MEMORIE

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE (DETTA DEI XL).

SULLA ROTAZIONE DEI CORPI LIBERI

MEMORIA SECONDA

di FRANCESCO SIACCI professore a Torino,

presentata dal Socio A. GENOCCHI

nel di 24 giugno 1877

§ 1.

Preambolo.

In una prima memoria sulla rotazione de' corpi liberi, io mi proposi di determinare il movimento degli assi della sezione fatta dal piano invariabile nell' ellissoide centrale, sezione la cui area è costante, e che per brevità fu detta sezione invariabile. In questa seconda memoria do del problema stesso un' altra soluzione, la quale si distingue dalla prima per le varie forme sotto cui può presentarsi, e dà luogo ad un teorema di calcolo integrale, di cui sono casi particolari parecchi teoremi attinenti alla teorica degli integrali ellittici.

Questa nuova trattazione del problema è fondata sulla considerazione della longitudine di una retta comunque legata all' ellissoide. Facendo coincidere questa retta successivamente coi tre assi del corpo, e coll' asse istantaneo di rotazione, le relazioni analitiche che legano queste quattro rette cogli assi della sezione invariabile forniscono spontaneamente il teorema dell'addizione dei parametri degli integrali ellittici di terza specie, ed offrono la traduzione geometrica di certe altre trasformazioni dei parametri stessi, le quali Jacobi proclama *scoperte egregie ed insigni* di Legendre. Tali teoremi inoltre si presentano sotto forme diverse da quelle conosciute, e la riduzione loro non mi sembra ovvia.

In questa memoria inoltre saranno date le espressioni in funzione del tempo degli otto angoli fatti dagli assi della sezione invariabile coi tre assi dell'ellissoide e coll'asse istantaneo, e si troveranno i nove coseni di direzione degli assi dell'ellissoide rispetto ai tre assi considerati da Jacobi; e ciò in due maniere entrambe assai spedite, e diverse da quella conosciuta: 1° servendosi della longitudine dell'asse istantaneo e dei nove coseni già trovati dal Prof. Chelini, e dei quali si è fatto cenno nella prima memoria; 2° utilizzando le longitudini dei tre assi del corpo.

A proposito di queste longitudini si troverà in una *Nota* alla fine della Memoria un teorema geometrico, che credo nuovo, relativo all'ellissoide anzi ad una superficie qualunque di second'ordine dotata di centro. In una seconda *Nota* si troverà l'equazione dell'*antipoloide:* così chiamo il luogo dei vertici della sezione invariabile.

§ 2.

Longitudine di una retta qualunque, legata variabilmente o invariabilmente all'ellissoide. Teorema di calcolo integrale.

Abbiamo veduto (Mem. I, § 1) che gli assi dell'ellissoide centrale fanno cogli assi della sezione invariabile, e con un terzo asse perpendicolare a questa, angoli i cui coseni abbiamo rappresentato con $a, b, c, a' \ldots$, e di cui sono dati i valori nell'equazioni (7), postovi $\lambda_3 = 0$. Vedemmo anche, che rispetto ai primi assi le componenti della velocità angolare del corpo sono $p = x_1$, $q = x_2$, $r = x_3$ e rispetto agli altri sono m_1, m_2, m_3, ed i valori di queste componenti sono dati dall'equazioni (21). Consideriamo ora una terna ortogonale fissa OX, OY, OZ, di cui il terzo asse coincida con Om_3, e i primi due giacenti sul piano invariabile facciano rispettivamente con Om_1 ed Om_2 l'angolo ψ, essendo XOm_1 ed YOm_1 contati nel senso del moto.

Avremo i due schemi:

	m_1	m_2	m_3
x_1	a	b	c
x_2	a'	b'	c'
x_3	a''	b''	c''

	m_1	m_2	m_3
X	$\cos\psi$	$-\operatorname{sen}\psi$	0
Y	$\operatorname{sen}\psi$	$\cos\psi$	0
Z	0	0	1

e da questi trarremo:

$$
\begin{array}{cccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 \\
X & A = a\cos\psi - b\,\mathrm{sen}\,\psi & B = a'\cos\psi - b'\,\mathrm{sen}\,\psi & C = a''\cos\psi - b''\,\mathrm{sen}\,\psi \\
Y & A' = a\,\mathrm{sen}\,\psi + b\cos\psi & B' = a'\,\mathrm{sen}\,\psi + b'\cos\psi & C' = a''\,\mathrm{sen}\,\psi + b''\cos\psi \\
Z & A'' = c = \dfrac{m_2 x_1}{a_1} & B'' = c' = \dfrac{m_2 x_2}{a_2} & C'' = c'' = \dfrac{m_2 x_3}{a_3}.
\end{array}
$$

Esca dal centro O un raggio OR e vada a un punto R, che abbia un movimento dipendente o indipendente da quello del corpo. Le coordinate di R rispetto agli assi Ox_1 Ox_2 Ox_3 siano ξ_1, ξ_2, ξ_3. Le proiezioni di OR sugli assi OX, OY, OZ saranno

$$A\xi_1 + B\xi_2 + C\xi_3 \quad , \quad A'\xi_1 + B'\xi_2 + C'\xi_3 \quad , \quad A''\xi_1 + B''\xi_2 + C''\xi_3 :$$

onde l'angolo, che indicherò con (μ), fatto coll'asse OX dalla proiezione di OR sul piano invariabile, avrà per tangente

$$\frac{A'\xi_1 + B'\xi_2 + C'\xi_3}{A\xi_1 + B\xi_2 + C\xi_3},$$

e si avrà perciò

$$(\mu) = \mathrm{artg}\,\frac{(a\xi_1 + a'\xi_2 + a''\xi_3)\,\mathrm{sen}\,\psi + (b\xi_1 + b'\xi_2 + b''\xi_3)\cos\psi}{(a\xi_1 + a'\xi_2 + a''\xi_3)\cos\psi - (b\xi_1 + b'\xi_2 + b''\xi_3)\,\mathrm{sen}\,\psi} = \psi + \mathrm{artg}\,\frac{b\xi_1 + b'\xi_2 + b''\xi_3}{a\xi_1 + a\xi_2 + a''\xi_3}$$

$$= \psi + \mathrm{artg}\,\frac{m_2}{m_1}\,\frac{\dfrac{x_1\xi_1}{a_1+\lambda_2} + \dfrac{x_2\xi_2}{a_2+\lambda_2} + \dfrac{x_3\xi_3}{a_3+\lambda_2}}{\dfrac{x_1\xi_1}{a_1+\lambda_1} + \dfrac{x_2\xi_2}{a_2+\lambda_1} + \dfrac{x_3\xi_3}{a_3+\lambda_1}}.$$

D' altra parte abbiamo:

$$d(\mu) = d\,\mathrm{artg}\,\frac{A'\xi_1 + B'\xi_2 + C'\xi_3}{A\xi_1 + B\xi_2 + C\xi_3}$$

$$= \frac{(A\xi + B_1\xi_2 + C\xi_3)(A'd\xi_1 + B'd\xi_2 + Cd\xi_1) - (A'\xi_1 + B'\xi_2 + C'\xi_3)(Ad\xi_1 + Bd\xi_2 + Cd\xi_3)}{(A\xi_1 + B\xi_2 + C\xi_3)^2 + (A'\xi_1 + B'\xi_2 + C'\xi_3)^2}$$

$$+ \frac{(A\xi_1 + B\xi_2 + C\xi_3)(\xi_1 dA' + \xi_2 dB' + \xi_3 dC') - (A'\xi_1 + B'\xi_2 + C'\xi_3)(\xi dA + \xi_2 dB + \xi_3 dC)}{(A\xi_1 + B\xi_1 + C\xi_2)^2 + (A'\xi_1 + B'\xi_2 + C'\xi_3)^2}.$$

Ora giovandosi delle relazioni che legano dA, dB, ... colle velocità angolari p, q, r, cioè

$$dA = dt(Br - Cq) \quad , \quad dB = dt(Cp - Ar) \quad , \quad dC = dt(Aq - Bp)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

e delle tre

$$BC' - B'C = A'' = c \quad , \quad CA' - C'A = B'' = c' \quad , \quad AB' - A'B = C'' = c''$$

il primo numeratore dell' espressione di (μ) si riduce a

$$\left\{(cp + c'q + c''r)(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) - (p\xi_1 + q\xi_2 + r\xi_3)(c\xi_1 + c'\xi_2 + c''\xi_3)\right\} dt$$
$$= m_3 \left\{(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) - (\xi_1 x_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3)\left(\frac{x_1\xi_1}{a_1} + \frac{x_2\xi_2}{a_2} + \frac{x_3\xi_3}{a_3}\right)\right\} dt ,$$

il secondo numeratore a

$$c(\xi_2 d\xi_3 - \xi_3 d\xi_2) + c'(\xi_3 d\xi_1 - \xi_1 d\xi_3) + c''(\xi_1 d\xi_2 - \xi_2 d\xi_1)$$
$$= m_3 d\xi_1 \left(\frac{x_2\xi_3}{a_2} - \frac{x_3\xi_2}{a_3}\right) + m_3 d\xi_2 \left(\frac{x_3\xi_1}{a_3} - \frac{x_1\xi_3}{a_1}\right) + m_3 d\xi_3 \left(\frac{x_1\xi_2}{a_1} - \frac{x_2\xi_1}{a_2}\right) ,$$

e finalmente il denominatore comune a

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - (c\xi_1 + c'\xi_2 + c''\xi_3)^2 = (c'\xi_3 - c''\xi_2)^2 + (c''\xi_1 - c\xi_3)^2 + (c\xi_2 - c'\xi_1)^2$$
$$= m_3^2 \left\{\left(\frac{x_2\xi_3}{a_2} - \frac{x_3\xi_2}{a_3}\right)^2 + \left(\frac{x_3\xi_1}{a_3} - \frac{x_1\xi_3}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_1\xi_2}{a_1} - \frac{x_2\xi_1}{a_2}\right)^2\right\} .$$

E perciò avremo (*):

$$\left.\begin{aligned}
(\mu) &= \psi + \operatorname{artg} \frac{m_2}{m_1} \frac{\dfrac{x_1\xi_1}{a_1-\lambda_2} + \dfrac{x_2\xi_2}{a_2-\lambda_2} + \dfrac{x_3\xi_3}{a_3-\lambda_2}}{\dfrac{x_1\xi_1}{a_1-\lambda_1} + \dfrac{x_2\xi_2}{a_2-\lambda_1} + \dfrac{x_3\xi_3}{a_3-\lambda_1}} \\
&= \int \frac{\left\{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - (x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3)\left(\dfrac{x_1\xi_1}{a_1} + \dfrac{x_2\xi_2}{a_2} + \dfrac{x_3\xi_3}{a_3}\right)\right\} dt}{m_3\left\{\left(\dfrac{x_2\xi_3}{a_2} - \dfrac{x_3\xi_2}{a_3}\right)^2 + \left(\dfrac{x_3\xi_1}{a_3} - \dfrac{x_1\xi_3}{a_1}\right)^2 + \left(\dfrac{x_1\xi_2}{a_1} - \dfrac{x_2\xi_1}{a_2}\right)^2\right\}} \\
&\quad + \int \frac{\left(\dfrac{x_2\xi_3}{a_2} - \dfrac{x_3\xi_2}{a_3}\right) d\xi_1 + \left(\dfrac{x_3\xi_1}{a_3} - \dfrac{x_1\xi_3}{a_1}\right) d\xi_2 + \left(\dfrac{x_1\xi_2}{a_1} - \dfrac{x_2\xi_1}{a_2}\right) d\xi_3}{m_3\left\{\left(\dfrac{x_2\xi_3}{a_2} - \dfrac{x_3\xi_2}{a_3}\right)^2 + \left(\dfrac{x_3\xi_1}{a_3} - \dfrac{x_1\xi_3}{a_1}\right)^2 + \left(\dfrac{x_1\xi_2}{a_1} - \dfrac{x_2\xi_1}{a_2}\right)^2\right\}} + \mathrm{cost}
\end{aligned}\right\} . \tag{71}$$

(*) Per la facilità dei richiami, i numeri delle equazioni seguiteranno la serie della prima Memoria.

Questa doppia equazione mentre dà due espressioni di (μ), astraendo dal problema geometrico, offre anche un teorema di calcolo integrale, in quantochè trasforma i due integrali ellittici onde ψ è rappresentato (Mem. I, § 6, eq. 31), in altri ove figurano le tre funzioni arbitrarie $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$. Ma anche senza il concorso dell'espressione di ψ si può stabilire il teorema. Esso è il seguente:

Teorema

Siano u, v, w tre funzioni di x determinate dall'equazioni

$$u^2=\frac{a_1^2-a_1x+c^2}{a_1(a_1-a_2)(a_1-a_3)}\ ,\quad v^2=\frac{a_2^2-a_2x+c^2}{a_2(a_2-a_3)(a_2-a_1)}\quad w^2=\frac{a_3^2-a_3x+c^2}{a_3(a_3-a_1)(a_3-a_2)}\,,$$

e siano λ_1 e λ_2 le due radici dell'equazione $\lambda^2-\lambda x+c^2=0$. Si ponga

$$\left\{(\mathrm{Y}w-\mathrm{Z}v)^2+(\mathrm{Z}u-\mathrm{X}w)^2+(\mathrm{X}v-\mathrm{Y}u)^2\right\}d\mathrm{F}(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})$$

$$=\frac{(\mathrm{Y}w-\mathrm{Z}v)\,d\mathrm{X}+(\mathrm{Z}u-\mathrm{X}w)d\mathrm{Y}+(\mathrm{X}v-\mathrm{Y}u)\,d\mathrm{Z}}{\sqrt{a_1a_2a_3}}$$

$$+\frac{\left\{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2-(a_1u\mathrm{X}+a_2v\mathrm{Y}+a_3w\mathrm{Z})(u\mathrm{X}+v\mathrm{Y}+w\mathrm{Z}\right\}dx}{2\sqrt{-(a_1^2-a_1x+c^2)(a_2^2-a_2x+c^2)(a_3^2-a_3x+c^2)}}\,.$$

Se fra $X\ Y\ Z$ ed $X'\ Y'\ Z$, funzioni di x qualsivoglia, esiste la relazione:

$$\frac{\dfrac{a_1u\mathrm{X}}{a_1-\lambda_1}+\dfrac{a_2v\mathrm{Y}}{a_2-\lambda_1}+\dfrac{a_3w\mathrm{Z}}{a_3-\lambda_1}}{\dfrac{a_1u\mathrm{X}}{a_1-\lambda_2}+\dfrac{a_2v\mathrm{Y}}{a_2-\lambda_2}+\dfrac{a_3w\mathrm{Z}}{a_3-\lambda_2}}=\frac{\dfrac{a_1u\mathrm{X}'}{a_1-\lambda_1}+\dfrac{a_2v\mathrm{Y}'}{a_2-\lambda_1}+\dfrac{a_3w\mathrm{Z}'}{a_3-\lambda_1}}{\dfrac{a_1u\mathrm{X}'}{a_1-\lambda_2}+\dfrac{a_2v\mathrm{Y}'}{a_2-\lambda_2}+\dfrac{a_3w\mathrm{Z}}{a_3-\lambda_2}}$$

si avrà

$$d\mathrm{F}(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})=d\mathrm{F}(\mathrm{X}',\mathrm{Y}',\mathrm{Z})\,.$$

Questo teorema discende senz'altro dalla (71) solo che si ponga:

$$x_1=a_1u\ ,\quad x_2=a_2v\ ,\quad x_3=a_3w\ ,\quad \mathrm{X}=\xi_1\ ,\quad \mathrm{Y}=\xi_2\ ,\quad \mathrm{Z}=\xi_3$$

e si ricordi il valore di dt dato dalla (29). Sulle applicazioni di questo teorema tornerò in altra memoria.

§ 3.

Le longitudini degli assi dell' ellissoide, e dell' asse istantaneo di rotazione.

Siano $\mu_1\, \mu_2\, \mu_3$ gli angoli fatti colla retta OX dalle proiezioni sul piano invariabile degli assi $Ox_1\, Ox_2\, Ox_3$, cioè dei semiassi dell' ellissoide. Questi angoli sono quelli, a cui si riduce (μ), quando si fa coincidere il raggio OR coi medesimi semiassi; quando cioè si pone successivamente

$$\xi_2=\xi_3=0 \qquad \xi_1=\sqrt{a_1}\ ,$$
$$\xi_3=\xi_1=0 \qquad \xi_2=\sqrt{a_2}\ ,$$
$$\xi_1=\xi_2=0 \qquad \xi_3=\sqrt{a_3}\ ,$$

Si otterrà perciò dalla (71)

$$\mu_1=\psi+\operatorname{artg}\frac{m_2}{m_1}\frac{a_1-\lambda_1}{a_1-\lambda_2}=\frac{1}{m_3}\int\frac{\frac{x_2^2}{a_2}+\frac{x_3^2}{a_3}}{\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}}dt+c_1 \tag{72}$$

$$\mu_2=\psi+\operatorname{artg}\frac{m_2}{m_1}\frac{a_2-\lambda_1}{a_2-\lambda_2}=\frac{1}{m_3}\int\frac{\frac{x_3^2}{a_3}+\frac{x_1^2}{a_1}}{\frac{x_3^2}{a_3^2}+\frac{x_1^2}{a_1^2}}dt+c_2 \tag{73}$$

$$\mu_3=\psi+\operatorname{artg}\frac{m_2}{m_1}\frac{a_3-\lambda_1}{a_3-\lambda_2}=\frac{1}{m_3}\int\frac{\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}}{\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}}dt+c_3 \tag{74}$$

e $c_1\, c_2\, c_3$ sono tre costanti da determinare.

Diciamo inoltre μ l' angolo fatto con OX dalla proiezione dell' asse istantaneo di rotazione. Basterà per averne il valore porre nell' equazione (71) $\xi_1=x_1$, $\xi_2=x_2$, $\xi_3=x_3$, e si otterrà

$$\mu=\psi+\operatorname{artg}\frac{m_2}{m_1}=m_3\int\frac{dx_1x_2x_3\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+dx_2x_3x_1\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_1}\right)+dx_3x_1x_2\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)}{m_1^2+m_2^2}$$

e la forma semplice del denominatore si ricava dall' identità

$$x_2^2 x_3^2\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)^2+x_3^2 x_1^2\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_1}\right)^2+x_1^2 x_2^2\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)^2$$

$$=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\left(\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}\right)-\left(\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\frac{x_3^2}{a_3}\right)^2=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{m_3^2}-1=\frac{m_1^2+m_2^2}{m_3^2}.$$

Adoperando il teorema enunciato alla fine del § precedente si può avere un' altra espressione di μ Infatti, ponendo

$$\xi_1'=\xi_1-\frac{m_3^2 x_1}{a_1} \qquad \xi_2'=\xi_2-\frac{m_3^2 x_2}{a_2} \qquad \xi_3'=\xi_3-\frac{m_3^2 x_3}{a_3}$$

si ha [veggansi l' equazioni (3)]

$$\frac{\dfrac{x_1\xi_1}{a_1-\lambda_2}+\dfrac{x_2\xi_2}{a_2-\lambda_2}+\dfrac{x_3\xi_3}{a_3-\lambda_2}}{\dfrac{x_1\xi_1}{a_1-\lambda_1}+\dfrac{x_2\xi_2}{a_2-\lambda_1}+\dfrac{x_3\xi_3}{a_3-\lambda_1}}=\frac{\dfrac{x_1\xi_1'}{a_1-\lambda_2}+\dfrac{x_2\xi_2'}{a_2-\lambda_2}+\dfrac{x_3\xi_1}{a_3-\lambda_2}}{\dfrac{x_1\xi_1'}{a_1-\lambda_1}+\dfrac{x_2\xi_2'}{a_2-\lambda_1}+\dfrac{x_3\xi_3'}{a_3-\lambda_1}};$$

e perciò mettendo nella (71) al posto delle ξ i valori delle ξ', e ponendo poscia $\xi_1=x_1$, $\xi_2=x_2$, $\xi_3=x_3$, si ottiene

$$\mu=\psi+\operatorname{artg}\frac{m_2}{m_1}=m_3 t$$

$$+m_3\int\frac{dx_1 x_2 x_3\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)\left(1-\frac{m_3^2}{a_1}\right)+dx_2 x_3 x_1\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_1}\right)\left(1-\frac{m_3^2}{a_2}\right)+dx_3 x_1 x_2\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)\left(1-\frac{m_3^2}{a_3}\right)}{m_1^2+m_2^2}$$

$$+\text{cost}.$$

Ora, in virtù delle (20), la quantità che sotto l'integrale è divisa per $m_1^2+m_2^2$, diviene dt moltiplicato per

$$x_2^2 x_3^2\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)^2(a_1-m_3^2)+x_3^2 x_1^2\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_1}\right)^2(a_2-m_3^2)+x_1^2 x_2^2\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)^2(a_3-m_3^2)$$

$$=a_1 a_2 a_3\left\{\frac{x_2^2 x_3^2}{a_2 a_3}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)^2+\frac{x_3^2 x_1^2}{a_3 a_1}\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_1}\right)^2+\frac{x_1^2 x_2^2}{a_1 a_2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)^2\right\}$$

$$-m_3^2\left\{\frac{x_2^2 x_3^2}{a_2 a_3}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)^2+\frac{x_1^2 x_3^2}{a_1 a_3}\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}\right)^2+\frac{x_1^2 x_2^2}{a_1 a_2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)^2\right\}$$

$$=a_1 a_2 a_3\left\{\left(\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\frac{x_3^2}{a_3}\right)\left(\frac{x_1^2}{a_1^3}+\frac{x_2^2}{a_2^3}+\frac{x_3^2}{a_3^3}\right)-\left(\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}\right)^2\right\}$$

$$-m_3^2\left\{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\left(\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}\right)-\left(\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\frac{x_3^2}{a_3}\right)^2\right\}$$

$$=a_1 a_2 a_3\left\{\frac{x_1^2}{a_1^3}+\frac{x_2^2}{a_2^3}+\frac{x_3^2}{a_3^3}-\frac{1}{m_3^4}\right\}-m_3^2\left\{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{m_3^2}-1\right\}.$$

Trattandosi di una triattomena le tangenti reali che passano pei tre fochi $F\,F_1\,F_2$ s'incontrano in un punto, a cui diedi il nome d'*antifoco* (Ottava rivista [142ª], N. 103, § 4); ogni tangente della triattomena ha la distanza dall'antifoco in un costante rapporto col prodotto delle sue distanze dai tre fochi. Acciocchè la tangente $[t^3-3t\,,\,4:2t^3]$ passi pel foco $F\,(-1\,,\,0:2)$, bisogna che sia $-t^3+3t+4t^3=0$, la sola tangente reale corrisponde a $t=0$ ed è $[0\,,\,1:0]$, cioè l'asse delle x. Pel foco

$$F_1(-11\,,\,-3\sqrt{15}:4)$$

passa la tangente data da $-11t^3+33t-12\sqrt{15}+8t^3=0$, si trova $t=-3{,}8433$ e la tangente $[-45{,}239{,}4:-56{,}768]$, quindi l'antifoco sarà $G(-0{,}7909\,,\,0:1)$.

14. — Nelle curve algebriche meritano attenzione anche il polo della retta all'infinito, nonchè i punti che hanno per polare la retta all'infinito.

Se $f(x\,,\,y\,,\,z)=0$ è l'equazione a coordinate Cartesiane (oppure anche baricentriche) di una curva, il punto $(x\,,y\,,z)$ ha la polare $[\mathrm{D}_x f\,,\,\mathrm{D}_y f\,,\,\mathrm{D}_z f]$; e se $\varphi(u,v,w)=0$ è l'equazione fra le coordinate Plucheriane (o baricentrali), la retta $[u\,,\,v\,,\,w]$ ha il polo $(\mathrm{D}_u\varphi\,,\,\mathrm{D}_v\varphi\,,\,\mathrm{D}_w\varphi)$.

Nel caso delle coordinate Cartesiane e Plucheriane la retta all'infinito è $[0\,,\,0:1]$.

Per la curva del § **12** il polo della retta $[u\,,\,v:w]$ è

$$(96uw-24w^2-96u^2\,,\,-54vw:12w^2-48uw+48u^2-27v^2)\,,$$

quindi il polo della retta all'infinito è $(-24\,,\,0:12)$, cioè B essendo $OB \triangleq -2$.

La polare di $(x\,;\,y:z)$ è

$$[3x^2-4y^2\,,\,-8xy-16yz:-8y^2]\,,$$

ed acciocchè questa sia all'infinito, dovrà essere

$$3x^2-4y^2=0\quad,\quad -x-2z=0\quad,\quad x=-2z\quad,\quad 2y=\pm x\sqrt{3}\,,$$

quindi i punti, di cui la retta all'infinito è la polare, sono

$$P(-2\,,\,\pm\sqrt{3}:1)\quad,\quad OP \triangleq -2\pm\sqrt{3}\,.\,i\,.$$

15. — Pel *teorema del* Laguerre (Ottava [142ª] N. 103, § **6**), si estende ad ogni $m.^{\text{attomena}}$ la proprietà delle diattomene, che comprende come caso particolare quella che diede il nome ai fochi; cioè, la somma delle inclinazioni delle m tangenti condotte da un punto alla curva è uguale alla somma delle inclinazioni delle rette condotte dallo stesso punto agli m fochi. Per esempio, nella curva, che ora consideriamo, le tre tangenti condotte dal punto $(3\,,\,1:1)$ alla curva delle coordinate Plucheriane $[t^3-3t\,,\,4:2t^3]$ sono date dall'equazione

$$3t^3-9t+4+2t^3=0\,,$$

che ha le radici

$$t=1\ ,\ t=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{21}{20}},$$

quindi le tangenti sono

$$[-2,4:2]\ \left\{-1\mp6\sqrt{\frac{21}{20}},20:-17\pm18\sqrt{\frac{21}{20}}\right\},$$

la prima è l'assintoto AD $[-1\ ,2:1]$ che ha l'inclinazione

$$\mathrm{Atan}\frac{1}{2}=0^r,2952\ ,$$

le altre due hanno le inclinazioni $0^r,2186$, $-0^r,1604$; le rette che congiungono il punto $(3\ ,1:0)$ coi fochi $F(-1\ ,0:2)$ $F_1(11\ ,\pm3\sqrt{15}:-4)$, sono

$$[2,-7:1],[-4\mp3\sqrt{15}\ ,23:\pm9\sqrt{15}-11]$$

ed hanno le inclinazioni

$$\mathrm{Atan}\frac{2}{7}=0^r,1772\quad,\quad 0^r,3798\ ,-0,2036\ ;$$

la somma tanto delle tre prime inclinazioni quanto delle tre ultime è $0^r,3534$.

16. — Tritome triattomene (cioè curve del 3° ordine e della 3ª classe) con tre assintoti verso punti ordinarî; esse costituiscono quello dei due sotto-generi, che è qualificato: *Tre tratti a rami assintotici ordinarî, uno col regresso, uno col flesso ed uno puro.* Le coordinate Cartesiane e Plucheriane sono espresse in funzioni della variabile t (oltre l'angolo tra gli assi coordinati e le unità di lunghezze relative, si ha un quarto parametro c che serve a distinguere una specie dall'altra)

$$(t^2,t^3:t^3+ct^2-t^2-c)\quad,\quad[ct^3-t^3-3ct,t^3+2c:-t^3].$$

Il regresso e la sua tangente corrispondono a $t=0$ e sono $(0,0:1)$ $[0\ ,1:0]$, il flesso corrisponde a $t=\infty$, il che dà $(0\ ,1:1)$ $[c-1\ ,1:-1]$; un assintoto corrisponde a $t=1$ ed è $[2c+1\ ,-2c-1:1]$; acciocchè gli altri due assintoti sieno reali, porremo

$$c(e-1)=e^2,$$

ed essi corrisponderanno a $t=-e$, $t=\frac{e}{1-e}$, e saranno

$$\left\{\frac{1}{e-1},\frac{1}{e(e-1)}:\frac{-1}{(e-2)(e+1)}\right\}\ ,\ \left\{\frac{1}{e-1},\frac{1}{e}:\frac{1}{(e-2)(2e-1)}\right\}.$$

Servirà a distinguere una specie dall'altra, invece di c, il parametro e, il quale può ricevere tutti i valori compresi tra 0 e 2; così l'assintoto corrispondente a $t=1$ sarà

$$\left\{\frac{1}{e-1},\frac{-1}{e-1}:\frac{1}{(2e-1)(e+1)}\right\}.$$

dipendono l'uno dall'altro, *quod est*, dice Jacobi, *insigne theorema a cl. Legendre prolatum* Cap. XV (***Fundamenta***, pag. 166). È però da notare che le quantità n_1 ed n_3 sono positive, e le quantità n_2 ed n_4 sono quantità negative, e che mentre i due parametri positivi possono assumere qualunque valore da 0 ad ∞, i due negativi sono sempre compresi fra $-k^2$ e -1. Perciò gl'integrali sono a parametro trigonometrico, e la traduzione geometrica del teorema di Legendre, quale emerge dalle formole (82) non potrebbe estendersi al caso di n compreso fra 0 e $-k^2$, o fra -1 e $-\infty$, cioè ai parametri logaritmici. Ma questa restrizione dipende solo dai limiti imposti alle quantità costanti a_1, a_2, a_3, m_3, dal problema meccanico, che trattiamo. Ora le equazioni risultanti dall'eliminazione di ψ fra due qualunque delle (82) non è altro che una identità fra le quattro quantità suddette e φ [poichè per t deve intendersi una funzione della φ data dalla (81)], e questa identità per conseguenza rimane, qualunque sia il valore di esse quantità. Dando dunque valori convenienti alle costanti si potranno ottenere per i parametri $n_1\, n_2\, n_3\, n_4$ i valori che si vogliono, e sempre soddisfacenti alle equazioni (83). Invertiamo per esempio nelle formole (82) a_2 con a_3 e manteniamo la condizione che i binomi (25) abbian tutti lo stesso segno: il modulo rimane reale poichè diviene $1-k^2$, cioè k'^2, e gl'integrali divengono di parametro logaritmico, poichè i nuovi parametri si cambiano in

$$n_1' = \frac{a_2 - m_3^2}{m_3^2 - a_1}\;,\qquad n_2' = \frac{a_3 - m_3^2}{a_3 - a_2}\;,\qquad n_3' = \frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_3}\;,\qquad n_4' = \frac{a_3 - a_1}{a_1 - m_3^2}\,,$$

i quali sono tutti negativi, e possono assumere tutti i valori compresi fra 0 e $-k^2$, o fra -1 e $-\infty$.

Dunque la dimostrazione, emergente dalle (82) del teorema di Legendre vale per tutti i casi, non esclusi quelli di k maggiore di 1, e di k immaginario.

Dalle (83) si trae pure

$$n_1 + n_2 + n_1 n_2 = n_3 n_4 + n_3 + n_4 = -k^2$$

donde il teorema, che l'integrale $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n\,\mathrm{sen}^2\varphi)\,\Delta\varphi}$ si può trasformare in un altro simile, ove alla n sia surrogato $-\frac{k^2+n}{1+n}$ ovvero $-k^2\frac{1+n}{k^2+n}$.

Dunque qualunque sia la n, purchè reale, di un integrale di terza specie, questo può sempre ridursi ad altro integrale simile, in cui la n sia compresa fra 0 e -1. *Quod est*, dice Jacobi, *egregium inventum cl.' Legendre* (***Fundamenta***, pag. 171) (*).

(*) Veggasi anche Cayley—*An Elementary Treatise on elliptic functions*. Cambridge 1876, pag. 119 e seguenti.

Questi due teoremi di **Legendre** assumono una forma più conosciuta, se invece delle n si considerano gli argomenti dei parametri. Ponendo infatti

$$n_1 = -k^2 \operatorname{sn}^2 \gamma_1 \quad , \quad n_2 = -k^2 \operatorname{sn}^2 \gamma_2 \quad , \quad n_3 = -k^2 \operatorname{sn}^2 \gamma_3$$

le relazioni fra $n_1\, n_2\, n_3$ divengono

$$k \operatorname{sn} \gamma_1 \operatorname{sn} \gamma_3 = \pm 1 \qquad \operatorname{sn}^2 \gamma_1 + \operatorname{sn}^2 \gamma_2 - k^2 \operatorname{sn}^2 \gamma_1 \operatorname{sn}^2 \gamma_2 = 1$$

che equivalgono rispettivamente a

$$\gamma_1 \pm \gamma_3 = i\mathrm{K}' \quad , \quad \gamma_1 \pm \gamma_2 = \mathrm{K}:$$

ossia un integrale di terza specie il cui parametro abbia per argomento l'amplitudine di γ si può sempre ridurre ad un altro, il cui parametro abbia per argomento l'ampiezza di $\mathrm{K} \pm \gamma$ o di $i\mathrm{K}' \pm \gamma$.

Dall'equazioni (82) emerge anche la riduzione dei due integrali ellittici componenti la espressione di ψ (Eq. 43) ad un solo, il che costituisce il teorema dell'addizione dei parametri: ma questo apparirà in modo più esplicito, quando avremo messo gl'integrali stessi sotto una forma analoga a quella degl'integrali (52).

§ 5.

Funzioni ellittiche.

Abbiamo trovato (Eq. 66)

$$\frac{a_1}{c} = \frac{\operatorname{sn} i\sigma \operatorname{dn} i\tau + \operatorname{sn} i\tau \operatorname{dn} i\sigma}{\operatorname{sn} i\sigma \operatorname{dn} i\tau - \operatorname{sn} i\tau \operatorname{dn} i\sigma} \quad , \quad \frac{a_2}{c} = \frac{\operatorname{sn} i\sigma + \operatorname{sn} i\tau}{\operatorname{sn} i\sigma - \operatorname{sn} i\tau} \quad , \quad \frac{a_3}{c} = \frac{\operatorname{sn} i\sigma \operatorname{cn} i\tau - \operatorname{sn} i\tau \operatorname{cn} i\sigma}{\operatorname{sn} i\sigma \operatorname{cn} i\tau + \operatorname{sn} i\tau \operatorname{cn} i\sigma}.$$

Poniamo

$$\sigma = a + b \qquad \tau = a - b$$

e per brevità

$$ia = \frac{i\sigma + i\tau}{2} = \alpha \qquad ib = \frac{i\sigma - i\tau}{2} = \beta. \tag{84}$$

E qui ricordiamo (Mem. I, § 8) che τ è compreso fra 0 e $-\mathrm{K}'$, ovvero fra 0 e K'

secondochè i binomi (25) sono positivi o negativi; e che σ è compreso fra 0 e K' ovvero fra K' e 2K', secondochè $c - a_2$ ha segno eguale o contrario agli stessi binomi. Inoltre, dai valori di $\mathrm{tg}^2 am(\tau, k')$ e di $\mathrm{tg}^2 am(\sigma, k')$ si trae che il valore numerico di τ è sempre inferiore a σ e che $\sigma + \tau$ non può superare 2K': dimodochè a e b saranno positivi e compresi fra 0 e K'. Ne viene per conseguenza che $-i\,\mathrm{sn}\,\alpha$, $\mathrm{cn}\,\alpha$, $\mathrm{dn}\,\alpha$, e $-i\,\mathrm{sn}\,\beta$, $\mathrm{cn}\,\beta$, $\mathrm{dn}\,\beta$ sono quantità reali e positive.

Dall'equazioni poi

$$\mathrm{sn}(\alpha \pm \beta)\,\mathrm{dn}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta \pm \mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\alpha}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta} \tag{85}$$

$$\mathrm{sn}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\beta \pm \mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta} \tag{86}$$

$$\mathrm{sn}(\alpha \pm \beta)\,\mathrm{cn}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta \pm \mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\alpha}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta} \tag{87}$$

tragghiamo

$$\frac{a_1}{c} = \frac{\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta}{\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\alpha}\ ,\quad \frac{a_2}{c} = \frac{\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\beta}{\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha}\ ,\quad \frac{a_3}{c} = \frac{\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta}. \tag{88}$$

Posto inoltre

$$\sqrt{-\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta} = \mathrm{P}\ ,\quad 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta = \mathrm{Q}\ ,\quad \mathrm{sn}^2\alpha - \mathrm{sn}^2\beta = \mathrm{M} \tag{89}$$

avremo

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{m_3^2}{c} = \dfrac{a_1 a_2 a_3}{c^3} = \dfrac{\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{cn}^3\beta}{\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{cn}^3\alpha} = \dfrac{\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{dn}^2\alpha\,\mathrm{cn}^4\beta}{-\mathrm{P}^2\,\mathrm{cn}^2\alpha} \\[2ex]
\dfrac{a_2 a_3}{c^2} = \dfrac{m_3^2}{a_1} = \left(\dfrac{\mathrm{cn}\,\beta}{\mathrm{cn}\,\alpha}\right)^2 ,\quad \dfrac{a_3 a_1}{c^2} = \dfrac{m_3^2}{a_2} = \left(\dfrac{\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta}{\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\alpha}\right)^2 ,\quad \dfrac{a_1 a_2}{c^2} = \dfrac{m_3^2}{a_3} = \left(\dfrac{\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta}{\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\alpha}\right)^2 \\[2ex]
\dfrac{a_2 a_3 - c^2}{c^2} = \dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{cn}^2\alpha}\ ,\quad \dfrac{a_3 a_1 - c^2}{c^2} = \dfrac{k^2\mathrm{M}}{\mathrm{cn}^2\alpha\,\mathrm{dn}^2\beta}\ ,\quad \dfrac{c^2 - a_1 a_2}{c^2} = \dfrac{-\mathrm{M}}{\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{cn}^2\alpha} \\[2ex]
\dfrac{m_3^2 - a_1}{m_3^2} = \dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{cn}^2\beta}\ ,\quad \dfrac{m_3^2 - a_2}{m_3^2} = \dfrac{k^2\mathrm{M}}{\mathrm{cn}^2\beta\,\mathrm{dn}^2\alpha}\ ,\quad \dfrac{a_3 - m_3^2}{m_3^2} = \dfrac{-\mathrm{M}}{\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{cn}^2\beta} \\[2ex]
\dfrac{a_3 - a_2}{c} = \dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}^2}\,\mathrm{cn}^2\beta\ ,\quad \dfrac{a_3 - a_1}{c} = \dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}^2}\,\mathrm{dn}^2\alpha\,\mathrm{cn}^2\beta,\quad \dfrac{a_2 - a_1}{c} = -\dfrac{k^2\mathrm{M}}{\mathrm{P}^2}\,\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{cn}^2\beta
\end{array}\right\} \tag{90}$$

onde si vede che M ha il medesimo segno dei binomi (25).

Avremo inoltre

$$\frac{n}{\sqrt{c}}=\sqrt{\frac{(a_2 a_3-c^2)(a_3-a_2)}{a_2 a_3}}=\sqrt{\frac{(m_3^2-a_1)(a_3-a_2)}{m_3^2}}=\pm\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}}\,(^*). \tag{91}$$

Dalle (76), tenuto conto che $\varphi=\mathrm{am}\,u$, si ricava adunque

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x_1^2}{a_1^2}&=\frac{a_3-m_3^2}{m_3^2}\,\frac{\mathrm{cn}^2 u}{a_3-a_1}=-\frac{\mathrm{P}^2}{\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{dn}^2\alpha\,\mathrm{cn}^4\beta}\,\frac{\mathrm{cn}^2 u}{c}\\
\frac{x_2^2}{a_2}&=\frac{a_3-m_3^2}{m_3^2}\,\frac{\mathrm{sn}^2 u}{a_3-a_2}=-\frac{\mathrm{P}^2}{\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{cn}^4\beta}\,\frac{\mathrm{sn}^2 u}{c}\\
\frac{x_3^2}{a_3}&=\frac{a_1-m_3^2}{m_3^2}\,\frac{\mathrm{dn}^2 u}{a_1-a_3}=\frac{\mathrm{P}^2}{\mathrm{dn}^2\alpha\,\mathrm{cn}^4\beta}\,\frac{\mathrm{dn}^2 u}{c}
\end{aligned}\right\} \tag{92}$$

$$\frac{m_3^2 x_1^2}{a_1^2}=\frac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{cn}^2\alpha}\quad,\quad \frac{m_3^2 x_2^2}{a_2^2}=\frac{\mathrm{dn}^2\alpha}{\mathrm{cn}^2\alpha}\,\mathrm{sn}^2 u\quad,\quad \frac{m_3^2 x_3^2}{a_3^3}=-\frac{\mathrm{sn}^2\alpha}{\mathrm{cn}^2\alpha}\,\mathrm{dn}^2 u\,. \tag{93}$$

Moltiplichiamo queste tre equazioni per $a_1 : m_3^2$, $a_2 : m_3^2$, $a_3 : m_3^2$ (Eq. 90). Avremo

$$\frac{x_1^2}{a_1}=\frac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{cn}^2\beta}\quad,\quad \frac{x_2^2}{a_2}=\frac{\mathrm{dn}^2\beta}{\mathrm{cn}^2\beta}\,\mathrm{sn}^2 u\quad,\quad \frac{x_3^2}{a_3}=-\frac{\mathrm{sn}^2\beta}{\mathrm{cn}^2\beta}\,\mathrm{dn}^2 u\,, \tag{94}$$

e quindi dividendo queste per le radici delle (92), otterremo:

$$\frac{x_1}{\sqrt{c}}=-\frac{\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha}{i\mathrm{P}}\,\mathrm{cn}\,u\quad,\quad \frac{x_2}{\sqrt{c}}=\frac{\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{dn}^2\beta}{i\mathrm{P}}\,\mathrm{sn}\,u\quad,\quad \frac{x_3}{\sqrt{c}}=\mp\frac{\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{P}}\,\mathrm{dn}\,u\,. \tag{95}$$

Il doppio segno attribuito ad x_3 dipende dalla convenzione fatta nella M. I (§ 5) che x_3 debba avere il medesimo segno dei binomi (25) (si ricordi poi che $-i\,\mathrm{sn}\,\beta$ è come $-i\,\mathrm{sn}\,\alpha$ una quantità reale e positiva, e quindi $\mathrm{sn}^2\beta$, $\mathrm{sn}^2\alpha$ sono quantità negative). I segni di x_1 e di x_2 dipendono dal segno di x_3, e dalla seconda delle (20), cioè $a_1 a_3\, dx_2=a_2 x_1 x_3 (a_1-a_3)\,dt$. Infatti, essendo $x_3(a_1-a_3)$ una quantità sempre negativa, ne consegue che x_1 è di segno contrario a $\frac{dx_2}{dt}$. Ora avendo posto x_2 proporzionale a $\mathrm{sn}\,u$, dovrà essere x_1 di segno contrario a $\frac{d(\mathrm{sn}\,u)}{du}$, cioè a $\mathrm{cn}\,u$. Del resto le (95) soddisfano identicamente alle (20), se si tien conto che

$$du=n\,dt \qquad \frac{n}{\sqrt{c}}=\pm\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}}\,,$$

(*) Ricordiamo qui la convenzione fatta nella prima Memoria, § 5, che allorquando scriviamo una quantità col doppio segno $\pm$ o $\mp$ senz'altra indicazione, il segno superiore si riferisce al caso dei binomi (25) positivi ed il segno inferiore al caso dei binomi stessi negativi.

Da queste ultime equazioni e dalle precedenti ricaviamo

$$\frac{m_3 dt}{du} = \pm \frac{\operatorname{sn}\alpha \operatorname{dn}\alpha \operatorname{cn}^2\beta}{i\mathrm{M}\operatorname{cn}\alpha}. \tag{96}$$

Posto poi per brevità $\frac{\operatorname{sn}\alpha \operatorname{dn}\alpha \operatorname{cn}\alpha}{i\mathrm{M}}$ ossia $\frac{d\log \mathrm{M}}{2id\alpha} = \mathrm{E}$, avremo

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{m_3 dt}{du}\,\frac{1-\frac{x_1^2}{a_1}}{1-\frac{m_3^2 x_1^2}{a_1^2}} = \pm \mathrm{E}\frac{\operatorname{cn}^2\beta - \operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{cn}^2\alpha - \operatorname{cn}^2 u} = \pm\left\{\mathrm{E} - \frac{i\operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2\alpha}\right\}\\
&\frac{m_3 dt}{du}\,\frac{1-\frac{x_2^2}{a^2}}{1-\frac{m_3^2 x_2^2}{a_2^2}} = \pm \mathrm{E}\frac{\operatorname{cn}^2\beta - \operatorname{dn}^2\beta \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{cn}^2\alpha - \operatorname{dn}^2\alpha \operatorname{sn}^2 u} = \pm\left\{\mathrm{E} - \frac{i\operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha \operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2\alpha - \operatorname{dn}^2\alpha \operatorname{sn}^2 u}\right\}\\
&m_3\frac{dt}{du}\,\frac{1-\frac{x_3^2}{a_3}}{1-\frac{m_3^2 x_3^2}{a_3^2}} = \pm \mathrm{E}\frac{\operatorname{cn}^2\beta - \operatorname{sn}^2\beta \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{cn}^2\alpha - \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{sn}^2 u} = \pm\left\{\mathrm{E} - \frac{ik^2\operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{cn}^2\alpha - \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{sn}^2 u}\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{97}$$

$$m_1^2 + m_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - m_3^2 = \frac{c\mathrm{M}^2}{\mathrm{P}^2\operatorname{cn}^2\alpha}(\operatorname{dn}^2\alpha - k^2\operatorname{cn}^2\alpha \operatorname{sn}^2 u) \tag{98}$$

$$\frac{m_3 dt}{du} - \frac{m_3 dt}{du}\,\frac{(m_3^2 - a_1)(m_3^2 - a_2)(m_3^2 - a_3)}{m_3^4(m_1^2 + m_2^2)} = \pm\left\{\mathrm{E} - \frac{ik^2\operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha \operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{dn}^2\alpha - k^2\operatorname{cn}^2\alpha \operatorname{sn}^2 u}\right\} \tag{99}$$

Se ora riprendiamo le equazioni (72, 73, 74 e 75), e ricordiamo che $\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \frac{x_3^2}{a_3} = 1$, e che $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = \frac{1}{m_3^2}$, troviamo che i primi membri delle (97 e 99) moltiplicati per du, coincidono con $d\mu_1$, $d\mu_2$, $d\mu_3$, $d\mu$. Dunque

$$\left.\begin{aligned}
\mu_1 &= \psi + \operatorname{artg}\frac{m_2}{m_1}\,\frac{a_1 - \lambda_1}{a_1 - \lambda_2} = \pm \mathrm{E}u \mp i\int_0^u \frac{\operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha\, du}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2\alpha} + c_1\\
\mu_2 &= \psi + \operatorname{artg}\frac{m_2}{m_1}\,\frac{a_2 - \lambda_1}{a_2 - \lambda_2} = \pm \mathrm{E}u \mp i\int_0^u \frac{\operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha \operatorname{dn}^2 u\, du}{\operatorname{cn}^2\alpha - \operatorname{dn}^2\alpha \operatorname{sn}^2 u} + c_2\\
\mu_3 &= \psi + \operatorname{artg}\frac{m_2}{m_1}\,\frac{a_3 - \lambda_1}{a_3 - \lambda_2} = \pm \mathrm{E}u \mp i\int_0^u \frac{k^2\operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha \operatorname{sn}^2 u\, du}{\operatorname{cn}^2\alpha - \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{sn}^2 u} + c_3\\
\mu &= \psi + \operatorname{artg}\frac{m_2}{m_1} = \pm \mathrm{E}u \mp i\int_0^u \frac{k^2\operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha \operatorname{cn}^2 u\, du}{\operatorname{dn}^2\alpha - k^2\operatorname{cn}^2\alpha \operatorname{sn}^2 u}
\end{aligned}\right\}. \tag{100}$$

Nell' espressione di μ non abbiamo messo costante arbitraria perchè supponiamo l' origine delle longitudini coincidente col raggio dell' erpoloide, quando $u=0$. Le costanti $c_1\, c_2\, c_3$ determineremo più tardi. Osserviamo intanto che se nelle precedenti equazioni al posto di ψ si mette la sua espressione (51) emergono quattro forme diverse del teorema dell' addizione dei parametri degl' integrali ellittici di terza specie, forme distinte da quelle conosciute sopratutto pei termini circolari che nelle (100) sono aggiunte alla ψ. Mettendo perciò a confronto ciascuna di queste forme con quella conosciuta del citato teorema, ricaveremo immediatamente le espressioni in funzione di u di tali termini circolari. Ma questi termini si possono anche ridurre a funzioni di u, scrivendo le funzioni di u, che esprimono λ_1 e λ_2, $m_1\, m_2$. Paragonando adunque le espressioni ottenute nelle due maniere, ne vedremo nascere certe riduzioni, che difficilmente si potrebbero ottenere per via diretta, e che costituiscono perciò altrettanti teoremi attinenti alla teorica delle funzioni ellittiche.

§ 6.

Determinazione delle costanti arbitrarie.

Per determinare le costanti $c_1\, c_2\, c_3$ importa ricordare, che i coseni degli angoli fatti da $Ox_1\, Ox_2\, Ox_3$ con Om_3 valgono $\frac{m_3 x_1}{a_1}$, $\frac{m_3 x_2}{a_2}$, $\frac{m_3 x_3}{a_3}$, e quindi hanno i medesimi segni di $x_1\, x_2\, x_3$ dati dalle (95). Facciamo ora i due casi: $a_1 < a_3$ ed $a_1 > a_3$, cioè il caso dei binomi (25) positivi, ed il caso dei binomi (25) negativi.

1° Caso: $a_1 < a_3$ — Per $u=0$, si ha $x_1 < 0$, $x_2 = 0$, $x_3 > 0$. L' asse Ox_2 giace dunque sul piano invariabile, e quindi gli altri due assi insieme coll' asse istantaneo, giacciono sopra un piano normale ad esso. Inoltre Ox_1 fa un angolo ottuso, Ox_3 fa un angolo acuto con Om_3. Facendo ora, od immaginando la figura, resta evidente che le proiezioni di Ox_1 ed Ox_3 vengono a sovrapporsi al raggio dell'erpoloide. Dunque $c_1 = c_3 = 0$. Ma se la longitudine di Ox_1 è nulla, quella di Ox_2 sarà $\frac{\pi}{2}$, poichè l'angolo $x_1\, Ox_2$ proiettato sul piano invariabile riesce nel senso del moto (§ 5, M. I), e le longitudini crescono appunto in quel senso: dunque $c_2 = \frac{\pi}{2}$.

2° Caso: $a_1 > a_3$ — Per $u=0$, si ha $x_1 < 0$, $x_2 = 0$, $x_3 < 0$. L' asse Ox_2 giace dunque sul piano invariabile, e quindi gli altri due assi insieme coll' asse istantaneo, giacciono sopra un piano normale ad esso. Inoltre Ox_1 ed Ox_3 fanno angoli ottusi con Om_3. Facendo ora od immaginando la figura, resta evidente che la proiezione di Ox_2 si sovrappone al raggio dell'erpoloide, e quella di Ox_1 gli è opposta. Dunque $c_3=0$, $c_1=\pi$. Ma se la longitudine di Ox_1 è π, quella di Ox_2 sarà $\frac{\pi}{2}$, perchè l'angolo x_1Ox_2 proiettato sul piano invariabile dee riuscire in senso contrario a quello del moto (§ 5, M. I); mentre le longitudini crescono appunto in quel senso. Dunque $c_2=\frac{\pi}{2}$. Avremo dunque in generale

$$c_1=\frac{\pi}{2}\mp\frac{\pi}{2} \quad , \quad c_2=\frac{\pi}{2} \quad , \quad c_3=0.$$

Circa la costante arbitraria, che entra nell'espressione (44) di t, noi abbiamo stabilito che l'epoca t_0 corrisponda ad uno degli istanti in cui Ox_1 si adagia sul piano invariabile. In quell'istante adunque $\frac{m_3x_1}{a_1}=0$, quindi per le (95) cn $u=0$. Noi adunque supporremo che a $t=t_0$ corrisponda $u=K$. Onde si avrà

$$t-t_0=\frac{u-K}{n}.$$

Circa l'origine del tempo supporremo che quando $t=0$ sia $u=0$, quindi $t_0=\frac{K}{n}$, $t=\frac{u}{n}$.

A quale periodo corrisponda nel movimento dell'ellissoide l'intervallo t_0 o K, chiaramente appare dalle equazioni (95). Infatti, per $u=K$, 2K, 3K..., divengono alternativamente nulli i valori di x_1 e di x_2. Ora, quando x_1 o x_2 è nullo, il piano principale (a_2a_3) o (a_1a_3) è normale al piano fisso di contatto. Dunque il periodo K o t_0 corrisponde all'intervallo di tempo compreso fra i passaggi del polo per due vertici successivi della poloide.

Contando la longitudine ψ dalla stessa retta, donde furono contate μ_1 μ_2 μ_3 e μ, per la convenzione fatta circa l'asse Om_1 (§ 5, M. I), ψ coinciderà con μ_1 quando $u=K$. Con ciò potremmo scriver subito il valore esplicito della costante che entra nell'espressione di ψ. Ma colle formole, di cui per ora ci è dato disporre, quel valore prenderebbe una forma poco semplice. Vedremo or ora che quella costante si riduce semplicemente a $\frac{\pi}{2}$.

§ 7.

Riduzione degl' integrali ellittici di terza specie.

Dalla teorica degl' integrali ellittici di terza specie si ricava

$$
\begin{aligned}
\int_0^u \frac{\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\, du}{\operatorname{sn}^2 u-\operatorname{sn}^2\alpha} &= \Pi(u,\alpha)-\frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}(\alpha+u)}{\operatorname{sn}(\alpha-u)}\,,\\
\int_0^u \frac{\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\operatorname{dn}^2 u\, du}{\operatorname{cn}^2\alpha-\operatorname{dn}^2\alpha\operatorname{sn}^2 u} &= \Pi(u,\alpha)-\frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{cn}(\alpha+u)}{\operatorname{cn}(\alpha-u)}\,,\\
\int_0^u \frac{k^2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\operatorname{cn}^2 u\, du}{\operatorname{dn}^2\alpha-k^2\operatorname{cn}^2\alpha\operatorname{sn}^2 u} &= \Pi(u,\alpha)-\frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{dn}(\alpha+u)}{\operatorname{dn}(\alpha-u)}\,,\\
\frac{1}{2}\left\{\Pi(u,\alpha+\beta)+\Pi(u,\alpha-\beta)\right\} &= \Pi(u,\alpha)-\frac{1}{4}\log\frac{1-k^2\operatorname{sn}^2\beta\operatorname{sn}^2(u-\alpha)}{1-k^2\operatorname{sn}^2\beta\operatorname{sn}^2(u+\alpha)}\\
&\quad -\frac{1}{2}k^2\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\beta\left\{\operatorname{sn}(\alpha+\beta)-\operatorname{sn}(\alpha-\beta\right\}u\,.
\end{aligned}
$$

Si ha inoltre identicamente

$$
\frac{1}{2}\left\{\frac{\operatorname{cn}(\alpha+\beta)\operatorname{dn}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sn}(\alpha+\beta)}+\frac{\operatorname{cn}(\alpha-\beta)\operatorname{dn}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sn}(\alpha-\beta)}\right\}=\frac{\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}{\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\beta}+\frac{1}{2}k^2\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\beta\left\{\operatorname{sn}(\alpha+\beta)-\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\right\}.
$$

Sostituendo adunque nelle (100) e nella (60), tenendo conto dei valori di $c_1 c_2 c_3$, ed osservando finalmente che può farsi $\mp\frac{\pi}{2}=\pm\frac{i}{2}\log e^{\pi i}=\pm\frac{i}{2}\log(-1)$, e quindi $\pm\frac{i}{2}\log\frac{\operatorname{sn}(\alpha+u)}{\operatorname{sn}(\alpha+u)}\mp\frac{\pi}{2}=\pm\frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{sn}(u+\alpha)}{\operatorname{sn}(u-\alpha)}$, avremo:

$$
\left.
\begin{aligned}
\mu_1 &= \psi+\operatorname{artg}\frac{m_2}{m_1}\frac{a_1-\lambda_1}{a_1-\lambda_2} = \pm Eu\mp i\Pi(u,\alpha)\pm\frac{i}{2}\log\frac{\operatorname{sn}(u+\alpha)}{\operatorname{sn}(u-\alpha)}+\frac{\pi}{2}\\
\mu_2 &= \psi+\operatorname{artg}\frac{m_2}{m_1}\frac{a_2-\lambda_1}{a_2-\lambda_2} = \pm Eu\mp i\Pi(u,\alpha)\pm\frac{i}{2}\log\frac{\operatorname{cn}(u+\alpha)}{\operatorname{cn}(u-\alpha)}+\frac{\pi}{2}\\
\mu_3 &= \psi+\operatorname{artg}\frac{m_2}{m}\frac{a_3-\lambda_1}{a_3-\lambda_2} = \pm Eu\mp i\Pi(u,\alpha)\\
\mu &= \psi+\operatorname{artg}\frac{m_2}{m} \qquad\qquad = \pm Eu\mp i\Pi(u,\alpha)\pm\frac{i}{2}\log\frac{\operatorname{dn}(u+\alpha)}{\operatorname{dn}(u-\alpha)}\\
\psi &= \pm Eu\mp i\Pi(u,\alpha)\pm\frac{i}{4}\log\frac{1-k^2\operatorname{sn}^2\beta\operatorname{sn}^2(u+\alpha)}{1-k^2\operatorname{sn}^2\beta\operatorname{sn}^2(u-\alpha)}+\frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}
\right\}\qquad(101)
$$

In quest'ultima equazione abbiamo posto la costante $\frac{\pi}{2}$ dietro il semplice criterio che la differenza $\psi-\mu_1$ dee riuscir nulla quando $u=\mathrm{K}$, in grazia della convenzione fatta al § 5 della M. I, e di quella che facciamo ora, che i logaritmi contenuti nell'espressione di μ_1 e di ψ divengano nulli quando $u=\mathrm{K}$. La stessa convenzione intendiamo fatta per $\log\frac{\mathrm{dn}(u+\alpha)}{\mathrm{dn}(u-\alpha)}$. Quanto al logaritmo, che fa parte dell'espressione di μ_2 osserviamo che per $u=\mathrm{K}$ dee risultare $\mu_2-\mu_1=\pm\frac{\pi}{2}$ [poichè la proiezione dell'angolo $x_2\,\mathrm{O}x_1$ sul piano invariabile dee riuscire del medesimo segno dei binomi (25)]; perciò per $u=\mathrm{K}$ dee risultare $\pm\frac{i}{2}\log\frac{\mathrm{cn}(u+\alpha)}{\mathrm{cn}(u-\alpha)}=\pm\frac{\pi}{2}$. Queste convenzioni sono necessarie a rimuovere ogni equivoco, che potrebbe risultare dai molteplici valori inerenti ai logaritmi.

§ 8.

Movimento degli assi dell'ellissoide rispetto all'asse istantaneo, e agli assi della sezione invariabile.

Ciò posto per $u=\mathrm{K}$ si avrà $\mu_1-\mu=\frac{\pi}{2}$, $\mu_2-\mu=\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{2}$, $\mu_3-\mu=0$, $\psi-\mu=\frac{\pi}{2}$; e per qualunque valore di u

$$\left.\begin{aligned}
\mu_1-\mu-\frac{\pi}{2}&=\pm\frac{i}{2}\log\frac{\mathrm{sn}(u+\alpha)\,\mathrm{dn}(u-\alpha)}{\mathrm{sn}(u-\alpha)\,\mathrm{dn}(u+\alpha)}=\pm\frac{1}{2i}\log\frac{\mathrm{cn}(u-\mathrm{K}-\alpha)}{\mathrm{cn}(u-\mathrm{K}+\alpha)}\\
&=\pm\,\mathrm{artg}\,\frac{\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha}{i\,\mathrm{cn}\,\alpha}\,\frac{\mathrm{sn}(u-\mathrm{K})\mathrm{dn}(u-\mathrm{K})}{\mathrm{cn}(u-\mathrm{K})}\\
\mu_2-\mu-\frac{\pi}{2}&=\pm\frac{i}{2}\log\frac{\mathrm{cn}(u+\alpha)\,\mathrm{dn}(u-\alpha)}{\mathrm{cn}(u-\alpha)\,\mathrm{dn}(u+\alpha)}=\pm\frac{1}{2i}\log\frac{\mathrm{sn}(u-\mathrm{K}-\alpha)}{\mathrm{sn}(u-\mathrm{K}+\alpha)}\\
&=\mp\,\mathrm{artg}\,\frac{\mathrm{sn}\,\alpha}{i\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha}\,\frac{\mathrm{cn}(u-\mathrm{K})\,\mathrm{dn}(u-\mathrm{K})}{\mathrm{sn}(u-\mathrm{K})}\\
\mu_3-\mu\quad&=\pm\frac{i}{2}\log\frac{\mathrm{dn}(u-\alpha)}{\mathrm{dn}(u+\alpha)}\qquad\qquad=\pm\frac{1}{2i}\log\frac{\mathrm{dn}(u-\mathrm{K}-\alpha)}{\mathrm{dn}(u-\mathrm{K}+\alpha)}\\
&=\pm\,\mathrm{artg}\,\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\alpha}{i\,\mathrm{dn}\,\alpha}\,\frac{\mathrm{sn}(u-\mathrm{K})\,\mathrm{cn}(u-\mathrm{K})}{\mathrm{dn}(u-\mathrm{K})}
\end{aligned}\right\}\quad .\qquad (102)$$

Esaminiamo ora i valori che assumono i primi membri di queste equazioni quando u passa per K, 2K, 3K...

Prima di tutto, chiamando u' un valore compreso fra 0 e K, avremo le seguenti successioni di segno:

$$u = \mathrm{K} \ldots \mathrm{K}+u' \ldots 2\mathrm{K} \ldots 3\mathrm{K}-u' \ldots 3\mathrm{K} \ldots 3\mathrm{K}+u' \ldots 4\mathrm{K}$$

$$\frac{\mathrm{sn}(u-\mathrm{K})\mathrm{dn}(u-\mathrm{K})}{\mathrm{cn}(u-\mathrm{K})} = 0 \ldots + \ldots \infty \ldots - \ldots 0 \ldots + \ldots \infty$$

$$\frac{\mathrm{cn}(u-\mathrm{K})\mathrm{dn}(u-\mathrm{K})}{\mathrm{sn}(u-\mathrm{K})} = \infty \ldots + \ldots 0 \ldots - \ldots \infty \ldots + \ldots 0$$

$$\frac{\mathrm{sn}(u-\mathrm{K})\mathrm{cn}(u-\mathrm{K})}{\mathrm{dn}(u-\mathrm{K})} = 0 \ldots + \ldots 0 \ldots - \ldots 0 \ldots + \ldots 0.$$

Ne viene per conseguenza che si avrà

$$u = \quad \mathrm{K} \ldots 2\mathrm{K} \ldots 3\mathrm{K} \ldots 4\mathrm{K} \ldots 5\mathrm{K} \ldots$$

$$\mu_1 - \mu - \frac{\pi}{2} = \quad 0 \ldots \pm\frac{\pi}{2} \ldots \pm\pi \ldots \pm\frac{3\pi}{2} \ldots \pm 2\pi$$

$$\mu_2 - \mu - \frac{\pi}{2} = \pm\frac{\pi}{2} \ldots \pm\pi \ldots \pm\frac{3\pi}{2} \ldots \pm 2\pi \ldots \pm\frac{5\pi}{2}$$

$$\mu_3 - \mu \quad = \quad 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0.$$

Dunque la distanza angolare dal raggio dell' erpoloide alle proiezioni di Ox_1 ed Ox_2 (contata da quello a queste) cresce di $\frac{\pi}{2}$ ad ogni periodo di tempo t_0, e cresce nel senso del moto dell'ellissoide o in senso contrario secondochè i binomi (25) sono positivi o negativi.

La proiezione di Ox_3 al contrario oscilla intorno al raggio dell'erpoloide, e l'ampiezza dell'oscillazione non è superiore a $\frac{\pi}{2}$. Quest' ampiezza corrisponderà al valore di u che rende massimo il valore di $\frac{\mathrm{sn}(u-\mathrm{K})\mathrm{cn}(u-\mathrm{K})}{\mathrm{dn}(u-\mathrm{K})}$, o quello di $\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$: e si trova facilmente che questo valore di u vale $\frac{1}{2}$K. Onde essa ampiezza varrà

$$\mathrm{artg}\,\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\alpha}{i\,\mathrm{dn}\,\alpha}\,\mathrm{sn}^2\frac{1}{2}\mathrm{K} = \mathrm{artg}\,(1-k')\,\frac{\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\alpha}{i\,\mathrm{dn}\,\alpha}\,.$$

Il fatto che i valori di $\mu_1 - \mu$, e di $\mu_2 - \mu$ crescono di $\pm\frac{\pi}{2}$ ad ogni periodo t_0 del tempo, significa che il movimento medio delle proiezioni di Ox_1 ed Ox_2 è diverso da quello comune al raggio dell'erpoloide e alla proiezione di Ox_3, e che la loro differenza è $\pm\frac{\pi}{2}\frac{u}{K}$, poichè ponendo per u un multiplo di K, quella differenza diviene un multiplo di $\pm\frac{\pi}{2}$.

Ora nell'analisi del movimento degli assi della sezione invariabile (Mem. I, § 9), abbiamo veduto che l'espressione del movimento medio di questi era differente, secondochè la poloide comprendeva due umbilichi, o nessuno, e che la differenza dei due movimenti era appunto $\frac{\pi u}{2K}$. Noi ora dimostreremo che il movimento medio degli assi della sezione invariabile coincide, nel primo caso, col movimento medio delle proiezioni dell'asse istantaneo e dell'asse Ox_3, nel secondo caso col movimento medio delle proiezioni degli altri due assi.

Basterà a tal uopo dimostrare, che nel primo caso $\psi-\mu_3$ ha un valor periodico, e nel secondo il valor periodico l'ha $\psi-\mu_1$.

1° *Caso* $\sigma=a+b<K'$. Si ha primieramente $-i\,\mathrm{sn}\,i\sigma>0$, e perciò

$$1-k^2\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta=\frac{-i\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\beta-i\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha}{-i\,\mathrm{sn}\,i\sigma}>0\,.$$

Ciò posto dall' equazioni (101) si ricava

$$\psi-\mu_3-\frac{\pi}{2}=\pm\frac{i}{4}\log\frac{1-k^2\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2(\alpha+u)}{1-k^2\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2(\alpha-u)}\,.$$

Il numeratore ed il denominatore della frazione sotto il logaritmo, sono quantità immaginarie conjugate. Se adunque poniamo

$$X=1-\frac{1}{2}k^2\mathrm{sn}^2\beta[\mathrm{sn}^2(u+\alpha)+\mathrm{sn}^2(u-\alpha)]\quad,\quad iY=\frac{1}{2}k^2\mathrm{sn}^2\beta[\mathrm{sn}^2(u+\alpha)-\mathrm{sn}^2(u-\alpha)]$$

potremo scrivere

$$\psi-\mu_1-\frac{\pi}{2}=\pm\frac{i}{4i}\log\frac{X+iY}{X-iY}=\pm\frac{1}{2}\mathrm{artg}\frac{Y}{X}\,.$$

Ora il valore di Y non diviene mai infinito, e diviene nullo solo per $u=0, K, 2K\ldots$

Il valore di X poi è sempre positivo. Infatti $-\mathrm{sn}^2\beta$ è come $-\mathrm{sn}^2\alpha$ una quantità positiva ed il valor minimo (massimo valor negativo) di $\frac{1}{2}\{\mathrm{sn}^2(u+\alpha)+\mathrm{sn}^2(u-\alpha)\}=$ $\frac{\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}^2\alpha\,\mathrm{dn}^2\alpha+\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u}{(1-k^2\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2 u)^2}$ corrisponde ad $u=0$, poichè allora il denominatore diviene minimo, e del numeratore il termine positivo divien nullo, ed il termine negativo diviene massimo, cioè $\mathrm{sn}^2\alpha$; dunque il minimo valore di X sarà $1-k^2\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2\alpha$, che è una quantità positiva. Perciò, non potendo mai $\frac{Y}{X}$ divenir infinito, $\psi-\mu_3-\frac{\pi}{2}$ sarà una quantità periodica, il cui valore assoluto sarà inferiore a $\frac{\pi}{4}$.

2° *Caso* $\sigma=a+b>K'$. Si ha primieramente $-i\,\mathrm{sn}\,i\sigma<0$, e perciò

$$1-k^2\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta=\frac{-i\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\beta-i\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha}{-i\,\mathrm{sn}\,\sigma}<0\,.$$

Ciò posto dall' equazioni (101) si ricava

$$\begin{aligned}\psi-\mu_1&=\pm\frac{i}{4}\log\frac{1-k^2\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2(\alpha+u)}{1-k^2\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2(\alpha-u)}\mp\frac{i}{2}\log\frac{\mathrm{sn}(u+\alpha)}{\mathrm{sn}(u-\alpha)}\\&=\pm\frac{i}{4}\log\frac{\mathrm{sn}^2(\alpha+iK'+u)-\mathrm{sn}^2\beta}{\mathrm{sn}^2(\alpha+iK'-u)-\mathrm{sn}^2\beta}\,.\end{aligned}$$

Il numeratore ed il denominatore della quantità sotto il logaritmo, sono quantità immaginarie coniugate. Se adunque poniamo

$$X=\frac{1}{2}[\mathrm{sn}^2(\alpha+iK'+u)+\mathrm{sn}^2(\alpha+iK'-u)]-\mathrm{sn}^2\beta$$

$$iY=\frac{1}{2}[\mathrm{sn}^2(\alpha+iK'-u)-\mathrm{sn}^2(\alpha+iK'+u)]$$

avremo

$$\psi-\mu_1=\pm\frac{1}{4i}\log\frac{X+iY}{X-iY}=\pm\frac{1}{2}\,\mathrm{artg}\,\frac{Y}{X}\,.$$

Ora il valore di Y è sempre finito, e non diviene nullo che per $u=0$, K, 2K... Il valore di X poi è sempre positivo. Infatti $-\mathrm{sn}^2\beta$ è, come $-\mathrm{sn}^2\alpha$, una quantità positiva, ed il valore minimo (massimo valor negativo) di

$$\frac{1}{2}\{\mathrm{sn}^2(\alpha+iK'+u)+\mathrm{sn}^2(\alpha+iK'-u)=\frac{\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}^2\alpha\,\mathrm{dn}^2\alpha+\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u}{k^2(\mathrm{sn}^2 u-\mathrm{sn}^2\alpha)^2}$$

corrisponde ad $u=0$, poichè allora il denominatore diviene minimo, e del numeratore il termine positivo diviene nullo, ed il termine negativo diviene massimo. Dunque il minimo valore di X sarà $\frac{1}{k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha} - \operatorname{sn}^2 \beta = \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 \beta}{k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha}$ che è una quantità positiva. Perciò non potendo mai $\frac{Y}{X}$ divenire infinito, $\psi - \mu_1$ sarà una quantità periodica, il cui valore assoluto sarà inferiore a $\frac{\pi}{4}$.

Concludiamo adunque: *che il movimento medio degli assi della sezione invariabile coincide col movimento medio delle proiezioni dell'asse istantaneo e dell'asse Ox_3, quando la poloide comprende due umbilichi; coincide col movimento medio delle proiezioni degli altri due assi, quando la poloide non comprende alcun umbilico.*

Abbiamo veduto (§ 9, M. I) che il movimento medio degli assi della sezione invariabile, nel primo caso è

$$\mp \left\{ \frac{\partial \log H(i\sigma)}{2\partial\sigma} + \frac{\partial \log H(i\tau)}{2\partial\tau} \right\} u = \pm \frac{\partial \log H(\alpha+\beta) H(\alpha-\beta)}{2i\partial\alpha} u$$

e nel secondo

$$\mp \left\{ \frac{\partial \log H(i\sigma')}{2\partial\sigma'} + \frac{\partial \log H(i\tau)}{2\partial\tau} \right\} u = \pm \frac{\partial \log H(\alpha'+\beta) H(\alpha'-\beta)}{2i\partial\alpha'} u.$$

Tali dunque saranno rispettivamente i movimenti medî delle proiezioni dell'asse istantaneo e dell'asse Ox_3, e delle proiezioni degli assi Ox_1 ed Ox_2.

§ 9.

Ineguaglianza dei movimenti delle proiezioni degli assi dell'ellissoide e dell'asse istantaneo.

Per avere tali ineguaglianze introdurremo le funzioni H e Θ. Osserviamo primieramente che

$$E = \frac{\operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha}{i(\operatorname{sn}^2\alpha - \operatorname{sn}^2\beta)} = \frac{\partial \log(\operatorname{sn}^2\alpha - \operatorname{sn}^2\beta)}{2i\partial\alpha}$$

ed essendo

$$\operatorname{sn}^2\alpha - \operatorname{sn}^2\beta = \frac{\Theta^2(o) H(\alpha+\beta) H(\alpha-\beta)}{k\Theta^2(\alpha)\Theta^2(\beta)}$$

verrà

$$E=\frac{\partial \log H(\alpha+\beta)H(\alpha-\beta)}{2i\partial\alpha}+i\frac{\partial\log\Theta(\alpha)}{\partial\alpha}.$$

Siccome poi

$$\Pi(u,\alpha)=\frac{\partial\log\Theta(\alpha)}{\partial\alpha}u+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-\alpha)}{\Theta(u+\alpha)}$$

avremo

$$\pm Eu\mp i\Pi(u,\alpha)=\pm u\frac{\partial\log H(\alpha+\beta)H(\alpha-\beta)}{2i\partial\alpha}\mp\frac{i}{2}\log\frac{\Theta(u-\alpha)}{\Theta(u+\alpha)}.$$

Inoltre

$$\log\frac{\mathrm{sn}(u+\alpha)}{\mathrm{sn}(u-\alpha)}=\log\frac{H(u+\alpha)}{H(u-\alpha)}+\log\frac{\Theta(u-\alpha)}{\Theta(u+\alpha)}$$

$$\log\frac{\mathrm{cn}(u+\alpha)}{\mathrm{cn}(u-\alpha)}=\log\frac{H_1(u+\alpha)}{H_1(u-\alpha)}+\log\frac{\Theta(u-\alpha)}{\Theta(u+\alpha)}$$

$$\log\frac{\mathrm{dn}(u+\alpha)}{\mathrm{dn}(u-\alpha)}=\log\frac{\Theta_1(u+\alpha)}{\Theta_1(u-\alpha)}+\log\frac{\Theta(u-\alpha)}{\Theta(u+\alpha)}.$$

Dunque sostituendo nelle (101), si otterrà

$$\left.\begin{aligned}
\mu_1&=\pm\frac{\partial\log H(\alpha+\beta)H(\alpha-\beta)}{2i\partial\alpha}u\pm\frac{i}{2}\log\frac{H(u+\alpha)}{H(u-\alpha)}+\frac{\pi}{2}\\
\mu_2&=\pm\frac{\partial\log H(\alpha+\beta)H(\alpha-\beta)}{2i\partial\alpha}u\pm\frac{i}{2}\log\frac{H_1(u+\alpha)}{H_1(u-\alpha)}+\frac{\pi}{2}\\
\mu_3&=\pm\frac{\partial\log H(\alpha+\beta)H(\alpha-\beta)}{2i\partial\alpha}u\pm\frac{i}{2}\log\frac{\Theta(u+\alpha)}{\Theta(u-\alpha)}\\
\mu&=\pm\frac{\partial\log H(\alpha+\beta)H(\alpha-\beta)}{2i\partial\alpha}u\pm\frac{i}{2}\log\frac{\Theta_1(u+\alpha)}{\Theta_1(u-\alpha)}
\end{aligned}\right\}\qquad(102)$$

In queste equazioni dovrà intendersi che per $u=K$, $\pm\frac{i}{2}\log\frac{H(u+\alpha)}{H(u-\alpha)}$, $\pm\frac{i}{2}\log\frac{\Theta_1(u+\alpha)}{\Theta_1(u-\alpha)}$, e $\pm\frac{i}{2}\log\frac{\Theta(u+\alpha)}{\Theta(u-\alpha)}$ siano nulli, e $\pm\frac{i}{2}\log\frac{H_1(u+\alpha)}{H_1(u-\alpha)}=\pm\frac{\pi}{2}$. Con queste convenzioni, necessarie per la moltiplicità dei valori dei logaritmi, i valori di $\mu_1\,\mu_2\,\mu_3\,\mu$ dati dalle (102), per $u=K$ coincidono con quelli somministrati dalle (101).

Poniamo ora

$$\alpha-iK'=\alpha'\qquad\beta-iK'=\beta'.$$

Dalle *Fundamenta*, (§ 61, formole 71 e 91) ricaviamo facilmente

$$\frac{\partial \log \mathrm{H}(\alpha+\beta)\,\mathrm{H}(\alpha-\beta)}{2i\partial\alpha}=\frac{\partial \log \mathrm{H}(\alpha'+\beta)\,\mathrm{H}(\alpha'-\beta)}{2i\partial\alpha'}-\frac{\pi}{2\mathrm{K}}$$

$$\frac{\mathrm{H}(u+\alpha)}{\mathrm{H}(u-\alpha)}=-e^{\frac{-\pi i u}{\mathrm{K}}}\,\frac{\Theta(u+\alpha')}{\Theta(u-\alpha')}$$

$$\frac{\mathrm{H}_1(u+\alpha)}{\mathrm{H}_1(u-\alpha)}=\;e^{\frac{-\pi i u}{\mathrm{K}}}\,\frac{\Theta_1(u+\alpha')}{\Theta_1(u-\alpha')}$$

$$\frac{\Theta(u+\alpha)}{\Theta(u-\alpha)}=-e^{\frac{-\pi i u}{\mathrm{K}}}\,\frac{\mathrm{H}(u+\alpha')}{\mathrm{H}(u-\alpha')}$$

$$\frac{\Theta_1(u+\alpha)}{\Theta_1(u-\alpha)}=\;e^{\frac{-\pi i u}{\mathrm{K}}}\,\frac{\mathrm{H}_1(u+\alpha')}{\mathrm{H}_1(u-\alpha')}\ (*).$$

Onde avremo quest' altro sistema di equazioni

$$\left.\begin{aligned}
\mu_1&=\pm\frac{\partial \log \mathrm{H}(\alpha'+\beta)\,\mathrm{H}(\alpha'-\beta)}{2i\partial\alpha'}\,u\pm\frac{i}{2}\log\frac{\Theta(u+\alpha')}{\Theta(u-\alpha')}+\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{2}\\
\mu_2&=\pm\frac{\partial \log \mathrm{H}(\alpha'+\beta)\,\mathrm{H}(\alpha'-\beta)}{2i\partial\alpha'}\,u\pm\frac{i}{2}\log\frac{\Theta_1(u+\alpha')}{\Theta_1(u-\alpha')}+\frac{\pi}{2}\pm\pi\\
\mu_3&=\pm\frac{\partial \log \mathrm{H}(\alpha'+\beta)\,\mathrm{H}(\alpha'-\beta)}{2i\partial\alpha'}\,u\pm\frac{i}{2}\log\frac{\mathrm{H}(u+\alpha')}{\mathrm{H}(u-\alpha')}\pm\frac{\pi}{2}\\
\mu&=\pm\frac{\partial \log \mathrm{H}(\alpha'+\beta)\,\mathrm{H}(\alpha'-\beta)}{2i\partial\alpha'}\,u\pm\frac{i}{2}\log\frac{\mathrm{H}_1(u+\alpha')}{\mathrm{H}_1(u-\alpha')}
\end{aligned}\right\}\qquad(103)$$

Ed in queste equazioni dovrà intendersi che per $u=\mathrm{K}$, $\pm\frac{i}{2}\log\frac{\Theta(u+\alpha')}{\Theta(u-\alpha')}$, $\pm\frac{i}{2}\log\frac{\Theta_1(u+\alpha')}{\Theta_1(u-\alpha')}$, $\pm\frac{i}{2}\log\frac{\mathrm{H}(u+\alpha')}{\mathrm{H}(u-\alpha')}$ siano nulli, e $\pm\frac{i}{2}\log\frac{\mathrm{H}_1(u+\alpha')}{\mathrm{H}_1(u-\alpha')}=\pm\frac{\pi}{2}$.

Dalle equazioni (102) e (103) e tenendo conto dei movimenti medî determinati alla fine del § 8, si deduce che le ineguaglianze delle longitudini $\mu_1\,\mu_2\,\mu_3$ e μ sono date rispettivamente da

$$\pm\frac{i}{2}\log\frac{\Theta(u+\alpha')}{\Theta(u-\alpha')}\ ,\ \pm\frac{i}{2}\log\frac{\Theta_1(u+\alpha')}{\Theta_1(u-\alpha')}\ ,\ \pm\frac{i}{2}\log\frac{\Theta(u+\alpha)}{\Theta(u-\alpha)}\ ,\ \pm\frac{i}{2}\log\frac{\Theta_1(u+\alpha)}{\Theta_1(u-\alpha)}.$$

(*) Cfr. Cayley. *An elementary Treatise on elliptic functions*, pag. 150.

Queste ineguaglianze, salvo la differenza del metodo e una piccola differenza di notazione, sono state trovate da **Jacobi** (*). Egli, per dir meglio, trovò il sistema di equazioni (102) e le prime due equazioni del sistema (103), eccetto i coefficienti di u, che nelle formole di **Jacobi** non hanno l'omogeneità che loro somministra la funzione β o β' da noi introdotta.

Noi qui riscriveremo dal § 9 della Memoria I le equazioni che rappresentano il movimento degli assi della sezione invariabile, colla costante determinata, ed introducendo le quantità α e β ovvero α' e β' in luogo di σ, τ e σ' equazioni originali, non essendo mai stato trattato il problema a cui si riferiscono

$$\psi = \pm \frac{\partial \log \mathrm{H}(\alpha+\beta)\,\mathrm{H}(\alpha-\beta)}{2i\partial\alpha}\,u \pm \frac{i}{4}\log\frac{\Theta(u+\alpha+\beta)\,\Theta(u+\alpha-\beta)}{\Theta(u-\alpha-\beta)\,\Theta(u-\alpha+\beta)} + \frac{\pi}{2}$$

$$\psi = \pm \frac{\partial \log \mathrm{H}(\alpha'+\beta')\,\mathrm{H}(\alpha'-\beta')}{2i\partial\alpha'}\,u \pm \frac{i}{4}\log\frac{\Theta(u+\alpha'+\beta')\,\Theta(u+\alpha'-\beta')}{\Theta(u-\alpha'-\beta')\,\Theta(u-\alpha'+\beta')} + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}\,.$$

La costante fu determinata dietro la condizione che per $u=\mathrm{K}$ sia $\psi-\mu_1=0$: onde i logaritmi che figurano in queste equazioni debbono per tal valore di u ritenersi nulli. Le due formole valgono per tutti i casi, ma il termine logaritmico della prima equazione rappresenta l'ineguaglianza del movimento degli assi, quando la poloide contiene due umbilichi, ed il termine logaritmico della seconda equazione rappresenta la stessa ineguaglianza, quando la poloide non contiene alcun umbilico.

§ 10.

Coseni di direzione degli assi della sezione invariabile rispetto agli assi principali del corpo, ed all' asse istantaneo.

I coseni di direzione degli assi della sezione invariabile rispetto agli assi dell'ellissoide sono dati dalle sei quantità (M. I, § 1)

$$\frac{m_1 x_1}{a_1-\lambda_1} \qquad \frac{m_1 x_2}{a_2-\lambda_1} \qquad \frac{m_1 x_3}{a_3-\lambda_1}$$

$$\frac{m_2 x_1}{a_1-\lambda_2} \qquad \frac{m_2 x_2}{a_2-\lambda_2} \qquad \frac{m_2 x_3}{a_3-\lambda_2}$$

(*) La differenza di notazione consiste in ciò che in luogo di α egli scrive sempre $i\alpha$, ed in luogo di $\alpha'=\alpha-i\mathrm{K}'$ egli pone $i\alpha'=i\mathrm{K}'-i\alpha$. Le longitudini che egli determina non sono propriamente μ_1 μ_2 μ_3 e μ ma si riferiscono alle intersezioni col piano invariabile dei tre piani principali del corpo, e del piano istantaneo di rotazione.

e rispetto all' asse istantaneo da

$$\frac{m_1}{v} \quad \frac{m_2}{v}$$

dicendo v il raggio della poloide $= \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$.

Dall' equazioni (66)

$$\frac{a_1}{c} = \frac{\operatorname{sn} i\sigma \operatorname{dn} i\tau + \operatorname{sn} i\tau \operatorname{dn} i\sigma}{\operatorname{sn} i\sigma \operatorname{dn} i\tau - \operatorname{sn} i\tau \operatorname{dn} i\sigma} \,, \quad \frac{a_2}{c} = \frac{\operatorname{sn} i\sigma + \operatorname{sn} i\tau}{\operatorname{sn} i\sigma - \operatorname{sn} i\tau} \,, \quad \frac{a_3}{c} = \frac{\operatorname{sn} i\sigma \operatorname{cn} i\tau - \operatorname{sn} i\tau \operatorname{cn} i\sigma}{\operatorname{sn} i\sigma \operatorname{cn} i\tau + \operatorname{sn} i\tau \operatorname{cn} i\sigma}$$

e dalle (60)

$$\frac{\lambda_1}{c} = \frac{\mathrm{U} \operatorname{sn} i\sigma + \mathrm{V} \operatorname{sn} i\tau}{\mathrm{U} \operatorname{sn} i\sigma - \mathrm{V} \operatorname{sn} i\tau} \,, \quad \frac{\lambda_2}{c} = \frac{\mathrm{U} \operatorname{sn} i\sigma - \mathrm{V} \operatorname{sn} i\tau}{\mathrm{U} \operatorname{sn} i\sigma + \mathrm{V} \operatorname{sn} i\tau}$$

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{c} = \frac{4 \operatorname{sn} i\sigma \operatorname{sn} i\tau \, \mathrm{UV}}{\operatorname{sn}^2 i\tau - \operatorname{sn}^2 i\sigma} = \frac{n^2}{c} \frac{\mathrm{UV}}{\operatorname{sn} i\sigma \operatorname{sn} i\tau} \,,$$

ove

$$\mathrm{U} = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 i\sigma \operatorname{sn}^2 u} \,, \quad \mathrm{V} = \pm \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 i\tau \operatorname{sn}^2 u} \left(\text{secondochè } \tau \lesseqgtr \mathrm{K}'\right).$$

ricaviamo

$$\frac{a_1 - \lambda_1}{c} = \frac{2 \operatorname{sn} i\sigma \operatorname{sn} i\tau}{\operatorname{sn} i\sigma \operatorname{dn} i\tau - \operatorname{sn} i\tau \operatorname{dn} i\sigma} \frac{\mathrm{U} \operatorname{dn} i\sigma - \mathrm{V} \operatorname{dn} i\tau}{\mathrm{U} \operatorname{sn} i\sigma - \mathrm{V} \operatorname{sn} i\tau}$$

$$\frac{a_2 - \lambda_1}{c} = \frac{2 \operatorname{sn} i\sigma \operatorname{sn} i\tau}{\operatorname{sn} i\sigma - \operatorname{sn} i\tau} \frac{\mathrm{U} - \mathrm{V}}{\mathrm{U} \operatorname{sn} i\sigma - \mathrm{V} \operatorname{sn} i\tau}$$

$$\frac{a_3 - \lambda_1}{c} = \frac{-2 \operatorname{sn} i\sigma \operatorname{sn} i\tau}{\operatorname{sn} i\sigma \operatorname{cn} i\tau + \operatorname{sn} i\tau \operatorname{cn} i\sigma} \frac{\mathrm{U} \operatorname{cn} i\sigma + \mathrm{V} \operatorname{cn} i\tau}{\mathrm{U} \operatorname{sn} i\sigma - \mathrm{V} \operatorname{sn} i\tau}.$$

I valori di $a_1 - \lambda_2$, $a_2 - \lambda_2$, $a_3 - \lambda_2$ si deducono da questi col solo cambiamento di V in $-$V; ed in generale, in tutte le formole che contengono le variabili λ_1 e λ_2 si farà l'inversione di queste con quel solo cambiamento di segno.

Posto

$$\Delta = (\operatorname{sn} i\sigma \operatorname{dn} i\tau - \operatorname{sn} i\tau \operatorname{dn} i\sigma)(\operatorname{sn} i\sigma - \operatorname{sn} i\tau)(\operatorname{sn} i\sigma \operatorname{cn} i\tau + \operatorname{sn} i\tau \operatorname{cn} i\sigma)$$

ed osservando che $\dfrac{2 \operatorname{sn}^2 i\sigma \operatorname{sn}^2 i\tau}{\operatorname{sn}^2 i\sigma - \operatorname{sn}^2 i\tau} = -\dfrac{n^2}{2c}$, avremo

$$m_1^2 = \frac{(a_1 - \lambda_1)(a_2 - \lambda_1)(a_3 - \lambda_1)}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{n^2 (\mathrm{U} \operatorname{sn} i\sigma + \mathrm{V} \operatorname{sn} i\tau)(\mathrm{U} \operatorname{dn} i\sigma - \mathrm{V} \operatorname{dn} i\tau)(\mathrm{U} - \mathrm{V})(\mathrm{U} \operatorname{cn} i\sigma + \mathrm{V} \operatorname{cn} i\tau)}{2\Delta \mathrm{UV}}.$$

Ora considerando che

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}^2\,\mathrm{sn}^2 i\sigma - \mathrm{V}^2\,\mathrm{sn}^2 i\tau &= \mathrm{sn}^2 i\sigma - \mathrm{sn}^2 i\tau\\
\mathrm{U}^2\,\mathrm{dn}^2 i\sigma - \mathrm{V}^2\,\mathrm{dn}^2 i\tau &= -k^2(\mathrm{sn}^2 i\sigma - \mathrm{sn}^2 i\tau)\,\mathrm{cn}^2 u\\
\mathrm{U}^2 - \mathrm{V}^2 &= k^2(\mathrm{sn}^2 i\sigma - \mathrm{sn}^2 i\tau)\,\mathrm{sn}^2 u\\
\mathrm{U}^2\,\mathrm{cn}^2 i\sigma - \mathrm{V}^2\,\mathrm{cn}^2 i\tau &= -(\mathrm{sn}^2 i\sigma - \mathrm{sn}^2 i\tau)\,\mathrm{dn}^2 u
\end{aligned}$$

otterremo

$$\frac{c^2}{(a_1-\lambda_1)^2} = -\frac{(\mathrm{sn}\,i\sigma\,\mathrm{dn}\,i\tau - \mathrm{sn}\,i\tau\,\mathrm{dn}\,i\sigma)^2}{4k^2\,\mathrm{sn}^2 i\sigma\,\mathrm{sn}^2 i\tau}\,\frac{\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma - \mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau}{\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma + \mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau}\,\frac{\mathrm{U}\,\mathrm{dn}\,i\sigma + \mathrm{V}\,\mathrm{dn}\,i\tau}{\mathrm{U}\,\mathrm{dn}\,i\sigma - \mathrm{V}\,\mathrm{dn}\,i\tau}\,\frac{1}{\mathrm{cn}^2 u}$$

$$\frac{c^2}{(a_2-\lambda_1)^2} = \frac{(\mathrm{sn}\,i\sigma - \mathrm{sn}\,i\tau)^2}{4k^2\,\mathrm{sn}^2 i\sigma\,\mathrm{sn}^2 i\tau}\,\frac{\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma - \mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau}{\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma + \mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau}\,\frac{\mathrm{U}+\mathrm{V}}{\mathrm{U}-\mathrm{V}}\,\frac{1}{\mathrm{sn}^2 u}$$

$$\frac{c^2}{(a_3-\lambda_1)^2} = -\frac{(\mathrm{sn}\,i\sigma\,\mathrm{cn}\,i\tau + \mathrm{sn}\,i\tau\,\mathrm{cn}\,i\sigma)^2}{4\,\mathrm{sn}^2 i\sigma\,\mathrm{sn}^2 i\tau}\,\frac{\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma - \mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau}{\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma + \mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau}\,\frac{\mathrm{U}\,\mathrm{cn}\,i\sigma - \mathrm{V}\,\mathrm{cn}\,i\tau}{\mathrm{U}\,\mathrm{cn}\,i\sigma + \mathrm{V}\,\mathrm{cn}\,i\tau}\,\frac{1}{\mathrm{dn}^2 u}.$$

D'altra parte dalle (94) e dalle (66) si ricava

$$\frac{x_1^2}{c} = \frac{\mathrm{sn}\,i\sigma\,\mathrm{dn}\,i\tau + \mathrm{sn}\,i\tau\,\mathrm{dn}\,i\sigma}{\mathrm{sn}\,i\sigma\,\mathrm{dn}\,i\tau - \mathrm{sn}\,i\tau\,\mathrm{dn}\,i\sigma}\,\frac{\mathrm{cn}^2 u}{\mathrm{cn}^2\beta}\,,\qquad \frac{x_2^2}{c} = \frac{\mathrm{sn}\,i\sigma + \mathrm{sn}\,i\tau}{\mathrm{sn}\,i\sigma - \mathrm{sn}\,i\tau}\,\frac{\mathrm{dn}^2\beta}{\mathrm{cn}^2\beta}\,\mathrm{sn}^2 u$$

$$\frac{x_3^2}{c} = -\frac{\mathrm{sn}\,i\sigma\,\mathrm{cn}\,i\tau - \mathrm{sn}\,i\tau\,\mathrm{cn}\,i\sigma}{\mathrm{sn}\,i\sigma\,\mathrm{cn}\,i\tau + \mathrm{sn}\,i\tau\,\mathrm{tn}\,i\sigma}\,\frac{\mathrm{sn}^2\beta}{\mathrm{cn}^2\beta}\,\mathrm{dn}^2 u\,.$$

Onde si avrà

$$\frac{c x_1^2}{(a_1-\lambda_1)^2} = -\frac{(\mathrm{sn}^2 i\sigma - \mathrm{sn}^2 i\tau)}{4k^2\,\mathrm{sn}^2 i\sigma\,\mathrm{sn}^2 i\tau\,\mathrm{cn}^2\beta}\,\frac{\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma - \mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau}{\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma + \mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau}\,\frac{\mathrm{U}\,\mathrm{dn}\,i\sigma + \mathrm{V}\,\mathrm{dn}\,i\tau}{\mathrm{U}\,\mathrm{dn}\,i\sigma - \mathrm{V}\,\mathrm{dn}\,i\tau}$$

$$\frac{c x_2^2}{(a_2-\lambda_1)^2} = \frac{(\mathrm{sn}^2 i\sigma - \mathrm{sn}^2 i\tau)\,\mathrm{dn}^2\beta}{4k^2\,\mathrm{sn}^2 i\sigma\,\mathrm{sn}^2 i\tau\,\mathrm{cn}^2\beta}\,\frac{\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma - \mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau}{\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma + \mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau}\,\frac{\mathrm{U}+\mathrm{V}}{\mathrm{U}-\mathrm{V}}$$

$$\frac{c x_3^2}{(a_3-\lambda_1)^2} = \frac{(\mathrm{sn}^2 i\sigma - \mathrm{sn}\,i\tau)\,\mathrm{sn}^2\beta}{4\,\mathrm{sn}^2 i\sigma\,\mathrm{sn}^2 i\tau\,\mathrm{cn}^2\beta}\,\frac{\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma - \mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau}{\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma + \mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau}\,\frac{\mathrm{U}\,\mathrm{cn}\,i\sigma - \mathrm{V}\,\mathrm{cn}\,i\tau}{\mathrm{U}\,\mathrm{cn}\,i\sigma + \mathrm{V}\,\mathrm{cn}\,i\tau}.$$

Dunque

$$\frac{m_1^2 x_1^2}{(a_1-\lambda_1)^2} = -\frac{1}{k^2\,\mathrm{cn}^2\beta}\,\frac{(\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma - \mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau)(\mathrm{U}\,\mathrm{dn}\,i\sigma + \mathrm{V}\,\mathrm{dn}\,i\tau)(\mathrm{U}-\mathrm{V})(\mathrm{U}\,\mathrm{cn}\,i\sigma + \mathrm{V}\,\mathrm{cn}\,i\tau)}{2\Delta\mathrm{UV}}$$

$$\frac{m_1^2 x_2^2}{(a_2-\lambda_1)^2} = \frac{\mathrm{dn}^2\beta}{k^2\,\mathrm{cn}^2\beta}\,\frac{(\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma - \mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau)(\mathrm{U}\,\mathrm{dn}\,i\sigma - \mathrm{V}\,\mathrm{dn}\,i\tau)(\mathrm{U}+\mathrm{V})(\mathrm{U}\,\mathrm{cn}\,i\sigma + \mathrm{V}\,\mathrm{cn}\,i\tau)}{2\Delta\mathrm{UV}}$$

$$\frac{m_1^2 x_3^2}{(a_3-\lambda_1)^2} = \frac{\mathrm{sn}^2\beta}{\mathrm{cn}^2\beta}\,\frac{(\mathrm{U}\,\mathrm{sn}\,i\sigma - \mathrm{V}\,\mathrm{sn}\,i\tau)(\mathrm{U}\,\mathrm{dn}\,i\sigma - \mathrm{V}\,\mathrm{dn}\,i\tau)(\mathrm{U}-\mathrm{V})(\mathrm{U}\,\mathrm{cn}\,i\sigma - \mathrm{V}\,\mathrm{cn}\,i\tau)}{2\Delta\mathrm{UV}}.$$

Cambiando semplicemente V in —V, avremo i valori di

$$m_2^2 \;,\; \frac{m_2^2 x_1^2}{(a_1-\lambda_2)^2} \;,\; \frac{m_2^2 x_2^2}{(a_2-\lambda_2)^2} \;,\; \frac{m_2^2 x_3^2}{(a_3-\lambda_2)^2} \,.$$

I valori di $\frac{m_1^2}{v^2}$ e $\frac{m_2^2}{v^2}$ si traggano immediatamente da m_1^2 ed m_2^2 osservando che

$$\frac{v^2}{c} = \frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{P}^2 \operatorname{cn}^2\alpha}(\operatorname{dn}^2\alpha - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2\alpha) = \frac{n^2}{\operatorname{cn}^2\alpha}(\operatorname{dn}^2\alpha - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2\alpha) \,.$$

Per avere finalmente gli otto coseni fatti dagli assi della sezione invariabile bisognerebbe ancora estrarre le radici dalle otto espressioni trovate: ma la discussione dei segni da darsi a queste radici riuscirebbe delicata e difficile. Noi eviteremo questa difficoltà presentando in un'altra memoria espressioni di questi otto coseni assai diverse da queste, e molto più semplici.

§ 11.

I coseni di Jacobi ricavati da quelli del Chelini.

Jacobi ha determinato le espressioni in funzione del tempo, dei coseni di direzione degli assi principali del corpo rotante, o dell'ellissoide, rispetto a tre assi ortogonali di cui uno è normale al piano invariabile e gli altri due si muovono in questo piano con moto uniforme che è in sostanza il movimento medio del raggio dell'erpoloide. A tale scopo egli ricavò primieramente i valori di tre quantità ϑ, ψ, φ, di cui la prima è l'inclinazione del piano $(a_1 a_2)$ sul piano invariabile, e le altre due sono le longitudini sull'uno e sull'altro piano della loro comune intersezione; introdotti poscia questi valori nelle notissime nove funzioni di ϑ, ψ, φ colle quali Eulero rappresenta i nove coseni di direzione di due terne d'assi ortogonali, ne ricavò le espressioni elegantissime dei suoi coseni.

Il procedimento seguito da Jacobi dovea evidentemente riuscire poco simmetrico, per essersi egli servito della longitudine di un solo degli assi del corpo, giacchè la quantità ψ non differisce da μ_3 che di $\frac{\pi}{2}$. Noi mostreremo come giovandosi ad un tempo delle espressioni di $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ si giunga in modo uniforme e speditissimo alle espressioni Jacobiane. Allo stesso risultato giungeremo anche per mezzo della sola longitudine μ dell'asse istantaneo, col beneficio però dei coseni di direzione rispetto a due altri assi, che girano sul piano invariabile, colla velocità stessa del raggio della erpoloide: coseni di espressione molto elegante per simmetria e per semplicità ricavati dal chiarissimo Prof. Chelini con mezzi geometrici non meno semplici ed eleganti.

Cominceremo pertanto col seguire quest'ultima via, riferendo dapprima il brano della memoria del Chelini, in cui quei coseni sono determinati.

« **Proposizione.** — Essendo dati allo spirar del tempo t, i valori delle variabili « p, q, r, v e la posizione di v sul piano immobile della coppia d'impulso, il luogo del- « l'ellissoide centrale, ossia de' suoi tre assi Op, Oq, Or, si avrà dai nove coseni

$$\cos(xp)=\frac{A}{G}p \quad , \quad \cos(xq)=\frac{B}{G}q \quad , \quad \cos(xr)=\frac{C}{G}r$$

$$\cos(yp)=\left(1-\frac{Ah}{G}\right)\frac{p}{v} \quad , \quad \cos(yq)=\left(1-\frac{Bh}{G}\right)\frac{q}{v} \quad , \quad \cos(yr)=\left(1-\frac{Ch}{G}\right)\frac{r}{v}$$

$$\cos(zp)=\frac{B-C}{G}\frac{qr}{v} \quad , \quad \cos(zq)=\frac{C-A}{G}\frac{rp}{v} \quad , \quad \cos(zr)=\frac{A-B}{G}\frac{pq}{v} \ (*)$$

« dove dei tre assi rettangolari Ox, Oy, Oz, il primo è diretto nel senso della retta « fissa Oh, il secondo è parallelo al raggio mobile v dell'erpoloide, ed il terzo è per- « pendicolare al piano dell'angolo $hO\vartheta$.

« *Dim.* — Queste formole sono tutte messe in aperto dalle note proprietà delle « proiezioni. Infatti:

« 1° L'asse Ox essendo diretto secondo l'asse OG della coppia d'impulso, e le « proiezioni di OG sugli assi Op, Oq, Or essendo $L=Ap$, $M=Bq$, $N=Cr$, si ha im- « mediatamente

$$\cos(xp)=\frac{Ap}{G} \quad , \quad \cos(xq)=\frac{Bp}{G} \quad , \quad \cos(xr)=\frac{Cr}{G}\,.$$

« 2° L'asse Oy essendo parallelo al raggio $v=h\vartheta$ per avere $\cos(yp)$, $\cos(yq)$, « $\cos(yr)$ basterà proiettare questo raggio $h\vartheta$ sugli assi Op, Oq, Or e poscia dividere « le proiezioni per $h\vartheta$, ossia per v. Ma le proiezioni della retta $h\vartheta$ sono identiche a « quelle della linea contermina $hO\vartheta$, composta delle due $(hO, O\vartheta)=(O\vartheta, -Oh)=$ « $(\vartheta, -h)$, e la somma delle proiezioni di queste due sull'asse Op è

$$p-h\cos(xp)=\frac{G-Ah}{G}p\,,$$

« dunque

$$\cos(yp)=\frac{G-Ah}{G}\frac{p}{v}\,.$$

(*) A, B, C, sono i momenti d'inerzia principali del corpo; G è la coppia d'impulso; il *piano della coppia d'impulso* è il piano fisso tangente all'ellissoide; $Oh=h$ la distanza di questo piano dal centro; $O\vartheta=\vartheta$ il semidiametro di contatto; v la proiezione di ϑ sul piano fisso, o il raggio dell'erpoloide.

« Di qui per ragion di simmetria i valori di $\cos(yq)$, $\cos(yr)$.

« 3° L'asse Oz essendo perpendicolare al piano del parallelogrammo costruito « sulle due rette OG, $O\theta$ prese per lati, se sul medesimo Oz si prende un segmento « $G\theta \operatorname{sen}(x\theta) = Gv$, sappiamo che le proiezioni di siffatto segmento sugli assi Op, Oq, Or « sono

$$Mr - Nq \quad , \quad Np - Lr \quad , \quad Lq - Mp$$

« Dunque, dividendo queste proiezioni per Gv, si avrà

$$\cos(zp) = \frac{B - C}{G}\frac{qr}{v} \quad , \quad \cos(zq) = \frac{C - A}{G}\frac{rp}{v} \quad , \quad \cos(zr) = \frac{A - B}{G}\frac{pq}{v} \text{ (*) ».}$$

Notiamo che questi tre ultimi coseni potevansi anche ottenere immediatamente coll' equazioni

$$\cos(zp) = \cos(xq)\cos(yr) - \cos(xr)\cos(yq), \text{ ecc.}$$

e ciò dimostra che gli assi Ox, Oy, Oz, sono rispettivamente sovrapponibili agli assi Op, Oq, Or, che sono gli assi che noi abbiam chiamato Ox_1, Ox_2, Ox_3.

Per riportare i nove coseni preindicati alle nostre notazioni, basti osservare che l'ellissoide centrale considerato dal Prof. Chelini ha per equazione

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = Gh$$

mentre l'equazione di quello considerato da noi è

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \frac{x_3^2}{a_3} = 1 .$$

Donde le relazioni

$$\frac{Gh}{A} = a_1 \quad , \quad \frac{Gh}{B} = a_2 \quad , \quad \frac{Gh}{C} = a_3 .$$

Inoltre h rappresenta la distanza del centro dell'ellissoide dal piano fisso. Onde

$$h^2 = m_3^2 = \frac{a_1 a_2 a_3}{c^2} .$$

(*) Chelini, *Determinazione analitica della rotazione de' corpi liberi secondo i concetti del signor* Poinsot.—*Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*. Vol. X. Bologna 1860.

Ciò posto i nove coseni si possono scrivere nel modo seguente

$$\cos(xp)=\frac{hx_1}{a_1} \qquad \cos(xq)=\frac{hx_2}{a_2} \qquad \cos(xv)=\frac{hx_3}{a_3}$$

$$\cos(yp)=\frac{c^2-a_2a_3}{c}\frac{x_1}{v} \qquad \cos(yq)=\frac{c^3-a_3a_1}{c^2}\frac{x_2}{v} \qquad \cos(yr)=\frac{c^2-a_1a_2}{c^2}\frac{x_3}{r}$$

$$\cos(zp)=h\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)\frac{x_2x_3}{v} \qquad \cos(zq)=h\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_1}\right)\frac{x_3x_1}{v} \qquad \cos(zr)=h\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)\frac{x_1x_2}{v}.$$

La riduzione di questi coseni alle funzioni ellittiche è fatta immediatamente per mezzo delle formole già trovate; $\cos(xp)$, $\cos(xq)$, $\cos(xr)$ si trasformano colle (93); $\cos(yp)$, $\cos(yq)$, $\cos(yr)$ colle (90), (95) e colla (98) che somministra il valore di v che è perciò dato da

$$\frac{v}{\sqrt{c}}=\sqrt{\frac{m_1^2+m_2^2}{c}}=\pm\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{P}\,\mathrm{cn}\,\alpha}$$

essendo

$$\mathrm{M}=\mathrm{sn}^2\alpha-\mathrm{sn}^2\beta \qquad \mathrm{N}=\sqrt{\mathrm{dn}^2\alpha-k^2\mathrm{cn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2u} \qquad \mathrm{P}=\sqrt{-\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\beta}\,.$$

Finalmente $\cos(zp)$, $\cos(zq)$, $\cos(zr)$ si ricavano immediatamente servendosi delle relazioni $\cos(zp)=\cos(xq)\cos(yr)-\cos(xr)\cos(yq)$ occ. Così si trova:

$$\cos(xp)=-\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{cn}\,\alpha} \qquad \cos(xq)=\frac{\mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{cn}\,\alpha}\mathrm{sn}\,u \qquad \cos(xr)=\pm\frac{\mathrm{sn}\,\alpha}{i\,\mathrm{cn}\,\alpha}\mathrm{dn}\,u \tag{104}$$

$$\cos(yp)=\pm\frac{\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha}\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{N}} \qquad \cos(yq)=\mp\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,\alpha}{i\,\mathrm{cn}\,\alpha}\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{N}} \qquad \cos(zr)=\frac{\mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{cn}\,\alpha}\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{N}} \tag{105}$$

$$\cos(zp)=\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{N}} \qquad \cos(zq)=\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,\alpha}{\mathrm{N}} \qquad \cos(zr)=\mp\frac{k^2\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,\alpha}{\mathrm{N}} \tag{106}$$

Immaginiamo ora tre altri assi $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, di cui il terzo coincida con Ox, il secondo ed il primo facciano rispettivamente con Oy gli angoli μ' e, $\frac{\pi}{2}+\mu'$ contati in senso contrario al moto. Noi intenderemo per μ' l'angolo $\mu-n'u$: cosicchè la longitudine di Oy essendo μ, quella di $O\xi$, e di $O\eta$ saranno rispettivamente $n'u-\frac{\pi}{2}$, e $n'u$: questi sono gli assi di **Jacobi** i quali ruotano sul piano invariabile colla velocità angolare nn', cioè colla velocità angolare media del raggio dell'erpoloide, che abbiamo determinato alla fine del § 8.

Ciò posto, dai due seguenti schemi:

	x	y	z
p	$\cos(px)$	$\cos(py)$	$\cos(pz)$
q	$\cos(qx)$	$\cos(qy)$	$\cos(qz)$
r	$\cos(rx)$	$\cos(ry)$	$\cos(rz)$

	x	y	z
ξ	0	$-\operatorname{sen}\mu'$	$-\cos\mu'$
η	0	$\cos\mu'$	$-\operatorname{sen}\mu'$
ζ	1	0	0

ricaviamo il terzo

	ξ	η	ζ
p	$-\operatorname{sen}\mu'\cos(py)-\cos\mu'\cos(pz)$,	$\cos\mu'\cos(py)-\operatorname{sen}\mu'\cos(pz)$,	$\cos(px)$
q	$-\operatorname{sen}\mu'\cos(qy)-\cos\mu'\cos(qz)$,	$\cos\mu'\cos(qy)-\operatorname{sen}\mu'\cos(qz)$,	$\cos(qx)$
r	$-\operatorname{sen}\mu'\cos(ry)-\cos\mu'\cos(rz)$,	$\cos\mu'\cos(ry)-\operatorname{sen}\mu'\cos(rz)$,	$\cos(rx)$,

ossia, posto

$$A_s=\cos(sy)-i\cos(sz) \quad , \quad B_s=\cos(sy)+i\cos(sz) ,$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos(p\xi)&=\frac{e^{-\mu' i}}{2i}A_p-\frac{e^{\mu' i}}{2i}B_p \quad , \quad \cos(p\eta)=\frac{e^{-\mu' i}}{2}A_p+\frac{e^{\mu' i}}{2}B_p\\
\cos(q\xi)&=\frac{e^{-\mu' i}}{2i}A_q-\frac{e^{\mu' i}}{2i}B_q \quad , \quad \cos(q\eta)=\frac{e^{-\mu' i}}{2}A_q+\frac{e^{\mu' i}}{2}B_q\\
\cos(r\xi)&=\frac{e^{-\mu' i}}{2i}A_r-\frac{e^{\mu' i}}{2i}B_r \quad , \quad \cos(r\eta)=\frac{e^{-\mu' i}}{2}A_r+\frac{e^{\mu' i}}{2}B_r
\end{aligned}\right\} \tag{107}$$

$$\cos(p\zeta)=\cos(px) \quad , \quad \cos(q\zeta)=\cos(qx) \quad , \quad \cos(r\zeta)=\cos(rx) .$$

Ora dalle (105) e (106) si ricava

$$\left.\begin{aligned}
A_p&=\frac{1}{i}\left[\cos(pz)+i\cos(py)\right]=\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u\operatorname{cn}\alpha\pm\operatorname{sn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\operatorname{cn}u}{iN\operatorname{cn}\alpha}=\frac{L^2\operatorname{sn}(u\pm\alpha)\operatorname{dn}(u\mp\alpha)}{iN\operatorname{cn}\alpha}\\
A_q&=\frac{1}{i}\left[\cos(qz)+i\cos(qy)\right]=\frac{\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\mp k^2\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}u}{iN\operatorname{cn}\alpha}=\frac{L^2\operatorname{cn}(u\pm\alpha)\operatorname{dn}(u\mp\alpha)}{iN\operatorname{cn}\alpha}\\
A_r&=\quad\left[\cos(ry-i\cos(rz)\right]=\frac{\operatorname{dn}\alpha\operatorname{dn}u\pm k^2\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha}{N\operatorname{cn}\alpha}=\frac{L^2\operatorname{dn}(u\mp\alpha)}{N\operatorname{cn}\alpha}
\end{aligned}\right\} \tag{108}$$

essendo $L^2=1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{sn}^2u$.

Introduciamo ora le funzioni Θ ed H. Dalla teorica delle funzioni ellittiche si ha

$$\left.\begin{aligned} L^2 &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 u = \frac{\Theta^2(o)\Theta(u+\alpha)\Theta(u-\alpha)}{\Theta^2(u)\Theta^2(\alpha)} \\ N^2 &= \operatorname{dn}^2 \alpha - k^2 \operatorname{cn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 u = \frac{k'\Theta^2(o)\Theta_1(u+\alpha)\Theta_1(u-\alpha)}{\Theta^2(u)\Theta^2(\alpha)} \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

$$\operatorname{sn}(u+\alpha) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u+\alpha)}{\Theta(u+\alpha)} \quad , \quad \operatorname{cn}(u+\alpha) = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{H_1(u+\alpha)}{\Theta(u+\alpha)} \quad , \quad \operatorname{dn}(u+\alpha) = \frac{\sqrt{k'}\,\Theta_1(u+\alpha)}{\Theta(u+\alpha)} .$$

Onde sostituendo si avrà

$$\left.\begin{aligned} A_p &= \frac{\Theta_1(o) H(u \pm \alpha)\Theta_1(u \mp \alpha)}{i D \Theta(u) H_1(\alpha)} \\ A_q &= \frac{\Theta(o) H_1(u \pm \alpha)\Theta_1(u \mp \alpha)}{i D \Theta(u) H_1(\alpha)} \quad , \quad D = \sqrt{\Theta_1(u+\alpha)\Theta_1(u-\alpha)} \\ A_r &= \frac{H_1(o)\Theta(u \pm \alpha)\Theta_1(u \mp \alpha)}{D \Theta(u) H_1(\alpha)} \end{aligned}\right\} . \tag{110}$$

Per avere B_p, B_q, B_r basterà cambiare i in $-i$, e quindi α in $-\alpha$.

Non resta che trasformare gli esponenziali. Essendo

$$\mu' = \mu - n'u = \pm \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta_1(u-\alpha)}{\Theta_1(u+\alpha)} = \frac{1}{i} \log \frac{D}{\Theta_1(u \pm \alpha)}$$

e quindi

$$e^{\mu' i} = \frac{D}{\Theta_1(u \pm \alpha)} \quad , \quad e^{-\mu' i} = \frac{D}{\Theta_1(u \mp \alpha)} ,$$

avremo

$$e^{-\mu' i} A_p = \frac{\Theta_1(o) H(u \pm \alpha)}{i \Theta(u) H_1(\alpha)} \quad , \quad e^{\mu' i} B_p = -\frac{\Theta_1(o) H(u \mp \alpha)}{i \Theta(u) H_1(\alpha)}$$

$$e^{-\mu' i} A_q = \frac{\Theta(o) H_1(u \pm \alpha)}{i \Theta(u) H_1(\alpha)} \quad , \quad e^{\mu' i} B_q = -\frac{\Theta(o) H_1(u \mp \alpha)}{i \Theta(u) H_1(\alpha)}$$

$$e^{-\mu' i} A_r = \frac{H_1(o) \Theta(u \pm \alpha)}{\Theta(u) H_1(\alpha)} \quad , \quad e^{\mu' i} B_r = \frac{H_1(o) \Theta(u \mp \alpha)}{\Theta(u) H_1(\alpha)} ,$$

e finalmente

$$\left.\begin{aligned} \cos(p\xi) &= -\frac{\Theta_1(o)[H(u+\alpha)+H(u-\alpha)]}{2\Theta(u)H_1(\alpha)} \quad , \quad \cos(p\eta) = \pm\frac{\Theta_1(o)[H(u+\alpha)-H(u-\alpha)]}{2i\Theta(u)H_1(\alpha)} , \\ \cos(q\xi) &= -\frac{\Theta(o)[H_1(u+\alpha)+H_1(u-\alpha)]}{2\Theta(u)H_1(\alpha)} \quad , \quad \cos(q\eta) = \pm\frac{\Theta(o)[H_1(u+\alpha)-H_1(u-\alpha)]}{2i\Theta(u)H_1(\alpha)} , \\ \cos(r\xi) &= \pm\frac{H_1(o)[\Theta(u+\alpha)-\Theta(u-\alpha)]}{2i\Theta(u)H_1(\alpha)} \quad , \quad \cos(r\eta) = \frac{H_1(o)[\Theta(u+\alpha)+\Theta(u-\alpha)]}{2\Theta(u)H_1(\alpha)} , \\ \cos(\zeta p) &= -\frac{\Theta(\alpha)H_1(u)}{H_1(\alpha)\Theta(u)} \quad , \quad \cos(\zeta q) = \frac{\Theta_1(\alpha)H(u)}{H_1(\alpha)\Theta(u)} \quad , \quad \cos(\zeta r) = \pm\frac{H(\alpha)\Theta_1(u)}{iH_1(\alpha)\Theta(u)} . \end{aligned}\right\} \tag{111}$$

Queste sono le espressioni trovate da **Jacobi**.

§ 12.

I coseni di Jacobi ricavati dalle longitudini dei tre assi principali.

Servendosi delle longitudini dei tre assi Ox_1 Ox_2 Ox_3 si giunge anche più speditamente alle espressioni di Jacobi. Riprendendo infatti gli assi $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, se $O\eta$ ed $O\xi$ fanno con v gli angoli $\mu - n'u$, e $\mu - n'u + \frac{\pi}{2}$, gli stessi assi faranno

colla proiezione di Ox_1 gli angoli $\mu_1 - n'u$ e $\mu_1 - n'u + \frac{\pi}{2}$

colla proiezione di Ox_2 gli angoli $\mu_2 - n'u$ e $\mu_2 - n'u + \frac{\pi}{2}$

colla proiezione di Ox_3 gli angoli $\mu_3 - n'u$ e $\mu_3 - n'u + \frac{\pi}{2}$.

Poniamo $\mu_r - n'u = \mu_r'$, e consideriamo il triangolo sferico rettangolo avente per spigoli $O\xi$, Ox_r e la proiezione di Ox_r, avremo

$$\cos(x_r\xi) = \cos\left(\mu_r' + \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(\zeta x_r) .$$

Considerando poscia il triangolo sferico determinato da $O\eta$, Ox_r e dalla proiezione di Ox_r sul piano invariabile, avremo

$$\cos(x_r\eta) = \cos\mu_r' \operatorname{sen}(\zeta x_r) .$$

Dunque

$$\left.\begin{array}{ll} \cos(p\xi) = -\operatorname{sen}(p\zeta)\operatorname{sen}\mu_1' & \cos(p\eta) = \operatorname{sen}(p\zeta)\cos\mu_1' \\ \cos(q\xi) = -\operatorname{sen}(q\zeta)\operatorname{sen}\mu_2' & \cos(q\eta) = \operatorname{sen}(q\zeta)\cos\mu_2' \\ \cos(r\xi) = -\operatorname{sen}(r\zeta)\operatorname{sen}\mu_3' & \cos(r\eta) = \operatorname{sen}(r\zeta)\cos\mu_3' \end{array}\right\} . \qquad (112)$$

I tre coseni di direzione rispetto alla $O\zeta$ sono poi dati dalle (19), i quali per le (93) si trasformano in

$$\cos(p\zeta) = -\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn}\alpha} = -\frac{\Theta(\alpha)H_1(u)}{H_1(\alpha)\Theta(u)} , \quad \cos(q\zeta) = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn}\alpha}\operatorname{dn}\alpha = \frac{\Theta_1(\alpha)H(u)}{H_1(\alpha)\Theta(u)} ,$$

$$\cos(r\zeta) = \pm\frac{\operatorname{dn} u}{i\operatorname{cn}\alpha}\operatorname{sn}\alpha = \pm\frac{H(\alpha)\Theta_1(u)}{iH_1(\alpha)\Theta(u)} .$$

Nel caso di $b=a$ i due fochi doppi coincidono coi fochi semplici dati da $\mathrm{OF}=\pm\frac{1}{a\sqrt{2}}$; allora si ha la *lemniscata*, che è inversa dell'iperbola equilatera rispetto al centro; essa ha inoltre la proprietà che le distanze di ogni punto della curva dai due fochi (tripli) hanno prodotto costante. — All'equipollenza della lemniscata possono darsi anche altre forme; come le

$$\mathrm{OM} \bumpeq \sqrt{\cos 2u}\,.\,\varepsilon^{u} \bumpeq \sqrt{(1+\varepsilon^{u})}\,;$$

la seconda mostra che la curva è *sudduplicata* del circolo, come lo sono in generale tutte le Cassiniane (Spozione dei nuovi metodi ecc. [104ª] *Mem. Istit. Veneto,* 1860, VIII, § 57).

65. È singolare come i fochi definiti ai § **18, 19, 29** abbiano proprietà tanto diverse rispetto ad alcune curve. Nell'ellisse

$$\mathrm{OM} \bumpeq a\cos t + b\,\mathrm{sen}\,t\,.\,\gamma$$

la distanza del foco F dalla tangente nel punto M la si trova

$$\mathrm{FP} \bumpeq \frac{b(a-e\cos t)}{a^2\,\mathrm{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}(b\cos t + a\,\mathrm{sen}\,t\,.\,\gamma)\,,$$

perchè essa è perpendicolare alla tangente $\mathrm{dM} \bumpeq -a\,\mathrm{sen}\,t + b\cos t\,.\,\gamma$, e la

$$\mathrm{PM} \bumpeq \mathrm{OM} - \mathrm{OF} - \mathrm{FP}$$

ha la direzione della dM; similmente per l'altro foco F_1 la perpendicolare abbassata sulla medesima tangente è

$$\mathrm{F}_1\mathrm{P}_1 \bumpeq \frac{b(a+e\cos t)}{b\cos t - a\,\mathrm{sen}\,t\,.\,\gamma}\,,$$

ed il loro prodotto risulta

$$\mathrm{FP}\,.\,\mathrm{F}_1\mathrm{P}_1 \bumpeq \frac{b^2(a^2-e^2\cos^2 t)}{(b\cos t - a\,\mathrm{sen}\,t\gamma)^2} \bumpeq \frac{b^2(a^2\,\mathrm{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)}{(b\cos t - a\,\mathrm{sen}\,t\gamma)^2}$$

che si vede avere la lunghezza costante b^2. Così le tangenti dell'ellisse hanno rispetto ai fochi una proprietà in qualche modo analoga a quella dei punti della Cassiniana.

Leggi dell' inversione.

66. — Giacchè vedemmo che parecchie curve si ricavano da altre col mezzo dell' inversione (ed è anche molto facile descrivere la curva inversa di una data; infatti descritto un circolo che passi per I, e tirata una retta parallela alla tangente in I, su ogni retta IMM' il circolo e la retta tagliano due lunghezze IM IM' inversamente proporzionali) non è fuor di luogo raccogliere qui le leggi sulla derivazione

NOTA I.

Un teorema di geometria.

Dalle equazioni (101) abbiamo

$$\mu-\mu_3=\frac{1}{2i}\log\frac{\mathrm{dn}(u\mp\alpha)}{\mathrm{dn}(u\pm\alpha)}\quad,\quad \mathrm{tg}(\mu-\mu_3)=\mp i\frac{\mathrm{dn}(u-\alpha)-\mathrm{dn}(u+\alpha)}{\mathrm{dn}(u+\alpha)+\mathrm{dn}(u-\alpha)}$$

$$=\mp i\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,u}.$$

Ora per le (93)

$$\mathrm{cn}\,u=-\frac{m_3x_1}{a_1}\mathrm{cn}\,\alpha\quad,\quad \mathrm{sn}\,u=\frac{m_3x_2}{a_2}\,\frac{\mathrm{cn}\,\alpha}{\mathrm{dn}\,\alpha}\qquad \mathrm{dn}\,u=\pm i\frac{m_3x_3}{a_3}\,\frac{\mathrm{cn}\,\alpha}{\mathrm{sn}\,\alpha}$$

dunque

$$\mathrm{tang}(\mu-\mu_3)=\frac{k^2\,\mathrm{cn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\alpha}{\mathrm{dn}^2\alpha}\,\frac{a_3x_1x_2m_3}{a_1a_2x_3}.$$

Dopo ciò le (9) e l' analogia forniscono

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{tang}(\mu-\mu_3)&=\frac{a_3(a_1-a_2)x_1x_2}{m_3(c^2-a_1a_2)x_3}=\frac{a_1-a_2}{a_3-m_3^2}\,\frac{m_3a_3x_1x_2}{a_1a_2x_3}\\
\mathrm{tang}(\mu-\mu_1)&=\frac{a_1(a_2-a_3)x_2x_3}{m_3(c^2-a_2a_3)x_1}=\frac{a_2-a_3}{a_1-m_3^2}\,\frac{m_3a_1x_2x_3}{a_2a_3x_1}\\
\mathrm{tang}(\mu-\mu_2)&=\frac{a_2(a_3-a_1)x_3x_1}{m_3(c^2-a_3a_1)x_2}=\frac{a_3-a_1}{a_2-m_3^2}\,\frac{m_3a_2x_3x_1}{a_3a_1x_2}
\end{aligned}\right\}. \tag{α}$$

Ma dalla geometria analitica, e in ogni caso dalle stesse (101), si ottiene

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{tang}(\mu_2-\mu_3)&=\frac{a_2a_3x_1}{m_3a_1x_2x_3}\\
\mathrm{tang}(\mu_3-\mu_1)&=\frac{a_3a_1x_2}{m_3a_2x_3x_1}\\
\mathrm{tang}(\mu_1-\mu_2)&=\frac{a_1a_2x_3}{m_3a_3x_1x_2}
\end{aligned}\right\}, \tag{β}$$

dunque

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang}(\mu-\mu_1)\operatorname{tang}(\mu_2-\mu_3)&=\frac{a_2-a_3}{a_1-m_3^2}\\ \operatorname{tang}(\mu-\mu_2)\operatorname{tang}(\mu_2-\mu_3)&=\frac{a_3-a_1}{a_2-m_3^2}\\ \operatorname{tang}(\mu-\mu_3)\operatorname{tang}(\mu_1-\mu_2)&=\frac{a_1-a_2}{a_3-m_3^2}\end{aligned}\right\}.$$

Al teorema rappresentato da queste equazioni, e che credo nuovo, può essere data una veste geometrica nel modo seguente: *Ad un' ellissoide, e ad una sfera aventi lo stesso centro si tiri un piano tangente: la tangente dell' angolo compreso fra la linea di contatto e la proiezione di uno degli assi dell' ellissoide, e la tangente dell' angolo compreso fra le proiezioni degli altri due assi, dànno un prodotto costante, comunque vari il piano di contatto.* Ed è evidente che all' ellissoide può essere sostituita una superficie qualunque di 2° ordine dotata di centro.

Dalle espressioni (α) o (β) ricavando i valori di $x_1\, x_2\, x_3$ tutte le relazioni fra queste variabili si possono trasformare in relazioni fra gli angoli $\mu_2-\mu_3,\ \mu_3-\mu_1,\ \mu_1-\mu_2$ ovvero fra gli angoli $\mu-\mu_1$, $\mu-\mu_2,\ \mu-\mu_3$.

Fra queste relazioni notiamo le seguenti:

$$(a_1-m_3^2)\operatorname{tg}(\mu_2-\mu_3)+(a_2-m_3^2)\operatorname{tg}(\mu_3-\mu_1)+(a_3-m_3^2)\operatorname{tg}(\mu_1-\mu_2)=0$$

$$\frac{(a_2-a_3)}{\operatorname{tg}(\mu-\mu_1)}+\frac{(a_3-a_1)}{\operatorname{tg}(\mu-\mu_2)}+\frac{(a_1-a_2)}{\operatorname{tg}(\mu-\mu_3)}=0.$$

Analoghe relazioni si trovano se si assume per piano di proiezione il piano perpendicolare ad Om_1 od Om_2. Basterà in questo caso porre al luogo di $a_1\, a_2\, a_3$ le quantità $a_1-\lambda_1,\ a_2-\lambda_1,\ a_3-\lambda_1$, ovvero $a_1-\lambda_2,\ a_2-\lambda_2,\ a_3-\lambda_2$, ed al posto di m_3 porre m_1 ovvero m_2.

Si potrebbe assumere per piano di proiezione uno dei piani principali dell'ellissoide e proiettarvi i tre angoli m_2Om_3, m_3Om_1, m_1Om_2. Per esempio, chiamando $\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3$ le proiezioni di questi angoli sul piano perpendicolare ad Ox_1, si avrebbe

$$\operatorname{tang}\vartheta_1=\frac{(a_1-\lambda_2)(a_1-\lambda_3)m_1}{x_1(a_1-\lambda_2)m_2m_3}\quad,\quad \operatorname{tang}\vartheta_2=\frac{(a_1-\lambda_3)(a_1-\lambda_1)m_2}{x_1(a_1-\lambda_2)m_1m_3}\quad,\quad \operatorname{tang}\vartheta_3=\frac{(a_1-\lambda_1)(a_1-\lambda_2)m_3}{x_1(a_1-\lambda_2)m_1m_2}$$

e se si prendesse per piano di proiezione il piano perpendicolare ad Ox_2 o ad Ox_3 basterebbe cambiare semplicemente a_1 in a_2 o in a_3 ed x_1 in x_2 o in x_3. E da queste relazioni si potrebbero ricavare equazioni analoghe a quelle, che han luogo quando si assumono per piani di proiezione i piani m_2Om_3, m_3Om_1, m_1Om_2: non vi sarà altro che cambiare $a_1\, a_2\, a_3$ in $-\lambda_1 -\lambda_2 -\lambda_3$, e per conseguenza $x_1\, x_2\, x_3$ in $m_1\, m_2\, m_3$, e viceversa.

Si può finalmente prendere per piano di proiezione il piano normale all'asse istantaneo. Dicendo $v_1\ v_2\ v_3$ le longitudini su esso di $Ox_1\ Ox_2\ Ox_3$, avremo

$$\operatorname{tang}(\nu_2-\nu_3)=\frac{x_1\theta}{x_2x_3}\quad,\quad \operatorname{tang}(\nu_3-\nu_1)=\frac{x_2\theta}{x_1x_3}\quad,\quad \operatorname{tang}(\nu_1-\nu_2)=\frac{x_3\theta}{x_1x_2}$$

ove $\theta=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$. Quindi

$$a_1^2\frac{\operatorname{tang}(\mu_2-\mu_3)}{\operatorname{tang}(\nu_2-\nu_3)}=a_2^2\frac{\operatorname{tang}(\mu_3-\mu_1)}{\operatorname{tang}(\nu_3-\nu_1)}=a_3^2\frac{\operatorname{tang}(\mu_1-\mu_2)}{\operatorname{tang}(\nu_1-\nu_2)}=\frac{m_3c^2}{\theta}$$

$$\frac{a_1-m_3^2}{a_1^2}\operatorname{tang}(\nu_2-\nu_3)+\frac{a_2-m_3^2}{a_2^2}\operatorname{tang}(\nu_3-\nu_1)+\frac{a_3-m_3^2}{a_3^2}\operatorname{tang}(\nu_1-\nu_2)=0$$

. . . .

NOTA II.

Equazioni dell'antipoloide.

Dico *antipoloide* il luogo geometrico sull'ellissoide dei vertici della sezione invariabile. Uno dei punti dell'antipoloide si trova nell'intersezione dei due piani perpendicolari ad Om_3 e ad Om_1. Se perciò diciamo $X_1\ X_2\ X_3$ le coordinate di quel punto, avremo

$$\frac{x_1X_1}{a_1}+\frac{x_2X_2}{a_2}+\frac{x_3X_3}{a_3}=0\qquad \frac{x_1X_1}{a_1-\lambda_1}+\frac{x_2X_2}{a_2-\lambda_1}+\frac{x_3X_3}{a_3-\lambda_1}=0\,.$$

Da queste due equazioni si trae

$$x_1X_1:x_2X_2:x_3X_3:1=a_1(a_2-a_3)(a_1-\lambda_1):a_2(a_3-a_1)(a_2-\lambda_1):a_3(a_1-a_2)(a_3-\lambda_1):D$$

ponendo

$$D^2=\frac{a_1(a_2-a_3)^2(a_1-\lambda_1)^2}{X_1^2}+\frac{a_2(a_3-a_1)^2(a_2-\lambda_1)^2}{X_2^2}+\frac{a_3(a_1-a_2)^2(a_3-\lambda_1)^2}{X_3^2}\,.$$

Onde

$$x_1=\frac{a_1(a_2-a_3)(a_1-\lambda_1)}{DX_1}\quad,\quad x_2=\frac{a_2(a_3-a_1)(a_2-\lambda_1)}{DX_2}\quad,\quad x_3=\frac{a_3(a_1-a_2)(a_3-\lambda_1)}{DX_3}\,.$$

Da queste poi si ottiene

$$D^2\left\{\frac{x_1^2}{a_1(a_1-\lambda_1)}+\frac{x_2^2}{a_2(a_2-\lambda_1)}+\frac{x_3^2}{a_3(a_3-\lambda_1)}\right\}$$

$$=\frac{a_1(a_2-a_3)^2(a_1-\lambda_1)}{X_1^2}+\frac{a_2(a_3-a_1)^2(a_2-\lambda_1)}{X_2^2}+\frac{a_1(a_3-a_2)^2(a_3-\lambda_1)}{X_3^2}\,.$$

Ma il primo membro di quest' equazione è identicamente nullo; dunque risolvendo rispetto a λ_1 si otterrà

$$\lambda_1=\frac{\dfrac{a_1^2(a_2-a_3)^2}{X_1^2}+\dfrac{a_2^2(a_3-a_1)^2}{X_2^2}+\dfrac{a_3^2(a_1-a_2)^2}{X_3^2}}{\dfrac{a_1(a_2-a_3)^2}{X_1^2}+\dfrac{a_2(a_3-a_1)^2}{X_2^2}+\dfrac{a_3(a_1-a_2)^2}{X_3^2}}.$$

Ora la distanza del punto $X_1\, X_2\, X_3$ dal centro dell' ellissoide è $\sqrt{\lambda_2}=\frac{c}{\sqrt{\lambda_1}}$, ossia

$$\frac{c^2}{\lambda_1}=X_1^2+X_2^2+X_3^2\,.$$

Dunque l' equazione dell' antipoloide sarà

$$(X_1^2+X_2^2+X_3^2)\left\{\frac{a_1^2(a_2-a_3)^2}{X_1^2}+\frac{a_2(a_3-a_1)^2}{X_2^2}+\frac{a_3(a_1-a_2)^2}{X_3^2}\right\}$$
$$=c^2\left\{\frac{a_1(a_2-a_3)^2}{X_1^2}+\frac{a_2(a_3-a_1)^2}{X_2^2}+\frac{a_3(a_1-a_2)^2}{X_3^2}\right\}.$$

Questa equazione si trasforma facilmente in

$$\frac{X_1^2}{a_1^2}+\frac{X_2^2}{a_2^2}+\frac{X_3^2}{a_3^2}+\frac{1}{m_3^2}-\frac{1}{R^2}=\frac{1}{R^2 m_3^2}(a_1X_1^2+a_2X_2^2+a_3X_3^2)$$

ove $R^2=X_1^2+X_2^2+X_3^2$, donde si passa subito all'equazione in coordinate ellittiche γ_1, γ_2, poichè

$$R^2=a_1+a_2+a_3-\gamma_1-\gamma_2\ ,\quad \frac{X_1^2}{a_1^2}+\frac{X_2^2}{a_2^2}+\frac{X_3^2}{a_3^2}=\frac{\gamma_1\gamma_2}{a_1a_2a_3}$$

$$a_1X_1^2+a_2X_2\ +a_3X_3^2=R^2(a_1+a_2+a_3)-(a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)+\gamma_1\gamma_2\,.$$

INDICE

---

finito stampare il dì 11 ottobre 1877