MEMORIE

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE (DETTA DEI XL)

SULLA ESPRESSIONE DEGL' INTEGRALI ELLITTICI IN INTEGRALI DEFINITI

(CON DIVERSE APPLICAZIONI)

MEMORIA

del Socio nazionale GIUSEPPE ZURRIA

Ricevuta il giorno 15 Settembre 1890

Mi propongo nel presente lavoro di esprimere gl' integrali ellittici in integrali definiti: di dedurre dalla espressione relativa all' integrale ellittico di prima specie una serie, di cui trovo il termine generale, e per mezzo della quale si può ottenere con approssimazione il valore del medesimo integrale: di assegnare, paragonando questa serie con quella data da Gudermann e pubblicata l' anno 1837 nel Tomo XVI del *Giornale di Crelle*, l' espressione generale dei coefficienti di quest' ultima serie: di notare, che tanto la predetta espressione generale quanto quella che traggo dalla formola indicata simbolicamente da Gudermann, soddisfacendo l' equazione lineare a differenze finite di secondo ordine a coefficienti variabili, esprimente la scala di relazione, alla quale sono soggetti i medesimi coefficienti, nè rappresentano sotto forma diversa il corrispondente integrale: di determinare l' integrale della stessa equazione col metodo di Brunacci a fine di paragonarne il risultato con quello precedentemente ottenuto: di dedurre, mediante una semplice integrazione, dalla serie relativa all' integrale ellittico di prima specie quella spettante all' integrale ellittico di seconda specie: ed infine, col mezzo delle ottenute formole esprimenti gl' integrali ellittici in integrali definiti, e con nuovo metodo breve e puramente analitico, di ridurre alla forma semplice, di cui è suscettibile non ostante che contenga archi di cerchio, il risultato che si ottiene integrando, rispetto ad una delle due variabili, l' integrale doppio rappresentante la superficie dell' ellissoide.

1.

Esprimendo con k una quantità minore dell' unità, ed integrando la funzione differenziale

$$\frac{d\psi}{1-k^2 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\psi}$$

si ottiene il risultato

$$\int_0^\psi \frac{d\psi}{1-k^2 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\psi} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} \operatorname{arc.tan} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}\,.\tan\psi, \tag{1}$$

da cui si deduce

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{1-k^2 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\psi}. \tag{2}$$

Se si moltiplica questa equazione per $d\varphi$, e se ne effettua l'integrazione rispetto alla φ, si ha

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{1-k^2 \operatorname{sen}^2\psi \operatorname{sen}^2\varphi};$$

e quindi per mezzo della (1), permutando la ψ in φ, e la φ in ψ,

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\psi}} \operatorname{arc.tan} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\psi}\,.\tan\varphi. \tag{3}$$

2.

Se, denotando con h una quantità arbitraria maggiore del modulo k, si considera la funzione

$$\frac{h\,dh}{\sqrt{h^2-k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}$$

come il risultato della differenziazione di $\sqrt{h^2-k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}$ rispetto ad h, si ha identicamente

$$\sqrt{h^2-k^2 \operatorname{sen}^2\varphi} = \int \frac{h\,dh}{\sqrt{h^2-k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Ponendo nel secondo membro di questa entità l'espressione di

$$\frac{1}{\sqrt{h^2-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}},$$

dedotta dalla (2) mercè la sostituzione di $\frac{k}{h}$ invece di k, si otterrà, invertendo l'ordine dell'integrazione,

$$\sqrt{h^2-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\psi\int\frac{h^2\,dh}{h^2-k^2\operatorname{sen}^2\psi\operatorname{sen}^2\varphi},$$

ma

$$\int\frac{h^2\,dh}{h^2-k^2\operatorname{sen}^2\psi\operatorname{sen}^2\varphi}=h+\frac{k\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{h-k\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi}{h+k\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi}\right),$$

dunque sostituendo, e fatto poscia $h=1$, si ha l'eguaglianza

$$\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}=1+\frac{k}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi\,d\psi\,\mathrm{l}\left(\frac{1-k\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi}{1+k\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi}\right), \tag{4}$$

la quale moltiplicata per $d\varphi$, ed integrata, dà

$$\int_0^{\varphi}d\varphi\,\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}=\varphi+\frac{k}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}\psi\,d\psi.\mathrm{R}, \tag{5}$$

avendo fatto per brevità

$$\mathrm{R}=\int_0^{\varphi}\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\,\mathrm{l}\left(\frac{1-k\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi}{1+k\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi}\right).$$

Sottoponendo questa espressione al metodo d'integrazione per parti, si ottiene il risultato

$$\mathrm{R}=-\cos\varphi\,\mathrm{l}\left(\frac{1-k\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi}{1+k\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi}\right)-\frac{2\varphi}{k\operatorname{sen}\psi}+\frac{2(1-k^2\operatorname{sen}^2\psi)}{k\operatorname{sen}\psi}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{1-k^2\operatorname{sen}^2\psi\operatorname{sen}^2\varphi},$$

il quale in virtù della (1), mercè il reciproco cambiamento delle due quantità φ, e ψ, diviene

$$\mathrm{R}=-\cos\varphi\,\mathrm{l}\left(\frac{1-k\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi}{1+k\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi}\right)-\frac{2\varphi}{k\operatorname{sen}\psi}+\frac{2\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\psi}}{k\operatorname{sen}\psi}\operatorname{arc.tan}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\psi}.\tan\varphi.$$

Sostituendo questo valore di R nella (5), ed indi riducendo e facendo uso della (4), si trova l'espressione

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi} &= \cot\varphi\left(1-\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}\right)\\ &+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\psi}\,.\,\mathrm{arc.tan}\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\psi}\,.\,\tan\varphi\end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

Se poi nel secondo membro dell'equazione identica

$$k^2\int_0^\varphi \frac{\mathrm{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}} - \int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}$$

si sostituiscono i valori dei due integrali rappresentati dalla (3), e dalla (6), otterrassi puranco la seguente formola:

$$\begin{aligned}k^2\int_0^\varphi \frac{\mathrm{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}} &= -\cot\varphi\left(1-\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}\right)\\ &+\frac{2k^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{sen}^2\psi\, d\psi}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\psi}}\,\mathrm{arc.tan}\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\psi}\,.\,\tan\varphi\,.\end{aligned}$$

3.

Se, denotando con n una quantità reale, si sostituisce nella funzione

$$\frac{1}{1+n\,\mathrm{sen}^2\varphi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}}$$

il valore del secondo fattore rappresentato dalla (2), si troverà la relazione

$$\frac{1}{(1+n\,\mathrm{sen}^2\varphi)\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{n+k^2\,\mathrm{sen}^2\psi}\left[\frac{n}{1+n\,\mathrm{sen}^2\varphi}+\frac{k^2\,\mathrm{sen}^2\psi}{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\psi\,\mathrm{sen}^2\varphi}\right],$$

la quale, moltiplicata per $d\varphi$ ed integrata, diviene, mercè la (1) ed il reciproco permutamento delle due quantità φ, e ψ,

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\,\mathrm{sen}^2\varphi)\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}} &= \mathrm{P}\\ +\frac{2k^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{sen}^2\psi\, d\psi}{(n+k^2\,\mathrm{sen}^2\psi)\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\psi}}&\,\mathrm{arc.tan}\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\psi}\,.\,\tan\varphi\end{aligned}\right\}. \qquad (7)$$

Questa espressione, in cui per brevità abbiamo posto

$$P=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{nd\psi}{n+k^2\operatorname{sen}^2\psi}\cdot\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{1+n\operatorname{sen}^2\varphi},$$

attesa l'entità

$$\frac{k^2\operatorname{sen}^2\psi}{n+k^2\operatorname{sen}^2\psi}=1-\frac{1}{1+\frac{k^2}{n}\operatorname{sen}^2\psi},$$

ed avuto riguardo alla (3), si può scrivere anche sotto la forma

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+n\operatorname{sen}^2\varphi)\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}=P\\ +\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}&-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\left(1+\frac{k^2}{n}\operatorname{sen}^2\psi\right)\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\psi}}\operatorname{arc.tan}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\psi}.\tan\varphi\end{aligned}\right\}.\ (8)$$

Intanto essendo

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{nd\psi}{n+k^2\operatorname{sen}^2\psi}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k^2}{n}}}$$

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{1+n\operatorname{sen}^2\varphi}=\frac{1}{\sqrt{1+n}}\operatorname{arc.tan}\sqrt{1+n}.\tan\varphi,$$

ne segue che, se il parametro n è positivo, si ha

$$P=\frac{1}{\sqrt{1+n}\sqrt{1+\frac{k^2}{n}}}\operatorname{arc.tan}.\sqrt{1+n}.\tan\varphi;$$

se n è negativo minore dell'unità, e maggiore di k^2, si ha

$$P=\frac{1}{\sqrt{1-n}\sqrt{1-\frac{k^2}{n}}}\operatorname{arc.tan}.\sqrt{1-n}.\tan\varphi;$$

e se n è negativo maggiore dell'unità, attesa la nota relazione

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\operatorname{arc.tan}.v\sqrt{-1}=\frac{1}{2}\operatorname{l}\left(\frac{1+v}{1-v}\right)$$

tra le funzioni circolari e le funzioni logaritmiche, sarà

$$P=\frac{1}{2\sqrt{n-1}\sqrt{1-\frac{k^2}{n}}}\,l\left(\frac{1+\sqrt{n-1}\,.\tan\varphi}{1-\sqrt{n-1}\,.\tan\varphi}\right).$$

Però in quest'ultima espressione di P, la quale svanisce con l'amplitudine φ, si deve prendere $\tan\varphi<\frac{1}{\sqrt{n-1}}$, se si vuole che essa dia risultati reali.

Da tutto ciò si deduce, che bisogna mettere nella (7), o nella (8), una delle tre espressioni di P, sopra assegnate, onde conseguire il valore dell'integrale ellittico di terza specie corrispondentemente al segno ed al valore del parametro n.

4.

Le formole (3), (6), (8), che abbiamo ottenuto, esprimono le tre specie d'integrali ellittici in funzione d'integrali definiti, nei quali l'espressione da integrarsi è composta dal prodotto della funzione circolare

$$\text{arc}\,.\,\tan\,.\,\sqrt{1-k^2\,\text{sen}^2\psi}\,.\,\tan\varphi$$

per il differenziale del corrispondente integrale ellittico, eccettuato quello, da cui dipende l'integrale di terza specie, nel quale il parametro n è rimpiazzato da $\frac{k^2}{n}$.

Osserviamo che valutando i predetti integrali tra i limiti di $\varphi=0$, e $\varphi=\frac{\pi}{2}$, i due membri della (3) e della (6) divengono identici, laddove la (8), ponendo per brevità

$$\Delta(k,\varphi)=\sqrt{1-k^2\,\text{sen}^2\varphi},$$

conduce alla nota relazione

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1+n\,\text{sen}^2\varphi)\,\Delta(k,\varphi)}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\left(1+\frac{k^2}{n}\,\text{sen}^2\varphi\right)\Delta(k,\varphi)}=\frac{\pi}{2\sqrt{(1+n)\left(1+\frac{k^2}{n}\right)}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta(k,\varphi)}.$$

Osserviamo altresì che, attese le relazioni esistenti tra le varie funzioni circolari, si potrebbe esprimere la funzione arc. tan. per mezzo di arc. sen., arc. secante, ecc.;

ma l'espressione per arc. tangente mi sembra meritare la preferenza, siccome quella che fa ottenere facilmente il valore dell'integrale definito, contenuto nelle predette formole, per mezzo di serie di cui i termini oltre che risultano ordinati secondo le potenze ascendenti di $\tan\varphi$, procedono anche con legge talmente manifesta da potersene agevolmente trovare il termine generale. Però tali serie, che sono convergenti per tutti i valori di φ minori di $\frac{\pi}{4}$, potrebbero non esserlo allorchè la φ oltrepassa questo limite; e si è per questa ragione che ci proponiamo di trasformare soltanto quelle relative agl'integrali di prima e di seconda specie, frequentemente usati, in altre che siano ordinate secondo le potenze di $\tan\frac{1}{2}\varphi$.

5.

Cominciando dalla (3), e sviluppando il secondo membro di essa secondo le potenze di $\tan\varphi$, ottenghiamo l'espressione

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = \tan\varphi - \frac{1}{3}M_1\tan^3\varphi + \frac{1}{5}M_2\tan^5\varphi - \ldots \pm \frac{1}{2m+1}M_m\tan^{2m+1}\varphi \mp \ldots, \tag{9}$$

in cui abbiamo posto

$$M_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\operatorname{sen}^2\psi)^m d\psi,$$

ovvero effettuando l'integrazione

$$\left.\begin{aligned} M_m = 1 - m.\frac{1}{2}k^2 + \frac{m(m-1)}{1.2}.\frac{1.3}{2.4}k^4 - \ldots \\ \pm \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p}.\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p}k^{2p} \mp \ldots \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Se invece di $\tan\varphi$ si mette il suo valore $\frac{2\tan\frac{1}{2}\varphi}{1-\tan^2\frac{1}{2}\varphi}$, e si pone $\tan\frac{1}{2}\varphi = t$, la formola (9), esprimendo il secondo membro di essa in serie ordinata secondo le potenze della t, diverrà

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = 2[t + B_1t^3 + B_2t^5 + B_3t^7 + \ldots + B_rt^{2r+1} + \ldots], \tag{11}$$

in cui il coefficiente B_r del termine generale è rappresentato dalla

$$B_r = M_0 - \frac{r(r+1)}{1.2}\cdot\frac{2^2}{3}M_1 + \frac{(r-1)\,r(r+1)(r+2)}{1.2.3.4}\cdot\frac{2^4}{5}M_2 - \frac{(r-2)(r-1)\,r(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3.4.5.6}\cdot\frac{2^6}{7}M_3$$

$$+\frac{(r-3)(r-2)(r-1)\,r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}{1.2.3.4.5.6.7.8}\cdot\frac{2^8}{9}M_4$$

$$-\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$\pm\frac{(r-m+1)(r-m+2)(r-m+3)\ldots(r+m)}{1.2.3.4\ldots 2m}\cdot\frac{2^{2m}}{2m+1}M_m$$

$$\mp\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Se in questa formola, la quale si arresta quando è $m=r$, essendo eguali a zero i termini susseguenti, si pongono i valori dei coefficienti M_m, dedotti dalla (10) per mezzo della successiva sostituzione di $m=0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, otterrassi, ordinando i risultati secondo le potenze del modulo,

$$B_0 = \frac{\cos.0\pi}{1}.1$$

$$B_1 = \frac{\cos.\pi}{3}(1-2k^2)$$

$$B_2 = \frac{\cos.2\pi}{5}(1-6k^2+6k^4)$$

$$B_3 = \frac{\cos.3\pi}{7}(1-12k^2+30k^4-20k^6)$$

$$B_4 = \frac{\cos.4\pi}{9}(1-20k^2+90k^4-140k^6+70k^8)$$

$$B_5 = \frac{\cos.5\pi}{11}(1-30k^2+210k^4-560k^6+630k^8-252k^{10})$$

$$B_6 = \frac{\cos.6\pi}{13}(1-42k^2+420k^4-1680k^6+3150k^8-2772k^{10}+924k^{12})$$

$$B_7 = \frac{\cos.7\pi}{15}(1-56k^2+756k^4-4200k^6+11550k^8-16632k^{10}+12012k^{12}-3432k^{14})$$

ecc. ecc.

In questi risultati i coefficienti dei termini, racchiusi fra le parentesi, godono della proprietà, che la somma di quelli di posto impari differisce di $+1$, o di -1 dalla somma di quelli di posto pari, secondo che l'indice r delle funzioni B_r è pari, o dispari. Onde se nella (11) si rimette il valore di $t=\tan\frac{1}{2}\varphi$, ed indi si pone $k=0$, e $k=1$, si trova, come altronde si conosce,

$$\varphi=2\left(\tan\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{3}\tan^3\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{5}\tan^5\frac{1}{2}\varphi-\frac{1}{7}\tan^7\frac{1}{2}\varphi+\ldots\right),$$

$$\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=2\left(\tan\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{3}\tan^3\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{5}\tan^5\frac{1}{2}\varphi+\ldots\right)=\mathrm{l}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right).$$

6.

Sebbene nei precedenti valori delle funzioni B_r non si osserva a prima giunta la legge, secondo la quale procedono i coefficienti dei termini, racchiusi fra le parentesi, pure ponendo attenzione all'andamento dei medesimi coefficienti relativo alla stessa potenza del modulo nelle varie funzioni B_r, si rileverà che i predetti termini costituiscono le seguenti serie:

$$\begin{array}{l}
(1\,,1\,,1\,,1\,,\;1\,,\;1\,,\;1\,,\;\;1,\ldots).\quad k^0\\
(0\,,1\,,3\,,6\,,10\,,15\,,21\,,\;28,\ldots).\quad 2k^2\\
(0\,,0\,,1\,,5\,,15\,,35\,,70\,,126,\ldots).\quad 6k^4\\
(0\,,0\,,0\,,1\,,\;7\,,28\,,84\,,210,\ldots).\quad 20k^6\\
(0\,,0\,,0\,,0\,,\;1\,,\;9\,,45\,,165,\ldots).\quad 70k^8\\
(0\,,0\,,0\,,0\,,\;0\,,\;1\,,11\,,\;66,\ldots).\quad 252k^{10}\\
(0\,,0\,,0\,,0\,,\;0\,,\;0\,,\;1\,,\;13,\ldots).\quad 924k^{12}\\
(0\,,0\,,0\,,0\,,\;0\,,\;0\,,\;0\,,\;\;1,\ldots).\,3432k^{14}
\end{array}$$

ecc. ecc.

Se si determina, dipendentemente dall'indice r delle funzioni B_r, il termine generale di ciascuna delle serie contenute fra le parentesi, le quali serie, a contare dalla seconda e dal termine che in ciascuna di esse è uguale all'unità, non sono altro che la seconda, la quarta, la sesta, l'ottava, ecc. delle serie algebriche conosciute sotto la denominazione di serie dei numeri *figurati;* ed inoltre se si considera che le quantità

$$k^0\ ,\ 2k^2\ ,\ 6k^4\ ,\ 20k^6\ ,\ 70k^8\ ,\ \text{ecc. ecc.}$$

possono scriversi rispettivamente sotto la forma

$$k^0\ ,\ \frac{1}{1}.2k^2\ ,\ \frac{1.3}{1.2}.2^2k^4\ ,\ \frac{1.3.5}{1.2.3}.2^3k^6\ ,\ \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4}.2^4k^8,\ \text{ecc. ecc.}$$

si troverà, fatte le opportune riduzioni, che l'espressione generale dei coefficienti B_r è rappresentata dalla formola

$$B_r = \frac{\cos r\pi}{2r+1} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{r(r+1)}{1.2} \cdot \frac{1}{1} \cdot 2k^2 \\ + \frac{(r-1)r(r+1)(r+2)}{1.2.3.4} \cdot \frac{1.3}{1.2} \cdot 2^2 k^4 \\ - \frac{(r-2)(r-1)r(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3.4.5.6} \cdot \frac{1.3.5}{1.2.3} \cdot 2^3 k^6 \\ + \frac{(r-3)(r-2)(r-1)r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}{1.2.3.4.5.6.7.8} \cdot \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4} \cdot 2^4 k^8 \\ - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \end{array} \right.$$

ovvero più brevemente dalla formola

$$B_r = \frac{\cos r\pi}{2r+1} \left[1 + \sum_{p=1}^{p=r} \cos p\pi \cdot \frac{(r-p+1)(r-p+2)\ldots(r+p)}{1.2.3.4\ldots 2p} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{1.2.3\ldots p} \cdot 2^p k^{2p} \right], \quad (12)$$

nella quale i valori di p si estendono da $p=1$ sino a $p=r$ inclusivamente.

7.

Se si paragona la formola (11) con quella data da Gudermann, già di sopra citata, e scritta sotto la forma *).

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi}} = 2\left(t - \frac{A_1}{1} \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{A_2}{1.2} \cdot \frac{t^5}{5} - \frac{A_3}{1.2.3} \cdot \frac{t^7}{7} + \ldots\right),$$

si ottiene la relazione tra i coefficienti dell'una e dell'altra formola espressa in generale dall'eguaglianza

$$B_r = \frac{\cos r\pi}{2r+1} \cdot \frac{A_r}{1.2.3\ldots r}. \quad (13)$$

Il Gudermann denota con senθ il modulo che abbiamo rappresentato con k; esprime in funzione delle potenze di $\cos 2\theta$ i coefficienti A_r, che sono soggetti alla scala di relazione

$$A_r = (2r-1)\cos.2\theta . A_{r-1} - (r-1)^2 A_{r-2}; \quad (14)$$

*) P. F. Verhulst, *Traité élémentaire des fonctions elliptiques*, § 77. Bruxelles, 1841.

e dopo avere ottenuto per mezzo di essa i seguenti risultati

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \cos 2\theta \\
A_2 &= 3\cos^2 2\theta - 1 \\
A_3 &= 15\cos^3 2\theta - 9\cos 2\theta \\
A_4 &= 105\cos^4 2\theta - 90\cos^2 2\theta + 9 \\
A_5 &= 945\cos^5 2\theta - 1050\cos^3 2\theta + 225\cos 2\theta \\
A_6 &= 10395\cos^6 2\theta - 14175\cos^4 2\theta + 4725\cos^2 2\theta - 225
\end{aligned}
$$

ecc. ecc.

accenna soltanto che si ha in generale *)

$$A_r = \frac{d^r (v^2-1)^r}{2^r dv^r}, \text{ con } v = \cos 2\theta .$$

Eseguendo le operazioni indicate in questa espressione, si trova la formola

$$A_r = \frac{1}{2^r} \left\{ \begin{array}{l} 2r(2r-1)(2r-2)\ldots(r+1)v^r - r.(2r-2)(2r-3)(2r-4)\ldots(r-1)v^{r-2} \\ + \dfrac{r(r-1)}{1.2}.(2r-4)(2r-5)(2r-6)\ldots(r-3)v^{r-4} \\ - \dfrac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}.(2r-6)(2r-7)(2r-8)\ldots(r-5)v^{r-6} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} \quad (15)$$

per mezzo della quale si ottengono i su riferiti valori dei cofficienti A_r.

Nel caso di $r=5$ si ha, come sopra,

$$
\begin{aligned}
A_5 &= \frac{1}{2^5}(10.9.8.7.6v^5 - 5.8.7.6.5.4v^3 + 10.6.5.4.3.2v) \\
&= 945v^5 - 1050v^3 + 225v \\
&= 945\cos^5 2\theta - 1050\cos^3 2\theta + 225\cos 2\theta .
\end{aligned}
$$

Risolvendo la (13) rispetto ad A_r, e ponendo in essa il valore di B_r rappresentato dalla (12), otterrassi l'espressione generale

$$A_r = 1.2.3\ldots r\left[1 + \sum_{p=1}^{p=r} \cos p\pi . \frac{(r-p+1)(r-p+2)\ldots(r+p)}{1.2.3\ldots 2p} . \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{1.2.3\ldots p} . 2^p k^{2p}\right], \quad (16)$$

*) Ho corretto questa formola con apporre l'esponente r al binomio v^2-1, omesso per errore tipografico nel lavoro di Gudermann, inserito nel *Giornale di Crelle*.

la quale, somministrando il valore di un coefficiente qualunque A_r in funzione delle potenze pari di $k = \operatorname{sen}\theta$, riesce anche adatta a dare il valore del medesimo coefficiente in funzione delle potenze di $\cos 2\theta$.

8.

Se nella (14), esprimente la relazione tra le tre funzioni consecutive A_{r-2}, A_{r-1}, A_r, si pone $r+2$ invece di r, ed $1-2k^2$ invece di $\cos 2\theta$, si ha l'equazione lineare a differenze finite di secondo ordine

$$A_{r+2} - (2r+3)(1-2k^2)A_{r+1} + (r+1)^2 A_r = 0. \tag{17}$$

La successiva sostituzione, in questa equazione, dei valori di r, a partire da $r=0$, fa dipendere la determinazione della funzione A_r da quella delle due quantità A_0 ed A_1, le quali, restando indeterminate, rappresentano le due costanti arbitrarie, che devono contenersi nell'integrale generale della medesima equazione. Or la formola (16) soddisfacendo questa equazione ne esprime l'integrale corrispondente alla condizione, che per $r=0$ si ha $A_0=1$, e per $r=1$ si ha $A_1 = 1-2k^2$.

La stessa cosa avviene per la (15), la quale rappresenta l'integrale della medesima equazione (17), scritta sotto la forma

$$A_{r+2} - (2r+3)v\,A_{r+1} + (r+1)^2 A_r = 0,$$

e per la quale si ha $A_0=1$ ed $A_1=v$.

Se, per determinare l'integrale di quest' ultima equazione, si adoperasse il metodo di **Brunacci**, si troverebbe per risultato la seguente espressione:

$$A_r = \left[(2r-1)v - \cfrac{(r-1)^2}{(2r-3)v - \cfrac{(r-2)^2}{(2r-5)v - \cfrac{(r-3)^2}{(2r-7)v - \cfrac{\vdots}{3v - \cfrac{1^2}{v}}}}}\right] \cdot \left[(2r-3)v - \cfrac{(r-2)^2}{(2r-5)v - \cfrac{(r-3)^2}{(2r-7)v - \cfrac{\vdots}{3v - \cfrac{1^2}{v}}}}\right] \times$$

$$\left[(2r-5)v - \cfrac{(r-3)^2}{(2r-7)v - \cfrac{\vdots}{3v - \cfrac{1^2}{v}}}\right] \cdot \left[(2r-7)v - \cfrac{\vdots}{3v - \cfrac{1^2}{v}}\right] \cdots \left[3v - \frac{1^2}{v}\right] v.$$

Questa formola composta dal prodotto di r funzioni, espresse sotto forma di frazioni continue, conduce a risultati eleganti; ma nell'applicazione di essa ai casi particolari il calcolo per la determinazione di A_r riesce, come è facile comprendere, più lungo di quello delle formole precedenti. Nel caso di $r=5$ essa dà il risultato

$$A_5=\left(9v-\cfrac{16}{7v-\cfrac{9}{5v-\cfrac{4}{3v-\cfrac{1}{v}}}}\right)\left(7v-\cfrac{9}{5v-\cfrac{4}{3v-\cfrac{1}{v}}}\right)\left(5v-\cfrac{4}{3v-\cfrac{1}{v}}\right)\left(3v-\frac{1}{v}\right)v,$$

$$=945\,v^5-1050\,v^3+225\,v$$

il quale, come ben si vede, è conforme a quello già di sopra ottenuto.

9.

La serie, esprimente l'integrale ellittico di seconda specie in funzione di t, si può dedurre facilmente da quella dell'integrale di prima specie. Di fatti se si sostituisce nella (11) $\frac{k}{h}$ invece di k, e si denotano con B'_r ciò che divengono i coefficienti B_r in virtù di siffatta sostituzione, si ottiene

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{k^2}{h^2}\operatorname{sen}^2\varphi}}=2(t+B'_1t^3+B'_2t^5+B'_3t^7+\ldots+B'_rt^{2r+1}+\ldots).$$

Moltiplicando questa equazione per dh, integrando rispetto ad h, ed avendo riguardo all'entità

$$\int_0^\varphi d\varphi\sqrt{h^2-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}=\int_0^\varphi d\varphi\int\frac{dh}{\sqrt{1-\frac{k^2}{h^2}\operatorname{sen}^2\varphi}}=\int dh\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{k^2}{h^2}\operatorname{sen}^2\varphi}},$$

si troverà

$$\int_0^\varphi d\varphi\sqrt{h^2-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}=2[ht+t^3\int B'_1dh+t^5\int B'_2dh+\ldots+t^{2r+1}\int B'_rdh+\ldots]; \quad (18)$$

ma dalla (12), mettendo $\frac{k}{h}$ al posto di k, ed integrando riguardo ad h, si deduce

$$\int B'_rdh=\frac{\cos r\pi}{2r+1}\left[h-\sum_{p=1}^{p=r}\cos p\pi.\frac{(r-p+1)(r-p+2)\ldots(r+p)}{1.2.3\ldots2p}.\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{1.2.3\ldots p}.\frac{2^pk^{2p}}{(2p-1)h^{2p-1}}\right],$$

dunque, fatto $h=1$ tanto nella (18) quanto in quest'ultima espressione e denotando con Q_r il corrispondente valore della funzione $\int B'_r \, dh$, si otterrà il risultato

$$\int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\varphi} = 2(t + Q_1 t^3 + Q_2 t^5 + Q_3 t^7 + \ldots + Q_r t^{2r+1} + \ldots), \tag{19}$$

in cui il valore di un coefficiente qualunque Q_r è dato dalla formola generale

$$Q_r = \frac{\cos r\pi}{2r+1}\left[1 - \sum_{p=1}^{p=r} \cos p\pi \, . \, \frac{(r-p+1)(r-p+2)\ldots(r+p)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots 2p} \, . \, \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5 \ldots (2p-1)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots p} \, . \, \frac{2^p k^{2p}}{2p-1}\right]. \tag{20}$$

In questa formola i valori di p si estendono, come nella (12), da $p=1$ a $p=r$ inclusivamente.

Dal paragone della (20) con la (12) risulta evidente, che i valori delle funzioni Q_r si possono dedurre con facilità da quelli delle funzioni B_r, cambiando il segno dei termini, contenuti tra le parentesi, a cominciare dal secondo, e dividendo ciascuno di essi per la corrispondente potenza del modulo diminuita di una unità. Eseguendo le indicate operazioni sulle quantità B_r assegnate al n° 5, si ha immediatamente

$$Q_0 = \frac{\cos . 0\pi}{1} . 1$$

$$Q_1 = \frac{\cos . \pi}{3}(1 + 2k^2)$$

$$Q_2 = \frac{\cos . 2\pi}{5}(1 + 6k^2 - 2k^4)$$

$$Q_3 = \frac{\cos . 3\pi}{7}(1 + 12k^2 - 10k^4 + 4k^6)$$

$$Q_4 = \frac{\cos . 4\pi}{9}(1 + 20k^2 - 30k^4 + 28k^6 - 10k^8)$$

$$Q_5 = \frac{\cos . 5\pi}{11}(1 + 30k^2 - 70k^4 + 112k^6 - 90k^8 + 28k^{10})$$

$$Q_6 = \frac{\cos . 6\pi}{13}(1 + 42k^2 - 140k^4 + 336k^6 - 450k^8 + 308k^{10} - 84k^{12})$$

$$Q_7 = \frac{\cos . 7\pi}{15}(1 + 56k^2 - 252k^4 + 840k^6 - 1650k^8 + 1848k^{10} - 1092k^{12} + 264k^{14})$$

ecc. ecc.

Per mezzo di queste espressioni la (19) dà per $k=0$ lo stesso risultato della (11), e per $k=1$, essendo

$$Q_0 = 1 \;,\; Q_1 = -1 \;,\; Q_2 = 1 \;,\; Q_3 = -1 \;, \text{ ecc. ecc.}$$

conduce all'entità

$$\operatorname{sen}\varphi = 2\left(\tan\frac{1}{2}\varphi - \tan^3\frac{1}{2}\varphi + \tan^5\frac{1}{2}\varphi - \ldots\right) = \frac{2\tan\frac{1}{2}\varphi}{1+\tan^2\frac{1}{2}\varphi},$$

come deve avvenire sì nell'uno che nell'altro caso.

10.

Le formole (3), (6), (8), esprimenti gl'integrali ellittici in funzione di integrali definiti, si possono viceversa adoperare per conseguire il valore di quest'ultimi integrali per mezzo dei primi. L'uso inverso di esse mi sembra essere importante; poichè se l'integrale di una data funzione differenziale non può ottenersi in termini finiti, sia algebricamente, sia per logaritmi o per archi di cerchio; ma si può far dipendere da integrali ellittici, massimamente di prima e di seconda specie, per la valutazione immediata dei quali si hanno principalmente le tavole confezionate da **Legendre**, la quistione riguardante l'integrazione della data funzione si reputa come risoluta. Per dare un'esempio di questo secondo caso mi propongo di determinare la superficie dell'ellissoide di cui altrove ebbi ad occuparmi con metodo tutto diverso *).

Sia

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

l'equazione della superficie dell'ellissoide riferita a coordinate rettangolari, e di cui il centro è nell'origine, sia l'ordine di grandezza dei semi-assi a, b, c espresso da $a>b>c$, lo che non nuoce alla generalità della quistione; ed avremo per la determinazione della predetta superficie la nota formola

$$S=\iint dx\,dy\sqrt{\frac{1-\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2}-\left(\frac{b^2-c^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}},$$

la quale integrata rispetto ad y da $y=0$ ad $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, ed indi riguardo ad x da $x=0$ ad $x=x$, darà la porzione della superficie ellissoidale definita da questi limiti.

Facendo per semplicità del calcolo

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}=h^2\ ,\quad \frac{b^2-c^2}{b^2}=k^2\ ,\quad \frac{x}{a}=u\ ,\quad \frac{y}{b}=v,$$

*) Atti dell'Accademia Gioenia, Vol. V, Serie III, Catania 1871, ove trovasi inserita una mia *Memoria sulla superficie dell'ellissoide a tre assi ineguali*, pubblicata per estratto l'anno 1870.

la precedente espressione di S sarà rimpiazzata dalla formola

$$S=ab\int_0^u du\int_0^{\sqrt{1-u^2}} dv\sqrt{\frac{1-h^2u^2-k^2v^2}{1-u^2-v^2}},$$

la quale, posto $v=\sqrt{1-u^2}.\ \mathrm{sen}\,\psi$, si presenta sotto la forma

$$S=ab\int_0^u du\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi\sqrt{1-h^2\,\mathrm{sen}^2\psi-(h^2-k^2\,\mathrm{sen}^2\psi)\,u^2}.$$

Questa funzione, essendo $h>k$, è integrabile per archi di cerchio relativamente alla variabile u. Quindi invertendo l'ordine dell'integrazione si ha

$$\left.\begin{aligned} S=&\frac{abu\sqrt{1-h^2u^2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi\sqrt{1-\frac{(1-u^2)k^2}{1-h^2u^2}\,\mathrm{sen}^2\psi}\\ &+\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k^2\,\mathrm{sen}^2\psi)\,d\psi}{\sqrt{h^2-k^2\,\mathrm{sen}^2\psi}}.\,\mathrm{arc}.\tan u\sqrt{\frac{h^2-k^2\,\mathrm{sen}^2\psi}{1-h^2u^2-(1-u^2)k^2\,\mathrm{sen}^2\psi}}\end{aligned}\right\}. \qquad (21)$$

Il primo integrale esprime l'integrale ellittico completo di seconda specie avente $\frac{(1-u^2)k^2}{1-h^2u^2}$ per modulo. Quanto al secondo sembra non potersi ridurre ad integrali ellittici che nel caso particolare di $u=1$; ma in tale caso la (21) rappresenta l'ottava parte della superficie totale dell'ellissoide, e diviene

$$S=\frac{ab\pi\sqrt{1-h^2}}{4}+\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k^2\,\mathrm{sen}^2\psi)\,d\psi}{\sqrt{h^2-k^2\,\mathrm{sen}^2\psi}}.\,\mathrm{arc}.\tan.\frac{\sqrt{h^2-k^2\,\mathrm{sen}^2\psi}}{\sqrt{1-h^2}};$$

ma

$$(1-k^2\,\mathrm{sen}^2\psi)\,d\psi=(1-h^2+h^2-k^2\,\mathrm{sen}^2\psi)\,d\psi,$$

dunque

$$\left.\begin{aligned} S=&\frac{ab\pi\sqrt{1-h^2}}{4}+\frac{ab(1-h^2)}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{h^2-k^2\,\mathrm{sen}^2\psi}}.\,\mathrm{arc}.\tan.\frac{\sqrt{h^2-k^2\,\mathrm{sen}^2\psi}}{\sqrt{1-h^2}}\\ &+\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi\sqrt{h^2-k^2\,\mathrm{sen}^2\psi}.\,\mathrm{arc}.\tan.\frac{\sqrt{h^2-k^2\,\mathrm{sen}^2\psi}}{\sqrt{1-h^2}}\end{aligned}\right\}. \qquad (22)$$

Per ridurre questa espressione, contenente in modo complicato funzioni circolari, alla forma semplice, di cui essa è suscettibile, ponghiamo nella (3), e nella (6) $\frac{k}{h}$ invece di k, e $\frac{\tan\varphi}{h} = \frac{1}{\sqrt{1-h^2}}$.

Da quest'ultima equazione si deduce il valore di

$$\varphi = \text{arc}\,.\tan\,.\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} = \text{arc}\,.\cos\sqrt{1-h^2} = \text{arc}\,.\cos\frac{c}{a}$$

che denotiamo con μ. Dalla (3) si trae

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{h^2-k^2\,\text{sen}^2\psi}}\,\text{arc}\,.\tan\frac{\sqrt{h^2-k^2\,\text{sen}^2\psi}}{\sqrt{1-h^2}} = \frac{\pi}{2h}\int_0^{\mu}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{k^2}{h^2}\,\text{sen}^2\varphi}},$$

e dalla (6)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi\sqrt{h^2-k^2\,\text{sen}^2\psi}\,.\,\text{arc}\,.\tan\,.\frac{\sqrt{h^2-k^2\,\text{sen}^2\psi}}{\sqrt{1-h^2}}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left(1-\sqrt{1-k^2}\right)\sqrt{1-h^2} + \frac{h\pi}{2}\int_0^{\mu} d\varphi\sqrt{1-\frac{k^2}{h^2}\,\text{sen}^2\varphi}\,.$$

Sostituendo questi risultati nella (22) moltiplicata per 8 si trova, che la superficie totale dell'ellissoide è data dalla formola

$$S = 2ab\pi\sqrt{1-h^2}\sqrt{1-k^2} + \frac{2ab\pi}{h}\left[(1-h^2)\int_0^{\mu}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{k^2}{h^2}\,\text{sen}^2\varphi}} + h^2\int_0^{\mu} d\varphi\sqrt{1-\frac{k^2}{h^2}\,\text{sen}^2\varphi}\right],$$

la quale, essendo

$$\sqrt{1-h^2}\sqrt{1-k^2} = \frac{c^2}{ab}\,,\quad \frac{1-h^2}{h} = \frac{c^2}{a\sqrt{a^2-c^2}}\,,\quad \text{e posto}\quad \frac{k^2}{h^2} = \frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)} = e^2,$$

si riduce alla forma semplice, già conosciuta,

$$S = 2c^2\pi + \frac{2b\pi}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[c^2\int_0^{\mu}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-e^2\,\text{sen}^2\varphi}} + (a^2-c^2)\int_0^{\mu} d\varphi\sqrt{1-e^2\,\text{sen}^2\varphi}\right]. \qquad (23)$$

Se poi per esprimere gl'integrali ellittici di prima e di seconda specie si fa uso della notazione di **Legendre**, allora la formola (23) verrà rimpiazzata dalla

$$S = 2c^2\pi + \frac{2b\pi}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[c^2 F(e,\mu) + (a^2-c^2) E(e,\mu)\right]$$

conformemente a quella data da questo illustre geometra.

Catania, 14 Settembre 1890.

finita di stampare il dì 23 Ottobre 1890.