MEMORIE

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE (DETTA DEI XL)

SUL MODO PIÙ SPEDITO DI RIDURRE L'INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DI PRIMO ORDINE CON TRE O PIÙ VARIABILI ALL'INTEGRAZIONE DI EQUAZIONI ESPLICITE CON DUE SOLE VARIABILI

MEMORIA

del Socio Prof. S. R. MINICH

(Ricevuta il dì 31 Luglio 1879)

INTRODUZIONE

Ne' maggiori trattati, non che ne' compendii elementari di calcolo integrale, la teoria dell' integrazione delle equazioni differenziali di 1° ordine a più di due variabili, allorchè ammettono un integrale completo espresso da una sola equazione finita, cioè quando sono integrabili, non si trova elaborata nel modo più semplice e più spedito, come si può rilevare dal paragone del metodo consueto per le equazioni a tre variabili di forma lineare rispetto agli elementi differenziali, col metodo che propongo nella Sezione II di questa Memoria per le equazioni a tre e più variabili. Infatti, proposta l'equazione di 1° ordine a tre variabili della forma

$$A dx + B dy + C dz = 0\,, \tag{I}$$

in cui A, B, C possono essere funzioni di tutte tre le variabili x, y, z, se questa equazione abbia un integrale completo rappresentato in generale da

$$\varphi(x, y, z, a) = 0 \tag{II}$$

dovrà la differenziale di questa equazione esibire il valore del dz offerto dalla proposta (I): per lo che assumendo M tale che sia

$$\mathrm{MC}=\left(\frac{d\varphi}{dz}\right),$$

dovrà essere

$$\mathrm{MA}=\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) \quad , \quad \mathrm{MB}=\left(\frac{d\varphi}{dy}\right),$$

e quindi

$$\mathrm{M}\,(\mathrm{A}dx+\mathrm{B}dy+\mathrm{C}dz)=d\varphi$$

una differenziale esatta che conterrebbe a, se questa è implicita nella (II).

Conseguentemente avranno luogo le relative condizioni

$$\left(\frac{d\mathrm{MA}}{dy}\right)=\left(\frac{d\mathrm{MB}}{dx}\right), \quad \left(\frac{d\mathrm{MB}}{dz}\right)=\left(\frac{d\mathrm{MC}}{dy}\right), \quad \left(\frac{d\mathrm{MC}}{dx}\right)=\left(\frac{d\mathrm{MA}}{dz}\right);$$

cioè svolgendo le derivazioni parziali

$$\mathrm{M}\left(\frac{d\mathrm{A}}{dy}\right)+\mathrm{A}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dy}\right)=\mathrm{M}\left(\frac{d\mathrm{B}}{dx}\right)+\mathrm{B}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dx}\right),$$

$$\mathrm{M}\left(\frac{d\mathrm{B}}{dz}\right)+\mathrm{B}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dz}\right)=\mathrm{M}\left(\frac{d\mathrm{C}}{dy}\right)+\mathrm{C}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dy}\right),$$

$$\mathrm{M}\left(\frac{d\mathrm{C}}{dx}\right)+\mathrm{C}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dx}\right)=\mathrm{M}\left(\frac{d\mathrm{A}}{dz}\right)+\mathrm{A}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dz}\right).$$

Quindi sommando queste tre equazioni rispettivamente moltiplicate per C, A, B, si trova eliminata la funzione M, e si ha la condizione necessaria per l'integrabilità dell'equazione proposta

$$\mathrm{C}\left\{\left(\frac{d\mathrm{A}}{dy}\right)-\left(\frac{d\mathrm{B}}{dx}\right)\right\}+\mathrm{A}\left\{\left(\frac{d\mathrm{B}}{dz}\right)-\left(\frac{d\mathrm{C}}{dy}\right)\right\}+\mathrm{B}\left\{\left(\frac{d\mathrm{C}}{dx}\right)-\left(\frac{d\mathrm{A}}{dz}\right)\right\}=0. \qquad \text{(III)}$$

Un'altra dimostrazione, che rende evidente essere la (III) condizione unica, e perciò sufficiente all'integrabilità della (I), si deduce dall'osservare, che l'espressione della dz, offerta dalla (I), cioè

$$dz=-\left\{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}dx+\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}dy\right\},$$

dee corrispondere ad una differenziale esatta. Quindi denotando con D_y la derivata rapporto ad y d'una funzione in cui z varia con y, deesi avverare la condizione

$$D_y \frac{A}{C} = D_x \frac{B}{C},$$

ossia

$$\left\{\frac{d\frac{A}{C}}{dy}\right\} + \left\{\frac{d\frac{A}{C}}{dz}\right\}\left(\frac{dz}{dy}\right) = \left\{\frac{d\frac{B}{C}}{dx}\right\} + \left\{\frac{d\frac{B}{C}}{dz}\right\}\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

la quale pe' valori

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{A}{C}\ ,\ \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{B}{C},$$

desunti dalla (I), si riduce alla (III).

Se l'equazione (III) è identica per sè stessa, la proposta (I) avrebbe per integrale completo la (II), vale a dire è integrabile senza mestieri di ammettere veruna relazione fra le variabili primitive; e si insegna ne' trattati a cercarne l'integrale finito completo, mediante l'integrazione della (I) nella ipotesi che sia costante una qualsivoglia delle tre variabili primitive. La costante arbitraria compresa nell'integrale completo della (I) priva del termine che contiene l'elemento della variabile supposta costante, dovrà essere funzione di quella variabile, e si avrà una relazione differenziale fra queste due quantità paragonando la differenziale totale dell'integrale così ottenuto, ove le predette due quantità si riguardino anch'esse come variabili, colla (I) moltiplicata per un conveniente fattore. Dovranno sparire dal risultato gli elementi dell'altre due variabili primitive, e rimanere i soli elementi della variabile riguardata costante, e della costante arbitraria che n'è funzione. Si procede quindi a liberare questa equazione dall'altre due variabili sopraccennate, osservando che colla eliminazione d'una di esse, mercè l'integrale dianzi ottenuto, dee simultaneamente trovarsi eliminata anco l'altra variabile, atteso l'avveramento della condizione (III). Si ha così una equazione differenziale tra due sole quantità, cioè la variabile già ritenuta costante, e la costante arbitraria che ne dipende, e basterà eliminare quest'ultima fra l'integrale dell'anzidetta equazione ed il precedente, per avere l'integrale finito completo della (I) con una nuova assoluta costante arbitraria.

Così se la scelta opportuna alla maggiore brevità del calcolo fosse il ritenere costante la z converrebbe integrare l'equazione a due variabili x, y

$$A dx + B dy = 0, \qquad \text{(IV)}$$

e denotando con

$$f(x, y, z, b) = 0 \qquad \text{(V)}$$

il suo integrale, colla costante arbitraria b funzione di z, si avrebbe differenziando la (V) nella considerazione di z, b costanti

$$\left(\frac{df}{dx}\right) dx + \left(\frac{df}{dy}\right) dy = 0\,;$$

di maniera che dal paragone de' valori di $\frac{dy}{dx}$ desunti da questa equazione e dalla (IV) deducendosi

$$\frac{1}{\mathrm{A}} \left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{1}{\mathrm{B}} \left(\frac{df}{dy}\right),$$

detto N il valore di ciascuna di queste quantità eguali, abbiamo

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = \mathrm{AN}\,, \quad \left(\frac{df}{dy}\right) = \mathrm{BN},$$

e conseguentemente

$$\left(\frac{df}{dx}\right) dx + \left(\frac{df}{dy}\right) dy = \mathrm{N}\,(\mathrm{A}dx + \mathrm{B}dy)\,.$$

Ora se si differenzii la (V) totalmente, si trova

$$\left(\frac{df}{dx}\right) dx + \left(\frac{df}{dy}\right) dy + \left(\frac{df}{dz}\right) dz + \left(\frac{df}{db}\right) db = 0\,,$$

ossia

$$\mathrm{N}\,(\mathrm{A}dx + \mathrm{B}dy) + \left(\frac{df}{dz}\right) dz + \left(\frac{df}{db}\right) db = 0$$

e sottraendo da questa equazione la (I) moltiplicata per N, si ottiene l'equazione differenziale

$$\left\{ \left(\frac{df}{dz}\right) - \mathrm{NC} \right\} dz + \left(\frac{df}{db}\right) db = 0, \qquad \text{(VI)}$$

da cui eliminando col soccorso della (V) una delle due variabili x, y, dee trovarsi eliminata anche l'altra, giacchè per l'avverata condizione (III) d'integrabilità della (I) b dev'essere funzione della sola z.

Eseguita l'eliminazione simultanea di x, y, ed ottenuto l'integrale dell'equazione differenziale (VI) tra b, z con una nuova costante arbitraria a, resterà ad eliminarsi la b tra questo integrale e la (V) per avere l'integrale finito completo della (I).

È questo il metodo d'integrazione d'ogni equazione di 1° ordine a tre variabili della forma (I) che si trova ne'trattati, e che procurai di riassumere e dimostrare colla maggiore generalità e concisione. È facile scorgere le difficoltà della sua applicazione pel lungo calcolo che richiede, ond'è che questo metodo non torna agevole ed esplicito che ne'casi più semplici. Ma si può evitare la prolissità della complessiva eliminazione delle x, y, mercè una osservazione di cui ebbi a valermi nelle antiche mie lezioni di calcolo, ed è che se dee sparire colla eliminazione d'una delle x, y anco l'altra variabile, si può attribuire ad una di esse un valore arbitrario anche prima di eliminare l'altra variabile. Il valore da assegnarsi opportunamente alla quantità che dee dileguarsi sarà quello che rende più semplici le due equazioni (V) (VI), cioè d'ordinario lo zero, e si preferirà quella delle x, y che annullandosi, od assumendo altro qualsiasi valore costante, rende più semplici quelle equazioni, per dedurne più prontamente l'equazione differenziale fra z, b, dal cui integrale con una nuova costante arbitraria a combinato colla (V) si ha l'integrale completo della proposta (I).

L'anzidetta osservazione guida ad un analogo principio generale a cui giova ricorrere, allorchè alcune quantità debbono sparire coll'eliminazione d'altre quantità fra date equazioni. Ne feci uso in una Memoria sugli integrali delle equazioni proposte dal celebre analista Jacobi, che si integrano per trascendenti Abeliane, e sono altresì dotate di integrali di forma algebrica, all'uopo di assegnare le relazioni fra le costanti arbitrarie delle varie forme di questi integrali (Memorie dell'Istituto Veneto, T. III, p. 269); e solevo valermene molti anni addietro nelle mie lezioni orali di calcolo per dedurre più facilmente le varie forme degli integrali trigonometrici che esprimono le relazioni degli argomenti di più trascendenti ellittiche coll'argomento del loro aggregato, le quali esigono qualche maggior dispendio di calcolo nel trattato primordiale delle trascendenti ellittiche dell'insigne Legendre. Di tale facilitazione avrei fatto il soggetto d'una speciale Memoria, se non avessi osservato posteriormente che simile ricerca venne trattata dall'illustre analista C. Sturm nel Giornale di Matematiche del ch.^{mo} Liouville.

Avendo poscia trovato un metodo più ovvio di integrazione delle equazioni a tre e più variabili, che in paragone del consueto può recare una facilitazione analoga a quella che venne introdotta dagli Analisti moderni nel metodo di integrazione delle funzioni differenziali di primo ordine a più variabili, ne diedi notizia negli Atti dell'Istituto Veneto (Tornata 20 Luglio 1856), e compilai fin d'allora una Memoria che rimase inedita, perchè mi proponevo di aggiungervi qualche ricerca consimile per le equazioni differenziali superiori al prim'ordine. Ma impedito da moltiplici occupazioni non ebbi il tempo di svolgere le ulteriori ricerche, e m'indussi alfine a pubblicare con alcune aggiunte la presente Memoria, alla cui parte manchevole ho procurato di supplire con un breve saggio di analoghe indagini.

Avrei potuto prescindere dallo sviluppo della Sezione I di questa Memoria che contiene il metodo odierno di integrazione delle funzioni di primo ordine a più variabili. Nondimeno credetti opportuno inserirvi l'esposizione generale di quel metodo perchè serve a chiarire l'analogia con esso del nuovo metodo da me proposto per l'integrazione delle equazioni di primo ordine a più variabili che trovasi svolto nella Sezione II, e per avere occasione di introdurvi una Appendice sugli integrali delle funzioni omogenee. Aggiunsi nella Sezione III alcuni esempi bastevoli a dare occasione di rilevare l'utilità del metodo stesso, e il modo della sua applicazione, ed esposi altre osservazioni sulle precedenti ricerche. Verrà inoltre premesso nella Sezione IV al metodo consimile d'integrazione delle equazioni di second'ordine a tre variabili di forma lineare rispetto a' loro elementi dell'ordine più elevato, un saggio sul modo più semplice di stabilire le condizioni d'integrabilità delle funzioni differenziali di qualunque ordine a più variabili, che provengono dalla replicata differenziazione d'una funzione del primo ordine di forma lineare rapporto agli elementi delle variabili primitive. Verificate quelle equazioni di condizione, è facile ottenere immediatamente i loro integrali fino a quello di forma lineare rispetto agli elementi di primo ordine delle stesse variabili, che resterebbe ad integrarsi col metodo proposto nella Sezione II, il quale diede il primo argomento ed il titolo alla presente Memoria.

Sezione I.

Metodo odierno di integrazione delle formule differenziali di 1° ordine a più variabili. Condizioni necessarie e sufficienti per l'integrabilità di dette funzioni. Teoremi sugli integrali delle funzioni omogenee.

1. Data ad integrarsi una funzione differenziale del 1° ordine ad n variabili

$$\mathrm{M}dx_1 + \mathrm{N}dx_2 + \ldots + \mathrm{T}dx_n \,, \tag{1}$$

se esiste una primitiva φ di questa formula, dovrà essere

$$\left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right) dx_1 = \mathrm{M}dx_1 \,,$$

e quindi integrando rapporto ad x_1 si avrà

$$\varphi = \int_{a_1} \mathrm{M}dx_1 + \psi_1 \tag{2}$$

denotandosi con a_1 una origine costante qualunque dell'integrale relativo ad x_1, e con ψ_1 una funzione di tutte l'altre variabili.

La differenziale totale della (2) dovendo coincidere colla formula (1) offre nel paragone richiesto, denotandosi con D_{x_p} la derivazione parziale rapporto ad x_p

$$d\psi_1 = \left[\mathrm{N} - \mathrm{D}_{x_2} \int_{a_1} \mathrm{M}dx_1\right] dx_2 + \ldots + \left[\mathrm{T} - \mathrm{D}_{x_n} \int_{a_1} \mathrm{M}dx_1\right] dx_n \,; \tag{3}$$

e poichè ψ_1 non dee contenere x_1, le derivate parziali de' fattori di $dx_2, \ldots dx_n$ nella (3) rapporto ad x_1 dovranno annullarsi, e si ha quindi una 1ª serie di $n-1$ condizioni, cioè, denotando le derivate parziali alla maniera Euleriana,

$$\left(\frac{d\mathrm{N}}{dx_1}\right) - \left(\frac{d\mathrm{M}}{dx_2}\right) = 0 \;,\; \left(\frac{d\mathrm{P}}{dx_1}\right) - \left(\frac{d\mathrm{M}}{dx_3}\right) = 0 , \ldots \left(\frac{d\mathrm{T}}{dx_1}\right) - \left(\frac{d\mathrm{M}}{dx_n}\right) = 0 \,, \tag{4}$$

per cui l'integrabilità della (1) è ridotta a quella d'una formula ad $n-1$ variabili $x_2, x_3 \ldots x_n$.

Avveratesi le equazioni di condizione (4), dee sparire x_1 dalla (3), e perciò si potrà attribuirvi ad x_1 un valore particolare qualunque. Siccome poi supponendo in generale

$$\int_{a_1} \mathrm{M} dx_1 = f(x_1) - f(a_1),$$

ne segue

$$\mathrm{D}_{x_p} \int_{a_1} \mathrm{M} dx_1 = \left(\frac{df(x_1)}{dx_p}\right) - \left(\frac{df(a_1)}{dx_p}\right),$$

e quindi colla derivazione rapporto ad x_1 si ritrae

$$\left(\frac{d\mathrm{M}}{dx_p}\right) = \left(\frac{d^2 f(x_1)}{dx_p dx_1}\right);$$

se si moltiplichi per dx_1 e si integri rapporto ad x_1 questa eguaglianza, se ne deduce

$$\int_{a_1} \left(\frac{d\mathrm{M}}{dx_p}\right) dx_1 = \left(\frac{df(x_1)}{dx_p}\right) - \left(\frac{df(a_1)}{dx_p}\right),$$

e in conseguenza si raccoglie dalla terz' ultima

$$\mathrm{D}_{x_p} \int_{a_1} \mathrm{M} dx_1 = \int_{a_1} \left(\frac{d\mathrm{M}}{dx_p}\right) dx_1 . \tag{5}$$

Pertanto la formula (3) assume l' aspetto

$$d\psi_1 = \left\{ \mathrm{N} - \int_{a_1} \left(\frac{d\mathrm{M}}{dx_2}\right) dx_1 \right\} dx_2 + \ldots + \left\{ \mathrm{T} - \int_{a_1} \left(\frac{d\mathrm{M}}{dx_n}\right) dx_1 \right\} dx_n . \tag{6}$$

e poichè ad x_1 si può attribuirvi qualsivoglia valore, si avrà col porre $x_1 = a_1$, denotando con $\mathrm{N}_1, \mathrm{P}_1, \ldots \mathrm{T}_1$ le espressioni corrispondenti di $\mathrm{N}, \mathrm{P}, \ldots \mathrm{T}$

$$d\psi_1 = \mathrm{N}_1 dx_2 + \mathrm{P}_1 dx_3 + \ldots + \mathrm{T}_1 dx_n . \tag{7}$$

Così l' integrazione della formula (1) ad n variabili è ridotta a dipendere da quella d' una formula (7) ad $n-1$ variabili, che risulta dalla (1) per $x_1 = a_1$.

2. In simil guisa avverandosi $n-2$ condizioni conformi alle (4), la formula (7)

s'integrerebbe rapporto ad x_2, e si ridurrebbe ad una funzione ad $n-2$ variabili, il cui integrale verrà similmente a dipendere da quello d'una formula ad $n-3$ variabili, purchè si avverino $n-3$ condizioni analoghe alle (4), e così di seguito. Di maniera che rappresentando in generale con T_m l'espressione d'una funzione T delle $x_1, x_2 \ldots x_n$ corrispondente a' valori particolari $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2 \ldots x_m = a_m$, e supponendo che si verifichino, oltre la prima serie delle condizioni (4), le seguenti

$$\begin{array}{l} \left(\frac{dP_1}{dx_2}\right)-\left(\frac{dN_1}{dx_3}\right)=0,\ \left(\frac{dQ_1}{dx_2}\right)-\left(\frac{dN_1}{dx_4}\right)=0,\ldots \left(\frac{dT_1}{dx_2}\right)-\left(\frac{dN_1}{dx_n}\right)=0\,, \\ \left(\frac{dQ_2}{dx_3}\right)-\left(\frac{dP_2}{dx_4}\right)=0,\ \left(\frac{dR_2}{dx_3}\right)-\left(\frac{dP_2}{dx_5}\right)=0,\ldots \left(\frac{dT_2}{dx_3}\right)-\left(\frac{dP_2}{dx_n}\right)=0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(\frac{dT_{n-2}}{dx_{n-1}}\right)-\left(\frac{dS_{n-2}}{dx_n}\right)=0\,; \end{array} \tag{8}$$

avremo analogamente alla (2)

$$\begin{array}{l} \psi_1 = \int_{a_2} N_1 dx_2 + \psi_2\,, \\ \psi_2 = \int_{a_3} P_2 dx_3 + \psi_3\,, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \psi_{n-2} = \int_{a_{n-1}} S_{n-2} dx_{n-1} + \psi_{n-1}\,, \\ \psi_{n-1} = \int_{a_n} T_{n-1} dx_n = \int T_{n-1} dx_n + \text{cost.} \end{array} \tag{9}$$

Conseguentemente la somma delle eguaglianze (2) (9) esibisce la formula

$$\varphi = \int_{a_1} M dx_1 + \int_{a_2} N_1 dx_2 + \int_{a_3} P_2 dx_3 + \ldots + \int_{a_{n-1}} S_{n-2} dx_{n-1} + \int T_{n-1} dx_n + \text{cost.}\,, \tag{10}$$

per cui l'espressione dell'integrale totale della proposta funzione differenziale (1) dipende dalle parziali integrazioni di $M dx_1$, $N_1 dx_2 \ldots T_{n-1} dx_n$, e poichè una funzione del 1° ordine ad una sola variabile è sempre integrabile almeno in serie, si riconosce che le condizioni (4) (8) sono necessarie e sufficienti, onde la proposta funzione (1) abbia una primitiva, cioè si possa riguardare come differenziale esatta, senza ammettere veruna relazione fra le variabili $x_1, x_2 \ldots x_n$. Nel sistema delle condizioni (8) trovasi una notabile semplificazione già osservata dal Poisson (*Mémoires de l'Institut de France* T. XII p. 267) che consiste nell'attribuire di mano in mano ad x_1, x_2, ecc., i particolari valori a_1, a_2, ecc., che sono le origini degli integrali parziali compresi nella (10), e che si possono scegliere ad arbitrio in guisa da rendere più semplici le corrispondenti espressioni di N, P, Q, . . . T. Quindi si rileva che, avveratesi le condizioni (8) pe' sopraddetti valori delle variabili primitive, si troveranno soddisfatte, del pari che le (4), qualunque siano i valori di queste variabili.

3. Ordinariamente gioverà assumere questi valori particolari di x_1, x_2, ecc., eguali a zero, semprechè non ne risulti infinito o discontinuo il valore di alcuna delle espressioni N_1, P_2, Q_3, ecc., ed allora per assegnare l'integrale totale richiesto si avrà la formula

$$\varphi=\int_0 \mathrm{M}dx_1+\int_0 \mathrm{N}_1 dx_2+\int_0 \mathrm{P}_2 dx_3+\ldots+\int_0 \mathrm{S}_{n-2} dx_{n-1}+\int \mathrm{T}_{n-1} dx_n+\text{cost.} \qquad (11)$$

in cui N_1 è il valore di N per $x_1=0$, P_2 è il valore di P per $x_1=0$, $x_2=0$, e così di seguito.

Le formule (10) (11) comprendono quelle oggimai usitate che risultano preferibili per facilità di calcolo all'antico metodo di integrazione additato dall'Eulero (*Institutiones calculi integralis*. Petropoli 1768, T. I, p. 338). Esse offrirebbero qualche vantaggio anco in paragone di quelle che si deducono pel prim'ordine dalla formula del Poisson (*Mémoires de l'Institut de France*, T. XII, p. 264) illustrata dal ch.^{mo} Bertrand (*Journal de l'École polytechn*. C. XXVIII), e generalizzata dal Signor J. Binet (*Moigno-Leçons de calcul diff. et intégral* T. II, p. 155), la quale estesa a più di due variabili serve a ridurre l'integrazione totale d'una formula a più variabili d'ordine qualunque alla determinazione d'un integrale definito relativo ad una sola variabile. Di simile ricerca estesa a qualunque numero di variabili ho trattato in altra Memoria *intorno a due nuove formule, che servono ad ottenere l'integrale replicato d'una funzione differenziale di qualunque ordine a più variabili.* (Memorie dell'Istituto Veneto di Scienze lettere ed arti Vol. VI, 1857).

La regola data dall'Eulero nel luogo testè citato, onde integrare ogni funzione (1) a due variabili $\mathrm{M}dx_1+\mathrm{N}dx_2$ consiste nella formula

$$\int_{a_1} \mathrm{M}dx_1+\int\left(\mathrm{N}-\int_{a_1}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dx_2}\right)dx_1\right)dx_2$$

che si deduce dalle eguaglianze (2) (6) pel caso di due variabili. In essa la funzione sottoposta al segno di integrazione relativo alla x_2 non può contenere x_1, giacchè va a zero la sua derivata rapporto ad x_1, allorchè sia soddisfatta la condizione d'integrabilità ch'è la prima delle (4). Bastava avvertire che dovendo sparirne x_1 si può attribuirvi ad x_1 un valore arbitrario a_1, per conseguire l'eguaglianza conforme alle (6) (7)

$$N - \int_{a_1} \left(\frac{dM}{dx_2}\right) dx_1 = N_1$$

in cui N_1 rappresenta il valore di N per $x_1 = a_1$, e quindi ottenere la più facile espressione (10) dell'integrale richiesto. Eppure questa semplice avvertenza ha potuto sfuggire all'attenzione del sommo Eulero, e de'posteriori analisti fino a'nostri tempi. Solo era stato notato dal Lacroix (*Traité de calcul etc.* T. II, p. 231, Paris 1814) che quando le condizioni d'integrabilità sono adempiute, si può abbreviare l'integrazione di $Mdx + Ndy + Pdz$ integrando dapprima Mdx rapporto ad x, poi rapporto ad y i termini di Ndy che non contengono x, ed infine rapporto a z i termini ove si trova la sola z. La dimostrazione della (10) vale a dare a questa regola una precisa e generale significazione.

La stessa equazione può dimostrarsi osservando essere

$$\int_{a_1} \left(\frac{dN}{dx_1}\right) dx_1 = N - N_1$$

e sostituendo $\left(\frac{dM}{dx_2}\right)$ a $\left(\frac{dN}{dx_1}\right)$ per la prima delle condizioni (4).

Del resto può avvenire talora che non sia nemmeno mestieri di eseguire tutte le n integrazioni parziali accennate nelle formule (10) (11), nè riconoscere l'avveramento di tutte le serie di condizioni (4) (8), come è manifesto qualora si annulli la differenziale d'una ψ_m delle successive ψ_1, ψ_2, ecc., imperocchè allora essendo ψ_m costante, la serie delle equazioni (9) si arresta a quella che determina ψ_{m-1}.

Infatti dalla somma delle equazioni (2) (9) fino alla $(m-1)$esima di quest'ultime si avrebbe in generale analogamente alle (10) (11)

$$\varphi = \int_{a_1} M dx_1 + \int_{a_2} N_1 dx_2 + \ldots + \int_{a_m} Q_{m-1} dx_m + \psi_m,$$

ed attribuendo il valore zero alle origini degli integrali parziali, e ritenendo che N_1 rappresenti il valore di N per $x_1 = 0$, P_2 quello di P per $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ecc., finchè Q_{m-1} corrisponda al valore di Q per $x_1 = 0$, $x_2 = 0 \ldots x_{m-1} = 0$, si avrà parimente

$$\varphi = \int_0 M dx_1 + \int_0 N_1 dx_2 + \ldots + \int_0 Q_{m-1} dx_m + \psi_m.$$

4. Abbiasi a cagion d' esempio la formula a due variabili di 1° ordine

$$\left(F(x)+3bx^2y+3cxy^2+gy^3+2hx\log y\right)dx+\left(bx^3+3cx^2y+3gxy^2+\frac{hx^2}{y}+f(y)\right)dy\,,$$

per cui trovasi soddisfatta la condizione d'integrabilità (2). Onde assegnarne agevolmente la primitiva φ, basta ricorrere alla (11) che somministra

$$\varphi=\int_0(F(x)+3bx^2y+3cxy^2+gy^3+2hx\log y)\,dx+\int f(y)\,dy+\text{cost.}$$
$$=\int F(x)dx+bx^3y+\frac{3}{2}cx^2y^2+gxy^3+hx^2\log y+\int f(y)\,dy+C.$$

Sia data in secondo luogo la funzione differenziale a tre variabili

$$\frac{y^2\cos u-u^2}{(u-xy)^2}dx+\frac{\cos u-x^2}{(u-xy)^2}udy+\left\{\frac{x^2-\cos u}{(u-xy)^2}-\frac{\operatorname{sen} u}{u-xy}\right\}ydu\,.$$

Trovandosi avverate le due condizioni (4) si può stabilire (2)

$$\varphi=\int_0\frac{y^2\cos u-u^2}{(u-xy)^2}dx+\psi_1=\frac{y^2\cos u-u^2}{(u-xy)\,y}-\left(\frac{y^2\cos u-u^2}{uy}\right)+\psi_1,$$

e poichè si verifica anco la condizione (8) per cui (7)

$$d\psi_1=\frac{\cos u}{u}dy-\left(\frac{\cos u}{u^2}+\frac{\operatorname{sen} u}{u}\right)ydu$$

è differenziale esatta, si avrà (11)

$$\psi_1=\int_0\frac{\cos u}{u}dy+\text{cost}=\frac{y\cos u}{u}+\text{cost}\,,$$

e in conseguenza sarà l' integrale richiesto

$$\varphi=\frac{y^2\cos u-u^2}{(u-xy)y}+\frac{u}{y}+\text{cost.}=\frac{y\cos u-ux}{u-xy}+\text{cost.}$$

Appendice

Sugli integrali delle funzioni omogenee.

5. È noto e facile a dimostrarsi, che la differenziale d'ogni funzione omogenea φ del grado $m+1$ è omogenea del grado m. Ma la proposizione reciproca soggiace ad eccezione per $m=-1$, purchè in tal caso una funzione che sarò per indicare, e il cui valore è costante, non si riduca a zero.

Infatti se $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ si supponga omogenea del grado $m+1$, assumendo

$$x_2 = r_1 x_1\,, \quad x_3 = r_2 x_1, \ldots \; x_n = r_{n-1} x_1\,, \tag{12}$$

si ha per definizione delle funzioni omogenee

$$\varphi = x^{m+1} f(r_1, r_2 \ldots r_{n-1})\,,$$

e quindi

$$d\varphi = (m+1)\, x^m{}_1 f(r_1, r_2, \ldots r_{n-1})\, dx_1$$
$$+ x_1^{m+1} \left\{ \left(\frac{df}{dr_1}\right) dr_1 + \left(\frac{df}{dr_2}\right) dr_2 + \ldots + \left(\frac{df}{dr_{n-1}}\right) dr_{n-1} \right\},$$

e poichè dalle (12) si raccoglie

$$dr_1 = \frac{dx_2 - r_1 dx_1}{x_1}\,, \quad dr_2 = \frac{dx_3 - r_2 dx_1}{x_1}\,, \ldots \; dr_{n-1} = \frac{dx_n - r_{n-1} dx_1}{x_1}\,,$$

ne viene colla introduzione di questi valori nella precedente la formula

$$d\varphi = x_1^m \left\{ (m+1) f(r_1, r_2 \ldots r_{n-1}) - \left(\frac{df}{dr_1}\right) r_1 - \ldots - \left(\frac{df}{dr_{n-1}}\right) r_{n-1} \right\} dx_1$$
$$+ x_1^m \left\{ \left(\frac{df}{dr_1}\right) dx_2 + \ldots \left(\frac{df}{dr_{n-1}}\right) dx_n \right\},$$

la quale dimostra essere $d\varphi$ omogenea di grado m.

6. Reciprocamente supponendo la (1) funzione omogenea di grado m, e designando con A, B, C, ... H determinate funzioni di $r_1, r_2 \ldots r_{n-1}$, si ha per legge di omogeneità

$$M = Ax_1^m, \quad N = Bx_1^m, \ldots \quad T = Hx_1^m, \tag{13}$$

e quindi

$$\begin{aligned}&\mathrm{M}dx_1+\mathrm{N}dx_2+\mathrm{P}dx_3+\ldots+\mathrm{T}dx_n\\&=(\mathrm{A}+\mathrm{B}r_1+\mathrm{C}r_2+\ldots+\mathrm{H}r_{n-1})\,x_1^{m}\,dx_1+x_1^{m+1}\,(\mathrm{B}dr_1+\mathrm{C}dr_2+\ldots+\mathrm{H}dr_{n-1})\,.\end{aligned}$$

Ora affinchè questa funzione abbia un integrale φ, è necessario che si avverino le condizioni analoghe alle (4), cioè che, posto per brevità

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}r_1+\mathrm{C}r_2+\ldots+\mathrm{H}r_{n-1}=\mathrm{K}\,, \tag{14}$$

siano identiche per sè stesse le eguaglianze

$$\left(\frac{d\mathrm{K}}{dr_1}\right)=(m+1)\,\mathrm{B}\ \ ,\ \ \left(\frac{d\mathrm{K}}{dr_2}\right)=(m+1)\,\mathrm{C}\,,\ldots\ldots\left(\frac{d\mathrm{K}}{dr_{n-1}}\right)=(m+1)\,\mathrm{H}\,, \tag{15}$$

le quali moltiplicate rispettivamente per $dr_1, dr_2, \ldots dr_{n-1}$ e sommate insieme offrono

$$\mathrm{B}dr_1+\mathrm{C}dr_2+\ldots+\mathrm{H}dr_{n-1}=\frac{d\mathrm{K}}{m+1}\,, \tag{16}$$

e dimostrano che, avveratesi le condizioni (15), la (16) risulta una differenziale esatta. Pertanto le $n-1$ condizioni (15) sono sufficienti a rendere differenziale esatta la proposta funzione omogenea, attesa l'equazione che precede la (18), e producono l'avveramento delle $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ identità per cui si trova differenziale esatta la (16), cioè in conformità alle (4) (8), e per l'avvertenza accennata alla fine del § 2,

$$\left(\frac{d\mathrm{B}}{dr_2}\right)=\left(\frac{d\mathrm{C}}{dr_1}\right),\ \left(\frac{d\mathrm{B}}{dr_3}\right)=\left(\frac{d\mathrm{E}}{dr_1}\right),\ldots\ \left(\frac{d\mathrm{B}}{dr_{n-1}}\right)=\left(\frac{d\mathrm{H}}{dr_1}\right),\ldots\ \left(\frac{d\mathrm{G}}{dr_n}\right)=\left(\frac{d\mathrm{H}}{dr_{n-1}}\right). \tag{17}$$

Sostituendo le espressioni (14) (16) nella (13) si ottiene

$$\mathrm{M}dx_1+\mathrm{N}dx_2+\ldots+\mathrm{T}dx_n=\mathrm{K}x^{m}_1\,dx_1+\frac{x_1^{m+1}d\mathrm{K}}{m+1}=d\,\frac{x_1^{m+1}\mathrm{K}}{m+1}\,,$$

e si ha per espressione del suo integrale

$$\int(\mathrm{M}dx_1+\mathrm{N}dx_2+\ldots+\mathrm{T}x_n)=\frac{x_1^{m+1}\mathrm{K}}{m+1}+\text{cost.}=\frac{\mathrm{M}x_1+\mathrm{N}x_2+\ldots\mathrm{T}x_n}{m+1}+\text{cost.}\,, \tag{18}$$

da cui è palese che l'integrale d'ogni funzione omogenea del grado m è una funzione omogenea del grado $m+1$, sempreché $m+1$ non vada a zero. Esso deducesi dalla proposta differenziale mutandovi gli elementi $dx_1, \ldots dx_n$ nelle primitive $x_1, \ldots x_n$, e dividendo per $m+1$.

Ma questi risultati cessano di aver luogo nel caso di $m+1=0$, ossia di $m=-1$, giacchè allora la proposta diviene (13) (14)

$$Mdx_1+Ndx_2+\ldots+Tdx_n=K\frac{dx_1}{x_1}+Bdr_1+Cdr_2+\ldots+Hdr_{n-1}, \tag{19}$$

e le condizioni (4), ossia le (15), che sarebbero

$$\left(\frac{dK}{dr_1}\right)=0, \quad \left(\frac{dK}{dr_2}\right)=0, \ldots \quad \left(\frac{dK}{dr_{n-1}}\right)=0,$$

rendono $dK=0$, e quindi

$$K=c \tag{20}$$

costante determinata. Converrà in tal caso esaminare se si avverino (4) (8) le condizioni (17), e si avrà allora

$$\int(Mdx_1+Ndr_1+\ldots+Tdx_n)=c\log x_1+\int(Bdr_1+Cdr_2+\ldots+Hdr_{n-1})+\text{cost.} \tag{21}$$

Perciò siccome l'integrale di $Bdr_1+Cdr_2+\ldots+Hdr_{n-1}$ è funzione delle sole $r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$ cioè de' rapporti $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1} \ldots \frac{x_n}{x_1}$, e può quindi riguardarsi una funzione di grado nullo delle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$, questa parte dell'espressione (21) sarebbe una funzione omogenea di grado nullo. Ma la presenza del termine $c\log x_1$ nella (21) mostra che l'integrale d'una funzione omogenea di grado -1 non è che in parte una funzione omogenea di grado nullo. Sarebbe però tale compiutamente, se il valore della data costante c andasse a zero; ond'è che il caso d'eccezione alla Proposizione generale per cui l'integrale d'ogni funzione omogenea del grado m è una funzione pure omogenea del grado $m+1$, avviene per $m=-1$ finchè la costante c sia quantità finita, e cessa d'aver luogo allorchè quella costante si annulli.

7. I medesimi risultati si deducono dalle (10) (11). Imperocchè per $m+1$ positivo la primitiva φ della proposta funzione omogenea, che si suppone differenziale

esatta, e tale sarebbe, mercè la $n-1$ condizioni (15), avrà per espressione (11)

$$\varphi = \int_0 (A + Br_1 + Cr_2 + \ldots + Tr_{n-1}) x_1^m dx_1 + \text{cost.}$$
$$= (A + Br_1 + Cr_2 + \ldots Tr_{n-1}) \frac{x_1^{m+1}}{m+1} + \text{cost.} = \frac{Mx_1 + Nx_2 + Px_3 + \ldots + Tx_n}{m+1} + \text{cost.},$$

ed allorchè sia $m+1$ negativo si avrà pure (10), postovi $a_1 = \infty$ vale a dire infinito,

$$\varphi = \int_\infty (A + Br_1 + Cr_2 + \ldots + Tr_{n-1}) x_1^m dx_1 + \text{cost.}$$
$$= (A + Br_1 + Cr_2 + \ldots + Tr_{n-1}) \frac{x_1^{m+1}}{m+1} + \text{cost.} = \frac{Mx_1 + Nx_2 + \ldots Tx_n}{m+1} + \text{cost.};$$

cioè, ogniqualvolta $m+1$ non vada a zero, la primitiva d'una differenziale esatta omogenea del 1° ordine è una funzione omogenea d'un grado superiore d'una unità. Dimostrato questo Teorema, è facile riconoscere, prescindendo dalla costante arbitraria, che la primitiva dev'essere, come si è trovato (18) anche nel § 6,

$$\varphi = \frac{Mx_1 + Nx_2 + Px_3 + \ldots + Tx_n}{m+1},$$

attesochè essendo

$$M = \left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right), \quad N = \left(\frac{d\varphi}{dx_2}\right), \ldots T = \left(\frac{d\varphi}{dx_n}\right),$$

ed avendosi per una nota proprietà delle funzioni omogenee

$$(m+1)\varphi = \left(\frac{d\varphi}{dx_1}\right) x_1 + \left(\frac{d\varphi}{dx_2}\right) x_2 + \ldots + \left(\frac{d\varphi}{dx_n}\right) x_n,$$

si ottiene appunto l'espressione di φ (18) testè indicata.

Ma nel caso di $m = -1$ non ha luogo in generale la Proposizione precedente, avendosi allora, come nel § 6.

$$Mdx_1 + Ndx_2 + Pdx_3 + \ldots + Tdx_n$$
$$= (A + Br_1 + Cr_2 + \ldots + Hr_{n-1}) \frac{dx_1}{x_1} + Bdr_1 + Cdr_2 + \ldots + Hdr_{n-1}.$$

In tal caso è palese dalle (4) non poter essere la proposta formula una differenziale esatta, se non si annulli ogni derivata parziale di $A+Br_1+Cr_2+\ldots+Hr_{n-1}$ rapporto a ciascuna delle variabili $r_1, r_2 \ldots r_{n-1}$, e in conseguenza, onde sia la detta funzione una differenziale esatta, dovrà essere, come si è già veduto nel § 6 (14) (20),

$$A+Br_1+Cr_2+\ldots+Hr_{n-1}=c\,,$$

ovvero a cagione di

$$M=\frac{A}{x_1}\,,\quad N=\frac{B}{x_2}\,,\ldots\quad T=\frac{H}{x_n}\,.$$

$$Mx_1+Nx_2+Px_3+\ldots+Hx_n=c\,, \tag{22}$$

essendo c una data costante che può ridursi a zero.

Viceversa quando abbia luogo la (22) sarà $m+1=0$. Infatti, allora il secondo membro della (18), non contenendo alcuna variabile, cessa di esprimere l'integrale richiesto, e ciò non può accadere senza che sia $m+1=0$; nel qual modo la formula (18) diviene infinita, finchè sia c quantità finita, e quando c vada a zero si riduce indeterminata, cioè $\frac{0}{0}$.

Per $m+1=0$, si avrebbe (21) (10)

$$\varphi=c\log x_1+\int_{a_1}Bdr_1+\int_{a_2}C_1\,dr_2+\ldots+\int_{a_{n-2}}G_{n-3}\,dr_{n-2}+\int H_{n-2}\,dr_{n-1}+\text{cost.}\,,$$

oppure (11)

$$\varphi=c\log x_1+\int_0 Bdr_1+\int_0 C_1\,dr_2+\ldots+\int H_{n-2}\,dr_{n-1}+\text{cost.}\,,$$

e surrogando ad r_1, r_2, ecc., i rapporti $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}$, si avrà l'espressione della primitiva richiesta, pel caso di $m+1=0$, la quale ritorna omogenea per $c=0$.

8. Per accennare, secondo i varii casi, qualche applicazione delle teorie dianzi esposte negli articoli 6, 7, si consideri in primo luogo la differenziale esatta

$$pp'(ax^{p-1}y^{q}+bx^{p'-1}y^{q'})\,dx+(p'qax^{p}y^{q-1}+pq'bx^{p'}y^{q'-1})\,dy\,,$$

la quale è omogenea di grado $p+q-1$ ove si supponga

$$p'+q'=p+q\,.$$

Ne sarà in conseguenza la primitiva (18), scrivendo x, y in luogo di x_1, x_2,

$$\varphi = \frac{pp'(ax^p y^q + bx^{p'} y^{q'}) + p'qax^p y^q + pq'bx^{p'} y^{q'}}{p+q} + \text{cost.}$$

$$= p'ax^p y^q + pbx^{p'} y^{q'} + \text{cost.}$$

L'integrale ottenuto appartiene alla data formula differenziale, qualunque sieno i valori di p, q, p', q'. Quindi si comprende che se in una formula ad integrarsi gli esponenti di x, y sieno numericamente indeterminati, cosicchè si possa riguardarla come omogenea, si potrà in questa guisa conseguirne agevolmente la primitiva.

Supponendo $q = -p$, $q' = -p'$, la formula differenziale testè proposta è omogenea del grado -1, e si trova

$$Mx + Ny = 0$$

ossia (22)

$$c = 0;$$

conseguentemente risulta (21) surrogando x, y ad x_1, y_1, e posto $y = r_1 x$ nella 2ª delle (13)

$$\varphi = -pp' \int \left(\frac{a}{r_1^{p+1}} + \frac{b}{r_1^{p'+1}} \right) dr_1 + \text{cost.}$$

$$= \frac{p'a}{r_1^p} + \frac{pb}{r_1^{p'}} + \text{cost.} = p'a \left(\frac{x}{y} \right)^p + pb \left(\frac{x}{y} \right)^{p'} + \text{cost.},$$

in conformità alla generale espressione di φ dianzi ottenuta.

Così pure data la formula

$$\frac{y\,(a\,(y^2 - x^2) - 2bxy)\,dx + x\,(a\,(x^2 - y^2) + 2bxy)\,dy}{(x^2 + y^2)^2},$$

ch'è differenziale esatta omogenea del grado -1, abbiamo

$$Mx + Ny = 0;$$

cosicchè, posto $y = r_1 x$, si ha (21)

$$= \int \frac{a\,(1 - r_1^2) + 2br_1}{(1 + r_1^2)^2} dr_1 + \text{cost.}$$

Avendosi poi

$$d\frac{r_1}{1+r_1^2}=\frac{(1-r_1^2)\,dr_1}{(1+r_1^2)^2}\,,$$

ne viene

$$\varphi=\frac{ar_1}{1+r_1^2}-\frac{b}{1+r_1^2}+\text{cost.}\,,$$

cioè

$$\varphi=\frac{axy-bx^2}{x^2+y^2}+\text{cost.}$$

Lo stesso risultato si sarebbe ottenuto coll'uso della formula (11) integrando la seguente rapporto alla x

$$\varphi=\int_0\frac{y\,(a\,(y^2-x^2)-2bxy)\,dx}{(x^2+y^2)^2}+\text{cost.}$$

Data in terzo luogo la differenziale esatta omogenea di grado -1

$$\frac{x^2\,dx-(3x^2-3xy+y^2)\,dy}{(x-y)^3}\,,$$

per cui $\mathrm{M}x+\mathrm{N}y=1$, ed assunto $y=r_1x$, avremo (13)

$$\mathrm{M}x=\mathrm{A}=\frac{1}{(1-r_1)^3}\quad,\quad \mathrm{N}y=\mathrm{B}=-\frac{3-3r_1+r_1^2}{(1-r_1)^3}\,,$$

e poichè (22) $c=1$, si avrà (21)

$$\begin{aligned}\varphi&=\log x-\int\frac{3-3r_1+r_1^2}{(1-r_1)^3}\,dr_1+\text{cost.}\\&=\log x-\int\frac{dr_1}{(1-r_1)^3}-\int\frac{dr_1}{(1-r_1)^2}-\int\frac{dr_1}{1-r_1}+\text{cost.}\\&=\log x-\frac{1}{2\,(1-r_1)^2}-\frac{1}{1-r_1}+\log(1-r_1)+\text{cost.}\\&=\log(x-y)-\frac{x^2}{2\,(x-y)^2}-\frac{x}{x-y}+\text{cost.}\end{aligned}$$

Adoperando la formola (11), si avrebbe

$$\varphi=\int_0\frac{x^2\,dx}{(x-y)^3}+\int\frac{dy}{y}+\text{cost.}=y^2\int_0\frac{dx}{(x-y)^3}+2y\int_0\frac{dx}{(x-y)^2}+\int_0\frac{dx}{x-y}+\int\frac{dy}{y}+\text{Cost.}$$

$$=-\frac{y^2}{2(x-y)^2}-\frac{2y}{x-y}+\log(x-y)+\text{Cost.}$$

Questo risultato, benchè d'aspetto alquanto diverso, coincide col precedente, poichè non ne differisce che d'una costante.

Non sarà inutile aggiungere alcuni esempî d'integrazione di funzioni omogenee di grado -1 a tre e più variabili.

Abbiasi primieramente la differenziale esatta

$$\left(\frac{2uy-axy-bxu}{x^3}\right)dx+\left(\frac{ax-u}{x^2}\right)dy+\left(\frac{bx-y}{x^2}\right)du\,,$$

per cui, poste (12)

$$y=r_1x\quad,\quad u=r_2x\,,$$

si trova (13)

$$\text{A}=2r_1r_2-ar_1-br_2\quad,\quad\text{B}=a-r_2\quad,\quad\text{C}=b-r_1\,,$$

e quindi

$$\text{A}+\text{B}r_1+\text{C}r_2=0\,,$$

ossia (22)

$$c=0\,.$$

Si avrà (11)

$$\varphi=\int_0(a-r_2)dr_1+\int b\,dr_2+\text{cost.}=ar_1-r_1r_2+br_2+\text{cost.}$$

$$=\frac{ay+bu}{x}-\frac{yu}{x^2}+\text{cost.}$$

Il medesimo risultato si ha pure agevolmente, mercè la formula (11), da cui si deduce incominciando dall'integrare rapporto ad u

$$\varphi=\int_0\left(\frac{bx-y}{x^2}\right)du+\int_0\frac{a\,dy}{x}+\text{cost.}$$

Sia data infine ad integrarsi la formula

$$\frac{(u+ay)\,dx}{(u+ax)(y-x)}-\frac{x\,dy}{(y-x)\,y}+\frac{du}{u+ax}\,,$$

per cui si trova

$$A = \frac{r_2 + a r_1}{(r_2 + a)(r_1 - 1)} \quad , \quad B = -\frac{1}{(r_1 - 1) r_1} \quad , \quad C = \frac{1}{r_2 + a} \; ,$$

$$A + B r_1 + C r_2 = 1 \quad , \quad c = 1 \; ,$$

Si avrà in conseguenza (21)

$$\varphi = \log x - \int \frac{dr_1}{(r_1 - 1) r_1} + \int \frac{dr_2}{r_2 + a} + \text{cost.}$$

$$= \log x - \log\left(\frac{r_1 - 1}{r_1}\right) + \log(r_2 + a) + \text{cost.}$$

$$= \log \frac{y(u + ax)}{y - x} + \text{cost.}$$

Aggiungasi l'osservazione, che cercando la forma d'ogni funzione razionale omogenea di grado -1 a tre variabili, che sia differenziale esatta, si trova l'unica formula

$$\frac{a dx + b dy + c du}{ax + by + cu} \; ;$$

ed analogamente si avrebbe per più variabili

$$\frac{a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_n dx_n}{a_1 x + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n} \; .$$

L'integrale di questa sarebbe evidentemente

$$\log(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n) + \text{cost.}$$

e può facilmente dedursi, mediante la (21).

9. Fu già trovato dall'Eulero (*Instit. calculi integr.* ed. 1ª, 1768, T. 1, p. 340) che ogni funzione differenziale omogenea a due variabili della forma

$$M dx + N dy$$

si rende differenziale esatta colla divisione per $Mx + Ny$. Infatti, essendo M, N funzioni omogenee del medesimo grado m, si trova avverata la condizione

$$D_y \frac{M}{Mx + Ny} = D_x \frac{N}{Mx + Ny} \; ,$$

a cagione delle note eguaglianze

$$\left(\frac{dM}{dx}\right)x+\left(\frac{dM}{dy}\right)y=mM\,,\quad \left(\frac{dN}{dx}\right)x+\left(\frac{dN}{dy}\right)y=mN\,.$$

Ma per dimostrare il detto Teorema, secondo l' Eulero, e poterne arguire (Sezione II) come si estenda a qualunque numero di variabili, si assuma

$$y=r_1\,x\,,$$

e poichè ne risulta per legge d'omogeneità (§ 6)

$$M=Ax^m\quad,\quad N=Bx^m\,,$$

supposte A , B determinate funzioni di r_1, si avrà

$$Mdx+Ndy=(A+Br_1)\,x^m\,dx+x^{m+1}\,Bdr_1\,. \tag{23}$$

Ora dividendo il secondo membro di questa eguaglianza per $(A+Br_1)x^{m+1}$ ed il primo per l'equivalente $Mx+Ny$, si ottiene

$$\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}=\frac{dx}{x}+\frac{Bdr_1}{A+Br_1}\,; \tag{24}$$

e siccome il secondo membro è divenuto una differenziale esatta colla separazione delle variabili x , r_1, resta dimostrato il Teorema dell'Eulero.

Se $A+Br_1$ fosse eguale ad una costante c, che potrebb'essere anco lo zero, è manifesto (23) che il divisore, che rende differenziale esatta $Mdx+Ndy$, sarebbe x^{m+1}. Si avrebbe infatti dalla (23)

$$\frac{Mdx+Ndy}{x^{m+1}}=c\frac{dx}{x}+Bdr_1\,.$$

Nel caso poi di $A+Br_1=c$, e di $m+1=0$, avendosi

$$Mdx+Ndy=c\frac{dx}{x}+Bdr_1\,, \tag{25}$$

si riconosce che la formula proposta è per sè stessa una differenziale esatta.

Sia data, a cagion d'esempio, la formula

$$(x^2+y^2)\,dx-(yx+y^2)\,dy\,.$$

Sarà

$$(x^2+y^2)\,x-(yx+y^1)\,y=x^3-y^3$$

il divisore che la rende differenziale esatta, e si avrà (24)

$$\frac{(x^2+y^2)\,dx-(xy+y^2)\,dy}{x^3-y^3}=\frac{dx}{x}+\left(\frac{r_1+r_1^2}{1-r_1^3}\right)dr_1\,.$$

Abbiasi in secondo luogo

$$(ay^2-bxy)\,dx+(bx^2-axy)\,dy$$

per cui $m=2$, ed

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}r_1=ar_1^2-br_1+(b-ar_1)\,r_1=0\,.$$

Sarà x^3 il divisore che riduce esatta cotesta formula differenziale, e si avrà (23)

$$\frac{(ay^2-bxy)\,dx+(bx^2-axy)\,dy}{x^3}=(b-ar_1)\,dr_1\,.$$

Ma si vedrà fra poco, che il divisore può essere ogni funzione omogenea di x, y del 3° grado.

Data inoltre la formula

$$(ay^3+bxy^2+cx^3)\,dx-(ay^2x+bx^2y)\,dy\,,$$

in cui $m=3$, ed

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}r_1=ar_1^3+br_1^2+c-(ar_1^2+br_1)\,r_1=c\,,$$

si troverà che diviene differenziale esatta colla divisione per x^4, avendosi infatti (23)

$$\frac{(ay^3+bxy^2+cx^3)\,dx-(ay^2x+bx^2y)\,dy}{x^4}=c\frac{dx}{x}-(ar_1^2+br_1)\,dr_1\,.$$

Infine, proposta la formula

$$\frac{(x^2-3xy)\,dx+(3xy-y^2)\,dy}{(x-y)^3}\,,$$

ove $m = -1$, ed

$$A + Br_1 = 1,$$

si troverà che per sè stessa è differenziale esatta, come fu dianzi provato (25), semprechè sia $A + Br_1$ costante o nulla, ed $m + 1 = 0$. Si ha poi dalla (25) che ogni formula differenziale omogenea $Mdx + Ndy$ di grado m, per cui sia $Mx + Ny = 0$, si può rendere differenziale esatta col dividerla per qualsiasi funzione omogenea di x, y del grado $m + 1$.

Così la differenziale

$$(ay^3 + bxy^2 + cx^2 y)\,dx - (ay^2 x + byx^2 + cx^3)\,dy$$

diverrà esatta colla divisione per qualsivoglia funzione di quarto grado omogenea, come a cagione d'esempio per $x^4 + ky^4$, qualunque sia la costante k.

Si mostrerà nella Sezione II, che il Teorema Euleriano vale per le funzioni omogenee di più variabili, allorchè queste possono divenire differenziali esatte, mercè un conveniente moltiplicatore; cioè verrà stabilita una regola analoga onde ridurre differenziali esatte le equazioni omogenee di primo ordine con qualsiasi numero di variabili, allorchè le condizioni di loro integrabilità sieno soddisfatte.

10. Ridotta $Mdx + Ndy$ differenziale esatta colla divisione per $Mx + Ny$, se ne ha l'integrale espresso per quello d'una formula ad una sola variabile, cioè (24)

$$\int \frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny} = \log x + \int \frac{Bdr_1}{A + Br_1} + \text{cost.}, \tag{26}$$

e nel caso di $A + Br_1$ eguale ad una costante c, che può ridursi a zero, si ha (23)

$$\int \frac{Mdx + Ndy}{x^{m+1}} = c \log x + \int Bdr_1 + \text{cost.}$$

Dalla formula (11) si ha pure

$$\int \frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny} = \int_0 \frac{Ndy}{Mx + Ny} + \log x + \text{cost.}, \tag{27}$$

ed è facile scorgere la coincidenza di questa espressione colla (26). Imperocchè nell'integrare $\frac{Ndy}{Mx + Ny}$ ritenendosi costante x, se si ponga $y = xr_1$, si ritrae

$$\int_0 \frac{Ndy}{Mx + Ny} = \int_0 \frac{Bdr_1}{A + Br_1} = \int \frac{Bdr_1}{A + Br_1} + \text{Cost.}$$

Potrebbesi chiedere come si esprime l'integrale di $\frac{\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}$, allorchè sia

$$\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy=d\varphi$$

una differenziale esatta omogenea di grado m. Si è già veduto (§§ 6, 7) che l'integrale d'una funzione omogenea del grado m è in generale del grado $m+1$, purchè $m+1$ non vada a zero. Ne segue

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)x+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)y=\mathrm{M}x+\mathrm{N}y=(m+1)\varphi\,,$$

e quindi

$$\frac{\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}=\frac{d\varphi}{(m+1)\varphi}\,,$$

ed integrando

$$\int\frac{\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}=\frac{1}{m+1}\log\varphi+\mathrm{cost}=\frac{1}{m+1}\log(\mathrm{M}x+\mathrm{N}y)+\mathrm{Cost}\,. \tag{28}$$

Nel caso di $m+1=0$ questa formula cessa di esistere. Ma allora (§ 7) (22) $\mathrm{M}x+\mathrm{N}y$ si riduce ad una costante c. Se questa è finita, si avrà (§ 6) (21)

$$\int\frac{\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy}{c}=\log x+\frac{1}{c}\int\mathrm{B}dr_1\,,$$

essendo per

$$y=r_1x\quad,\quad \mathrm{B}=\frac{\mathrm{N}}{x}\,.$$

Se poi fosse $c=0$, evidentemente non ha più luogo l'applicazione del Teorema Euleriano.

È stato poi osservato da N. Fuss, allievo dell'Eulero (*Nova Acta Acad. Imp. Petropolit.* T. VI, p. 162), che l'integrale totale di $\frac{\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}$ corrisponde al risultato dell'integrazione parziale di $\frac{\mathrm{M}dx}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}$ rapporto ad x, coll'aggiunta d'una costante arbitraria.

Ciò viene dimostrato da quell'Autore nella supposizione che i fattori omogenei di 1° grado, in cui si può decomporre la funzione intera e razionale $\mathrm{M}x+\mathrm{N}y$, sieno tutti fra loro diseguali.

A chiarire la dimostrazione del Teorema enunciato dal Fuss, e dell'analoga Proposizione, di cui egli non fece menzione, gioverà esporla nel modo seguente:

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m+1}$ i valori diseguali di r_1 soddisfacenti all'equazione del grado $m+1$

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}r_1=0\,,$$

e si avrà dalla teoria elementare dello spezzamento delle frazioni razionali

$$\frac{A}{A+Br_1}=\Sigma\frac{h_n}{r_1-\alpha_n} \quad , \quad \frac{B}{A+Br_1}=\Sigma\frac{k_n}{r_1-\alpha_n}, \tag{29}$$

intendendosi estese le somme indicate dal segno Σ a tutti i valori $1, 2, 3 \ldots m+1$ di n, ed essendo per una regola notoria

$$h_n=\frac{A}{\left(\frac{dA}{dr_1}\right)+\left(\frac{dB}{dr_1}\right)r_1+B} \quad , \quad k_n=\frac{B}{\left(\frac{dA}{dr_1}\right)+\left(\frac{dB}{dr_1}\right)r_1+B},$$

ove si ponga $r_1=\alpha_n$.

Sommando colla 1^a delle (29) la 2^a moltiplicata per r_1, si ottiene

$$\Sigma\frac{k_n r_1+h_n}{r_1-\alpha_n}=\Sigma\left(k_n+\frac{k_n\alpha_n+h_n}{r_1-\alpha_n}\right)=1,$$

e dovendo questa equazione avverarsi per qualsiasi valore di r_1, dovrà essere

$$k_n\alpha_n+h_n=0 \quad , \quad \Sigma k_n=1. \tag{30}$$

Anche dal rapporto degli anzidetti valori di h_n, k_n si avrebbe per $r_1=\alpha_n$

$$\frac{h_n}{k_n}=\frac{A}{B}=-\alpha_n.$$

Ora per l'omogeneità delle funzioni M, N di grado m, posto $y=r_1 x$, avendosi (13)

$$M=Ax^m \quad , \quad N=Bx^m,$$

ne viene (29)

$$\frac{M}{Mx+Ny}=\frac{A}{(A+Br_1)x}=\Sigma\frac{h_n}{y-\alpha_n x} \quad , \quad \frac{N}{Mx+Ny}=\frac{B}{(A+Br_1)x}=\Sigma\frac{k_n}{y-\alpha_n x};$$

e quindi, avuto riguardo alla prima delle (30), e dinotato con *log* il logaritmo iperbolico,

$$\int\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}=\Sigma\int\frac{k_n(dy-\alpha_n dx)}{y-\alpha_n x}=\Sigma k_n\log(y-\alpha_n x)+\text{Cost.}, \tag{31}$$

$$\int\frac{Mdx}{Mx+Ny}=\Sigma k_n\log(y-\alpha_n x)+C, \quad \int\frac{Ndy}{Mx+Ny}=\Sigma k_n\log(y-\alpha_n x)+C_1.$$

Nella seconda di queste formule la C potrebbe riguardarsi come funzione della y, e del pari C_1 nella terza rappresenterebbe una funzione indeterminata della x. Ma è palese dalla formula **Euleriana** accennata nel § 3, per cui si integra ogni funzione della forma $\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy$, che torna superfluo aggiungere all'espressione di $\int \mathrm{M}dx$ una funzione qualunque C di y, la quale sparirebbe dal risultato. Pertanto C e parimente C_1 debbonsi riguardare come costanti, e si ha quindi dal paragone delle formule (30) la proposizione del **Fuss**, e la sua correlativa, cioè:

$$\int \frac{\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}=\int \frac{\mathrm{M}dx}{\mathrm{M}x+\mathrm{M}y}+c\,, \qquad \int \frac{\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}=\int \frac{\mathrm{N}dy}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}+c_1\,, \tag{32}$$

essendo c, c_1 due nuove costanti arbitrarie. Si passa dall'una all'altra di queste due formule permutando x con y, ed M con N.

Si avrebbe altresì dalle 2^a e 3^a (31), per la 2^a delle (30),

$$\int_0 \frac{\mathrm{M}dx}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}=\Sigma k_n \log(y-\alpha_n x)-\log y=\Sigma k_n \log(r_1-\alpha_n)-\log r_1 \tag{33}$$

$$\int_0 \frac{\mathrm{N}dy}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}=\Sigma k_n \log(y-\alpha_n x)-\Sigma k_n \log(-\alpha_n x)$$

$$=\Sigma k_n \log(r_1-\alpha_n)-\Sigma k_n \log(-\alpha_n)\,;$$

e poichè per la 2^a delle (29)

$$\int \frac{\mathrm{B}dr_1}{\mathrm{A}+\mathrm{B}r_1}=\Sigma k_n \log(r_1-\alpha_n)+\text{cost.}\,,$$

si troverà che la 1^a delle (31) guida all'integrale (24), e reciprocamente.

11. Dalla 2^a delle (31) il **Fuss** ha desunto la dimostrazione d'una formula già proposta da G. **Bernoulli** nel T. I degli antichi Commentarii dell'Accademia di Pietroburgo, onde esprimere l'integrale dell'equazione omogenea $\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy=0$. Si può del pari ottenerla dalla prima delle (31), la quale col mutamento della costante arbitraria assume la forma

$$\int \frac{\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}=\log \frac{(y-\alpha_1 x)^{k_1}(y-\alpha_1 x)^{k_2}\ldots(y-\alpha_{m+1} x)^{k_{m+1}}}{c}\,.$$

Infatti, dividendo la data equazione per $\mathrm{M}x+\mathrm{N}y$ ed integrando, andrebbe a zero questa espressione del suo integrale, e conseguentemente si avrebbe la formula del **Bernoulli**

$$(y-\alpha_1 x)^{k_1}(y-\alpha_1 x)^{k_2}\ldots(y-\alpha_{m+1} x)^{k_{m+1}}=c\,. \tag{34}$$

Nel caso dell'eguaglianza di alcune radici α_1, α_2, ecc. dell'equazione $A + Br_1 = 0$, questa formula soggiace ad eccezione, giacchè i rispettivi esponenti k_1, k_2 ecc. diverrebbero infiniti. Ma la proposizione del **Fuss** non cessa di sussistere, come basterà dimostrare per la 2ª delle (32), colla riserva di porgerne fra poco una più breve e generale dimostrazione.

Imperocchè riguardando in generale $r_1 = \alpha_{p,q}$ come una radice semplice, o moltiplice di grado q dell'equazione

$$A + Br_1 = 0,$$

e quindi $(y - \alpha_{p,q}x)^q$ come uno qualunque de' fattori di $Mx + Ny$, si avrà in generale per la teoria dello spezzamento delle frazioni razionali

$$\frac{N}{Mx + Ny} = \Sigma \frac{k_{p,q-r}\, x^{q-r}}{(y - \alpha_{p,q}x)^{q-r+1}},$$

intendendosi estesa la somma Σ a tutti i valori degli indici p, q, ed a' valori rispettivi $1, 2, 3, \ldots q$ di r, e designando con $k_{p,q-r}$ altrettante costanti determinate.

Quindi moltiplicando per dy ed integrando, denotata con $F(x,y)$, l'espressione dell'integrale di $\frac{N dy}{Mx + Ny}$, ove si prescinda dalla costante arbirtaria, si ottiene

$$F(x, y) = -\Sigma \frac{k_{p,q-r}\, x^{q-r}}{(q-r)(y - \alpha_{p,q}x)^{q-r}} + \Sigma k_{p,o} \log (y - \alpha_{p,q}x),$$

essendo r suscettibile de' valori $1, 2, 3, \ldots q-1$.

Pertanto abbiamo

$$\int_o \frac{N dy}{Mx + Ny} = F(x, y) - F(x, o) = F(x, y) + \Sigma \frac{k_{p,q-r}}{(q-r)(-\alpha_{p,q})^{q-r}} - \Sigma k_{p,o} \log (-\alpha_{p,q}x)$$
$$= F(x, y) - \Sigma k_{p,o}, \log x + \text{cost.}$$

Ma ponendo $x = 0$ nell'eguaglianza anteriore, che rappresenta lo spezzamento di $\frac{N}{Mx + Ny}$, si trova evidentemente

$$\frac{1}{y} = \Sigma \frac{k_{p,o}}{y},$$

cioè

$$\Sigma k_{p,o} = 1;$$

risulta dunque

$$\int_0 \frac{\mathrm{N}dy}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}+\log x=\int \frac{\mathrm{N}dy}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}+\text{cost.},$$

ossia per la (27), e per analoga deduzione, si rinvengono le (32)

$$\int \frac{\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}=\int \frac{\mathrm{N}dy}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}=\int \frac{\mathrm{M}dx}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}.$$

Data, a cagion d'esempio, la formula (§ 8)

$$\frac{x^2\,dx-(3x^2-3xy+y^2)\,dy}{(x-y)^3},$$

si avrà per espressione del suo integrale

$$\int \frac{x^2dx}{(x-y)^3}+\text{cost.}=y^2\int \frac{dx}{(x-y)^3}+2y\int \frac{dx}{(x-y)^2}+\int \frac{dx}{x-y}+\text{cost.}$$

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{2y}{x-y}+\log(x-y)+\text{cost.};$$

come si è altra volta ottenuto, col solo divario d'una quantità costante $\frac{3}{2}$.

Adduciamo ancora (§ 9) gli esempii seguenti:

$$\int \frac{(x^2+y^2)dx-(yx+y^2)dy}{x^3-y^3}=\int \frac{(x^2+y^2)dx}{x^3-y^3}+\text{cost.}$$

$$=\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-y}+\frac{1}{3}\int \frac{(x-y)dx}{x^2+xy+y^2}+\text{cost.}$$

$$=\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-y}+\frac{1}{6}\int \frac{2\left(x+\frac{1}{2}y\right)dx}{\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2}-\frac{1}{2}y\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2}+\text{cost.}$$

$$=\frac{2}{3}\log(x-y)+\frac{1}{6}\log(x^2+xy+y^2)-\frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc tang}\,\frac{2x+y}{y\sqrt{3}}+\text{cost.}$$

Analogo risultato si avrebbe, salvo il divario della costante arbitraria, mediante la formula (24) o la 2ª delle (32).

Infine

$$\int \frac{(x^2-3xy)dx+(3xy-y^2)dy}{(x-y)^3}=\int \frac{(3xy-y^2)dy}{(x-y)^3}+\text{cost.}$$

$$=2x^2\int \frac{dy}{(x-y)^3}-x\int \frac{dy}{(x-y)^2}-\int \frac{dy}{x-y}+\text{cost.}=\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{x}{x-y}+\log(x-y)+\text{cost.},$$

oppure

$$\int \frac{(x^2-3xy)dx+(3xy-x^2)dy}{(x-y)^3}=\int \frac{(x^2-3xy)\,dx}{(x-y)^3}+\text{cost.}$$

$$=-2y^2\int \frac{dx}{(x-y)^3}-y\int \frac{dx}{(x-y)^2}+\int \frac{dx}{x-y}=\frac{y^2}{(x-y)^2}+\frac{y}{x-y}+\log(x-y)+\text{Cost.},$$

risultato che corrisponde al precedente, poichè ne differisce d'una quantità costante.

12. Il Fuss nella Memoria sopracitata avea cercato una più spedita e generale dimostrazione del suo Teorema: ma sembra ch'egli stesso non ne fosse pago, giacchè ricorse all'altro modo di dimostrazione, che suppone M, N funzioni intere e razionali, e l'equazione $Mx+Ny=0$, ossia $A+Br_1=0$, dotata di radici tutte diseguali. Ho procurato di chiarire e completare quella dimostrazione colla considerazione delle radici eguali, e presi occasione di riprodurre un'antica formula nella quale Giovanni Bernoulli espresse l'integrale d'ogni equazione omogenea razionale di prim'ordine $Mdx+Ndy=0$, purchè l'equazione ausiliaria $Mx+Ny=0$ non abbia radici eguali. Ma si può offrire in più d'una guisa una facile e generale dimostrazione della proposizione del Fuss, qualunque sia la forma delle funzioni omogenee M, N. Infatti avendosi

$$\int \frac{Mdx}{Mx+Ny}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{N}{Mx+Ny}\,\frac{y}{x}\right)dx=\log x-\int \frac{Ny}{Mx+Ny}\,\frac{dx}{x}\,;$$

se nel secondo membro sostituiamo a dx il suo valore dedotto dal differenziare $y=r_1x$ nell'ipotesi di y costante, per cui $\frac{dx}{x}=-\frac{dr_1}{r_1}$, e ricordiamo (13) essere $M=Ax^m$, $N=Bx^m$, troviamo

$$\int \frac{Mdx}{Mx+Ny}=\log x+\int \frac{Bdr_1}{A+Br_1}+C(y),$$

ammettendo che la costante arbitraria C possa essere funzione della y supposta costante. Ora derivando questa eguaglianza rapporto ad y, per la nota condizione

$$D_y\frac{M}{Mx+Ny}=D_x\frac{N}{Mx+Ny}\,,$$

ed a cagione di $\left(\frac{dr_1}{dy}\right)=\frac{1}{x}$, abbiamo

$$\int D_x \frac{N}{Mx+Ny}\,dx = D_{r_1}\int \frac{B dr_1}{A+Br_1}\left(\frac{dr_1}{dy}\right)+C'(y)=\frac{B}{A+Br_1}\,\frac{1}{x}+C'(y),$$

ossia, poichè all'integrale del primo membro non è ad aggiungersi costante arbitraria,

$$\frac{N}{Mx+Ny}=\frac{B}{Ax+By}+C'(y)=\frac{N}{Mx+Ny}+C'(y).$$

Quindi $C'(y)=0$, ossia C costante, e in conseguenza

$$\int \frac{M dx}{Mx+Ny}=\log x+\int \frac{B dr_1}{A+Br_1}+\text{cost.}$$

La coincidenza di questa espressione colla (26) dimostra la 1ª delle (31), comunque le funzioni omogenee del medesimo grado M, N siano razionali od irrazionali od anco trascendenti.

Dalla 1ª delle (31) si passa alla 2ª, qualunque sia la forma delle funzioni omogenee M, N, mediante lo scambio simultaneo di x con y e di M con N. Ma si può dimostrare quest'ultima in guisa analoga, sostituendo dapprima al dx nella proposta funzione a due variabili il valore desunto dall'eguaglianza $y=r_1 x$, laonde si avrebbe a cagione di $M=Ax^m$, $N=Bx^m$

$$\frac{M dx+N dy}{Mx+Ny}=\frac{dy}{y}-\frac{A}{A+Br_1}\,\frac{dr_1}{r_1},$$

e quindi invece della (26)

$$\int \frac{M dx+N dy}{Mx+Ny}=\log y-\int \frac{A}{A+Br_1}\,\frac{dr_1}{r_1}+\text{cost.} \tag{35}$$

È manifesta la coincidenza di questa formula colla (26), attesochè la loro differenza si ridurrebbe ad una costante. Ciò premesso, avendosi

$$\int \frac{N dy}{Mx+Ny}=\int\left(1-\frac{Mx}{Mx+Ny}\right)\frac{dy}{y}=\log y-\int \frac{Mx}{Mx+Ny}\,\frac{dy}{y},$$

se si differenzii l'eguaglianza $y=r_1 x$ nell'ipotesi di x costante, si ha $dy=x dr_1$, cioè $\frac{dy}{y}=\frac{dr_1}{r_1}$, e quindi

$$\int \frac{N dy}{Mx+Ny}=\log y-\int \frac{A}{A+Br_1}\,\frac{dr_1}{r_1}+C(x).$$

Conseguentemente derivando questa eguaglianza rapporto ad x, a cagione della sopraddetta equazione di condizione per cui la data funzione a due variabili è differenziale esatta, e di $\left(\frac{dr_1}{dx}\right) = -\frac{y}{x^2}$, si trova

$$\frac{M}{Mx+Ny} = -\frac{A}{A+Br_1}\frac{1}{r_1} \times -\frac{y}{x^2} + C'(x) = \frac{M}{Mx+Ny} + C'(x),$$

e quindi $C'(x)=0$. Pertanto

$$\int \frac{Ndy}{Mx+Ny} = \log y - \int \frac{A}{A+Br_1}\frac{dr_1}{r_1} + \text{Cost.};$$

e siccome questa formula corrisponde alla (35), se ne ritrae la 2ª delle (31) per qualunque forma delle funzioni omogenee M, N.

Si può dimostrare altresì la stessa eguaglianza ponendo nella (24) x costante, e deducendone

$$\frac{Ndy}{Mx+Ny} = \frac{Bdr_1}{A+Br_1},$$

e quindi

$$\int \frac{Ndy}{Mx+Ny} = \int \frac{Bdr_1}{A+Br_1} + C(x).$$

Per determinare $C(x)$ si derivi rapporto ad x, e si avrà cagione di $\left(\frac{dr_1}{dx}\right) = -\frac{y}{x^2}$

$$\int D_x \frac{N}{Mx+Ny} dy = \frac{B}{A+Br_1} \cdot -\frac{y}{x^2} + C'(x),$$

ossia

$$\int D_y \frac{M}{Mx+Ny} dy = \frac{M}{Mx+Ny} = -\frac{By}{Ax+By}\frac{1}{x} + C'(x) = -\frac{Ny}{Mx+Ny}\frac{1}{x} + C'(x),$$

donde

$$C'(x) = \frac{M}{Mx+Ny} + \frac{Ny}{Mx+Ny}\frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$

e moltiplicando per dx ed integrando

$$C(x) = \log x + \text{cost.}$$

Sostituito questo valore di $C(x)$ nella superiore equazione, si ottiene

$$\int \frac{Ndy}{Mx+Ny} = \log x + \int \frac{Bdr_1}{A+Br_1} + \text{cost.}$$

cioè l'espressione (26), e quindi si rinviene la 2ª delle (31), qualunque sieno le funzioni omogenee M, N.

Finalmente una più spedita dimostrazione generale delle (31) si avrebbe differenziando totalmente

$$\int \frac{Mdx}{Mx+Ny} + C(y),$$

oppure

$$\int \frac{Ndy}{Mx+Ny} + C_1(x),$$

ove si riguardino $C(y)$, $C_1(x)$ quali funzioni arbitrarie delle rispettive y, x, che rendono completi i rispettivi integrali parziali. Imperocchè avendosi dalla differenziazione totale

$$d\left(\int \frac{Mdx}{Mx+Ny} + C(y)\right) = \frac{Mdx}{Mx+Ny} + \int D_y \frac{M}{Mx+Ny}\, dx dy + C'(y) dy,$$

$$d\left(\int \frac{Ndy}{Mx+Ny} + C_1(x)\right) = \int D_x \frac{N}{Mx+Ny}\, dy dx + \frac{Ndy}{Mx+Ny} + C_1'(x)\, dx,$$

ed a cagione della sopraddetta condizione, per cui $\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}$ è differenziale esatta, essendo

$$\int D_y \frac{M}{Mx+Ny}\, dx + C'(y) = \int D_x \frac{N}{Mx+Ny}\, dx + C'(y) = \frac{N}{Mx+Ny} + C'(y),$$

$$\int D_x \frac{N}{Mx+Ny}\, dy + C_1'(x) = \int D_y \frac{M}{Mx+Ny}\, dy + C_1'(x) = \frac{M}{Mx+Ny} + C_1'(x),$$

ne risulta colla rispettiva sostituzione nelle due precedenti eguaglianze

$$d\left(\int \frac{Mdx}{Mx+Ny} + C(y)\right) = \frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny} + C'(y)dy\,;\; d\left(\int \frac{Ndy}{Mx+Ny} + C_1(x)\right) = \frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny} + C_1'(x)dx,$$

ossia

$$d\int \frac{Mdx}{Mx+Ny} = \frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}, \qquad d\int \frac{Ndy}{Mx+Ny} = \frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny};$$

e quindi integrando totalmente, coll'aggiunta delle sole costanti arbitrarie c, c_1, si ottiene ciascuna delle formule (32), e resta dimostrato il Teorema del Fuss nella sua maggiore generalità, comunque le funzioni omogenee M, N sieno razionali, od irrazionali, o trascendenti.

Gioverà aggiungere una breve applicazione dello stesso Teorema anche ad una funzione omogenea irrazionale. Supponigasi

$$M=a\sqrt{y}\,,\quad N=b\sqrt{x}\,,$$

e quindi $m=\frac{1}{2}$

$$A=\frac{M}{\sqrt{x}}=a\sqrt{r_1}\,,\quad B=\frac{N}{\sqrt{x}}=b\,,$$

si avrà (26)

$$\int\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}=\int\frac{a\sqrt{y}.dx+b\sqrt{x}.dy}{ax\sqrt{y}+by\sqrt{x}}=\log x\int\frac{bdr_1}{a\sqrt{r_1}+br_1}+\text{cost.}$$

$$=\log x\int\frac{2bd\sqrt{r_1}}{a+b\sqrt{r_1}}+\text{cost}=\log x+2\log(a+b\sqrt{r_1})+\text{cost}.$$

$$=2\log(a\sqrt{x}+b\sqrt{y})+\text{cost.}$$

Si avrebbe del pari

$$\int\frac{Mdx}{Mx+Ny}=\int\frac{adx}{ax+b\sqrt{xy}}=\int\frac{2ad\sqrt{x}}{a\sqrt{x}+b\sqrt{y}}=2\log(a\sqrt{x}+b\sqrt{y})+\text{cost.},$$

e il medesimo risultato con una nuova costante arbitraria si avrebbe dalla integrazione di $\frac{Ndy}{Mx+Ny}$ rapporto ad y, come si scorge alternando in quest'ultima formula x con y, ed a con b, ossia M con N.

Non conviene insistere maggiormente su questa digressione intorno agli integrali delle funzioni omogenee, che forma l'Appendice alla presente Sezione I. Una Memoria sugli integrali delle funzioni e delle equazioni omogenee venne da me comunicata all'Accademia di Scienze e Lettere di Padova nella tornata 26 luglio 1868. Gli enunciati di alcune proposizioni contenute in quella Memoria furono pubblicati per altrui cura gentile nella parte non uffiziale della *Gazzetta d'Italia* (18 Agosto 1868, N.° 224).

Sezione II.

Nuovo metodo onde integrare le equazioni differenziali di 1° ordine a tre e più variabili, che hanno per integrale completo una sola primitiva. Condizioni necessarie e sufficienti di loro integrabilità. Modo di rendere differenziali esatte le equazioni di 1° ordine omogenee a più variabili.

13. Prendiamo a trattare una equazione differenziale del 1° ordine a più di due variabili, e in generale ad n variabili $x, x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$, di forma lineare rispetto agli elementi differenziali cioè della forma

$$\mathrm{A}dx + \mathrm{B}dx_1 + \mathrm{C}dx_2 + \ldots + \mathrm{K}dx_{n-1} = 0 \tag{36}$$

in cui riguarderemo x come funzione delle indipendenti $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$. Ritenendo con x la sola indipendente x_1 come variabile, e denotando con $d_{x_1} x$ la differenziale di x rapporto ad x_1, si ha quindi l'equazione

$$\mathrm{A}d_{x_1} x + \mathrm{B}dx_1 = 0\,,$$

che per brevità si può scrivere, riguardando nella espressione di x tutte le quantità, eccetto x_1 come costanti

$$\mathrm{A}dx + \mathrm{B}dx_1 = 0\,. \tag{37}$$

Questa equazione contenendo due sole variabili x, x_1 è sempre integrabile, e perciò diviene differenziale esatta colla moltiplicazione per un conveniente fattore M soddisfacente alla condizione

$$\left(\frac{d.\mathrm{MA}}{dx_1}\right) = \left(\frac{d.\mathrm{MB}}{dx}\right). \tag{38}$$

Se dunque si rappresentino con M_1, A_1 i valori di M, A per un valore particolare a_1 di x_1, si ottiene dall'integrare la differenziale esatta

$$\mathrm{MA}dx + \mathrm{MB}dx_1 = 0$$

la formula analoga alla (10)

$$\int_{a_1} \mathrm{MB}dx_1 + \int \mathrm{M}_1 \mathrm{A}_1\, dx + \psi_1 = 0 \tag{39}$$

in cui ψ_1 rappresenta una funzione ignota delle sole variabili $x_2, x_3 \ldots x_{n-1}$. Determinata ψ_1 in guisa che la differenziale totale della (39) coincida colla proposta equazione (36) moltiplicata per M, la (39) esprime l'integrale cercato. Ora la totale differenziazione della (39) offre, poichè $M_1 A_1$ non contiene x_1,

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_{a_1}\left(\frac{dMB}{dx}\right)dx_1 . dx + MBdx_1 + M_1 A_1 dx \\ \displaystyle+\int_{a_1}\left(\frac{dMB}{dx_2}\right)dx_1 . dx_2 + \int\left(\frac{dM_1A_1}{dx_2}\right)dx . dx_2 \\ + \cdots\cdots\cdots \\ \displaystyle+\int_{a_1}\left(\frac{dMB}{dx_{n-1}}\right)dx_1 . dx_{n-1} + \int\left(\frac{dM_1A_1}{dx_{n-1}}\right)dx . dx_{n-1} + d\psi_1\end{array}\right\} = 0,$$

ossia (38), a cagione di

$$\int_{a_1}\left(\frac{dMB}{dx}\right)dx_1 = \int_{a_1}\left(\frac{dMA}{dx_1}\right)dx_1 = MA - M_1A_1,$$

esibisce

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle MAdx + MBdx_1 + \int\left(\frac{dM_1A_1}{dx_2}\right)dx . dx_2 + \int_{a_1}\left(\frac{dMB}{dx_2}\right)dx_1 . dx_2 \\ + \cdots\cdots\cdots \\ \displaystyle+\int\left(\frac{dM_1A_1}{dx_{n-1}}\right)dx . dx_{n-1} + \int_{a_1}\left(\frac{dMB}{dx_{n-1}}\right)dx_1 . dx_{n-1} + d\psi_1\end{array}\right\} = 0,$$

e il paragone di questa eguaglianza colla (36) moltiplicata per M somministra, mercè la sottrazione dell'una dall'altra,

$$\begin{array}{rl} d\psi_1 = & \displaystyle\left\{MC - \int\left(\frac{dM_1A_1}{dx_2}\right)dx - \int_{a_1}\left(\frac{dMB}{dx_2}\right)dx_1\right\}dx_2 \\ & \displaystyle+\left\{ME - \int\left(\frac{dM_1A_1}{dx_3}\right)dx - \int_{a_1}\left(\frac{dMB}{dx_3}\right)dx_1\right\}dx_3 \\ & + \cdots\cdots\cdots \\ & \displaystyle+\left\{MK - \int\left(\frac{dM_1A_1}{dx_{n-1}}\right)dx - \int_{a_1}\left(\frac{dMB}{dx_{n-1}}\right)dx_1\right\}dx_{n-1} . \end{array} \quad (40)$$

Immaginando introdotta in questa equazione l'espressione di x desunta dalla (39), deesi trovare eliminata con x anco x_1, onde $d\psi_1$ risulti debitamente espressa per le sole variabili $x_2, x_3 \ldots x_{n-1}$. Pertanto le derivate dei moltiplicatori di $dx_2, dx_3 \ldots dx_{n-1}$

nella (40) prese rapporto ad x_1, ove si consideri x come una funzione di x_1 determinata dall'equazione (37), debbono annullarsi, e in conseguenza (38) attesa l'eguaglianza

$$\int_1 \left(\frac{d^2MB}{dx_m dx}\right) dx_1 = \int_1 \left(\frac{d^2MA}{dx_m dx_1}\right) dx_1 = \left(\frac{dMA}{dx_m}\right) - \left(\frac{dM_1A_1}{dx_m}\right), \tag{41}$$

risultano le $n-2$ equazioni di condizione

$$\left(\frac{dMC}{dx_1}\right) + \left(\frac{dMC}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dx_1}\right) - \left(\frac{dMB}{dx_2}\right) - \left(\frac{dMA}{dx_2}\right)\left(\frac{dx}{dx_1}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dME}{dx_1}\right) + \left(\frac{dME}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dx_1}\right) - \left(\frac{dMB}{dx_3}\right) - \left(\frac{dMA}{dx_3}\right)\left(\frac{dx}{dx_1}\right) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{dMK}{dx_1}\right) + \left(\frac{dMK}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dx_1}\right) - \left(\frac{dMB}{dx_{n-1}}\right) - \left(\frac{dMA}{dx_{n-1}}\right)\left(\frac{dx}{dx_1}\right) = 0,$$

le quali, a cagione (37) di

$$\left(\frac{dx}{dx_1}\right) = -\frac{B}{A},$$

e dell' identità (38), divengono in seguito agli sviluppi, ed alla divisione per M,

$$A\left\{\left(\frac{dB}{dx_2}\right) - \left(\frac{dC}{dx_1}\right)\right\} + B\left\{\left(\frac{dC}{dx}\right) - \left(\frac{dA}{dx_2}\right)\right\} + C\left\{\left(\frac{dA}{dx_1}\right) - \left(\frac{dB}{dx}\right)\right\} = 0,$$

$$A\left\{\left(\frac{dB}{dx_3}\right) - \left(\frac{dE}{dx_1}\right)\right\} + B\left\{\left(\frac{dE}{dx}\right) - \left(\frac{dA}{dx_3}\right)\right\} + E\left\{\left(\frac{dA}{dx_1}\right) - \left(\frac{dB}{dx}\right)\right\} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A\left\{\left(\frac{dB}{dx_{n-1}}\right) - \left(\frac{dK}{dx_1}\right)\right\} + B\left\{\left(\frac{dK}{dx}\right) - \left(\frac{dA}{dx_{n-1}}\right)\right\} + K\left\{\left(\frac{dA}{dx_1}\right) - \left(\frac{dB}{dx}\right)\right\} = 0, \tag{42}$$

Qualora s'avverino identicamente queste $n-2$ equazioni di condizione (42), si troverà eliminata fra le due equazioni (39) (40) x_1 insieme alla x, e perciò si potrà attribuire nelle medesime alla indipendente x_1 un valore particolare a_1 senza alterare l'espressione di ψ_1 che n'è indipendente. In conseguenza denotando con v_1 il valore di x corrispondente ad $x_1 = a_1$ e con $M_1^{(1)}$, $A_1^{(1)}$, $C_1^{(1)}$ ecc., le espressioni di M_1, A_1, C_1 per $x_1 = a_1$ e per $x = v_1$, avremo per determinare ψ_1 in luogo delle (39)(40)

$$\int M_1^{(1)} A_1^{(1)} dv_1 + \psi_1 = 0,$$

$$d\psi_1 = \left\{M_1^{(1)}C_1^{(1)} - \int \left(\frac{dM_1^{(1)}A_1^{(1)}}{dx_2}\right) dv_1\right\} dx_2 + \left\{M_1^{(1)}E_1^{(1)} - \int \left(\frac{dM_1^{(1)}A_1^{(1)}}{dx_3}\right) dv_1\right\} dx_3$$

$$+ \cdots\cdots + \left\{M_1^{(1)}K_1^{(1)} - \int \left(\frac{dM_1^{(1)}A_1^{(1)}}{dx_{n-1}}\right) dv_1\right\} dx_{n-1}. \tag{43}$$

Eliminata v_1 fra queste due eguaglianze, si avrebbe un'equazione di 1° ordine fra le $n-1$ variabili $x_2, x_3 \ldots x_{n-1}$ e ψ_1, il cui integrale totale si suole associare alla (39), onde poscia, mercè l'eliminazione di ψ_1, conseguire l'integrale completo della data equazione differenziale (36). Analogamente sarebbe d'uopo ridurre l'integrazione della equazione fra $x_2, x_3 \ldots x_{n-1}$ e ψ_1 a quella d'una equazione ad $n-3$ variabili $x_3 \ldots x_{n-1}$ e ψ_2 e così di seguito, finchè si pervenga ad una equazione colle due variabili x_{n-1}, ψ_{n-2}, il cui integrale verrà infine a contenere la costante arbitraria, che rende completo l'integrale cercato risultante dall'eliminazione delle quantità ausiliarie $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_{n-2}$.

14. Il procedimento finora esposto non è guari diverso dal metodo usitato per l'integrazione delle equazioni di 1° ordine a tre variabili, se non in quanto è resa più semplice la determinazione dell'equazione differenziale tra $x_2, x_3 \ldots x_{n-1}$ e ψ_1 col farla dipendere dalla eliminazione di v_1 fra le due eguaglianze (43). Ora l'essenziale divario e il rilevante vantaggio fra il metodo consueto, e il nuovo metodo ch'io propongo, consiste nell'eliminare ψ_1 fra le equazioni (39) (43) ritenendo in sua vece v_1. Siffatta eliminazione si eseguisce immediatamente col sottrarre la 1ª delle (43) dalla (39) e col sostituire nella differenziale della medesima, cioè della 1ª, il valore di $d\psi_1$ esibito dalla 2ª delle (43). In questa guisa siccome dal supporre in generale

$$\int M_1 A_1 dx = f(x) + \text{cost.},$$

e quindi

$$\int M_1^{(1)} A_1^{(1)} dv_1 = f(v_1) + \text{cost.},$$

si trova

$$\int M_1 A_1 dx - \int M_1^{(1)} A_1^{(1)} dv_1 = f(x) - f(v_1) = \int_{v_1} M_1 A_1 dx,$$

e dal differenziare totalmente la 1ª delle (43), risulta

$$d\psi_1 + M_1^{(1)} A_1^{(1)} dv_1 + \int \left(\frac{dM_1^{(1)} A_1^{(1)}}{dx_2}\right) dv_1 dx_2 + \;\ldots\; + \int \left(\frac{dM_1^{(1)} A_1^{(1)}}{dx_{n-1}}\right) dv_1 dx_{n-1} = 0;$$

sottraendo la 1ª delle (43) dalla (39), e sostituendo in quest'ultima testè ottenuta il valore (43) del $d\psi_1$, si giunge al sistema delle due equazioni che tengono le veci delle (43)

$$\int_{v_1} M_1 A_1 dx + \int_{a_1} MB\, dx_1 = 0$$

$$A_1^{(1)} dv_1 + C_1^{(1)} dx_2 + E_1^{(1)} dx_3 + \;\ldots\; + K_1^{(1)} dx_{n-1} = 0. \tag{44}$$

Pertanto l'integrazione della proposta equazione (36) si riduce a quella d'una equazione a due variabili, e d'un'altra equazione esplicita di prim'ordine ad $n-1$ variabili, semprechè si avverino le condizioni (42). La prima delle (44) è l'integrale della (37). L'altra è l'equazione a cui si riduce la stessa equazione proposta (36), ove ad x_1 si attribuisca il valore particolare a_1, e quindi ad x il valore corrispondente v_1. L'integrale completo della (36) risulterà dall'eliminazione di v_1 fra la 1ª delle (44) e l'integrale completo della 2ª da ottenersi in analoga guisa, allorchè questa equazione si trovi integrabile.

15. Allo stesso modo, detto v_2 il valore di v_1 per $x_2 = a_2$, ossia quello di x corrispondente ad $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, e denotato con $A_2^{(1)}$ il valore d'ogni quantità $A_1^{(1)}$ per $x_2 = a_2$ e con $A_2^{(2)}$ il valore di $A_1^{(1)}$ per $x_2 = a_2$, e per $v_1 = v_2$, supponendo N il fattore che rende differenziale esatta l'equazione a due variabili

$$A_1^{(1)} dv_1 + C_1^{(1)} dx_2 = 0, \tag{45}$$

ed N_2 il valore di N per $x_2 = a_2$; l'integrazione della 2ª delle equazioni (44) verrà ridotta al sistema analogo delle due equazioni

$$\begin{aligned} \int_{v_2} N_2 A_2^{(1)} dv_1 + \int_{a_2} N C_1^{(1)} dx_2 = 0, \\ A_2^{(2)} dv_2 + E_2^{(2)} dx_3 + \quad . \quad . \quad . \quad + F_2^{(2)} dx_{n-1} = 0, \end{aligned} \tag{46}$$

purchè si avverino identicamente le $n-3$ condizioni conformi alle (42)

$$\begin{aligned}
& A_1 \left\{ \left(\frac{dC_1}{dx_3} \right) - \left(\frac{dE_1}{dx_2} \right) \right\} + C_1 \left\{ \left(\frac{dE_1}{dx} \right) - \left(\frac{dA_1}{dx_3} \right) \right\} + E_1 \left\{ \left(\frac{dA_1}{dx_2} \right) - \left(\frac{dC_1}{dx} \right) \right\} = 0, \\
& A_1 \left\{ \left(\frac{dC_1}{dx_4} \right) - \left(\frac{dF_1}{dx_2} \right) \right\} + C_1 \left\{ \left(\frac{dF_1}{dx} \right) - \left(\frac{dA}{dx_4} \right) \right\} + F_1 \left\{ \left(\frac{dA_1}{dx_2} \right) - \left(\frac{dC_1}{dx} \right) \right\} = 0, \\
& \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
& A_1 \left\{ \left(\frac{dC_1}{dx_{n-1}} \right) - \left(\frac{dK_1}{dx_2} \right) \right\} - C_1 \left\{ \left(\frac{dK_1}{dx} \right) - \left(\frac{dA_1}{dx_{n-1}} \right) \right\} + K_1 \left\{ \left(\frac{dA_1}{dx_2} \right) - \left(\frac{dC_1}{dx} \right) \right\} = 0,
\end{aligned} \tag{47}$$

nella cui verificazione è indifferente scrivere v_1 in luogo di x, e perciò si ritennero le A_1, C_1, E_1 ecc., invece di $A_1^{(1)}$, $C_1^{(1)}$, ecc.

In simil guisa, supposto P il moltiplicatore che rende differenziale esatta l'equazione

$$A_2^{(2)} dv_2 + E_2^{(2)} dx_3 = 0, \tag{48}$$

e denominato v_3 il valore di v_2 per un valore particolare a_3 di x_3, ossia quello di x corrispondente ad $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $x_3 = a_3$ denotandosi poi con $A_3^{(2)}$ il valore di qualunque quantità $A_2^{(2)}$ per $x_2 = a_2$, e con $A_3^{(3)}$ il valore di $A_2^{(2)}$ per $x_2 = a_2$, e per $v_2 = v_3$, e desiguando con P_3 l'espressione di P corrispondente ad $x_3 = a_3$, si farà dipendere l'integrazione della 2ª delle (46) dalle due equazioni

$$\begin{aligned} \int_{v_3} P_3 A_3^{(2)} dx_2 + \int_{a_3} P E_2^{(2)} = 0, \\ A_3^{(3)} dv_3 + F_3^{(3)} dx_4 + \quad . \quad . \quad . \quad + K_3^{(3)} dx_{n-1} = 0, \end{aligned} \tag{49}$$

qualora si trovino soddisfatte le $n-4$ condizioni analoghe alle (42) (47)

$$A_2\left\{\left(\frac{dE_2}{dx_4}\right)-\left(\frac{dF_2}{dx_3}\right)\right\}+E_2\left\{\left(\frac{dF_2}{dx}\right)-\left(\frac{dA_2}{dx_4}\right)\right\}+F_2\left\{\left(\frac{dA_2}{dx_3}\right)-\left(\frac{dE_2}{dx}\right)\right\}=0\,,$$

. . . .

$$A_2\left\{\left(\frac{dE_2}{dx_{n-1}}\right)-\left(\frac{dK_2}{dx_3}\right)\right\}+E_2\left\{\left(\frac{dK_2}{dx}\right)-\left(\frac{dA_2}{dx_{n-1}}\right)\right\}+K_2\left\{\left(\frac{dA_2}{dx_3}\right)-\left(\frac{dE_2}{dx}\right)\right\}=0\,; \tag{50}$$

e così progressivamente: di maniera che si arriverà infine al sistema delle due equazioni

$$\begin{gathered}\int_{v_{n-2}} R_{n-2} A_{n-3}{}^{(n-3)} dv_{n-3}+\int_{a_{n-2}} RI_{n-3}{}^{(n-3)} dx_{n-2}=0 \\ A_{n-2}{}^{(n-2)} dv_{n-2}+K_{n-2}{}^{(n-2)} dx_{n-1}=0\,,\end{gathered} \tag{51}$$

in cui v_{n-3} è il valore di x per $x_1=a_1$, $x_2=a_2 \ldots x_{n-3}=a_{n-3}$; v_{n-2} quello di v_{n-3} per $x_{n-2}=a_{n-2}$; $A_{n-2}^{(n-3)}$ rappresenta l'espressione di $A_{n-3}^{(n-3)}$ per $x_{n-2}=a_{n-2}$, ed $A_{n-2}^{(n-2)}$ quella di $A_{n-2}^{(n-3)}$ per $x=v_{n-2}$, denotandosi con R il moltiplicatore che rende differenziale esatta la precedente equazione a due variabili

$$A_{n-3}{}^{(n-3)} dv_{n-3}+I_{n-3}{}^{(n-3)} dx_{n-2}=0$$

e con R_{n-2} il valore di R per $x_{n-2}=a_{n-2}$.

Quindi supposto T il fattore per cui la 2ª delle (51) diviene una differenziale esatta, e denotato con T_{n-1} il valore di T corrispondente ad $x_{n-1}=a_{n-1}$, e con $A_{n-1}^{(n-2)}$ il valore di $A_{n-2}^{(n-2)}$ per $x_{n-1}=a_{n-1}$, si avrà dalla sua integrazione

$$\int A_{n-1}{}^{(n-2)} T_{n-1} dv_{n-2}+\int_{a_{n-1}} TK_{n-2}{}^{(n-2)} dx_{n-1}+\text{cost.}=0\,, \tag{52}$$

e l'integrale completo richiesto della data equazione (36) sarà la risultante dell'eliminazione di $v_1, v_2 \ldots v_{n-2}$ fra le prime equazioni de' sistemi (44) (46) (49) ecc., (51), e la (52).

Avverrà talora ne' casi particolari che la serie di queste equazioni si arresti a quella determinante un valore v_m anteriore a v_{n-2}, o perchè si giunga ad una equazione fra due sole variabili determinante v_m, od anche perchè risulti $dv_m=0$ e quindi $v_m=\text{cost}$. Allora l'eliminazione di $v_1, v_2 \ldots v_m$ darebbe l'integrale cercato.

Le condizioni d'integrabilità (42) (47) (50) ecc., conformi nell'aspetto alle ordinarie, offrono il vantaggio che nelle (47) è lecito attribuire ad x_1 il valore particolare a_1; così pure nelle (50), oltre di porre $x_1=a_1$, si può attribuire ad x_2 il valore particolare a_2, e così di seguito; la quale avvertenza ne rende sempre più spedita la verificazione. Questi valori a_1, a_2, a_3, ecc. sono le origini de'rispettivi integrali nelle prime equazioni (44) (46) (49) ecc. e possono assumersi per maggiore semplicità eguali a zero, semprechè non ne risulti infinito il valore corrispondente di due delle funzioni A_1, C_1, A_2, E_2 ecc.

16. Ove si prescinda dall' assegnare le condizioni d' integrabilità della equazione differenziale (36), e si supponga di aver già rilevato che quell'equazione è integrabile, il metodo d'integrazione dianzi esibito può essere esposto in una maniera quasi intuitiva, che non ha mestieri di lunga dimostrazione.

Infatti se la data equazione (36) è integrabile, cioè se x sia esprimibile in funzione delle indipendenti $x_1, x_2 \ldots . x_{n-1}$ e d'una costante arbitraria, per mezzo d'una equazione primitiva si avrà dall'integrazione dell'equazione fra le due variabli x, x_1.

$$\mathrm{A}\left(\frac{dx}{dx_1}\right)+\mathrm{B}=0$$

l'equazione finita

$$f_1(x\ ,\ x_1\ \text{ecc.}\ ,\ \psi_1)=0\,,$$

in cui ψ_1 tiene le veci di costante arbitraria, e può essere funzione di x_2, $x_3 \ldots x_{n-1}$.

Attribuendo ad x_1 un valore particolare costante a_1, per cui sia $x=\upsilon_1$, abbiamo così le due eguaglianze

$$f_1(x\,,x_1\ \text{etc.},\psi_1)=0\,,\qquad f_1(v_1\,,a_1\ \text{etc.},\psi_1)=0\,, \tag{53}$$

Ma posto $x_1=a_1$, e quindi $x=\upsilon_1$ nella (36), questa equazione si riduce alla 2ª delle (44) che determina υ_1. Pertanto coll'integrazione dell'equazione fra le due variabili υ_1, x_2

$$\mathrm{A}_1^{(1)}\left(\frac{dv_1}{dx_2}\right)+\mathrm{C}_1^{(1)}=0\,,$$

si avrà un'equazione finita

$$f_2(v_1\,,x_2\,\text{etc}\,,\psi_2)=0\,,$$

in cui ψ_2 rappresenta una funzione di x_3, x_4, $\ldots x_{n-1}$: e quindi ponendo $x_2=a_2$ e in luogo di υ_1 il valore corrispondente υ_2, se ne dedurrà un'equazione che determina ψ_2, cioè si otterranno le due eguaglianze

$$f_2(v_1\,,x_2\ \text{etc.}\,,\psi_2)=0\,,\quad f_2(v_2\,,a_2\ \text{etc.}\,,\psi_2)=0\,. \tag{54}$$

Parimente, posto $x_2=a_2$, e perciò $\upsilon_1=\upsilon_2$, nella 2ª delle (44) ch'è quanto porre

$x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $x = v_2$ nella (36), questa sarà ridotta alla 2^a delle (46), e così successivamente, finchè si giunga all'ultima equazione cioè alla 2^a delle (51), il cui integrale denoteremo con

$$f_{n-1}(v_{n-2}\,,\,x_{n-1}\,,\,c) = 0\,, \tag{55}$$

essendo c una costante arbitraria. L'eliminazione delle $2(n-2)$ quantità ψ_1, $\psi_2, \ldots \psi_{n-2} \ldots v_1, v_2, \ldots v_{n-2}$ fra le $2n-3$ equazioni (53) (54) ... (55) darà l'integrale completo che si ricerca. A quest'uopo converrà dapprima eliminare ψ_1 fra le due equazioni (53), ψ_2 tra le (54) ecc., indi fra le rimanenti $n-1$ equazioni si farà l'eliminazione di $v_1, v_2, \ldots v_{n-2}$.

Allorchè le equazioni a due variabili che si deducono dalla data (36), e dalle seconde equazioni delle coppie (44) (46) (49) (51) riguardandovi una sola delle indipendenti come variabile, cioè

$$A\,dx + B\,dx_1 = 0, \qquad A_1^{(1)}dv_1 + C_1^{(1)}dx_2 = 0, \qquad A_2^{(2)}dv_2 + E_2^{(2)}dx_3 = 0, \ldots$$

$$A_{n-2}^{(n-2)}dv_{n-2} + K_{n-2}^{(n-2)}dx_{n-1} = 0\,,$$

vengano integrate col mezzo de' fattori che le rendono differenziali esatte, le quantità $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{n-2}$ si troveranno aggiunte alle espressioni de'rispettivi integrali, e spariranno, col sottrarre l'una dall'altra le equazioni di ciascuna delle coppie (53) (54) ecc. Si avranno così le prime equazioni delle coppie (44) (46) ... (51) e la (52), cioè le $n-1$ eguaglianze fra cui eliminando $v_1, v_2, \ldots v_{n-2}$, come si è già notato nel § 15, si otterrà l'integrale completo della proposta equazione (36).

17. Il metodo dianzi esposto ha il notevole vantaggio d'offrire esplicitamente la serie delle equazioni a due variabili, dalla cui integrazione si ottiene l'integrale completo della data equazione (36) a tre e più variabili, ed indica ad ogni tratto la più semplice equazione, a cui può ridursi la proposta, secondochè si avverino le relative serie di condizioni d'integrabilità (42) (47) (50) ecc. Esso non esige le differenziazioni totali, nè le prolisse eliminazioni, che nel metodo ordinario servono a dedurre le equazioni differenziali determinanti le quantità ausiliarie, e quantunque non sia frequente il bisogno d'integrare una equazione a tre o più variabili, vale in ogni caso a discernere fino a qual termine della proposta si estenda la sua integrabilità, e ad assegnare intuitivamente l'equazione ridotta, alla quale si potranno più agevolmente applicare i metodi che si adoprano, onde soddisfare ad una equazione differenziale per cui le condizioni d'integrabilità non siano avverate.

Riservando alla Sezione III con varie considerazioni ed avvertenze, e qualche esempio di applicazione, l'esporre altri procedimenti di integrazione delle equazioni di 1° ordine a più di tre variabili, il cui integrale venga espresso da una sola equazione finita con una costante arbitraria; noterò del pari, che consistono nell'integrare un sistema di successive equazioni che si deducono direttamente dall'equazione proposta, e determinano la variabile indipendente x ed un relativo numero di valori speciali della x corrispondenti a successivi valori particolari delle variabili indipendenti. L'integrale della prima di dette equazioni ausiliarie serve a determinare la x per mezzo delle $n-1$ variabili indipendenti e del primo de'suoi valori speciali, corrispondente a valori particolari di alcune di queste, e determinato dall'integrale d'una seconda equazione ausiliaria in funzione de' precedenti valori particolari, e di quelli di alcune dell'altre variabili che rimangono, ed inoltre d'un secondo valore corrispondente della x, il quale è determinato similmente dall'integrale d'una terza equazione ausiliaria, e così progressivamente, finchè l'integrale dell'ultima equazione ausiliaria viene ad esprimere l'ultimo valore speciale della x, mercè le residue variabili indipendenti ed una costante arbitraria. L'eliminazione de' valori speciali di x fra gli integrali delle predette equazioni ausiliarie darà l'integrale completo della proposta equazione (36), semprechè le condizioni della sua integrabilità siano soddisfatte.

Circa alla forma generale del moltiplicatore che può rendere differenziale esatta la (36) si osservi che supponendo

$$\mathrm{M}(\mathrm{A}dx+\mathrm{B}dx_1+\mathrm{C}dx_2+\ldots+\mathrm{K}dx_{n-1})=d\mathrm{T},$$

si avrebbe

$$\mathrm{MA}=\left(\frac{d\mathrm{T}}{dx}\right),\quad \mathrm{MB}=\left(\frac{d\mathrm{T}}{dx_1}\right),\quad \mathrm{MC}=\left(\frac{d\mathrm{T}}{dx_2}\right),\ldots \mathrm{MK}=\left(\frac{d\mathrm{T}}{dx_{n-1}}\right),$$

e quindi

$$\mathrm{M}=\frac{1}{\mathrm{A}}\left(\frac{d\mathrm{T}}{dx}\right)=\frac{1}{\mathrm{B}}\left(\frac{d\mathrm{T}}{dx_1}\right)=\frac{1}{\mathrm{C}}\left(\frac{d\mathrm{T}}{dx_2}\right)\ldots=\frac{1}{\mathrm{K}}\left(\frac{d\mathrm{T}}{dx_{n-1}}\right). \tag{56}$$

Siccome poi, denotata con λ una funzione arbitraria, sarebbe pure $\lambda(\mathrm{T})d\mathrm{T}$ differenziale esatta, ne segue che la forma generale del fattore che rende differenziale esatta la (36) sarebbe

$$\mathrm{M}\lambda(\mathrm{T}),$$

in cui M equivale ad una delle quantità fra loro eguali (56).

Similmente considerando una parte de' termini che compongono la (36), e ponendo

$$N(Adx + Bdx_1 + Cdx_2 + \ldots + Fdx_n) = dS\,,$$

si avrebbe

$$N = \frac{1}{A}\left(\frac{dS}{dx}\right) = \frac{1}{B}\left(\frac{dS}{dx_1}\right) = \frac{1}{C}\left(\frac{dS}{dx_2}\right) = \ldots = \frac{1}{F}\left(\frac{dS}{dx_n}\right), \qquad (57)$$

e sarebbe $N\lambda(S)$ l'espressione generale del fattore, che la rende differenziale esatta.

18. Nella Sezione III, si avrà occasione altresì di trattare delle equazioni differenziali omogenee a tre e più variabili, almeno per avvertire se, ed in qual modo, la Proposizione del Fuss (Appendice alla Sezione I, § 10) possa estendersi analogamente a qualunque numero di variabili. Quella Proposizione non reca invero un rilevante vantaggio per la formula proposta dal Fuss $\frac{Mdx}{Mx+Ny}$ sull'altra $\frac{Bdr_1}{A+Br_1}$, a cui si riduce (26) l'integrale totale di $\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}$, poichè non differiscono fra loro che dell'unico termine $\log x$. Se non che la difficoltà o la lunghezza della dimostrazione mi indusse a completare nel § 10 la seconda dimostrazione data dal Fuss, e ad aggiungere nel § 12 altre due dimostrazioni abbastante facili e convincenti, dopo le quali volli cercarne una terza, che mi pareva più spedita, ma invece ha il difetto della prima dimostrazione offerta dal Fuss; attesochè per compierla converrebbe ricorrere, come feci nella seconda delle dimostrazioni che diedi nel § 12, alla relazione analoga alla (22) per $c = 1$, che hanno fra loro i moltiplicatori di dx, dy nella proposta formula $\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}$, i quali rispettivamente moltiplicati per x, y e sommati equivalgono all'unità.

Tornerò nella Sezione III su questo tema con altre osservazioni circa alle funzioni omogenee differenziali. Ma frattanto avendo accennato nella Sezione I (§ 9), una estensione del Teorema d'Eulero sul divisore che rende differenziale esatta ogni formula omogenea a due variabili, credo opportuno esibire qualche spiegazione a questo riguardo.

Se adottando le cifre adoprate nell'Appendice alla Sezione I, e le relazioni (12) si proponga la funzione omogenea ad n variabili di grado m

$$Mdx_1 + Ndx_2 + Pdx_3 + \ldots + Tdx_n\,, \qquad (58)$$

e si cerchi un divisore che la renda differenziale esatta, si ottiene (§ 6) la trasformata

$$\mathrm{M}dx_1+\mathrm{N}dx_2+\ldots+\mathrm{T}dx_n=(\mathrm{A}+\mathrm{B}r_1+\mathrm{C}r_2+\ldots+\mathrm{H}r_{n-1})x_1^{m}dx_1+x_1^{m+1}(\mathrm{B}dr_1+\mathrm{C}dr_2+\ldots+\mathrm{H}dr_{n-1}),$$

e dividendo i due membri di questa eguaglianza pe' rispettivi membri dell' identità

$$\mathrm{M}x_1+\mathrm{N}x_2+\mathrm{P}x_3+\ldots+\mathrm{T}x_n=x_1^{m+1}(\mathrm{A}+\mathrm{B}r_1+\mathrm{C}r_2+\ldots+\mathrm{H}r_{n-1}),$$

si trova che la formula omogenea ad n variabili

$$\frac{\mathrm{M}dx_1+\mathrm{N}dx_2+\ldots+\mathrm{T}dx_n}{\mathrm{M}x_1+\mathrm{N}x_2+\ldots+\mathrm{T}x_n}=\frac{dx_1}{x_1}+\frac{\mathrm{B}dr_1+\mathrm{C}dr_2+\ldots+\mathrm{H}dr_{n-1}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}r_1+\mathrm{C}r_2+\ldots+\mathrm{H}r_{n-1}}, \tag{59}$$

è differenziale esatta, purchè si avverino le $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ condizioni, che rendono differenziale esatta la formula ad $n-1$ variabili

$$\frac{\mathrm{B}dr_1+\mathrm{C}dr_2+\ldots+\mathrm{H}dr_{n-1}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}r_1+\mathrm{C}r_2+\ldots+\mathrm{H}r_{n-1}}. \tag{60}$$

Ma qualora la (58) sia il primo membro d' una equazione integrabile, è d' uopo che sia del pari (59) la trasformata

$$\frac{dx_1}{x_1}+\frac{\mathrm{B}dr_1+\mathrm{C}dr_2+\ldots+\mathrm{H}dr_{n-1}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}r_2+\mathrm{C}r\ldots+\mathrm{H}r_{n-1}}=0,$$

una equazione integrabile; lo che non avviene se non sia la (60) una differenziale esatta, cosicchè le $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ condizioni relative (Sezione I, §§ 1, 2) debbono corrispondere (Sezione II, §§ 13, 15) a quelle che in egual numero si avverano per l' integrabilità dell' equazione omogenea

$$\mathrm{M}dx_1+\mathrm{N}dx_2+\mathrm{P}dx_3+\ldots+\mathrm{T}dx_n=0,$$

la quale in conseguenza (59) è divenuta differenziale esatta, mercè la divisione per

$$\mathrm{M}x_1+\mathrm{N}x_2+\ldots+\mathrm{T}x_n.$$

Questo teorema generale analogo all'Euleriano guida ad osservazioni simili a quelle già indicate nel § 9. Così, supposta nella (14) $K=c$ costante, e quindi

$$Mx_1+Nx_2+Px_3+\ldots+Tx_n=cx_1^{m+1},$$

si avrebbe moltiplicando la (59) pe' rispettivi membri di questa eguaglianza, e dividendo per x_1^{m+1}

$$\frac{Mdx_1+Ndx_2+\ldots+Tdx_n}{x_1^{m+1}}=c\frac{dx_1}{x_1}+Bdr_1+Cdr_2+\ldots+Hdr_{n-1}, \tag{61}$$

e si troverà che la data funzione è resa differenziale esatta dal fattore $\frac{1}{x_1^{m+1}}$ anche nel caso di $c=0$, in cui cessa d'aver luogo il Teorema espresso dalla (59), come pure l'E u l e r i a n o, avendosi dalla (61)

$$\frac{Mdx_1+Ndx_2+\ldots+Tdx_n}{x_1^{m+1}}=Bdr_1+Cdr_2+\ldots+Hdr_{n-1}. \tag{62}$$

Se poi fosse $m+1=0$, qualunque sia c, risulta dalla (61)

$$Mdx_1+Ndx_2+\ldots+Tdx_n=Bdr_1+Cdr_2+\ldots+Hdr_{n-1}+c\frac{dx_1}{x_1}. \tag{63}$$

Per confermare con un esempio il Teorema dianzi enunciato, abbiasi l'equazione omogenea

$$Mdx_1+Ndx_2+Pdx_3=0,$$

e si troverà che la condizione della sua integrabilità, cioè (42)

$$M\left\{\left(\frac{dN}{dx_3}\right)-\left(\frac{dP}{dx_2}\right)\right\}+N\left\{\left(\frac{dP}{dx_1}\right)-\left(\frac{dM}{dx_3}\right)\right\}+P\left\{\left(\frac{dM}{dx_2}\right)-\left(\frac{dN}{dx_1}\right)\right\}=0, \tag{64}$$

si muta in quella (4) (Sezione I), per cui il 2° membro della (59) risulta differenziale esatta. Imperocchè per le relazioni (12) (13) avendosi

$$\left(\frac{dM}{dx_2}\right)=x_1^{m-1}\left(\frac{dA}{dr_1}\right), \qquad \left(\frac{dM}{dx_3}\right)=x_1^{m-1}\left(\frac{dA}{dr_2}\right),$$

$$\left(\frac{dN}{dx_1}\right)=x_1^{m-1}\left\{mB-r_1\left(\frac{dB}{dr_1}\right)-r_2\left(\frac{dB}{dr_2}\right)\right\}, \quad \left(\frac{dN}{dx_3}\right)=x_1^{m-1}\left(\frac{dB}{dr_2}\right),$$

$$\left(\frac{dP}{dx_1}\right)=x_1^{m-1}\left\{mC-r_1\left(\frac{dC}{dr_1}\right)-r_2\left(\frac{dC}{dr_2}\right)\right\}, \quad \left(\frac{dP}{dx_2}\right)=x_1^{m-1}\left(\frac{dC}{dr_1}\right);$$

sostituiti nelle (64) questi valori, e quelli (13) di M, N, P, si raccoglie l'eguaglianza

$$\mathrm{A}\left\{\left(\frac{d\mathrm{B}}{dr_2}\right)-\left(\frac{d\mathrm{C}}{dr_1}\right)\right\}-\mathrm{B}\left\{\left(\frac{d\mathrm{A}}{dr_2}\right)+r_1\left(\frac{d\mathrm{C}}{dr_1}\right)+r_2\left(\frac{d\mathrm{C}}{dr_2}\right)\right\}+\mathrm{C}\left\{\left(\frac{d\mathrm{A}}{dr_1}\right)+r_1\left(\frac{d\mathrm{B}}{dr_1}\right)+r_2\left(\frac{d\mathrm{B}}{dr_2}\right)\right\}=0,$$

alla quale si riduce la condizione

$$\mathrm{D}_{r_2}\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}r_1+\mathrm{C}r_2}=\mathrm{D}_{r_1}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}+\mathrm{B}r_1+\mathrm{C}r_2}$$

per cui il 2°, e quindi il 1° membro della (59), è differenziale esatta.

Proponendomi di svolgere queste considerazioni a luogo opportuno, debbo rimettere l'esposizione delle rimanenti Sezioni III e IV alla seconda Parte della presente Memoria.

FINE DELLA PARTE I.

Finita stampare il dì 8 gennajo 1883

	ERRATA	CORRIGE
pag. 13, linea 10	x^{m+1}	x_1^{m+1}
» 14, lin. 17	nella (13)	nell'eguaglianza che succede alle (13)
» 15, linea 14, form. (21)	$\mathrm{M}\,dr_1$	$\mathrm{N}\,dx_2$
» 18, linea ultima	$=$	$?=$
» 23, linea 4	y'	y^2
» 27, linea 6, form. (23)	$\mathrm{M}y$	$\mathrm{N}y$
» 29, linea 4	$\int\frac{\mathrm{N}dy}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}=\int\frac{\mathrm{M}dx}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}$	$\int\frac{\mathrm{N}dy}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}+\text{cost}=\int\frac{\mathrm{M}dx}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}+\text{Cost.}$
» 31, lin. 10	irrazionali ed anco trascendenti	irrazionali
» 32, lin. 14	cagione	a cagione
» 33, lin. 18	$\int\frac{\mathrm{N}dy}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}+\mathrm{C}_1(x)$	$\int\frac{\mathrm{N}dy}{\mathrm{M}x+\mathrm{N}y}+\mathrm{C}_1(x)$
» ibid., linea ultima	irrazionali o trascendenti	irrazionali
» 34, linea 11	$\int\frac{2ad\sqrt{x}}{a\sqrt{x}+b\sqrt{y}}$	$2a\int\frac{d\sqrt{x}}{a\sqrt{x}+b\sqrt{y}}$
» ibid., linea penultima.	Gazzetta d' Italia	Gazzetta Ufficiale del Regno
» 39, linea 13	F	K
» ibid., lin. 24	v_3	v_2
» », lin. 26 in due luoghi	$x_2=a_2$	$x_3=a_3$
» », linea penultima	$\int\limits_{v_2}\mathrm{P}_3\mathrm{A}_3^{(2)}dx_3+\int\limits_{a_3}\mathrm{PE}_2^{(2)}$	$\int\limits_{v_3}\mathrm{P}_3\mathrm{A}_3^{(2)}dv_2+\int\limits_{a_3}\mathrm{PE}_2^{(2)}dx_3$