. Ann.).

Se poi si bada al n. 15, lemma *a*) della Nota citata, da esso e dal teorema del testo si dedurrà facilmente il seguente: *È razionale una superficie dello spazio a* r *dimensioni* S_r *priva di punti multipli isolati la quale venga segata da un iperpiano* S_{r-1} *generico lungo una curva normale di genere* $\pi < r$ (*e quindi di ordine* $n = \pi + r - 1$); basterebbero anche le ipotesi $\pi = r$, $n = 2\pi - 1$ (prese insieme), purchè sempre la superficie fosse priva di punti singolari isolati.

quarto ordine non sega F^6 fuori delle linee multiple; quindi la curva bicanonica di F^6 (intersezione residua) ha, si può dire, l'*ordine zero* (¹).

Al resultato $P=1$ si può anche arrivare osservando che su F^6 il sistema lineare ∞^3 $|C'|$ aggiunto al sistema $|C|$ delle sezioni piane della superficie, è segato dalle superficie cubiche passanti semplicemente per gli spigoli del tetraedro; (dal che segue facilmente che $|C'|$ ha il genere $\pi'=4$ ed il grado $n'=6$, come $|C|$, quantunque $|C'|$ sia distinto da $|C|$). Il sistema $|2C'|$ doppio di $|C'|$ vien segato su F^6 dalle superficie di ordine $2\cdot 3=6$ che passano doppiamente per gli spigoli del tetraedro, dunque dalle superficie le cui equazioni si ottengono dalla (1) lasciando variare i coefficienti che in quella entrano. Ora tra queste superficie si trovano pure le

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \varphi_2 (x_1, x_2, x_3, x_4)=0,$$

dove si lasciano variare i dieci coefficienti della forma φ_2; quindi il sistema normale $|2C'|$ contiene le sezioni di F^6 colle quadriche $\varphi_2=0$ dello spazio, contiene adunque il sistema normale $|2C|$, doppio di $|C|$. Anzi si vede subito (confrontando ad es. i gradi, entrambi $=12$, di $|2C'|$ e $|2C|$) che $|2C'|$ coincide con $|2C|$, dal che segue appunto $P=1$.

Il sistema $|C''|$ aggiunto di $|C'|$ ha la dimensione $\pi'-1=3$, ed è contenuto (n. 8) nel residuo di $|C|$ rispetto a $|2C'|=|2C|$, residuo che è $|C|$ stesso; anzi poichè $|C''|$ e $|C|$ hanno la stessa dimensione segue che $|C''|$ *coincide con* $|C|$. Quindi l'aggiunto $|C'''|$ di $|C''|$ coincide con $|C'|$, e così via; l'*operazione di aggiunzione applicata più volte a* $|C|$ *è periodica col periodo 2;* essa non ha termine, ed in ciò si ha una nuova prova dal fatto che F^6 non è razionale.

Qui non mi propongo di fare uno studio completo della superficie F^6, sebbene questo potrebbe riuscire interessante sotto vari aspetti (²). Solo farò notare che la F^6 mediante la trasformazione cremoniana quadratica dello spazio

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_3 y_4 : y_1 y_2 : y_1 y_3 : y_1 y_4$$

si muta in una superficie del *quinto ordine* la cui equazione ha il seguente tipo

$$a y_1^3 y_2^2 + b y_2^3 y_1^2 + y_3^2 y_4^2 (c y_1 + d y_2) + y_1 y_2 \psi_3 (\overset{1}{y}_1, \overset{1}{y}_2, \overset{2}{y}_3, \overset{2}{y}_4)=0$$

dove ψ_3 è una forma cubica che contiene ciascuna delle quattro variabili y al grado sopra scritto (o minore).

La superficie non ha curve multiple, ma possiede *due tacnodi* nei vertici 1, 2 del tetraedro fondamentale, coi piani tacnodali $y_2=0$, $y_1=0$ rispettivamente, e possiede inoltre due punti tripli nei rimanenti vertici 3, 4 del tetraedro. Le superficie aggiunte ad F^5 passano semplicemente per i tacnodi e per i punti tripli, le superficie

(¹) Un caso analogo può presentare la curva canonica di una superficie con $p_g=1$ (per es. della superficie generale del quarto ordine).

(²) Un caso particolare notevole della F^6, che può dare un esempio delle superficie considerate al n. 4, si presenta quando il tetraedro si riduce ad un angoloide tetraedro il cui vertice è quadruplo per F^6 ed i cui sei spigoli sono doppi per la superficie; l'equazione della superficie va allora naturalmente modificata, ma parecchi caratteri geometrici permangono; è sempre ad es. $p_g=p_n=0$, $P=1$.

biaggiunte passano semplicemente per i tacnodi toccando ivi i piani tacnodali, e passano doppiamente per i punti tripli; sicchè la unica superficie biaggiunta di ordine $2(5-4)=2$ è la $y_1 y_2=0$. Con una proiezione dal punto triplo si ottiene un piano doppio (con curva limite di ordine 8 scindentesi in due rette ed in una sestica) rappresentativo della superficie.

2) Le considerazioni precedenti sul modo di comportarsi di una superficie aggiunta o biaggiunta in un tacnodo della superficie iniziale, non dipendono dalla natura di questa, e possono confermarsi direttamente nel modo più facile applicando anzitutto alla superficie iniziale una tal trasformazione birazionale (per es. una inversione col centro nel tacnodo), la quale muti il tacnodo in una linea multipla ordinaria, e ricercando poi le superficie aggiunte o biaggiunte alla superficie trasformata.

Qui non ci fermeremo sulla accennata verificazione, ma approfitteremo dei risultati a cui essa conduce per costruirci una nuova superficie con $p_g=p_n=0$, $P>0$.

Consideriamo anzitutto una superficie cubica generale $f_3=0$, e su questa fissiamo una retta r ed una conica k non avente punti comuni colla retta; per r passano cinque piani tangenti altrove a f_3; siano $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ tre di essi, ed A, B, C i loro punti di contatto, sia inoltre $\delta=0$ un quarto piano *qualsiasi* passante per r. Allora la superficie

$$f_3^2\delta=0$$

dà una prima superficie del *settimo ordine* passante *tre volte per la retta* r, *due volte per la conica* k, *ed avente inoltre i punti* A, B, C *come tacnodi ed* α, β, γ *come corrispondenti piani tacnodali.* Un seconda superficie del settimo ordine soddisfacente alle stesse condizioni si ottiene considerando una superficie del quarto ordine $f_4=0$, la quale passi doppiamente per la conica k, e tocchi i piani α, β, γ in A, B, C (1), e riunendola ai piani $\alpha=0, \beta=0, \gamma=0$, in guisa da ottenere la superficie

$$f_4\alpha\beta\gamma=o.$$

Ogni superficie del fascio

$$F_7\equiv f_3^2\delta+\lambda f_4\alpha\beta\gamma=0$$

(dove λ è una costante arbitraria) ha l'ordine 7, *passa tre volte per la retta* r, *due volte per la conica* k, *ed ha i punti* A, B, C *come tacnodi dotati dei piani tacnodali* α, β, γ.

Vogliamo determinare i caratteri invariantivi di F_7. Anzitutto una superficie aggiunta di ordine $7-4=3$ dovrebbe passare doppiamente per la retta r, semplicemente per la conica k, e semplicemente inoltre per i tacnodi A, B, C; ma le prime due condizioni farebbero già spezzare la superficie stessa nel piano di k e in due piani per r i quali dovrebbero poter contenere A, B, C; ciò non è possibile, quindi non esistono superficie del terzo ordine aggiunte ad F_7, ed in conseguenza è $p_g=0$;

(1) Esiste certo una siffatta f_4, perchè le f_4 passanti doppiamente per una data conica sono ∞^{13}, mentre i tre contatti in A, B, C impongono 9 condizioni; del resto come superficie f_4 si potrebbe assumere il piano di k contato due volte preso insieme col piano ABC pure contato due volte.

ed è pure $p_n = 0$ poichè le nominate condizioni considerate staccatamente equivalgono a

$$10 + 7 + 3 = 20$$

condizioni semplici imposte alle ∞^{19} superficie cubiche dello spazio.

Per calcolare P osserviamo che una superficie biaggiunta φ_6 di ordine $2(7-4) = 6$ ad F_7 deve passare tre volte per la retta r, avendo però in ogni punto di questa gli stessi tre piani tangenti della F_7, deve inoltre passare due volte per la conica k, e toccare i piani α, β, γ nei punti A, B, C.

Queste condizioni portano anzitutto di conseguenza lo spezzamento della superficie φ_6 nel piano di k ed in una superficie del 5° ordine φ_5 passante tre volte per la retta r (cogli stessi piani tangenti di f in ogni punto di r), una volta per k, e tangente ai piani α, β, γ in A, B, C. Ora un piano generico condotto per r (retta tripla di F_7) tocca la F_7 in quattro punti di r (variabili al variare del piano poichè, come è facile vedere, la F_7 generica non ha punti quadrupli su r); dunque quel piano per r deve toccare negli stessi quattro punti la φ_5 che passa tre volte per r. Ciò esige naturalmente che questa superficie passi (non solo tre ma) quattro volte per r, e quindi (tenuto conto delle altre condizioni) si spezzi nel piano di k ed in quattro piani passanti per r tre dei quali coincidono coi piani α, β, γ, mentre il quarto è variabile in un fascio, e sega su F_7 la parte variabile della curva bicanonica generica. Segue che $P = 2$, e che la detta parte variabile è una quartica dotata di due punti doppi.

Riassumendo:

Una superficie del settimo ordine avente una retta tripla, una conica doppia non secante la retta, e tre tacnodi i cui piani tacnodali passano per la retta, ha i caratteri $p_g = p_n = 0$ *e* $P = 2$; *le* ∞^1 *curve bicanoniche variabili sono quartiche ellittiche sopra piani passanti per la retta tripla.*

Quest' ultimo fatto è caso particolare di una proprietà che vale per tutte le superficie contenenti un fascio di curve ellittiche; ogni curva bicanonica (od anche canonica) sulla superficie si compone di una o più curve di quel fascio (prese eventualmente insieme a parti fisse) (1).

Roma, Dicembre 1894.

(1) La proprietà si dimostra in modo analogo a quello che ho tenuto trattando delle curve canoniche nelle *Osservazioni intorno alla Geometria sopra una superficie.* Nota I, n. 2 (Rendic. Istituto Lombardo 1891).