MEMORIE

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE (DETTA DEI XL)

DI ALCUNE EQUAZIONI RELATIVE ALLA TEORIA DELLE FUNZIONI ELLITTICHE E TEOREMI DI GEOMETRIA CHE VI SI CONNETTONO

MEMORIA

del Socio Prof. EMMANUELE FERGOLA

Consegnata il dì 20 Maggio 1882

1. È notissimo che se dai vertici di un poligono regolare si conducono le perpendicolari sopra una retta qualunque tirata pel centro del poligono, la somma algebrica di queste perpendicolari è eguale a zero; ovvero, che è lo stesso: se ad un cerchio si circoscrive un poligono regolare, la somma algebrica delle perpendicolari menate dai punti di contatto sopra un diametro qualunque è eguale a zero. Ora si può generalizzare questo teorema circoscrivendo al cerchio non già un poligono regolare, ma un qualunque poligono, che risulti però iscrittibile in un altro cerchio, e si ha il seguente teorema:

Se un poligono circoscritto a un cerchio è iscrittibile in un altro cerchio, la somma algebrica delle perpendicolari abbassate dai punti di contatto sulla congiungente i centri dei due cerchi è eguale a zero.

Rammentando poi i risultamenti ottenuti da Jacobi nella sua Memoria *) sull'Applicazione della teoria delle funzioni ellittiche alle proprietà dei poligoni iscritti in un cerchio e circoscritti ad un altro, il precedente teorema si converte immediatamente nell'equazione:

$$\operatorname{sen}[\operatorname{am}u+\operatorname{am}(u+t)]+\operatorname{sen}[\operatorname{am}(u+t)+\operatorname{am}(u+2t)]+\ldots+\operatorname{sen}[\operatorname{am}(u+\overline{m-1}\,t)+\operatorname{am}(u+mt)]=0 \quad (1)$$

dove u è qualunque, e mt è eguale al doppio integrale ellittico completo di prima specie.

*) Giornale di Crelle, vol. 3, p. 376 — Cfr. Durège. Ellipt. funct. §§ 41-47.

In fatti, si ha dalla citata Memoria di Jacobi, che chiamando R e r i raggi, ed a la distanza dei centri dei due cerchi, e ponendo

$$k^2 = \frac{4Ra}{(R+a)^2 - r^2}\ , \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}\ , \quad t = \frac{2K}{m}$$

i vertici A, A′, A″... $A^{(m-1)}$, $A^{(m)}$ di uno qualunque dei poligoni di m lati iscrittibili nel cerchio (R) e circoscritti a (r) sono determinati dagli angoli

$$PCA = 2\operatorname{am} u\ ,\ PCA' = 2\operatorname{am}(u+t)\ ,\ PCA'' = 2\operatorname{am}(u+2t), \ldots, PCA^{(m)} = 2\pi + PCA = 2\operatorname{am}(u+mt),$$

e gli angoli φ, φ'... $\varphi^{(m-1)}$ dei raggi r corrispondenti ai punti di contatto, col diametro comune dei due cerchi sono

$$\varphi = \operatorname{am} u + \operatorname{am}(u+t)\ ,\ \varphi' = \operatorname{am}(u+t) + \operatorname{am}(u+2t), \ldots, \varphi^{(m-1)} = \operatorname{am}(u+\overline{m-1}t) + \operatorname{am}(u+mt),$$

sicchè la somma $r\Sigma \operatorname{sen}\varphi$ delle perpendicolari condotte dai punti di contatto sul diametro predetto, astrazion fatta dal fattore costante r, è appunto rappresentata dal primo membro dell'equazione (1).

2. Nei casi più semplici di $m=3$, e $m=4$, l'equazione (1) si dimostra facilmente mediante le formule di addizione delle funzioni ellittiche. Si ha in fatti per $m=3$, $3t=2K$, e il primo membro della (1) si trasforma successivamente in

$$\begin{aligned}
&[\operatorname{sn} u \operatorname{cn}(u+t) + \operatorname{sn}(u+t)\operatorname{cn} u] + [\operatorname{sn}(u+t)\operatorname{cn}(u+2K-t) + \operatorname{sn}(u+2K-t)\operatorname{cn}(u+t)] + \\
&\quad + [\operatorname{sn}(u+2K-t)\operatorname{cn}(u+2K) + \operatorname{sn}(u+2K)\operatorname{cn}(u+2K-t)] = \\
&= [\operatorname{sn} u \operatorname{cn}(u+t) + \operatorname{sn}(u+t)\operatorname{cn} u] - [\operatorname{sn}(u+t)\operatorname{cn}(u-t) + \operatorname{sn}(u-t)\operatorname{cn}(u+t)] + \\
&\quad + [\operatorname{sn}(u-t)\operatorname{cn} u + \operatorname{sn} u \operatorname{cn}(u-t)] = \\
&= \operatorname{sn} u \frac{2\operatorname{cn} u \operatorname{cn} t}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 t} + \operatorname{cn} u \frac{2\operatorname{sn} u \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 t} - \\
&\quad - \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} t + \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t \operatorname{dn} u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 t} - \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} t - \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t \operatorname{dn} u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 t} = \\
&= \frac{2\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 t}[\operatorname{cn} t + \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t - \operatorname{dn} t]\ ;
\end{aligned}$$

ma, per $t = \frac{2K}{3}$, l'ultimo fattore è identicamente zero, perchè

$$\operatorname{cn}\frac{4K}{3} = -\operatorname{cn}\frac{2K}{3} = \operatorname{cn}^2\frac{2K}{3} - \operatorname{sn}^2\frac{2K}{3}\operatorname{dn}\frac{4K}{3} = \operatorname{cn}^2\frac{2K}{3} - \operatorname{sn}^2\frac{2K}{3}\operatorname{dn}\frac{2K}{3},$$

e con la soppressione del fattore $1+\mathrm{cn}\,\frac{2\mathrm{K}}{3}$, risulta

$$0=\mathrm{cn}\,\frac{2\mathrm{K}}{3}+\mathrm{cn}\,\frac{2\mathrm{K}}{3}\,\mathrm{dn}\,\frac{2\mathrm{K}}{3}-\mathrm{dn}\,\frac{2\mathrm{K}}{3}\,;$$

dunque etc.

Quando $m=4$, $2t=\mathrm{K}$, e il primo membro della (1) riducesi a

$$\begin{aligned}&[\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,(u+t)+\mathrm{sn}\,(u+t)\,\mathrm{cn}\,u]+[\mathrm{sn}\,(u+t)\,\mathrm{cn}\,(u+\mathrm{K})+\mathrm{sn}\,(u+\mathrm{K})\,\mathrm{cn}\,(u+t)]+\\&+[\mathrm{sn}\,(u+\mathrm{K})\,\mathrm{cn}\,(u+\mathrm{K}+t)+\mathrm{sn}(u+\mathrm{K}+t)\,\mathrm{cn}\,(u+\mathrm{K})]-[\mathrm{sn}(u+\mathrm{K}+t)\,\mathrm{cn}\,u+\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,(u+\mathrm{K}+t)]=\\&=\mathrm{sn}\,u\,\frac{2\,\mathrm{sn}\left(u+t+\frac{\mathrm{K}}{2}\right)\mathrm{dn}\left(u+t+\frac{\mathrm{K}}{2}\right)\mathrm{sn}\,\frac{\mathrm{K}}{2}\,\mathrm{dn}\,\frac{\mathrm{K}}{2}}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(u+t+\frac{\mathrm{K}}{2}\right)\mathrm{sn}^2\,\frac{\mathrm{K}}{2}}-\mathrm{cn}\,u\,\frac{2\,\mathrm{sn}\,\frac{\mathrm{K}}{2}\,\mathrm{cn}\left(u+t+\frac{\mathrm{K}}{2}\right)\mathrm{dn}\left(u+t+\frac{\mathrm{K}}{2}\right)}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(u+t+\frac{\mathrm{K}}{2}\right)\mathrm{sn}^2\,\frac{\mathrm{K}}{2}}+\\&+\mathrm{sn}\,(u+\mathrm{K})\,\frac{2\,\mathrm{cn}\left(u+t+\frac{\mathrm{K}}{2}\right)\mathrm{cn}\,\frac{\mathrm{K}}{2}}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(u+t+\frac{\mathrm{K}}{2}\right)\mathrm{sn}^2\,\frac{\mathrm{K}}{2}}+\mathrm{cn}\,(u+\mathrm{K})\,\frac{2\,\mathrm{sn}\left(u+t+\frac{\mathrm{K}}{2}\right)\mathrm{cn}\,\frac{\mathrm{K}}{2}\,\mathrm{dn}\,\frac{\mathrm{K}}{2}}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\left(u+t+\frac{\mathrm{K}}{2}\right)\mathrm{sn}^2\,\frac{\mathrm{K}}{2}}=\\&=\frac{2\,\mathrm{sn}(u+\mathrm{K})\,\mathrm{cn}\,(u+\mathrm{K})}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2(u+\mathrm{K})\,\mathrm{sn}^2\frac{\mathrm{K}}{2}}\left(-\mathrm{sn}\,\frac{\mathrm{K}}{2}\,\mathrm{dn}\,\frac{\mathrm{K}}{2}-k'\mathrm{sn}\,\frac{\mathrm{K}}{2}+\mathrm{cn}\,\frac{\mathrm{K}}{2}+\mathrm{cn}\,\frac{\mathrm{K}}{2}\,\mathrm{dn}\,\frac{\mathrm{K}}{2}\right),\end{aligned}$$

perchè

$$u+t+\frac{\mathrm{K}}{2}=u+\mathrm{K}\,,\quad \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,(u+\mathrm{K})=-\,\mathrm{cn}\,(u+\mathrm{K})\,,\quad \text{e}\quad \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,(u+\mathrm{K})=k'\,\mathrm{sn}\,(u+\mathrm{K})\,;$$

ma l'ultimo fattore è zero a motivo delle

$$\mathrm{sn}\,\frac{\mathrm{K}}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+k'}}\,,\quad \mathrm{cn}\,\frac{\mathrm{K}}{2}=\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}\,,\quad \mathrm{dn}\,\frac{\mathrm{K}}{2}=\sqrt{k'}\,;$$

dunque etc.

3. Il teorema geometrico pel caso del triangolo, e quindi l'equazione (1) pel caso di $m=3$, si può anche dimostrare nel seguente modo:

Prendiamo per origine il centro o del cerchio iscritto e per asse delle x la congiungente oCP dei due centri, e chiamiamo φ, φ', φ'' gli angoli che comprendono con l'asse delle x i tre raggi del cerchio iscritto condotti ai punti di contatto. Saranno

$$x\cos\varphi+y\,\mathrm{sen}\,\varphi-r=0\,,\quad x\cos\varphi'+y\,\mathrm{sen}\,\varphi'-r=0\,,\quad x\cos\varphi''+y\,\mathrm{sen}\,\varphi''-r=0$$

*

le equazioni dei tre lati del triangolo, e

$$\left\{ \frac{r\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')} \;,\; \frac{r\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')} \right\}, \text{ etc.}$$

le coordinate dei tre vertici. Esprimendo che questi punti sono situati sul cerchio (R), si hanno le tre equazioni

$$r^2-2ra\cos\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')\cos\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')+(a^2-\mathrm{R}^2)\cos^2\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')=0\,,$$

$$r^2-2ra\cos\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi'')\cos\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi'')+(a^2-\mathrm{R}^2)\cos^2\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi'')=0\,,$$

$$r^2-2ra\cos\frac{1}{2}(\varphi''+\varphi)\cos\frac{1}{2}(\varphi''-\varphi)+(a^2-\mathrm{R}^2)\cos^2\frac{1}{2}(\varphi''-\varphi)=0\,,$$

ossia

$$2r^2+a^2-\mathrm{R}^2-2ra(\cos\varphi+\cos\varphi')+(a^2-\mathrm{R}^2)\cos(\varphi-\varphi')=0\,,$$

$$2r^2+a^2-\mathrm{R}^2-2ra(\cos\varphi'+\cos\varphi'')+(a^2-\mathrm{R}^2)\cos(\varphi'-\varphi'')=0\,,$$

$$2r^2+a^2-\mathrm{R}^2-2ra(\cos\varphi''+\cos\varphi)+(a^2-\mathrm{R}^2)\cos(\varphi''-\varphi)=0\,,$$

da cui, eliminando le $2r^2+a^2-\mathrm{R}^2$, $2ra$, $a^2-\mathrm{R}^2$, ricavasi

$$\begin{vmatrix} \cos(\varphi-\varphi') \;,& \cos\varphi+\cos\varphi' \;,& 1 \\ \cos(\varphi'-\varphi'') \;,& \cos\varphi'+\cos\varphi'' \;,& 1 \\ \cos(\varphi''-\varphi) \;,& \cos\varphi''+\cos\varphi \;,& 1 \end{vmatrix}=0.$$

Sviluppando questo determinante si trova l'equazione

$$\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi'')\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(\varphi''-\varphi)\,[\mathrm{sen}\,\varphi+\mathrm{sen}\,\varphi'+\mathrm{sen}\,\varphi'']=0$$

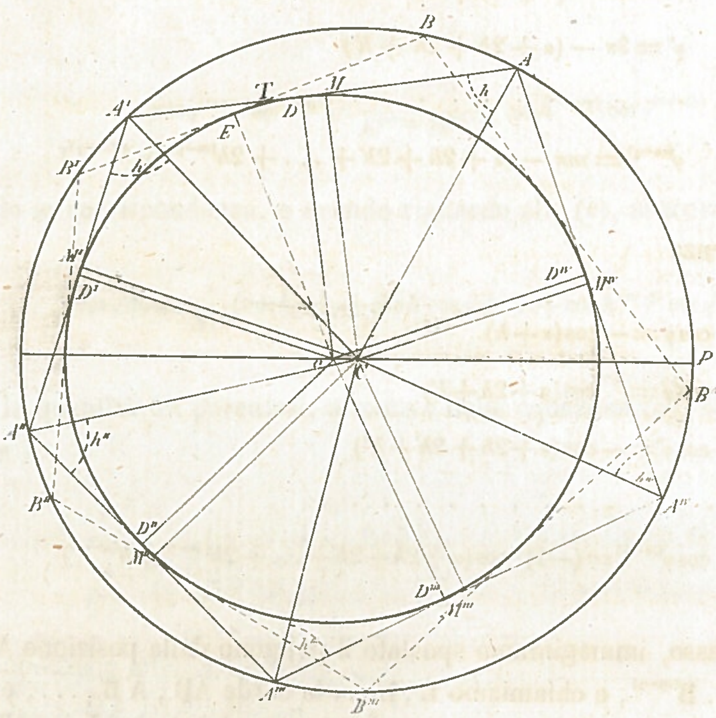
e quindi, non potendo annullarsi i tre primi fattori, dovrà essere

$$\mathrm{sen}\,\varphi+\mathrm{sen}\,\varphi'+\mathrm{sen}\,\varphi''=0\,,$$

che dimostra appunto il teorema geometrico pel caso del triangolo.

4. Ecco ora la dimostrazione dello stesso teorema per un poligono qualunque, ossia dell'equazione (1) per un qualsivoglia valore del numero m.

Sia $AA' \ldots A^{(m-1)}$ un poligono iscritto nel cerchio C, e circoscritto al cerchio o.



Conduciamo da o i raggi oD, oD', ... ai punti di contatto, e da C le parallele CM, CM', ... ai predetti raggi, e chiamiamo h, $h' \ldots h^{(m-1)}$ gli angoli alla base dei triangoli CAA', CA'A'', ... $CA^{(m-1)}A$; e φ, φ', ... $\varphi^{(m-1)}$ gli angoli PoD, PoD', ... $PoD^{(m-1)}$, ossia gli angoli PCM, PCM', ... $PCM^{(m-1)}$; sarà evidentemente

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - h + PCA$$

$$\varphi' = \left(\frac{\pi}{2} - h'\right) + (\pi - 2h) + PCA = \frac{3\pi}{2} - 2h - h' + PCA$$

$$\varphi'' = \left(\frac{\pi}{2} - h''\right) + (\pi - 2h') + (\pi - 2h) + PCA = \frac{5\pi}{2} - 2h - 2h' - h'' + PCA$$

. . . .

$$\varphi^{(m-1)} = \ldots\ldots = \frac{(2m+1)\pi}{2} - 2h - 2h' \ldots - 2h^{(m-2)} - h^{(m-1)} + PCA\,;$$

e, se poniamo PCA $= \frac{\pi}{2} - \alpha$, risulterà

$$\varphi = \pi - (\alpha + h)$$

$$\varphi' = 2\pi - (\alpha + 2h + h')$$

$$\varphi'' = 3\pi - (\alpha + 2h + 2h' + h'')$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi^{(m-1)} = m\pi - (\alpha + 2h + 2h' + \dots + 2h^{(m-2)} + h^{(m-1)})$$

e per conseguenza

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= -\cos(\alpha + h) \\ \cos\varphi' &= \cos(\alpha + 2h + h') \\ \cos\varphi'' &= -\cos(\alpha + 2h + 2h' + h'') \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \cos\varphi^{(m-1)} &= (-1)^m \cos(\alpha + 2h + 2h' + \dots + 2h^{(m-2)} + h^{(m-1)}) \end{aligned} \tag{a}$$

Ciò premesso, immaginiamo spostato il poligono dalla posizione AA'... $A^{(m-1)}$ nell'altra BB'... $B^{(m-1)}$, e chiamiamo L , L'... le corde AB , A'B', ..., e $\lambda, \lambda' \dots \lambda^{(m-1)}$ le stesse corde pel caso di uno spostamento infinitesimo. Sarà $\frac{L}{L'} = \frac{AT}{B'T}$, e passando al limite, $\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{AD}{A'D} = \frac{AD}{A'D'}$; dunque

$$\frac{\lambda}{AD} = \frac{\lambda'}{A'D'} = \dots = \frac{\lambda^{(m-1)}}{A^{(m-1)}D^{(m-1)}}. \tag{b}$$

Chiamiamo ancora $\Delta\varphi$, $\Delta\varphi'$... i cangiamenti degli angoli φ, φ'... dovuti allo spostamento dalla posizione AA'... all'altra BB'...; avremo

$$\frac{\text{sen}\,\Delta\varphi}{L} = \frac{\text{sen TBA}}{TA}$$

e per uno spostamento infinitamente piccolo

$$\frac{d\varphi}{\lambda} = \frac{\cos h}{AD};$$

dunque

$$\cos\varphi\, d\varphi = \frac{\lambda}{AD}\cos h \cos\varphi$$

$$\cos\varphi'\, d\varphi' = \frac{\lambda'}{A'D'}\cos h' \cos\varphi'$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos\varphi^{(m-1)}\, d\varphi^{(m-1)} = \frac{\lambda^{(m-1)}}{A^{(m-1)}D^{(m-1)}}\cos h^{(m-1)} \cos\varphi^{(m-1)}.$$

Sommando in corrispondenza, e avendo riguardo alle (b), si trova

$$\Sigma\cos\varphi\, d\varphi = \frac{\lambda}{AD}\left(\cos h\cos\varphi + \cos h'\cos\varphi' + \ldots + \cos h^{(m-1)}\cos\varphi^{(m-1)}\right). \qquad (c)$$

Ora la quantità fra parentesi, a motivo delle equazioni (a), si trasforma successivamente in

$$-\cos h\cos(\alpha+h) + \cos h'\cos(\alpha+2h+h') - \cos h''\cos(\alpha+2h+2h'+h'') + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^m \cos h^{(m-1)}\cos(\alpha+2h+2h'+\ldots+2h^{(m-2)}+h^{(m-1)}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(\alpha+2h) - \frac{1}{2}\cos\alpha$$

$$+\frac{1}{2}\cos(\alpha+2h+2h') + \frac{1}{2}\cos(\alpha+2h)$$

$$-\frac{1}{2}\cos(\alpha+2h+2h'+2h'') - \frac{1}{2}\cos(\alpha+2h+2h')$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^m\frac{1}{2}\cos(\alpha+2h+2h'+\ldots+2h^{(m-1)}) + (-1)^m\frac{1}{2}\cos(\alpha+2h+2h'+\ldots+2h^{(m-2)}) =$$

$$=(-1)^m\frac{1}{2}\cos(\alpha+2h+2h'+\ldots+2h^{(m-1)}) - \frac{1}{2}\cos\alpha =$$

$$=(-1)^m\frac{1}{2}\cos(\alpha+(m-2)\pi) - \frac{1}{2}\cos\alpha = 0;$$

e perciò l'equazione (c) riducesi a

$$\Sigma\cos\varphi\, d\varphi = 0$$

Integrandola si ha $\Sigma \operatorname{sen} \varphi = \text{Cost}$. Ma se trasportiamo il punto A in P i punti di contatto si troveranno simmetricamente situati rispetto alla retta dei centri, e si ha perciò in tal caso $\Sigma \operatorname{sen}\varphi = 0$; dunque la costante d'integrazione è nulla, ed in qualunque posizione del poligono AA'... sarà

$$\Sigma \operatorname{sen} \varphi = 0 ,$$

ciò che dimostra il teorema geometrico enunciato a principio, e l'equazione (1).

5. Dalle relazioni (6) e dalla $d\varphi = \frac{\lambda}{AD} \cos h$ si ricava pure

$$\Sigma \operatorname{sen} \varphi d\varphi = \frac{\lambda}{AD} \left(\cos h \operatorname{sen} \varphi + \cos h' \operatorname{sen} \varphi' + \ldots + \cos h^{(m-1)} \operatorname{sen} \varphi^{(m-1)} \right) ; \tag{d}$$

ma a motivo delle relazioni

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} \varphi &= \operatorname{sen}(\alpha + h) \\
\operatorname{sen} \varphi' &= - \operatorname{sen}(\alpha + 2h + h') \\
\operatorname{sen} \varphi'' &= \operatorname{sen}(\alpha + 2h + 2h' + h'') \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\operatorname{sen} \varphi^{(m-1)} &= (-1)^{m-1} \operatorname{sen}(\alpha + 2h + 2h' + \ldots + 2h^{(m-2)} + h^{(m-1)}) ,
\end{aligned}$$

la quantità fra parentesi al secondo membro della (d) si trasforma in

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(\alpha + h) \cos h - \operatorname{sen}(\alpha + 2h + h') \cos h' + \ldots + (-1)^{m-1} \operatorname{sen}(\alpha + 2h + \ldots + 2h^{(m-2)} + h^{(m-1)}) \cos h^{m-1} = \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\alpha + 2h) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha \\
&- \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\alpha + 2h + 2h') - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\alpha + 2h) \\
&+ \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\alpha + 2h + 2h' + 2h'') + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\alpha + 2h + 2h') \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (-1)^{m-1} \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\alpha + 2h + 2h' + \ldots + 2h^{(m-1)}) + (-1)^{m-1} \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\alpha + 2h + 2h' + \ldots + 2h^{(m-3)} = \\
&= (-1)^{m-1} \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\alpha + 2h + 2h' + \ldots + 2h^{(m-1)}) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha = \\
&= (-1)^{m-1} \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\alpha + (m-2)\pi) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha = 0 ;
\end{aligned}$$

dunque

$$\Sigma \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi = 0,$$

e integrando si avrà

$$\Sigma \cos \varphi = \mathrm{C},$$

ovvero

$$\cos[\operatorname{am} u + \operatorname{am}(u+t)] + \cos[\operatorname{am}(u+t) + \operatorname{am}(u+2t)] + \ldots + \cos[\operatorname{am}(u+\overline{m-1}t) + \operatorname{am}(u+mt)] = \mathrm{C} \quad (2)$$

dove C è indipendente da u, e $mt = 2\mathrm{K}$ come in (1).

Questa equazione si traduce immediatamente nel seguente teorema:

Se a un cerchio si circoscrive un poligono di m *lati che sia iscrittibile in un altro cerchio, sarà costante la somma delle perpendicolari abbassate dai punti di contatto sul diametro del primo cerchio perpendicolare alla congiungente dei centri, quando restano fissi i due cerchi, e si fa variare il poligono in tutti i modi possibili.*

Quindi ancora:

Se due cerchi sono tali che in uno di essi sia iscrittibile un poligono di m *lati che risulti circoscritto all'altro, il baricentro dei punti di contatto rimane immobile sulla congiungente dei centri, comunque il poligono si faccia variare restando sempre iscritto nel primo cerchio e circoscritto al secondo.*

6. Analogamente alle equazioni scritte al § 3 pel caso di un triangolo, si hanno, per un poligono qualunque, le m equazioni

$$\begin{gathered}
2r^2 + a^2 - \mathrm{R}^2 - 2ar(\cos\varphi + \cos\varphi') + (a^2 - \mathrm{R}^2)\cos(\varphi - \varphi') = 0 \\
2r^2 + a^2 - \mathrm{R}^2 - 2ar(\cos\varphi' + \cos\varphi'') + (a^2 - \mathrm{R}^2)\cos(\varphi - \varphi'') = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
2r^2 + a^2 - \mathrm{R}^2 - 2ar(\cos\varphi^{(m-1)} + \cos\varphi) + (a^2 - \mathrm{R}^2)\cos(\varphi^{(m-1)} - \varphi) = 0,
\end{gathered}$$

le quali addizionate membro a membro dànno, a motivo della $\Sigma\cos\varphi = \mathrm{C}$,

$$\cos(\varphi - \varphi') + \cos(\varphi' - \varphi'') + \ldots + \cos(\varphi^{(m-1)} - \varphi) = \mathrm{C}_1$$

ovvero

$$\begin{aligned}
&\cos[\operatorname{am} u - \operatorname{am}(u+2t)] + \cos[\operatorname{am}(u+t) - \operatorname{am}(u+3t)] + \cos[\operatorname{am}(u+2t) - \operatorname{am}(u+4t)] + \ldots \\
&\ldots + \cos[\operatorname{am}(u+\overline{m-2}t) - \operatorname{am}(u+mt)] + \cos[\operatorname{am}(u+\overline{m-1}t) - \operatorname{am}(u+\overline{m+1}t)] = \mathrm{C}_1 \quad (3)
\end{aligned}$$

dove C_1 è indipendente da u, ed eguale a $\dfrac{2mr^2 - 4\mathrm{C}ar}{\mathrm{R}^2 - a^2} - m$.

Quest' equazione conduce evidentemente all' altro teorema:

Se due cerchi sono tali che in uno di essi sia iscrittibile un poligono di m *lati che risulti circoscritto all' altro, la somma dei quadrati delle congiungenti i consecutivi punti di contatto sarà costante, qualunque sia la posizione del poligono fra i due cerchi.*

Volendo esprimere $\Sigma\overline{DD'}^2$ per mezzo della costante C, che determina sulla oC la posizione del baricentro dei punti D, D'..., si trova

$$\Sigma\overline{DD'}^2 = 4r^2\left(m - \frac{mr^2-2Car}{R^2-a^2}\right).$$

7. Addizionando membro a membro le equazioni *)

$$R\cos[\mathrm{am}(u+t) - \mathrm{am}\,u] + a\cos[\mathrm{am}(u+t) + \mathrm{am}\,u] = r$$
$$R\cos[\mathrm{am}(u+2t) - \mathrm{am}(u+t)] + a\cos[\mathrm{am}(u+2t) + \mathrm{am}(u+t)] = r$$

etc.

a motivo della (2), si ricava pure

$$\cos[\mathrm{am}(u+t)-\mathrm{am}\,u]+\cos[\mathrm{am}(u+2t)-\mathrm{am}(u+t)]+\ldots+\cos[\mathrm{am}(u+mt)-\mathrm{am}(u+\overline{m-1}t)] = \frac{mr-aC}{R}, \quad (4)$$

e di seguito

$$\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}(u+t)+\mathrm{cn}(u+t)\,\mathrm{cn}(u+2t)+\ldots+\mathrm{cn}(u+\overline{m-1}t)\,\mathrm{cn}(u+mt) = \frac{mr+(R-a)C}{2R} \quad (5)$$

$$\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(u+t)+\mathrm{sn}(u+t)\,\mathrm{sn}(u+2t)+\ldots+\mathrm{sn}(u+\overline{m-1})\,\mathrm{sn}(u+mt) = \frac{mr-(R+a)C}{2R}. \quad (6)$$

Dalla (4) si deduce che

La somma algebrica delle perpendicolari condotte dal centro del cerchio circoscritto sopra i lati del poligono AA'A''... *è costante.*

8. È evidente da ultimo che ai punti di contatto dai lati del poligono col cerchio o si possono sostituire i punti medii degli archi del cerchio C sottesi dai successivi lati del poligono, e quindi:

Se due cerchi sono tali che in uno di essi sia iscrittibile un poligono di m *lati* A A' A''... *che risulti circoscritto all' altro, e si dividono per metà gli archi* AA', A'A'', ... $A^{(m-1)}$A *in* N, N', ... $N^{(m-1)}$, *il baricentro dei punti* N *rimane fisso sulla congiungente dei centri dei due cerchi in tutte le possibili posizioni del poligono* AA'A''..., *e la somma dei quadrati delle congiungenti* NN', N'N''... $N^{(m-1)}$N *è costante.*

*) Jacobi, l. c., § 4.

finita stampare il dì 10 giugno 1882