MEMORIE

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE (DETTA DEI XL)

SU ALCUNE CURVE DI FACILE COSTRUZIONE

MEMORIA

del Socio Prof. GIUSTO BELLAVITIS

(Ricevuta il dì 10 Novembre 1878)

INTRODUZIONE

È antico l'uso delle curve per la risoluzione dei problemi; alla *grafia*, cioè alla risoluzione geometrica di problemi algebrici, meccanici, ecc. (argomento ora di moda) potrà giovare la costruzione di curve, purchè sia facile e spedita. Sarebbe importante, ma non agevole, ricercare fra tali curve quelle, la cui rettificazione esprimesse qualche funzione trascendente suscettibile di utili applicazioni; giacchè la lunghezza di una curva può determinarsi praticamente con bastante approssimazione, ed essa offre una chiara idea del procedimento della funzione, che viene rappresentata. Intanto io qui espongo alcune semplicissime costruzioni di curve dipendenti da pochi principî, ed accenno la classificazione e le principali singolarità di tali curve.— Mi servirò del linguaggio e dei principî fondamentali del metodo delle equipollenze, che già da quasi un quarto di secolo ebbero l'onore di venir accolti tra le Memorie di questa illustre Società (T. XXV, parte ij. 1854) e che ora sono abbastanza generalmente conosciuti: nulladimeno vi aggiungerò quelle spiegazioni che sieno sufficienti all'intelligenza ed alla costruzione delle figure, anche per parte di chi ignorasse affatto quelle facili convenzioni.

§ 1.—Un punto O ora lo dirò il *baricentro* di una o più linee, quando esso sia il centro di gravità (baricentro) delle intersezioni di quelle linee con una retta qualsivoglia passante per O. Se sieno H K L M ecc. tutte le intersezioni di una di queste rette colle date linee, la proprietà del baricentro viene espressa dell'equipollenza

$$\mathrm{OH} + \mathrm{OK} + \mathrm{OL} + \text{ecc.} \mathrel{\underline{\frown}} 0\,,$$

la quale significa esser nulla la somma geometrica delle rette OH OK ecc., tenendo conto della loro direzione, che s'intende sempre presa dalla prima lettera alla seconda.

2.—È evidente che, se una qualunque linea eseguisce, rimanendo nel piano, mezzo giro intorno al punto O, essa prende una seconda posizione, tale che O è il baricentro delle due linee uguali; per brevità noi le diremo due linee tra loro *simmetriche*. Ad ogni punto H di una linea corrisponde un punto $H_,$ della sua simmetrica in modo che

$$OH_, \bumpeq HO \bumpeq -OH\,.$$

Somme dei raggi vettori di due o più rette.

3.— **Iperbola.** Dato un punto O e due rette **h k** si voglia trovare una curva M tale che O sia il *baricentro* del complesso della curva e delle rette $\mathbf{h}_,\ \mathbf{k}_,$ simmetriche delle date. Se H K $H_,$ $K_,$ ed M sono le intersezioni di una retta condotta per O colle rette e colla curva, invece dell'equipollenza $OH_, + OK_, + OM \bumpeq 0$, sarà più comodo adoperare l'altra $OM \bumpeq OH + OK$, perchè questa ci dà $OK \bumpeq OM - OH \bumpeq HM$ e c' insegna di prendere per ogni retta condotta per O la KM equipollente alla OH (cioè uguale e della stessa direzione); il luogo geometrico di tutti i punti M sarà un'iperbola, che avrà gli assintoti **h k**.

Per fissare in mente questa costruzione, potremo dire che in qualche modo l'iperbola è rispetto ad un suo punto O la somma geometrica dei due assintoti **h k**; giacchè il raggio vettore OM è la somma dei due OH OK.

4. — Aggiungo la facile dimostrazione che la curva M è un'iperbola: si tiri da O una retta parallela alla **k** che incontri la **h** in A, ed una parallela alla **h** che incontri la **k** in B *(fig. 1)*, e sia C il punto d'intersezione delle rette **h k**, il parallelogrammo CAOB dà $CO \bumpeq CA + CB$, giacchè la somma *geometrica* di due rette CA CB, si ottiene appunto conducendo dalla seconda estremità A della prima una retta AO equipollente alla seconda retta CB (cioè uguale parallela e diretta nello stesso verso), e per definizione si ha $CA + AO \bumpeq CO$. Il punto H della retta CA è dato dall'equipollenza $AH \bumpeq t\,.\,CA$, essendo t una quantità numerica indeterminata, perciò

$$OH \bumpeq OA + AH \bumpeq t\,.\,CA - CB\,;$$

moltiplicando questa OH per una quantità numerica positiva o negativa, si otterranno tutte le rette, che hanno la direzione della OH o della opposta HO; poscia la

$$CK \bumpeq CO + OK \bumpeq CA + CB + OK$$

deve avere la direzione della CB, perciò la OK si avrà moltiplicando OH per $-\frac{1}{t}$, e sarà

$$CK \triangleq CA + CB - CA + \frac{1}{t} CB \,, \quad \text{da cui} \quad BK \triangleq CK - CB \triangleq \frac{1}{t} CB \,.$$

Quando si abbia un po' di pratica nel calcolo delle equipollenze, queste cose si scorgono a colpo d' occhio, e per dimostrarne l'esattezza basta mostrare che dalle

$$CO \triangleq CA + CB \quad , \quad CH \triangleq (1+t) CA \quad , \quad CK \triangleq \left(1+\frac{1}{t}\right) CB$$

provengono le

$$OH \triangleq CH - CO \triangleq t \,.\, CA - CB \quad , \quad OK \triangleq - CA + \frac{1}{t} CB$$

tra loro parallele, giacchè

$$OK \triangleq -\frac{1}{t} OH \,.$$

La

$$OM \triangleq OH + OK \triangleq (t-1) CA + \left(\frac{1}{t} - 1\right) CB$$

dà finalmente

$$CM \triangleq CO + OM \triangleq t \,.\, CA + \frac{1}{t} CB \,,$$

la quale mostra che il punto M riferito agli assi coordinati obbliquangoli CA CB ha l'ascissa $t\,.\,CA$ e l'ordinata $\frac{1}{t}$CB. La direzione della tangente della curva in M è data dalla derivata presa rispetto alla variabile t

$$\partial M \triangleq CA - \frac{1}{t^2} CB \,;$$

questa moltiplicata per t e sommata geometricamente colla CM dà $CT \triangleq 2t\,.\,CA$, e T è il punto d'intersezione della tangente MT coll'assintoto CA; dunque la sottangente è uguale all'ascissa.

5. — **Coordinate Plucheriane.** — Le coordinate Cartesiane del punto M sono

$$x:z = t^2 : t \quad , \quad y:z = 1:t \,,$$

così il punto M noi lo indichiamo con $(x\,,\, y:z)$ e nel nostro caso con $(t^2,\, 1:t)$; se ne deducono le coordinate Plucheriane u v w date dai determinanti

$$u = |y\,.\,\partial z| \quad , \quad v = |z\,.\,\partial x| \quad , \quad w = |x\,.\,\partial y| \,.$$

Nel nostro caso essendo $x = t^2$, $y = 1$, $z = t$, da cui $\partial x = 2t$, $\partial y = 0$, $\partial z = 1$ si ha $u = 1$, $v = t\,.\,2t - t^2 = t^2$, $w = -2t$, e perciò le coordinate Plucheriane $[u, v : w]$ della tangente in M sono $[1\,,\, t^2 : -2t]$, vale a dire l'equazione $ux' + vy' + w = 0$

della tangente è $x'+t^2y'-2t=0$; cioè i punti T T' in cui la tangente incontra gli assi coordinati CA CB sono dati da

$$\mathrm{CT} \bumpeq -\frac{w}{u}\,\mathrm{CA} \bumpeq 2t\,.\,\mathrm{CA} \quad , \quad \mathrm{CT'} \bumpeq -\frac{w}{v}\,\mathrm{CB} \bumpeq -\frac{2}{t}\,\mathrm{CB}\,,$$

come già si disse al paragrafo precedente.

6. — **Facile costruzione della tangente.** — Si noti che in questo e negli altri casi analoghi si può costruire facilmente oltre che il punto M della curva desiderata anche la direzione della tangente ad esso corrispondente. Infatti, essendo $\mathrm{OM} \bumpeq \mathrm{OH}+\mathrm{OK}$, cioè il raggio vettore OM somma geometrica dei OH OK, prendendo le derivate dei punti variabili M H K, si ha

$$\partial\mathrm{M} \bumpeq \partial\mathrm{H}+\partial\mathrm{K}\,;$$

ora per una rotazione infinitesima intorno ad O della retta OH il movimento del punto H sulla retta **h** è proporzionale alla OH divisa pel seno dell'inclinazione della OH sulla **h**, e quindi proporzionale alla HH' *(fig. 1)*, essendo H' un punto della **h** che abbia dalla OH la distanza uguale ad OH.

Similmente sulla **k** si troverà un punto K' che abbia dalla OK la distanza eguale ad OK (anzichè uguali si potrebbero prendere proporzionali); si avvertirà che la KK' giri intorno al punto O nello stesso senso in cui ha girato intorno ad esso la HH'; dopo di che la tangente dell'iperbola in M sarà parallela alla somma geometrica delle rette HH' KK', la qual somma è la KT', essendo $\mathrm{K'T'} \bumpeq \mathrm{HH'}$.

7. — **Tritome razionali.** — Vedemmo che una ditoma (ossia curva del 2° ordine) avente due assintoti **h k** congiunta con due rette $\mathbf{h}_{,}$ $\mathbf{k}_{,}$ ha il baricentro O; similmente una tritoma razionale (curva del 3° ordine algebrico-razionale, cioè le cui coordinate $x\,y\,z$ sono funzioni razionali intere di una variabile t) congiunta con tre rette $\mathbf{h}_{,}\,\mathbf{k}_{,}\,\mathbf{l}_{,}$ (simmetriche alle **h k l** rispetto al punto O), ha il baricentro O. — Per determinare ciascun punto M della curva, piuttosto dell'una o dell'altra delle equipollenze

$$\mathrm{OM}+\mathrm{OH}_{,}+\mathrm{OK}_{,}+\mathrm{OL}_{,} \bumpeq 0 \quad , \quad \mathrm{OM}-\mathrm{OH}-\mathrm{OK}-\mathrm{OL} \bumpeq 0$$

sarà alcun poco più comoda la costruzione della

$$\mathrm{OM}-\mathrm{OH}-\mathrm{OK}+\mathrm{OL}_{,} \bumpeq 0$$

che dà $\mathrm{HM} \bumpeq \mathrm{L}_{,}\mathrm{K}$; così su ogni retta condotta per O, la quale incontri in H K i due assintoti **h k** ed in $\mathrm{L}_{,}$ la retta $\mathbf{l}_{,}$ simmetrica del terzo assintoto, si prenderà $\mathrm{HM} \bumpeq \mathrm{L}_{,}\mathrm{K}$ (od anche $\mathrm{KM} \bumpeq \mathrm{L}_{,}\mathrm{H}$), e sarà M un punto della tritoma. — Del resto essendo **h k l** i tre assintoti, noi considereremo invece l'equipollenza $\mathrm{OM} \bumpeq \mathrm{OH}+\mathrm{OK}+\mathrm{OL}$.

Fig. 1.a § 4.6

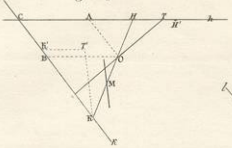


Fig. 2.a § 9

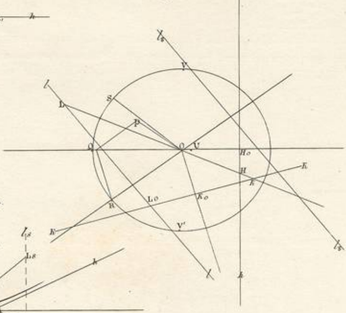


Fig. 3.a § 12

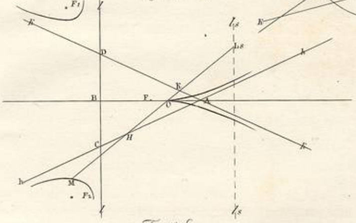


Fig. 4.a § 20

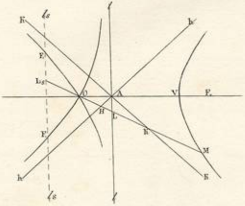


Fig. 5.a § 25.26.

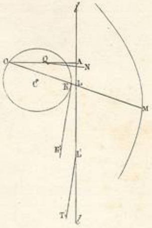


Fig. 6a § 33.37.51

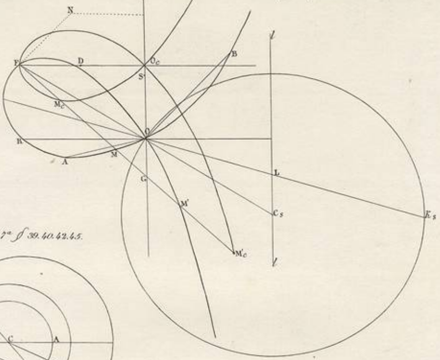


Fig. 7a § 39.40.42.45.

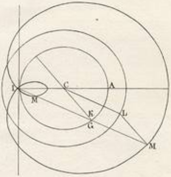


Fig. 9a § 82

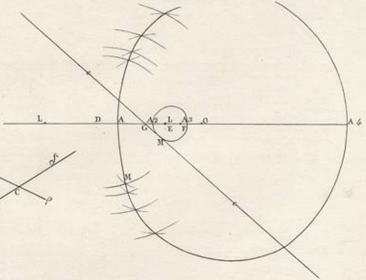
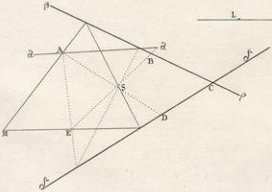


Fig. 8a § 75.77



8. — Il baricentro O dei punti $H_{,}$ $K_{,}$ $L_{,}$ è un punto doppio della curva; esso viene dato da $HO \bumpeq L_{,}K$ ossia $OH + OK + OL \bumpeq 0$. Soddisfacendo a questa equipollenza, si hanno le due tangenti nel punto doppio; in ognuna di esse la porzione da O alla **h** è equipollente alla porzione compresa tra le rette **k** $\mathbf{l}_{,}$.

9. — **Problema.** — Il metodo delle equipollenze offre la seguente soluzione del problema or ora menzionato. Da O si abbassino sulle rette **h k l** *(fig. 2ª)* le perpendicolari $OH_0 \bumpeq a$, $OK_0 \bumpeq b\varepsilon^{\beta}$, $OL_0 \bumpeq c\varepsilon^{\gamma}$, il che significa che la $OH_0 = a$ si prende per origine delle inclinazioni, e che ang $H_0OK_0 = \beta$, ang $H_0OL_0 = \gamma$, e sia ξ l'inclinazione H_0OK della retta ricercata OKHL, per la quale dev'essere $OH + OK + OL \bumpeq 0$, avremo

$$OH = \frac{a}{\cos\xi}\ ,\quad OK = \frac{b}{\cos(\xi-\beta)}\ ,\quad OL = \frac{c}{\cos(\xi-\gamma)}\ ,$$

e la condizione del problema sarà data dall'equazione

$$a\cos(\xi-\beta)\cos(\xi-\gamma) + b\cos\xi\cos(\xi-\gamma) + c\cos\xi\cos(\xi-\beta) = 0\ ,$$

la quale osservando che $2\cos x \bumpeq \varepsilon^{x} + \varepsilon^{-x}$, si sviluppa nell'equipollenza

$$(a\varepsilon^{-\beta-\gamma} + b\varepsilon^{-\gamma} + c\varepsilon^{-\beta})\,\varepsilon^{2\xi} + (a\varepsilon^{\beta+\gamma} + b\varepsilon^{\gamma} + c\varepsilon^{\beta})\,\varepsilon^{-2\xi} \bumpeq$$
$$\bumpeq -2a\cos(\beta-\gamma) - 2b\cos\gamma - 2c\cos\beta\ ,$$

che noi paragoneremo coll'equipollenza identica

$$OV + VU \bumpeq OU\ ,$$

e costuiremo nel seguente modo: è ben facile prendere sulla OH_0 la

$$OU \bumpeq -2a\cos(\beta-\gamma) - 2b\cos\gamma - 2c\cos\beta\ ,$$

poscia i principî del metodo dànno l'interpretazione di

$$OP \bumpeq a\varepsilon^{\beta+\gamma}\ ,\quad PQ \bumpeq b\varepsilon^{\gamma}\ ,\quad QR \bumpeq c\varepsilon^{\beta}\ ,$$

e se la $OS = OR$ formi colla OH_0 l'angolo $SOH_0 = \text{ang}\, H_0OR$, i termini della predetta equipollenza saranno

$$OS \, . \, \varepsilon^{2\xi} + OR \, . \, \varepsilon^{-2\xi} \bumpeq OU\ ;$$

sicchè sulla base OU si descriveranno i triangoli isosceli OUV OUV' coi lati

$$OV = VU = OR\ ,$$

l'angolo cercato $\xi = H_0OK$ sarà $= \frac{1}{2}$ ang SOV; così il problema ammette due soluzioni, le quali divengono immaginarie se $OU > 2 \, . \, OR$, e si confondono in una sola radice se $OU = 2 \, . \, OR$. — Nel caso di $OU = 0$ le due tangenti alla curva nel punto doppio sono tra loro perpendicolari.

10. — Per tal modo queste tritome si distinguono nelle *cuspidate*, che hanno in O un punto di regresso, nelle *annodate* col punto doppio, ed in quelle che seguendo il Newton diremo *puntate*, perchè hanno in O un punto *isolato*, il quale a dir vero non può esser dato da alcun valore reale della variabile t, bensì le sue coordinate soddisfanno all'equazione appartenente alla curva.

11. — Se voglia descriversi una curva della specie delle tritome cuspidate, che io riferii (*Mem. Soc. Ital.* 1851, pag. 1..50) alla categoria 9ª e che è qualificata da: *Tre tratti, uno col regresso e rami assintotici ordinarî, ciascuno degli altri due coi rami assintotici uno ordinario ed uno verso il flesso; diametro:* si noterà che l'espressione Cartesiana dei suoi punti $(x, y : z)$ è $(t^2, t^3 : 1-t^2)$, da cui si deduce (§ 5) l'espressione Plucheriana delle sue tangenti

$$[|y.\partial z|\,,\,|z.\partial x| : |x.\partial y|] \qquad [t^3-3t, 2 : t^3],$$

perciò i tre assintoti corrispondenti a $t = \pm 1$ ed a $t = \infty$, sono

$$[-2, 2 : 1] \;,\; [2, 2 : -1] \;,\; [1, 0 : 1];$$

il punto A intersezione dei due primi è $(1, 0 : 2)$; il diametro è la tangente $[0, 1 : 0]$ del regresso, cioè l'asse delle x. Preso $BO \bumpeq 2\,.\,OA$ si tiri per B ad arbitrio la retta CBD (se sia perpendicolare alla DOC, si avrà quella varietà in cui il diametro dimezza le corde ad esso perpendicolari); si prendano $BD \bumpeq -BC$ saranno AC AD CD i tre assintoti della tritoma, che ha il regresso O, e che si costruirà (§ 7) adoperando invece di un assintoto l la retta l, simmetrica rispetto al punto O.

12. — **Fochi.** — Prendo ad esempio un caso particolare di questa tritoma cuspidata a tre assintoti, uno dei quali relativo al flesso; si tratta della *varietà* ad asse, le cui coordinate ortogonali Cartesiane $(x, y : z)$ e Plucheriane $[u, v : w]$ sono espresse mediante la variabile t nel modo seguente:

$$(2t^2, t^3 : 1-t^2) \quad [t^3-3t, 4 : 2t^3];$$

quindi la curva ha le equazioni Cartesiana e Plucheriana

$$x^3 - 4xy^2 - 8y^2z = 0 \quad , \quad 4(w-2u)^3 = 27v^2w\,.$$

Il regresso è $(0, 0 : 1)$, cioè l'origine O colla tangente $[0, 1 : 0]$; il flesso e il suo assintoto corrispondente a $t = \infty$ sono $(2, \infty : -1)$, $[1, 0 : 2]$; i punti ordinarî all'infinito e i loro assintoti sono $(2, \pm 1 : 0)$, $[-1, \pm 2 : 1]$; e l'intersezione A di questi assintoti è $(1, 0 : 1)$. Cerchiamo i fochi di questa tritoma triattomena (curva del 3° ordine e della 3ª classe) secondo i principî esposti nella mia *Duodecima* rivista [172^a] (N. 647, § 31, 39, 60, 76, 121). Ogni punto M della curva è dato dall'equipollenza

$$OM \triangleq \frac{2t^2+t^3\daleth}{1-t^2},$$

eguagliando a zero la derivata di questa OM, abbiamo

$$(1-t^2)(4t+3t^2\daleth)+4t^3+2t^4\daleth \triangleq 0,$$

tolta la radice reale $t=0$, che dà il regresso O, rimane per determinare i fochi l'equazione a radici immaginarie

$$-t^2\daleth+3t\daleth+4=0,$$

la radice $t=\daleth$ sostituita nella

$$OF \triangleq \frac{2t^2+t^3\daleth}{1-t^2} \triangleq -\frac{1}{2}$$

dà il foco F, che quindi è posto sull'asse delle x, essendo

$$BF \triangleq \frac{3}{2}\ ,\quad FO \triangleq \frac{1}{2}\ ,\quad OA \triangleq 1;$$

(gli assintoti AC AD dei punti ordinarî tagliano l'assintoto CD del flesso nei punti C D, essendo $BC \triangleq \frac{3}{2}\daleth \triangleq DB$). Un'altra radice è $t=\frac{-\daleth+\sqrt{15}}{2}$, la quale sostituita dà

$$OF_1 \triangleq \frac{2t^2+t^3\daleth}{1-t^2} \triangleq \frac{-11-3\daleth\sqrt{15}}{4}.$$

Così pure abbiamo il terzo foco F_2 dato da

$$OF_2 \triangleq -\frac{11}{4}+\frac{3}{4}\daleth\sqrt{15}.$$

13.—Questi fochi della triattomena possono anche dedursi dalla sua equazione Plucheriana

$$4(w-2u)^3-27v^2w=0,$$

ponendovi $u=1$, $v=\daleth$, con che diviene

$$4w^3-24w^2+75w-32=0;$$

le radici di questa dànno i fochi mediante la relazione $OF \triangleq -w$, per tal maniera si trova ancora

$$OF \triangleq -\frac{1}{2}\ ,\quad OF_1 \triangleq -\frac{11}{4}-\frac{3}{4}\daleth\sqrt{15}\text{, ecc.}$$

Trattandosi di una triattomena le tangenti reali che passano pei tre fochi $F\,F_1\,F_2$ s'incontrano in un punto, a cui diedi il nome d'*antifoco* (Ottava rivista [142ª], N. 103, § 4); ogni tangente della triattomena ha la distanza dall'antifoco in un costante rapporto col prodotto delle sue distanze dai tre fochi. Acciocchè la tangente $[t^3-3t\,,4:2t^3]$ passi pel foco $F\,(-1\,,0:2)$, bisogna che sia $-t^3+3t+4t^3=0$, la sola tangente reale corrisponde a $t=0$ ed è $[0\,,1:0]$, cioè l'asse delle x. Pel foco

$$F_1(-11\,,-3\sqrt{15}:4)$$

passa la tangente data da $-11t^3+33t-12\sqrt{15}+8t^3=0$, si trova $t=-3{,}8433$ e la tangente $[-45{,}239{,}4:-56{,}768]$, quindi l'antifoco sarà $G(-0{,}7909\,,0:1)$.

14. — Nelle curve algebriche meritano attenzione anche il polo della retta all'infinito, nonchè i punti che hanno per polare la retta all'infinito.

Se $f(x\,,y\,,z)=0$ è l'equazione a coordinate Cartesiane (oppure anche baricentriche) di una curva, il punto $(x\,,y\,,z)$ ha la polare $[\mathrm{D}_x f\,,\mathrm{D}_y f\,,\mathrm{D}_z f]$; e se $\varphi(u,v,w)=0$ è l'equazione fra le coordinate Plucheriane (o baricentrali), la retta $[u\,,v\,,w]$ ha il polo $(\mathrm{D}_u\varphi\,,\mathrm{D}_v\varphi\,,\mathrm{D}_w\varphi)$.

Nel caso delle coordinate Cartesiane e Plucheriane la retta all'infinito è $[0\,,0:1]$.

Per la curva del § **12** il polo della retta $[u\,,v:w]$ è

$$(96uw-24w^2-96u^2\,,-54vw:12w^2-48uw+48u^2-27v^2)\,,$$

quindi il polo della retta all'infinito è $(-24\,,0:12)$, cioè B essendo $OB \triangleq -2$.

La polare di $(x\,;y:z)$ è

$$[3x^2-4y^2\,,-8xy-16yz:-8y^2]\,,$$

ed acciocchè questa sia all'infinito, dovrà essere

$$3x^2-4y^2=0\quad,\quad -x-2z=0\quad,\quad x=-2z\quad,\quad 2y=\pm x\sqrt{3}\,,$$

quindi i punti, di cui la retta all'infinito è la polare, sono

$$P(-2\,,\pm\sqrt{3}:1)\quad,\quad OP\triangleq -2\pm\sqrt{3}\,.\,7\,.$$

15. — Pel *teorema del* L a g u e r r e (Ottava [142ª] N. 103, § **6**), si estende ad ogni m.$^{\text{attomena}}$ la proprietà delle diattomene, che comprende come caso particolare quella che diede il nome ai fochi; cioè, la somma delle inclinazioni delle m tangenti condotte da un punto alla curva è uguale alla somma delle inclinazioni delle rette condotte dallo stesso punto agli m fochi. Per esempio, nella curva, che ora consideriamo, le tre tangenti condotte dal punto $(3\,,1:1)$ alla curva delle coordinate Plucheriane $[t^3-3t\,,4:2t^3]$ sono date dall'equazione

$$3t^3-9t+4+2t^3=0\,,$$

che ha le radici

$$t=1\ ,\ t=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{21}{20}},$$

quindi le tangenti sono

$$[-2\,,4:2]\quad\left\{-1\mp6\sqrt{\frac{21}{20}}\,,20:-17\pm18\sqrt{\frac{21}{20}}\right\},$$

la prima è l'assintoto AD $[-1\ ,\ 2:1]$ che ha l'inclinazione

$$\text{Atan}\,\frac{1}{2}=0^r,2952\,,$$

le altre due hanno le inclinazioni $0^r,2186$, $-0^r,1604$; le rette che congiungono il punto $(3\ ,\ 1:0)$ coi fochi $F\,(-1\ ,\ 0:2)$ $F_1\,(11\ ,\ \pm3\sqrt{15}:-4)$, sono

$$[2\,,-7:1]\,,[-4\mp3\sqrt{15}\ ,\ 23:\pm9\sqrt{15}-11]$$

ed hanno le inclinazioni

$$\text{Atan}\,\frac{2}{7}=0^r,1772\quad,\quad0^r,3798\,,-0,2036\ ;$$

la somma tanto delle tre prime inclinazioni quanto delle tre ultime è $0^r,3534$.

16. — Tritome triattomene (cioè curve del 3° ordine e della 3ª classe) con tre assintoti verso punti ordinarî; esse costituiscono quello dei due sotto-generi, che è qualificato: *Tre tratti a rami assintotici ordinarî, uno col regresso, uno col flesso ed uno puro.* Le coordinate Cartesiane e Plucheriane sono espresse in funzioni della variabile t (oltre l'angolo tra gli assi coordinati e le unità di lunghezze relative, si ha un quarto parametro c che serve a distinguere una specie dall'altra)

$$(t^2\,,t^3:t^3+ct^2-t^2-c)\quad,\quad[ct^3-t^3-3ct\,,t^3+2c:-t^3]\,.$$

Il regresso e la sua tangente corrispondono a $t=0$ e sono $(0\,,0:1)$ $[0\ ,\ 1:0]$, il flesso corrisponde a $t=\infty$, il che dà $(0\ ,\ 1:1)$ $[c-1\ ,\ 1:-1]$; un assintoto corrisponde a $t=1$ ed è $[2c+1\ ,\ -2c-1:1]$; acciocchè gli altri due assintoti sieno reali, porremo

$$c(e-1)=e^2\,,$$

ed essi corrisponderanno a $t=-e$, $t=\frac{e}{1-e}$, e saranno

$$\left\{\frac{1}{e-1}\,,\frac{1}{e(e-1)}:\frac{-1}{(e-2)(e+1)}\right\}\ ,\ \left\{\frac{1}{e-1}\,,\frac{1}{e}:\frac{1}{(e-2)(2e-1)}\right\}.$$

Servirà a distinguere una specie dall'altra, invece di c, il parametro e, il quale può ricevere tutti i valori compresi tra 0 e 2; così l'assintoto corrispondente a $t=1$ sarà

$$\left\{\frac{1}{e-1}\,,\frac{-1}{e-1}:\frac{1}{(2e-1)(e+1)}\right\}.$$

Per esempio, se $e=\frac{2}{3}$ questo assintoto è $[-5\,,5:3]$ e i due corrispondenti a $t=-\frac{2}{3}$, $t=2$ sono $[20\,,30:-3]\,[-4\,,2:-3]$; i punti e le tangenti della curva sono dati da

$$(3t^2\,,3t^3:3t^3-7t^2+4)\quad[-7t^3+12t\,,3t^3-8:-3t^3],$$

costruiremo questa specie di curva nel seguente modo.

Dal regresso O e sulla sua tangente prenderemo

$$OA\triangleq\frac{3}{5}\;,\;OC\triangleq\frac{3}{20}\;,\;OA_{,}\triangleq-\frac{3}{5}\;,\;OE\triangleq-\frac{3}{4},$$

da O tireremo una retta OF, che in una particolare *varietà* sarà perpendicolare alla OA, e colla medesima unità di lunghezza oppure con una unità differente prenderemo sulla OF le

$$OF=1\;,\;OG=\frac{3}{2}\;,\;OD=\frac{1}{10}\;,\;OB_{,}=\frac{3}{5}\;,\;OB=-\frac{3}{5},$$

le rette AB CD EG saranno i tre assintoti, **l h k**, F sarà il flesso che avrà la tangente $[7\,,-3:3]$; il tratto di curva ha gli assintoti **h k**, mentre un tratto puro ha gli assintoti **k l**, ed il tratto col regresso O converge esternamente verso gli assintoti **h l**. Per costruire la curva gioverà adoperare la retta $A_{,}B_{,}$ simmetrica rispetto al punto O ad uno l degli assintoti; così su ogni retta passante per O si prenderà (§ **7**, **11**) $HM\triangleq L_{,}K$. Secondo la frase usata alla fine del § **3** la curva è rispetto al suo regresso O la somma geometrica dei tre assintoti **h k l**, e si può costruire ogni tangente col processo spiegato al § **6**.

17. — **Tritome tetrattomene** (cioè della 4ª classe) con tre assintoti, sono nel solito modo le somme geometriche dei tre assintoti rispetto al loro punto doppio od isolato (§ **10**). Prendo per esempio quella specie che ha un diametro e i tre assintoti congruenti (cioè concorrenti in un medesimo punto) qualificata da: *Tre tratti puri, uno coi rami assintotici ordinari, gli altri due si tagliano e ciascuno di essi ha un ramo assintotico verso un flesso*. La curva ha (Mia classificaz. 1851 [59ª] § **78**, categ. 9, B) (*Tredicesima* [173ª] N. 686, 687) le coordinate Cartesiane

$$\left(t^2-1\;,\;t^3-t\;:\;t^2-\frac{1}{3}\right),$$

e quindi (§ **5**) le Plucheriane

$$\left\{-t^4-\frac{1}{3}\;,\;\frac{4}{3}t\;:\;t^4-2t^2+1\right\}.$$

Il punto doppio e le sue tangenti corrispondono a $t=\pm 1$, e sono

$$O(0\,,0:1)\quad,\quad[1\,,\mp 1:0]$$

l'assintoto del flesso corrisponde a $t=\infty$ ed è $[-1\,,0:1]$; gli altri due assintoti $[-1\,,\pm\sqrt{3}:1]$ corrispondono a $t=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$; tutti tre s'incontrano nel punto $A(1\,,0:1)$ dato da $OA \bumpeq 1$.

18. — Possiamo anche introdurre un parametro a per distinguere le infinite *forme*, così le coordinate Cartesiane $x\,y\,z$ e le Plucheriane $u\,v\,w$ sono

$$(3at^2-3a\,,3t^3-3t:3t^2-1)\quad,\quad[-3t^4-1\,,4at:3a(t^2-1)^2]\,.$$

Se le coordinate sieno obbliquangole, e formino tra loro l'angolo γ, per trovare i fochi della curva bisogna attribuire a t quei valori che annullano la derivata di

$$OM \bumpeq \frac{x}{z}+\frac{y}{z}\iota^{\gamma}\,,$$

vale a dire che danno

$$zdx-xdz+(zdy-ydz)\iota^{\gamma}=0\,,$$

senza annullare la z; introducendo le coordinate Plucheriane l'equazione che serve a determinare i fochi è la $v-u\iota^{\gamma}\bumpeq 0$, per la presente curva

$$3t^4+1+4at\iota^{-\gamma}\bumpeq 0\,,$$

ed ecco uno dei pochi casi, in cui può utilmente adoperarsi la risoluzione delle equazioni a coefficienti immaginari, di cui io ebbi talvolta ad occuparmi.

19. — Quando le coordinate sono ortogonali, la precedente equazione, che serve a determinare i fochi, può ricordarsi più facilmente sotto la forma $u+v\iota^{-\gamma}=0$. I fochi possono anche dedursi dall'equazione fra le coordinate Plucheriane $u\,v\,w$, poichè (Ottava 1867, [142ᵃ] N. 103, § 8) ponendovi $u=1$, $v=\iota^{-\gamma}$ e risolvendo l'equazione rispetto a w i fochi sono dati da $OF \bumpeq -w$. Nella tritoma tetrattomena di cui si tratta abbiamo

$$u=-3t^4-1\quad,\quad v=4at\quad,\quad w=3a(t^2-1)^2\,,$$

introduco le variabili inverse $p\,q\,r$ ponendo

$$pu=1\quad,\quad qv=4a\quad,\quad rw=3a\,,$$

quindi

$$-3pt^4-p=1\quad,\quad qt=1\quad,\quad r(t^4-2t^2+1)=1\,,$$

da cui ho subito le due equazioni omogenee rispetto alle $p\,q\,r$

$$3pt^4+qt+p=0\quad,\quad rt^4-2qt^3-qt+r=0\,;$$

è più comodo ricavarne una del secondo grado rispetto alla t

$$3prt^2+qst-pr=0\,,$$

avendo posto per brevità $3p+r=2s$: la risultante dell'eliminazione della variabile t da queste due equazioni del 2° e del 4° grado viene espressa dall'annullarsi del determinante

$$\begin{vmatrix} 3p & . & . & q & p & . \\ . & 3p & . & . & q & p \\ . & . & 3pr & qs & -pr & . \\ . & . & . & 3pr & qs & -pr \\ . & 3pr & qs & -pr & . & . \\ 3pr & qs & -pr & . & . & . \end{vmatrix}$$

che io cangio (*Riassunto d' Algebra* 1875, § 176) in altro formato dai determinanti costituiti di quattro elementi, due dei quali sieno della prima riga e due della prima colonna (così, per esempio, ho il determinante

$$\begin{vmatrix} 3p & q \\ . & -pr \end{vmatrix} = -3p^2 r,$$

che, insieme con tutti gli altri, divido per $3p$); questa medesima riduzione la ripeto una seconda e una terza volta

$$\begin{vmatrix} 3p & . & . & q & p \\ . & 3pr & qs & -pr & . \\ . & . & 3pr & qs & -pr \\ 3pr & qs & -pr & . & . \\ qs & -pr & -qr & -pr & . \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3pr & qs & -pr & . \\ . & 3pr & qs & -pr \\ qs & -pr & -qr & -pr \\ -3p^2 r & -3pqr & -3p^2 r - q^2 s & -pqs \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 3pr & qs & -pr \\ -3p^2 r^2 - q^2 s^2 & -3pqr^2 + pqrs & -3p^2 r^2 \\ -3qr + qs & -4pr - \dfrac{q^2 s}{p} & -qs \end{vmatrix},$$

finalmente sviluppo i termini dell'ultimo determinante formato di nove elementi ed ottengo

$$-48p^4 r^4 + 9p^2 q^2 r^4 - 12p^2 q^2 r^2 s^2 - q^4 rs^3 - q^4 s^4 = 0;$$

sostituisco in luogo di $2s$ il suo valore $3p+r$, divido per $-\frac{1}{16}p^4 q^4 r^4$, introduco di nuovo le coordinate $u=1:p$, $v=4a:q$, $w=3a:r$, ed ho l'equazione desiderata

$$w^4 + 3v^4 + 3v^2 w^2 + 6auw^3 + 6auv^2 w + 12a^2 u^2 w^2 -$$
$$- 6a^2 u^2 v^2 + 10a^3 u^3 w + 3a^4 u^4 = 0.$$

Ponendovi $u=1$, $v=\daleth$ si ha per trovare i fochi l' equazione a coefficienti reali

$$w^4+6aw^3+(12a^2-3)w^2+(10a^3-6a)w+3(a^2+1)^2=0:$$

se, per esempio, sia $a=1:\sqrt{3}$ abbiamo il foco doppio dato da $\mathrm{OF}\bumpeq -w=4:\sqrt{3}$, ed altri due fochi dati da

$$\mathrm{OF}_1\bumpeq -w\bumpeq(-1-\sqrt{2}\,.\,\daleth):\sqrt{3}\quad,\quad \mathrm{OF}_2\bumpeq(-1+\sqrt{2}\,.\,\daleth):\sqrt{3}\,.$$

Alle stesse conseguenze si giunge (§ 12) partendo dall'equipollenza

$$\mathrm{OM}\bumpeq\frac{3t^2-3}{3t^2-1}(a+t\daleth)\,;$$

la *forma*, in cui gli assintoti dei punti ordinarî sono tra loro perpendicolari, corrisponde appunto ad $a=1:\sqrt{3}$.

20. — **Costruzione della curva.** — Pel punto A (*fig. 4*) dato da $\mathrm{OA}\bumpeq a\bumpeq 1:\sqrt{3}$ si tiri perpendicolare alla OA la retta **l**, che sarà l'assintoto del flesso, ed inclinati di 45° si conducano per A i due assintoti ordinarî **h k**. Sia $\mathbf{l}_{,}$ la retta simmetrica (§ 2) dell'assintoto **l** rispetto al punto O, pel quale si conduca una qualunque retta OHLK, che incontri gli assintoti e la $\mathbf{l}_{,}$ nei punti H L K e $\mathrm{L}_{,}$ e su di essa si prenda $\mathrm{KM}\bumpeq\mathrm{L}_{,}\mathrm{H}$, sarà M un punto della tritoma, che ha in O un punto doppio, ed i cui tre assintoti s'incontrano in A; ed essendo $\mathrm{OM}\bumpeq\mathrm{OH}+\mathrm{OK}+\mathrm{OL}$, può dirsi in qualche modo che la curva è rispetto al punto O la somma geometrica dei tre assintoti **h k l**. La direzione della tangente alla curva nel punto M si otterrà (§ 6), prendendo sulle $\mathbf{h}\,\mathbf{h}\,\mathbf{l}_{,}$ i punti $\mathrm{H}'\,\mathrm{K}'\,\mathrm{L}_{,}'$, che abbiano dal raggio vettore OM le distanze proporzionali alle OH OK $\mathrm{OL}_{,}$, poscia determinando la somma geometrica

$$\mathrm{K'T}\bumpeq\mathrm{K'K}+\mathrm{H'H}-\mathrm{L}_{,}'\mathrm{L}_{,}\,.$$

Per determinare le tangenti nel punto doppio O potrebbe servire il metodo spiegato al § 9; del resto le formule del § 18 danno per $t=\mp 1$ le tangenti $[\pm\sqrt{3}\,,\,1:0]$, che perciò hanno le direzioni $\frown 1\pm\sqrt{3}\,.\,\daleth$. Il vertice V della curva è dato da

$$\mathrm{OV}\bumpeq 3\,.\,\mathrm{OA}\,;$$

il foco doppio da $\mathrm{OF}\bumpeq 4\,.\,\mathrm{OA}$, gli altri due fochi $\mathrm{OF}_{,}\bumpeq(-1\mp\sqrt{2})\,\mathrm{OA}$ cadono sulla retta $\mathbf{l}_{,}$ ed appartengono anche alla curva corrispondentemente a

$$t=\mp\sqrt{2:3}\,.$$

21. — Nello stesso modo si costruiranno le tritome *annodate* o *puntate* comprese nei due sotto-generi (categoria 14) a tre assintoti: il problema del § 9 servirà a determinare le tangenti nel punto O, che se sieno reali mostreranno che O è un punto doppio; dicemmo che queste tangenti saranno perpendicolari se si annulli la somma algebrica dei prodotti di ogni distanza di O da un assintoto, moltiplicata pel coseno dell'angolo compreso tra gli altri due assintoti; in tal caso avremo la curva considerata nella Q 620 dei *Nouv. Ann.* 1862 (Mia *Sesta* [130ª] N. 56, [172ª] N. 647, § 46). Per lo studio di alcune di queste curve annodate può anche vedersi *Settima* [136ª] 1864, N. 90, p. 158, [172ª] N. 647, § 55.

22. — Merita esser distinta quella particolare *forma* di tritoma puntata, che io dico *tricratere* regolare, e che appartiene alla *specie* (categoria 4ª) nella quale i tre flessi sono passati a distanza infinita, e perciò vi sono tre diametri, e tre tratti puri ognuno coi rami verso i flessi. I tre assintoti **h k l** formano un triangolo equilatero, di cui il punto isolato O è il centro; nella costruzione grafica gioverà sostituire alla l la sua simmetrica L_1 rispetto ad O, e quindi adoperare al solito la $KM \bumpeq L_1H$ (il che equivale alla $OM \bumpeq OH + OK + OL$). Questo tricratere regolare ha quattro fochi, uno dei quali è il punto isolato; inoltre rispetto a questo punto O ha per focali tre rette condotte per O parallelamente agli assintoti, del che risulta pel teorema analogo a quello menzionato al § 15 che la somma dei tre raggi vettori condotti da O a tre punti in linea retta del tricratere eguaglia la somma delle inclinazioni dei tre assintoti (Vegg. *Ottava* [142ª] 1866, N. 103, p. 62).

Somma dei raggi vettori di un circolo e di una retta.

23. — Vedemmo al § 3 che l'iperbola è in qualche modo rispetto ad un suo punto O la somma geometrica dei suoi due assintoti **h k**, ne viene che le precedenti tritome razionali a tre assintoti **h k l** potrebbero costruirsi mediante la somma geometrica di un'iperbola e dell'assintoto **l**: alla iperbola potremo sostituire una parabola od un'ellisse, che passi essa pure pel punto O; per conservare la semplicità delle costruzioni adopereremo un circolo e per ogni sua corda OK, che incontri in L l'assintoto l, determineremo un punto M della tritoma razionale ad un solo assintoto mediante l'equipollenza

$$OM \bumpeq OK + OL .$$

Si noti che nella stessa figura può costruirsi anche una seconda tritoma mediante la $OM_1 \bumpeq -OK + OL \bumpeq KL$ [ciò vale lo stesso come sostituire al circolo K il suo simmetrico (§ 2) rispetto al punto O], ed allora O sarà il baricentro (§ 1) delle due tritome $M M_1$ e di una retta l_2 determinata da $OL_2 \bumpeq -2OL$.

24. — Costruendo la tritoma M_2 con $OM_2 \bumpeq -OM_1 \bumpeq OK - OL$, il che è lo stesso come sostituire alla l la sua simmetrica L_1, si vede che ogni intersezione della L_1 col circolo K dà nella prima tritoma M un punto che coincide con O. Perciò secondo che la simmetrica l_1 non taglierà toccherà o taglierà in due punti il circolo K, la M sarà *puntata cuspidata* o *annodata*, e le due tangenti nel punto doppio O saranno le rette che vanno ai punti d'intersezione del circolo colla simmetrica dell'assintoto 1.

25. — Sia $\mathrm{OA} \bumpeq a$ *(fig. 5ª)* la distanza del punto O dall'assintoto 1, ed $\mathrm{OC} \bumpeq c\varepsilon^{\gamma}$ determini il centro C del circolo OK, e sia ξ l'inclinazione variabile della OL, sarà

$$\mathrm{OM} \bumpeq \mathrm{OL} + \mathrm{OK} \bumpeq \frac{a}{\cos\xi}\varepsilon^{\xi} + 2c\cos(\xi - r)\,\varepsilon^{\xi} \bumpeq$$

$$\bumpeq a + a\tan\xi \,.\, \sqrt{} + 2c(\cos\gamma\cos\xi + \operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\xi)(\cos\xi + \operatorname{sen}\xi \,.\, \sqrt{}),$$

e posto $\tan\xi = t$, si avrà sotto forma razionale

$$\mathrm{OM} \bumpeq \left(a + 2c\frac{\cos\gamma + t\operatorname{sen}\gamma}{1+t^2}\right)(1 + t\sqrt{}).$$

Il valore inverso di questo raggio vettore è

$$\mathrm{OM'} \bumpeq \frac{1}{\mathrm{OM}} \bumpeq \frac{2 - t\sqrt{}}{a + 2c\cos\gamma + 2ct\operatorname{sen}\gamma + at^2}$$

che evidentemente appartiene ad una ditoma (curva del 2º ordine) la quale passa pel punto O corrispondente a $t = \infty$; dunque la curva M, che in qualche modo possiamo dire la somma geometrica della retta 1 e del circolo OK, è sempre la curva inversa di una ditoma, che sarà una parabola un'iperbola od un'ellisse, secondo che il punto O è nella curva un regresso un punto doppio od un punto isolato.

26. — Anche in questo caso è facile (§ 6) la costruzione della tangente in ciascun punto M della curva. Sulla 1 si determini il punto L', la cui distanza dal raggio vettore OLM sia uguale alla OL, e sulla KK' tangente in K al circolo OK si prenda il punto K' che abbia dallo stesso raggio vettore OK la distanza eguale alla OK; la tangente alla curva nel punto M sarà parallela alla somma geometrica $\mathrm{LL'} + \mathrm{KK'} \bumpeq \mathrm{LT'}$. È anche più facile la seguente costruzione della normale in M, che dipende dalla precedente mediante elementari considerazioni geometriche: sia Q il punto OA (perpendicolare all'assintoto 1) equidistante da O e da L, e sia $\mathrm{QN} \bumpeq \mathrm{CK}$ la $\mathrm{ON} \bumpeq \mathrm{OQ} + \mathrm{CK}$, sarà parallela alla normale della curva nel punto M.

27. — L'inversa della parabola rispetto ad un suo punto, che è una tritoma cuspidata, la riferiremo alla tangente OL_0 del regresso O ed all'assintoto $\mathrm{L}_0\mathrm{L}$ ossia 1; sarà L_0 il punto di contatto dell'assintoto col circolo simmetrico rispetto ad O del circolo OK (del quale e dell'assintoto 1 la tritoma viene ad essere la somma geometrica). Sull'asse delle x abbiamo la $\mathrm{OL}_0 \bumpeq 1$, e sull'assintoto 1, che formi colla OL_0 l'angolo σ, prendiamo il punto L dato da $\mathrm{L}_0\mathrm{L} \bumpeq t\varepsilon^{\sigma}$; la retta OL taglierà il circolo OK nel suo punto K ed il suo simmetrico in K_2, ed il punto M della tritoma sarà dato da

$$OM \simeq OL + OK \simeq OL - OK_2 \simeq K_2L\,;$$

dal punto L si spiccano la tangente LL_0 e la secante L_0O, quindi la parte esterna K_2L di questa sarà

$$OM \simeq \frac{t^2}{\mathrm{cj}\,OL} \simeq \frac{t^2}{1+t\epsilon^{-\sigma}} \simeq \frac{t^2(1+t\epsilon^{\sigma})}{t^2+2t\cos\sigma+1}\,;$$

e quindi la tritoma riferita agli assi coordinati obbliquangoli 1 ϵ^{σ} avrà le coordinate Cartesiane

$$(t^2\,,\ t^3 : t^2+2t\cos\sigma+1)\,.$$

Da queste coordinate $x\,y\,z$ si passa alle coordinate Plucheriane mediante le relazioni

$$u\varphi = |\,y\,.\,dz\,|\,,\ v\varphi = |\,z\,.\,dx\,|\,,\ w\varphi = |\,x\,.\,dy\,|$$

essendo φ un fattore comune, che nel presente caso è $\varphi = t$; le coordinate Plucheriane sono

$$[-t^3-4t^2\cos\sigma-3t\,,\,2t\cos\sigma+2 : t^3]\,.$$

Viceversa dalle $u\,v\,w$ si passa alle

$$xf = |\,v\,.\,dw\,|\ \ ,\ \ yf = |\,w\,.\,du\,|\ \ ,\ \ zf = |\,u\,.\,dv\,|\,;$$

nel presente caso $f = 4t\cos\sigma + 6$. Serve di altra verificazione la $ux + vy + wz = 0$. Queste tritome appartengono al sotto-genere (categoria 13ª) qualificato da *un solo tratto con regresso flesso, e rami assintotici.*

28. Determinanti dei flessi e dei regressi. Equazione caratteristica. — Per determinare il flesso della curva predetta, adopero quello che io dico il determinante dei flessi (*Duodecima* rivista [168ª] N. 261, 262, 264 [172ª] N. 647, § **118**); esso è formato dalle coordinate Plucheriane $u\,v\,w$ e dalle loro derivate prime e seconde rispetto alla variabile t, ed è $[u\,.\,dv\,.\,d^2w]$; più comodamente è espresso mediante il predetto fattore f da

$$(xd^2u + yd^2v + zd^2w)f = (4t^2\cos\sigma + 6t)f = tf^2\,;$$

similmente il determinante dei regressi è

$$|\,x\,.\,dy\,.\,d^2y\,| = (ud^2x + vd^2y + wd^2z)\varphi\,,$$

nel nostro caso

$$(4t^2\cos\sigma + 6t)\varphi = (4t\cos\sigma + 6)\varphi^2\,.$$

Eguagliando a zero il fattore t che è compreso due volte nel determinante dei regressi ed una sola nel determinante dei flessi, si ottiene il regresso O; invece il fattore $2t\cos\sigma + 3 = 0$ che è doppio nel determinante dei flessi e semplice in quello dei regressi dà il flesso S, il quale corrispondendo a $t = -3 : 2\cos\sigma$ è

$$(18\cos\sigma\ ,\ -27 : -16\cos^3\sigma + 18\cos\sigma)$$

ed ha la tangente

$$[-27+36\cos^2\sigma\,,\,8\cos^3\sigma:27]\,.$$

29. — Fochi. — Per trovare i fochi della tritoma, che è anche triattomena, bisogna sostituire nella

$$\mathrm{OM}\bumpeq\frac{t^2(1+t\varepsilon^\sigma)}{t^2+2t\cos\sigma+1}$$

quei valori immaginarî della t, che ne fanno annullare la derivata $d\mathrm{M}$; osservando che $\mathrm{OM}\bumpeq(x+y\varepsilon^\sigma):z$ si vede che deve soddisfarsi la

$$zdx-xdz+(zdy-ydz)\varepsilon^\sigma=v-u\varepsilon^\sigma=0\,,$$

che nel nostro caso è

$$2t\cos\sigma+2+(t^3+4t^2\cos\sigma+3t)\varepsilon^\sigma\bumpeq 0\,. \tag{1}$$

Considerando che la parabola inversa della tritoma ha l'equipollenza

$$\mathrm{OM}'\bumpeq\frac{1}{\mathrm{OM}}\bumpeq\frac{1+t\varepsilon^{-\sigma}}{t^2}\,,$$

e che perciò il suo foco F' è dato da

$$d\mathrm{OM}'\bumpeq-\frac{2}{t^3}-\frac{1}{t^2}\varepsilon^{-\sigma}\bumpeq 0\,,\quad t\bumpeq-2\varepsilon^\sigma\,,\quad \mathrm{OF}'\bumpeq\frac{1}{4}\varepsilon^{-2\sigma}-\frac{1}{2}\varepsilon^{-2\sigma}\bumpeq-\frac{1}{4}\varepsilon^{-2\sigma}\,,$$

si prevede che la tritoma avrà un foco dato da

$$\mathrm{OF}\bumpeq\frac{1}{\mathrm{OF}'}\bumpeq-4\varepsilon^{2\sigma}\,;$$

ed infatti la (1) che può anche scriversi

$$t^3\varepsilon^\sigma+t^2(2\varepsilon^{2\sigma}+1)+t(4\varepsilon^\sigma+\varepsilon^{-\sigma})+2\bumpeq 0$$

ha la radice $t=-2\varepsilon^\sigma$, che sostituita nella

$$\mathrm{OM}\bumpeq\frac{t^2}{1+t\varepsilon^{-\sigma}}$$

ci dà il foco F,

$$\mathrm{OF}\bumpeq\frac{4\varepsilon^{2\sigma}}{1-2}\bumpeq-4\varepsilon^{2\sigma}\,.$$

La medesima equipollenza oltre la radice $t=-2\varepsilon^\sigma$ ha la radice doppia $t=\varepsilon^{-\sigma}$, la quale dà il foco doppio F_2, essendo

$$\mathrm{OF}_2\bumpeq\frac{\varepsilon^{-2\sigma}}{1-\varepsilon^{-2\sigma}}\bumpeq\frac{\varepsilon^{-\sigma}}{\varepsilon^\sigma-\varepsilon^{-\sigma}}\bumpeq\frac{\varepsilon^{-\sigma}}{2\surd\,\mathrm{sen}\,\sigma}\,.$$

Ne viene (§ 15) che se da un punto T possono condursi tre tangenti alla triattomena, la somma delle loro inclinazioni eguaglia la somma dell'inclinazione della retta TF col doppio dell'inclinazione della TF_2. Si noti che il foco doppio è il centro del circolo OK, che servì a generare la triattomena, che è la somma geometrica rispetto al regresso O di esso circolo e dell'assintoto l.

30. — Le tritome-triattomene del ꝫ 27 non sono tutte quelle che io riferii alla categoria 13, ma soltanto una particolare *forma* per ciascheduna *varietà*. Prendo il regresso per origine delle coordinate, la sua tangente per asse delle x, e l'asse delle y parallelo all'assintoto; l'espressione generale di questo sotto-genere è

$$\mathrm{OM} \bumpeq \frac{at^2 + bt^3\varepsilon^{\sigma}}{t^2 + 2t\cos\sigma + 1},$$

σ è il parametro che serve a distinguere una specie dall'altra; la curva inversa della parabola appartiene alla *varietà*, in cui l'angolo degli assi coordinati è $\gamma = \sigma$, ed alla *forma* in cui $a = b$.

31. — Passiamo a costruire nel solito modo la curva che è in qualche maniera la somma geometrica di una retta l e di un circolo OK, e supponiamo che la retta l segni nel circolo OK_1 (simmetrico rispetto al punto O del circolo OK) una corda, il cui mezzo sia L_0, per ogni retta $\mathrm{OK}_1\mathrm{L}$, che tagli il circolo in K_1 e la retta in L, si avrà il punto M della tritoma da

$$\mathrm{OM} \bumpeq \mathrm{OL} + \mathrm{OK} \bumpeq \mathrm{OL} - \mathrm{OK}_1 \bumpeq \mathrm{K}_1\mathrm{L}\,.$$

Colle posizioni fatte al ꝫ 27 avremo $\mathrm{OL}_0 \bumpeq 1$, $\mathrm{L}_0\mathrm{L} \bumpeq t\varepsilon^{\sigma}$, e chiamata $2c$ la corda che il circolo OK_1 taglia sulla retta l, il prodotto di ciascuna secante partente da L per la sua parte esterna sarà $= t^2 - c^2$, e perciò la parte esterna $\mathrm{K}_1\mathrm{L}$ della secante LO sarà $= (t^2 - c^2) : \mathrm{OL}$ espressa da $(t^2 - c^2) : \mathrm{cjOL}$, quindi

$$\mathrm{OM} \bumpeq \frac{t^2 - c^2}{\mathrm{cjOL}} \bumpeq \frac{t^2 - c^2}{1 + t\varepsilon^{-\sigma}} \bumpeq \frac{(t^2 - c^2)(1 + t\varepsilon^{\sigma})}{1 + 2t\cos\sigma + t^2}\,.$$

Queste curve appartengono al sotto-genere II, 13. *Un solo tratto annodato col flesso e coi rami assintotici:* due sono i parametri $c\ \sigma$ che servono a distinguere una specie dall'altra; la nostra curva inversa dell'iperbola è una forma particolare in ciascuna specie.

32. — Limitiamoci a considerare le inverse delle iperbole rispetto ad un loro vertice; esse appartengono alla *tribù* di specie II, 8. *Un tratto puro annodato coi rami assintotici verso il flesso,* e corrispondono a $\sigma = \pi : 2$

$$\mathrm{OM} \bumpeq \frac{(t^2 - c^2)(1 + t\surd)}{t^2 + 1}$$

I fochi sono dati da $d\mathrm{OM} \bumpeq 0$, cioè

$$t^4 + (3 + c^2)t^2 - 2(c^2 + 1)t\surd - c^2 = 0\,,$$

che si risolve ponendo $t = \tau\daleth$. Nel caso particolare che il punto doppio O abbia le tangenti tra loro perpendicolari, cioè si tratti dell'inversa dell'iperbola equilatera, è $c = 1$, e la t ha due valori $= \daleth$, oltre gli altri $(\pm \sqrt{2} - 1)\daleth$, quindi la tritoma tetrattomena (che dicesi *folium* o *strofoide*) ha un foco doppio F_2 e due fochi semplici $F\ F_1$ dati da

$$\mathrm{OF}_2 \bumpeq \frac{t^2-1}{1-t\daleth} \bumpeq \frac{-2}{1+1} \bumpeq -1 \quad , \quad \mathrm{OF} \bumpeq \frac{-3+2\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}-1} \bumpeq 2-2\sqrt{2} ,$$

$$\mathrm{OF}_1 \bumpeq 2+2\sqrt{2} ,$$

il foco doppio F_2 è il vertice della curva, anche gli altri due fochi sono posti sull'asse della x, essendo

$$\mathrm{F_2O} \bumpeq 1 \quad , \quad \mathrm{F_2F} \bumpeq 0{,}716 \quad , \quad \mathrm{F_2F_1} \bumpeq 5{,}8284 .$$

Nella curva inversa, che è iperbola equilatera, O è il vertice che serve da centro d'inversione, F_2' è l' altro vertice dell'iperbola, $F'\ F'_1$ ne sono i fochi. Se da un punto T si conducono quattro tangenti alla strofoide, la somma delle loro inclinazioni eguaglia (§ 15) quella delle inclinazioni delle rette condotte dal punto T ai quattro fochi $F\ F_1\ F_2 F_2$ della strofoide. — Resta da vedere se tutte le inverse delle ditome rispetto ad un loro punto abbiano un foco doppio, oltre i due fochi inversi di quelli della diattomena; si potrà esaminare col mezzo dell'equazione fra le coordinate Pluccheriane.

33. — Curve dei punti brillanti sui circoli concentrici. — Le inverse dell'iperbola equilatera rispetto ad un qualunque suo punto possono descriversi anche in un altro modo alquanto più spedito. Queste curve dànno la più facile soluzione del celebre problema: Sui circoli che hanno il centro O *(Fig. 6ª)* trovare i punti di riflessione dei raggi di luce, che partendo dal punto A sono riflessi verso il punto B. Col metodo delle equipollenze il problema si riduce al caso che il punto luminoso sia a distanza infinita, cioè che i raggi incidenti siano paralleli. Il punto brillante M nel circolo di centro O è dato dall' equipollenza

$$(\mathrm{OM})^2 \bumpeq m \,.\, \mathrm{AM} \,.\, \mathrm{BM} ,$$

ossia, posto $\mathrm{OM} \bumpeq r\varepsilon^{\xi}$, da

$$r^2\varepsilon^{2\xi} \bumpeq m(r\varepsilon^{\xi} - \mathrm{OA})(r\varepsilon^{\xi} - \mathrm{OB}) ,$$

essendo m un coefficiente numerico indeterminato, che elimineremo mediante la equipollenza conjugata

$$r^2\varepsilon^{-2\xi} \bumpeq m(r\varepsilon^{-\xi} - \mathrm{cj\,OA})(r\varepsilon^{-\xi} - \mathrm{cj\,OB}) ,$$

e posto

$$\mathrm{OA} + \mathrm{OB} \bumpeq \mathrm{OS} , \qquad (1)$$

avremo

$$\mathrm{cj\,OA} \,.\, \mathrm{cj\,OB} \,.\, \varepsilon^{4\xi} - r \,.\, \mathrm{cj\,OS} \,.\, \varepsilon^{3\xi} + r \,.\, \mathrm{OS} \,.\, \varepsilon^{\xi} - \mathrm{OA} \,.\, \mathrm{OB} \bumpeq 0 . \qquad (2)$$

Se invece i raggi incidenti abbiano l'inclinazione nulla e l'occhio sia posto in F, il punto brillante M (essendo $\mathrm{OM} \bumpeq r\varepsilon^{\xi}$) sarà dato dalle equipollenze

$$r\varepsilon^{2\xi} \bumpeq nr(\varepsilon^{\xi} - \mathrm{OF}) \quad , \quad r\varepsilon^{-2\xi} \bumpeq nr(\varepsilon^{-\xi} - \mathrm{cj\,OF})$$

$$\mathrm{cj\,OF} \, . \, \varepsilon^{4\xi} - r\varepsilon^{3\xi} + r\varepsilon^{\xi} - \mathrm{OF} \bumpeq 0 \, ; \tag{3}$$

questa (3) diviene identica alla (2) se la OS sia presa per origine delle inclinazioni (sicchè $\mathrm{cj\,OS} \bumpeq \mathrm{OS}$) e sia

$$\mathrm{OF} : \mathrm{OA} \bumpeq \mathrm{OB} : \mathrm{OS} \, . \tag{4}$$

La (1) c'insegna di tirare la $\mathrm{AS} \bumpeq \mathrm{OB}$ (cioè AS eguale parallela e diretta nello stesso senso della OB) e per la (4) formeremo il triangolo AOF simile dritto ad SOB. — Ci rimane da costruire la curva dei punti brillanti M tali che la OM abbia sulla OS l'inclinazione che sia la metà di quella della MF; a tal effetto tirata da F una qualsivoglia FG, che incontri la OS in G, si prenderanno sulla FG dalle due parti del punto G le $\mathrm{GM} = \mathrm{GM'} = \mathrm{GO}$, sicchè ne risultino i triangoli isosceli GOM GOM', ed il luogo dei punti M sarà una tritoma col punto doppio O, la quale tagliata col circolo di dato raggio $\mathrm{OM} = r$, determinerà su di esso i cercati punti brillanti.

34. — Tangente. — Dal modo di descrivere la curva si può ricavare la seguente determinazione della tangente nel punto M: quando la retta FG ruota dell'angolo infinitesimo ω, il punto G si muove sulla retta SOG dello spazio $\omega \, . \, \mathrm{FG} : \mathrm{sen\,FGS}$; anche la GM ruota dello stesso angolo, perciò il punto M si muove perpendicolarmente alla GM dello spazio $\omega \, . \, \mathrm{GM}$; finalmente questa $\mathrm{GM} = \mathrm{GO}$ si allunga precisamente della stessa lunghezza $\omega \, . \, \mathrm{FG} : \mathrm{sen\,FGS}$. Perciò sulla SOG si trovi il punto G' che abbia dal raggio vettore FGM la distanza FG, e la tangente in M sarà la somma geometrica di due rette eguali alla GG' dirette l'una secondo OG l'altra secondo GM, e di una terza retta eguale e perpendicolare alla GM. — Le tangenti nel punto doppio O sono tra loro perpendicolari, perchè dimezzano gli angoli formati dalle SO FO.

35. — Dimostreremo che la costruzione spiegata al § **33** spetta alle inverse dell'iperbola equilatera, osservando che esse hanno (§ **31**) l'equipollenza

$$\mathrm{OM} \bumpeq \frac{(t^2-1)(1+t\varepsilon^{\sigma})}{t^2+2t\cos\sigma+1} \, ,$$

e riferendosi al punto F dato da $\mathrm{FO} \bumpeq \mathrm{OL}_0 \bumpeq 1$, sarà

$$\mathrm{FM} \bumpeq 1 + \mathrm{OM} \bumpeq \frac{2t^2+2t\cos\sigma+(t^3-t)\varepsilon^{\sigma}}{t^2+2t\cos\sigma+1}$$

questa retta FM taglia $\mathrm{SO} \sim \varepsilon^{\sigma}$ (cioè parallela alla ε^{σ}) nel punto G dato dalla

$$\mathrm{FG} \bumpeq 1 + \frac{t^2-1}{2t+2\cos\sigma}\varepsilon^{\sigma}$$

avente la stessa direzione della FM; perciò

$$\mathrm{OG} \bumpeq \frac{t^2-1}{2(t+\cos\sigma)}\varepsilon^{\sigma}$$

e

$$\mathrm{GM} \bumpeq \mathrm{OM}-\mathrm{OG} \bumpeq \frac{t^2-1}{t^2+2t\cos\sigma+1}+(t^2-1)\varepsilon^{\sigma}\left(\frac{t}{t^2+2t\cos\sigma+1}-\frac{1}{2(t+\cos\sigma)}\right)$$

ed il rapporto

$$\mathrm{GM}:\mathrm{OG} \bumpeq (2[t+\cos\sigma]\varepsilon^{-\sigma}+t^2-1):(t^2+2t\cos\sigma+1)$$

si trova aver la grandezza 1, giacchè moltiplicandolo pel proprio conjugato, si ottiene il prodotto $\bumpeq 1$.

36.—Flesso. — Per trovare il punto di flesso contrario osserveremo che le coordinate Cartesiane obbliquangole

$$x=t^2-1 \quad , \quad y=t^3-t \quad , \quad z=t^2+2t\cos\sigma+1$$

dànno le coordinate Plucheriane

$$\begin{aligned} u &= |y\,.\,dz| = -t^4-4t^3\cos\sigma-4t^2+1 \\ v &= |z\,.\,dx| = 2t^2\cos\sigma+4t+2\cos\sigma \\ w &= |x\,.\,dy| = t^4-2t^2+1\,, \end{aligned}$$

le quali riproducono le Cartesiane mediante le

$$xf=|v\,.\,dw| \quad , \quad yf=|w\,.\,du| \quad , \quad zf=|u\,.\,dv|\,,$$

essendo

$$f=t^3\cos\sigma+3t^2+3t\cos\sigma+1\,.$$

Il determinante dei flessi (§ 28) è

$$|u\,.\,dv\,.\,d^2w|=(xd^2u+yd^2v+zd^2w)f=f^2\,,$$

è quello dei regressi è

$$|x\,.\,dy\,.\,d^2r|=ud^2x+vd^2y+wd^2z=f\,;$$

perciò i flessi, di cui uno solo è reale, sono dati dall'equazione $f=0$. Così se $\cos\sigma=0{,}6$, si ha $t=-4{,}5835$, ed il flesso è (20,0083 , — 91,7077 : 16,5081).

37. — **I Fochi** della curva sono dati dalle radici immaginarie (§ **18**) dell'equipollenza

$$v-u\varepsilon^{\sigma} \bumpeq (t^4+4t^3\cos\sigma+4t^2-1)\varepsilon^{\sigma}+2t^2\cos\sigma+4t+2\cos\sigma \bumpeq 0\,,$$

che mediante la $2\cos\sigma \bumpeq \varepsilon^{\sigma}+\varepsilon^{-\sigma}$, si riduce a

$$t^4\varepsilon^{\sigma}+2(\varepsilon^{2\sigma}+1)t^3+(5\varepsilon^{\sigma}+\varepsilon^{-\sigma})t^2+4t+\varepsilon^{-\sigma} \bumpeq 0$$

ed ha la radice doppia $t \bumpeq -\varepsilon^{-\sigma}$, poi rimane la $t^2+2\varepsilon^{\sigma}t+1 \bumpeq 0$, e quindi le altre due radici $t \triangleq -\varepsilon^{\sigma} \pm \sqrt{(\varepsilon^{2\sigma}-1)}$. Questi valori immaginari di t si sostituiranno nella

$$OM \triangleq \frac{(t^2-1)(1+t\varepsilon^{\sigma})}{t^2+2t\cos\sigma+1} \triangleq \frac{t^2-1}{1+t\varepsilon^{-\sigma}},$$

e si otterrà da prima il foco doppio F dato da $OF \triangleq -1$, poscia altri due fochi dati da

$$OF_1 \triangleq 2\varepsilon^{2\sigma} \pm 2\sqrt{(\varepsilon^{2\sigma}-1)}.$$

Il foco doppio F è il centro del circolo OK, ed inoltre il punto, a cui convergono i raggi paralleli all'assintoto, dopo che sono riflessi dagli infiniti circoli col centro O nei punti, nei quali essi circoli sono intersecati dalla tritoma.

Concoidi.

38. — Invece di sommare i raggi vettori di due o più linee, si può sommare una lunghezza costante ai raggi vettori di una linea condotti da un punto dato I; per tal maniera si ottiene una serie di linee, che odoperando una parola usata dall'antico Nicomede diremo una serie di concoidi, fra le quali rimangono comprese porzioni eguali di tutti i raggi vettori.

39. — Normali delle concoidi. — Dato un punto I, da cui deggiono partire tutti i raggi vettori IGM (*fig.* 7) e data una linea Gg si costruiscono facilmente le concoidi M_c della G, prendendo su ciascun raggio vettore IG una lunghezza GM_c, che sarà costante per ciascuna concoide e cangerà da una concoide all'altra; s'intende che la c dovrà prendersi in ambedue le direzioni opposte, cosicchè ogni raggio vettore IG conterrà due punti della medesima concoide. La IM_c è la somma geometrica della IG e della c; quando IG ruota dell'angolo infinitesimo ω il punto G si muoverà sulla linea Gg di una lunghezza $Gg = IG \,.\, \omega : \operatorname{sen} IGg$, e nello stesso tempo la lunghezza costante c ruotando dell'angolo ω, il suo estremo si muoverà perpendicolarmente alla retta IGM_c della lunghezza $c\omega$; la somma geometrica di questi due movimenti dà la direzione della tangente alla concoide in M_c. Riuscirà più comodo determinare invece la normale, mediante la somma geometrica di rette perpendicolari alle precedenti; cioè dal punto G si tirerà perpendicolarmente alla data linea Gg la GN eguale a $IG : \operatorname{sen} IGg$, e tutti i punti $M_c\, M_{c'}\, M_{c''} \ldots$ delle varie concoidi poste sul raggio vettore IG avranno le normali che concorreranno nel punto N.

40. — Concoidi del circolo di diametro $IA \triangleq 1$ rispetto ad un suo punto I; acciocchè la corda IG sia espressa razionalmente in funzione della variabile t, avendo notato che la retta $(1+t\gamma)^2 \triangleq 1-t^2+2t\gamma$ ha la lunghezza $1+t^2$, faremo in guisa che la corda IG abbia tal lunghezza e direzione $r\,\dfrac{1-t^2+2t\gamma}{1+t^2}$ che la

$$GA \triangleq 1 - r\,\frac{1-t^2+2t\gamma}{1+t^2}$$

riesca perpendicolare alla IG cioè abbia la direzione della $2t+(t^2-1)\daleth$, a tal fine porremo $r=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, sicchè sarà

$$\mathrm{IG} \bumpeq \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1-t^2+2t\daleth}{1+t^2},$$

e dovendo aggiungere alla IG la $\mathrm{GM}_c = c$ nella sua stessa direzione, vedremo finalmente che la

$$\mathrm{IM}_c \bumpeq (1-t^2+c+ct^2)\left(\frac{1+t\daleth}{1+t^2}\right)^2$$

determina il punto generico M_c di una qualunque delle concoidi del circolo IGA. — Nel presente caso la $\mathrm{IG} : \mathrm{sen}\,\mathrm{IG}g$ è uguale al diametro del circolo, perciò (§ 39) se N è il punto del circolo IGA diametralmente opposto a G, la NM_c è normale alla concoide M_c; il che rende più facile la costruzione della curva.

41. La retta IM' presa sulla IM_c ed inversamente proporzionale alla IM_c è

$$\mathrm{IM'} \bumpeq \frac{1}{\mathrm{cj}\,\mathrm{IM}_c} \bumpeq \frac{(1+t\daleth)^2}{1+c-t^2+ct^2}$$

$\left(\text{giacchè } \frac{1+t^2}{1-t\daleth} \bumpeq 1+t\daleth\right)$, dunque l'inversa della concoide M_c è una ditoma riferita ad un punto I di un suo asse mediante le coordinate ortogonali Cartesiane e Pluccheriane

$$(1-t^2,\, 2t : 1+c-t^2+ct^2) \quad , \quad [ct^2-t^2-1-c, -2ct : t^2+1]$$

e pel detto al § 19 i fochi di questa ditoma sono dati da

$$-u-v\daleth \bumpeq t^2-ct^2+1+c+2ct\daleth \bumpeq 0\,,$$

che ha le due radici $t \bumpeq \daleth$, $t \bumpeq \frac{c+1}{c-1}\daleth$; la prima, mostra che I è un foco della ditoma, e la seconda, determina l'altro foco F' della ditoma mediante la

$$\mathrm{IF'} \bumpeq \frac{(1+t\daleth)^2}{1+c-t^2+ct^2} \bumpeq \frac{2}{1-c^2}\,.$$

Viene da ciò che la coincide di un circolo rispetto al suo punto I, è l'inversa di una ditoma rispetto ad un suo foco, e che la concoide ha un foco dato da

$$\mathrm{IF} \bumpeq \frac{1}{\mathrm{cj}\,\mathrm{IF'}} \bumpeq \frac{1-c^2}{2}\,.$$

42. — **Inversa dell'iperbola rispetto al foco.** — Finchè la quantità positiva c è minore dell'unità le concoidi del circolo sono inverse delle iperbole. Le loro coordinate Cartesiane e Plucheriane sono

$$[1+c-2t^2+t^4-ct^4,\ 2(t+ct-t^3+ct^3):(1+t^2)^2],$$

$$[-1-c+6t^2+(-1+c)t^4,\ -2(2+c)t+2(2-c)t^3:(1+c)^2-2(1-c^2)t^2+(1-c^2)t^4].$$

L'equazione $u+v\gamma \bumpeq 0$

$$(-1+c)t^4+2(2-c)t^3\gamma+6t^2-2(2+c)t\gamma-1-c \bumpeq 0$$

oltre la radice $t=\frac{1+c}{1-c}\gamma$, che dà il foco IF $\bumpeq (1-c^2):2$ inverso di quello dell'iperbola, ha la radice tripla $t=\gamma$, che dà il foco triplo C (essendo IC $\bumpeq 1:2$) che è il centro del circolo IGN. La curva è una tetratoma tetrattomena costituita da un solo tratto rientrante annodato con una tangente doppia ed asse.

43. — Inversa della parabola. Cardioide. — Quando $c=1$ la concoide si abbassa dalla quarta alla terza classe, cioè diviene triattomena ed ha le coordinate

$$(2-2t^2,\ 4t:1+2t^2+t^4)\quad,\quad [-1+3t^2,\ -3t+t^3:2].$$

L'equazione $u+v\gamma=0$ ha la sola radice tripla $t=\gamma$, e quindi si ha il solo foco triplo C, il quale pure si trova (§ 19) mediante l'equazione tra le coordinate Plucheriane

$$(2u+w)(u-4w)^2=27v^2w$$

poichè postovi $u=1$, $v=\gamma$ diventa

$$(2+w)(1-4w)^2+27w=2(2w+1)^3=0$$

che ha la sola radice tripla $w=-1:2$.

Ne viene (§ 15) che la somma delle inclinazioni di tre tangenti alla cardioide condotte da un punto T eguaglia il triplo della inclinazione della retta TC.

L'equazione caratteristica è

$$t_1^2+2tt_1+3=0;$$

se vi si pone $t=\sqrt{3}$ essa ha il fattor doppio $(t_1+\sqrt{3})^2$, ne viene che la tangente $[4,0:1]$ tocca la curva, che dicesi cardioide, nei due punti

$$(-1,\pm\sqrt{3}:4).$$

44. — Equazione caratteristica, così ho chiamata (*Duodecima* [168ª] N. 61, § 8) per ogni curva algebrico-razionale l'equazione

$$(ux_1+vy_1+wz_1):(t_1-t)^2=a$$

essendo $x_1 y_1 z_1$ le coordinate Cartesiane corrispondenti a t_1. Se il valore di t sia tale che la predetta equazione sia ancora divisibile per t_1-t a quel valore di t corrisponde un flesso od un regresso. Che se il valore di t sia tale che l'equazione caratteristica dia a t_1 due valori eguali, ciò significa che la retta $[u, v, w]$ tocca la curva nei due punti (x, y, z) (x_1, y_1, z_1), e perciò è una tangente doppia. E se invece t_1 sia tale che l'equazione caratteristica dia a t due valori eguali, il punto (x_1, y_1, z_1) sarà un punto doppio avendo le due tangenti

$$[u_1, v_1, w_1] \quad , \quad [u, v, w],$$

44. — L'equazione caratteristica delle concoidi del circolo si ottiene eseguendo la divisione $(ux_1 + vy_1 + wz_1) : (t_1 - t)^2$, dopo aver posti i valori delle coordinate $x_1\, y_1\, z_1\; u\, v\, w$ date al § 42; essa è

$$(c + c^2 + 2t^2 - 3ct^2 + c^2 t^2) t_1^2 + 4tt_1 + 2 + 3c + c^2 - ct^2 + c^2 t^2 = 0,$$

oppure, ordinata secondo le potenze della t,

$$(-c + c^2 + 2t_1^2 - 3ct_1^2 + c^2 t_1^2) t^2 + 4t_1 t + 2 + 3c + c^2 + ct_1^2 + c^2 t_1^2 = 0.$$

Tale equazione è ancora divisibile per $(t_1 - t)$ quando

$$(2 - 3c + c^2) t^4 + (4 + 2c^2) t^2 + 2 + 3c + c^2 = 0$$

equazione che dà i due flessi quando esistono.

L'equazione caratteristica presenterà due valori eguali di t_1 se sia

$$(c^3 - 4c^2 + 5c - 2) t^4 + 2(c^3 - 3c) t^2 + c^3 + 4c^2 + 5c + 2 = 0,$$

ne viene $t^2 = (2 + c) : (2 - c)$, a cui corrisponde la tangente doppia, la quale a motivo della simmetria della curva rispetto all'asse delle x è perpendicolare a questo asse, cioè dà $v = 0$. La stessa equazione caratteristica dà alla t due valori eguali se sia

$$(c^3 - 2c^2 - c + 2) t_1^4 + 2c(c^2 - 3) t_1^2 + c^3 + 2c^2 - c - 2 = 0,$$

il che dà $t_1^2 = (1 + c) : (1 - c)$, e quindi il punto doppio che è l'origine delle coordinate, e perciò dà $y = 0$, $x = 0$. Gli altri due punti sull'asse, che sono i vertici della curva, corrispondono a $t = 0$, e $t = \infty$; quelli sull'asse della y corrispondono a $t = \pm 1$.

45. — Le inverse dell'ellisse rispetto ad un foco sono le concoidi del circolo corrispondenti a $c > 1$; alcune di esse hanno due flessi e una tangente doppia, in una corrispondente a $c = 2$, i due flessi e la tangente doppia si riducono ad un punto di *raddrizzamento;* altre finalmente sono formate da un tratto rientrante senza alcuna singolarità.

46. — Le Concoidi della retta AG rispetto ad un punto O si costruiscono facilmente prendendo su ciascun raggio vettore OG dalle due parti del punto G le porzioni GM, eguali ad una data lunghezza c: pel detto al § 39 si vedrà che, se per ciascun punto G della retta AG s'innalzi una perpendicolare, che si tagli in N colla ON innalzata dal punto O perpendicolarmente al raggio vettore OG, pel punto N passeranno le normali di tutti i punti M_c situati sul raggio OG ed appartenenti alle varie concoidi della retta AG rispetto ad O.

47. — Determineremo le coordinate della concoide operando in modo simile al § **40**; se OA $\triangleq$ 1 un punto della retta AG perpendicolare alla retta OA è determinato dal raggio vettore

$$OG \triangleq 1 + \frac{2t}{1-t^2}\gamma\,,$$

che ha la direzione $(1+t\gamma)^2$, e la sua prolungazione GM_c di lunghezza c, sarà

$$\triangleq c\,\frac{(1+t\gamma)^2}{1+t^2}\,,$$

perciò

$$OM_c \triangleq \left(\frac{1}{1-t^2}+\frac{c}{1+t^2}\right)(1+t\gamma)^2\,,$$

il che esprime che le coordinate ortogonali Cartesiane sono

$$\left(1-t^4+c(1-t^2)^2\,,\,2(t+t^3+ct-ct^3):1-t^4\right)$$

dalle quali si deducono (§ **5,11**) le Plucheriane

$$[-1-c-3(1-c)t^2-3(1+c)t^4-(1-c)t^6\,,\,-2c(1-t^2)^2t:(1+t^2)(1+c+t^2-ct^2)^2]\,;$$

e queste riproducono le Cartesiane dividendo i determinanti $|v\,.\,dw|$ ecc. pel fattore

$$f=(1-c)t^6-(9-3c)t^4-(9+3c)t^2+1+c$$

che servirà a trovare i flessi. — Così si vede che la concoide della retta anzichè della 4ª è della 6ª classe, che si abbassa alla 5ª quando $c=1$, perchè allora le coordinate sono

$$(2-2t^2\,,\,4t:1-t^4)\quad,\quad[-1-3t^4\,,\,-t(1-t^2)^2:2+2t^2]\,,$$

il predetto fattore diventa $f=1-6t^2+3t^4$.

48. — Le curve algebriche si classificano a seconda di un numero C, che può dirsi il *Clebschiano* (e che è nullo per le curve algebrico-razionali), dell'ordine n, e della classe m. Dati questi tre numeri $C\ n\ m$ si hanno i numeri f dei flessi, r dei regressi, p dei punti doppi, t delle tangenti doppie

$$f=2(m-1+C)-n\quad,\quad p=m-\frac{1}{2}n(7-n)+3(1-C)\,,$$

$$r=2(n-1+C)-m\quad,\quad t=n-\frac{1}{2}m(7-m)+3(1-C)\,.$$

Tutti questi numeri deggiono essere interi positivi, e se non riuscissero tali, ciò proverebbe che nessuna curva può appartenere a quella tal combinazione dei numeri $C\,n\,m$: così non può essere $m > 2(n-1+C)$, e nemmeno $m > n(n-1)$, nè $m = n(n-1)-1$; se $m = n(n-1)$ sarà $2C = (n-1)(n-2)$.

49. — Risulta dalle precedenti formule che le tetratome tetrattomene sono tutte algebrico-razionali, e si ha

$$f = r = 2 \quad , \quad p = t = 1:$$

fra le concoidi del circolo (§ **40**) nelle inverse dell'iperbola sono immaginarî tanto i due flessi, quanto i due regressi, esistono il punto doppio e la tangente doppia; nelle inverse dell' ellisse (§ **46**) mancano i due regressi e il punto doppio; fino a $c < 2$ vi sono due flessi e la tangente doppia. — Per le concoidi della retta, che sono tetratome esattomene ed inoltre algebrico-razionali (§ **48**), si ha

$$f = 6 \quad , \quad r = 0 \quad , \quad p = 3 \quad , \quad t = 4$$

i quattro rami verso il medesimo assintoto rappresentano due tratti di curva a curvatura ordinaria che si toccano; così si trovano riuniti all'infinito due punti doppî, e l' assintoto tien luogo di due tangenti doppie; le altre due tangenti doppie sono immaginarie, quando $c < 1$ sono immaginarî anche due flessi e un punto doppio; se invece $c > 1$ esiste anche il terzo punto doppio, ma i flessi reali si riducono a due. Quando $c = 1$, si ha

$$C = 0, n = 4, m = 5, f = 4, r = 1, p = 2, t = 2$$

esistono come sopra i due punti doppî e le due tangenti doppie; sono immaginarî soltanto i due flessi.

50. — **Serie di concoidi** tutte tritome annodate. Se si descrivono le tritome inverse dell' iperbola equilatera rispetto ad un suo punto, che hanno il medesimo foco doppio F (§ **33**) ed il medesimo assintoto l *(fig. 6ª)*, delle quali per conseguenza i punti doppî sono situati sopra una retta OO_aO_b . . . equidistante tra F ed l; per lo stesso modo con cui esse si costruiscono (§ **33**) si scorgerà che tutte tali curve costituiscono una serie di concoidi, vale a dire che esse tagliano porzioni eguali su tutti i raggi vettori partenti dal foco doppio F. — Sotto questo punto di vista una serie di concoidi è in qualche maniera una generalizzazione di una serie di curve parallele; cioè se una serie di concoidi sono tagliate da un raggio vettore $FMM_aM_bM_c$... in modo che le porzioni tra loro comprese M_aM_b ecc. sieno eguali in ogni raggio vettore, le normali alla curva nei punti MM_aM_b. . . si taglieranno in un medesimo punto N della retta innalzata da F perpendicolarmente al raggio vettore FM_aM_b. Per quanto si è già detto considerando la curva, che ha in G il suo punto doppio, si riconosce che il punto N si troverà sulla FN perpendicolare al raggio vettore FG tagliandola colla retta GN che dimezza gli angoli tra il raggio vettore FG e la retta GO dei punti doppî; è evidente che per ciascun raggio vettore FG si ottengono due punti N, i quali servono per le due intersezioni di FG con ciascuna curva M_a. In tal maniera si costruisce facilmente la serie delle concoidi, poichè per ciascun punto M_a si ha eziandío l'archetto di raggio NM che tocca la curva. Ciascuna curva oltre il suo punto doppio O_a ha un punto R_a che è il quarto vertice del rettangolo $FO_eO_aR_a$, essendo FO_e perpendicolare ad 1, ed O_e il punto doppio del *folium* (inverso dell'iperbola equilatera che fa parte della serie delle concoidi): il punto N corrispondente ai punti $R_a R_b \dots$ è il mezzo D della retta FO.

Epicicloidi od Ipocicloidi.

51. — Finora abbiamo costruite le curve eseguendo le somme geometriche di raggi vettori tra loro paralleli (le concoidi risultano dalle somme di raggi vettori di una curva e di raggi di un circolo), con quasi egual facilità si sommano geometricamente i raggi vettori, le cui inclinazioni variano con data legge. Se si tratti di raggi CK CL di due circoli (che supponiamo concentrici), i quali raggi ruotino con moti uniformi intorno a C, la somma geometrica

$$\mathrm{CM} \bumpeq \mathrm{CK} + \mathrm{CL}$$

(ciò significa che M è il quarto vertice del parallelogrammo K C L M), servirà a descrivere una curva, che dicesi *epicicloide* od *ipocicloide* secondo che le due rotazioni si eseguiscono nello stesso senso od in sensi opposti.

Chiamati a b i raggi dei circoli ed n m le velocità angolari dei punti K L, l'equipollenza della curva M sarà

$$\mathrm{CM} \bumpeq a\varepsilon^{nt} + b\varepsilon^{mt},$$

essendo t la variabile da punto a punto. La direzione della tangente è data dalla derivata

$$d\mathrm{M} \bumpeq (na\varepsilon^{nt} + mb\varepsilon^{mt})\gamma,$$

e quindi la normale è $\frown na\varepsilon^{nt} + mb\varepsilon^{mt}$, ed un suo punto N è dato da

$$\mathrm{CN} \bumpeq \mathrm{CM} + \mathrm{MN} \bumpeq \left(a - \frac{na}{m}\right)\varepsilon^{nt} \bumpeq \frac{m-n}{m}a\varepsilon^{nt}.$$

52. — Evoluta. — La precedente equipollenza, senza bisogno di ricorrere ad alcun sistema speciale di coordinate, serve a ricercare le proprietà della curva; così, per esempio, se vogliasi determinare il raggio di curvatura RM dell'epicicloide

$$\mathrm{CM} \bumpeq m\varepsilon^{nt} + n\varepsilon^{mt},$$

serviranno le formule generali

$$\frac{d^2M}{dM} \bumpeq t + \lambda \daleth \quad , \quad MR \bumpeq \frac{1}{\lambda} dM . \daleth \,;$$

nel presente caso è

$$dM \bumpeq mn\,(\varepsilon^{nt} + \varepsilon^{mt}) \daleth \quad , \quad d^2M \bumpeq -mn\,(n\varepsilon^{nt} + m\varepsilon^{mt}) \,,$$

da cui risulta

$$\lambda = \frac{(n+m)(1+\cos(m-n)t)}{(\varepsilon^{nt}+\varepsilon^{mt})(\varepsilon^{-nt}+\varepsilon^{-mt})} = \frac{n+m}{2}$$

$$MR \bumpeq \frac{-2mn}{m+n}(\varepsilon^{nt} + \varepsilon^{mt}) \,,$$

perciò l'evoluta R sarà data da

$$CR \bumpeq CM + MR \bumpeq \frac{m-n}{m+n}(m\varepsilon^{nt} - n\varepsilon^{mt}) \,,$$

il che mostra che l'evoluta è simile alla data epicicloide. Ponendo

$$CK \bumpeq m\varepsilon^{nt} \quad , \quad CL \bumpeq n\varepsilon^{mt} \,,$$

ogni centro di curvatura si costruisce con $CR \bumpeq \frac{m-n}{m+n} LK$; e si noti che il punto R è situato sulla normale determinata nel § precedente.

53. — Le epicicloidi ed ipocicloidi che presentano maggior importanza sono quelle in cui i due punti K L hanno eguali velocità assolute, sicchè avviene che qualche volta le due velocità si distruggono, e si ha un punto d'arresto, che è un regresso; la condizione di regresso è perciò la stessa $dM \bumpeq 0$ che dà (§ **12**) i fochi; colla differenza che i fochi corrispondono a valori immaginarî della variabile, ed i punti di regresso appartenendo alla curva corrispondono a valori reali. Siccome i raggi a b deggiono essere in ragione inversa delle velocità angolari $n\,m$, così porremo

$$CM \bumpeq m\varepsilon^{nt} + n\varepsilon^{mt} \,,$$

e la condizione dei regressi sarà

$$dM \bumpeq mn\,(\varepsilon^{nt} + \varepsilon^{mt}) \daleth \bumpeq 0 \,,$$

e perciò la t dovrà soddisfare ad una delle equazioni $(n-m)\,t = \pi\,,\ 3\pi\,,\ 5\pi\,, \ldots$ giacchè $\varepsilon^{\pi(2i+1)} \bumpeq -1$, t crescendo da 0 fino a 2π, il numero dei regressi sarà eguale alla differenza degli esponenti interi $n\,m$. Indicheremo peraltro cogli aggettivi di *unicuspidata*, *bicuspidata*, *tricuspidata*, *quadricuspidata* soltanto le curve, nelle quali le velocità angolari abbiano i rapporti

$$\frac{n}{m} = \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{2}{-1}, \frac{3}{-1} \,;$$

le due prime sono epicicloidi e le due ultime ipocicloidi.

54. L'epicicloide

$$CM \bumpeq \varepsilon^{2x} + 2c\varepsilon^{x}$$

è la stessa concoide del circolo (§ **40**, *fig.* 7ª), perchè posto

$$CK \bumpeq \varepsilon^{2x}\,,\ CL \bumpeq 2c\varepsilon^{x}\,,\ CM \bumpeq CK + CL\,,\ CI \bumpeq -1$$

la $IK \bumpeq \varepsilon^{2x} + 1 \bumpeq 2\cos x\,.\,\varepsilon^{x}$ ha la stessa direzione della $KM \bumpeq CL \bumpeq 2c\varepsilon^{x}$, quindi la curva M è la concoide del circolo IK rispetto al suo punto I ed alla distanza $KM = 2c$. I fochi li potremo avere anche dalla derivata $dM \bumpeq 2\daleth(\varepsilon^{2x} + c\varepsilon^{x}) \bumpeq 0$; quando va a zero il fattore ε^{x} si ha il foco C, che se poi si fa andare a zero l'altro fattore $\varepsilon^{x} + c \bumpeq 0$ la CM diventa $CF \bumpeq \varepsilon^{2x} + 2c\varepsilon^{x} \bumpeq -c^2$ e dà l'altro foco F della concoide. — (Nel caso della epicicloide unicuspidata, ossia cardioide, questo F non è un foco bensì un regresso, perchè il valore di x è reale). Per esprimere la curva razionalmente si muti ε^{x} in $\dfrac{1+t\daleth}{1-t\daleth}$ (che è pur essa un'espressione sempre = ad uno), e si avrà

$$CM \bumpeq \frac{1+t\daleth}{1+t\daleth}\left(\frac{1+t\daleth}{1-t\daleth} + 2c\right) \bumpeq \frac{1+2c+2ct^2-t^2+2t\daleth}{1-2t\daleth-t^2}$$

trasportando l'origine in I; essendo $CI \bumpeq -1$, si ha

$$IM \bumpeq CM + 1 \bumpeq 2\,\frac{1-t^2+c+ct^2}{1-2t\daleth-t^2} \bumpeq 2(1-t^2+c+ct^2)\left(\frac{1+t\daleth}{1+t^2}\right)^2$$

che differisce dalla IM del § **40** soltanto per esser doppia l'unità di lunghezza. Operando su questa ultima formula razionale, in cui il denominatore è reale, si è allora veduto che C è un foco triplo, anzichè semplice.

55. — Le ipocicloidi

$$CM \bumpeq \varepsilon^{2x} + 2c\varepsilon^{-x} \bumpeq \left(\frac{1+t\daleth}{1-t\daleth}\right)^2 + 2c\left(\frac{1-t\daleth}{1+t\daleth}\right)$$

si descrivono nel solito modo (§ **51**) prendendo $CK \bumpeq \varepsilon^{2x}$, $KM \bumpeq 2c\varepsilon^{-x}$, la normale in M passa pel punto N determinato da $CN \bumpeq 3\,.\,CK$; esse sono tetratome esattomene razionali, e perciò secondo le formule generali del § **48** può essere tutto al più

$$f=6\ ,\quad r=0\ ,\quad p=3\ ,\quad t=4\,;$$

nei generi corrispondenti a $c>1$, che sono le ipocicloidi anguinee, vi sono infatti 6 flessi e 3 tangenti doppie, la quarta nonchè i 3 punti doppî saranno immaginarî. Tra $c=1$ e $c=1:2$ si hanno le ipocicloidi annodate coi tre punti doppî reali e con tre tangenti doppie e nessun flesso. Quando $c=\frac{1}{2}$ si ha un *trifolium*, nel quale i tre punti doppî si sono riuniti in un punto triplo.

56. — Ipocicloide tricuspidata. Se $c=1$, si ha la tetratoma triattomena

$$\mathrm{CM} \bumpeq \varepsilon^{2x}+2\varepsilon^{-x} \bumpeq \frac{3-6t^2-t^4-8t^3\gamma}{1+2t^2+t^4}$$

che ha le seguenti coordinate ortogonali

$$\left(3-6t^2-t^4,-8t^3:(1+t^2)^2\right) \;,\; [t+t^3,-1-t^2:-3t+t^3].$$

L'epicicloide unicuspidata e l'ipocicloide tricuspidata sono i tipi dei due generi di triattomene tetratome. Per l'ipocicloide tricuspidata parmi che facciano difetto i metodi, coi quali si trovano (§ **12, 13**) i fochi; crederei che questi coincidessero coi regressi, perchè e gli uni e gli altri debbono annullare la derivata del raggio vettore: i regressi corrispondono a $t=0$, $t=\pm 1:\sqrt{3}$. — È probabile che eziandío per ogni curva dello stesso genere di questa tricuspide, e forse anche per le triattomene esatome, le inclinazioni delle tre tangenti partenti da un punto abbiano la somma eguale a quella delle inclinazioni delle rette, che dal medesimo punto vanno ai regressi della curva.

57. — L'epicicloide bicuspidata ha l'equipollenza

$$\mathrm{CM} \bumpeq \varepsilon^{3x}+3\varepsilon^{x} \bumpeq \left(\frac{1+t\gamma}{1-t\gamma}\right)^3+3\,\frac{1+t\gamma}{1-t\gamma}$$

quindi le coordinate

$$\left((1-t^2)^3,3t-2t^3+3t^5:(1+t^2)^3\right),$$
$$[-1+6t^2-t^4,-4t+4t^3:1-t^4],$$

ed è perciò una tetrattomena esatoma razionale ($f=0$, $r=6$, $p=4$, $t=3$) che ha due soli regressi reali e due tangenti doppie.

58. — L'ipocicloide quadricuspidata

$$\mathrm{CM} \bumpeq \varepsilon^{3x}+3\varepsilon^{-x} \bumpeq \left(\frac{1+t\gamma}{1-t\gamma}\right)^3+3\,\frac{1-t\gamma}{1+t\gamma}$$

ha le coordinate

$$\left((1-t^2)^3,-8t^3:(1+t^2)^3\right),[2t+2t^3,-1+t^4:-2t+t^3].$$

Le singolarità reali di questa tetrattomena sono soltanto quattro regressi.

59. — Evoluta dell'ellisse, curva che è della stessa *specie* e della stessa *varietà* della precedente quadricuspide, dalla quale differisce soltanto perchè le ascisse e le ordinate sono prese in due scale differenti. Tolgo dalla mia memoria del 1837 [31ª] § **151** il modo, con cui il metodo delle equipollenze conduce direttamente all'evoluta R dell'ellisse

$$\mathrm{CM} \bumpeq a\cos x+b\gamma\,\mathrm{sen}\,x:$$

un punto qualsivoglia della normale è dato da

$$\mathrm{MR} \bumpeq pa\gamma \operatorname{sen} x + pb \cos x$$

(perchè la direzione della tangente è $\mathrm{dM} \bumpeq -a \operatorname{sen} x + b\gamma \cos x$), quindi

$$\mathrm{CR} \bumpeq \mathrm{CM} + \mathrm{MR} \bumpeq (a+bp)\cos x + (b+ap)\operatorname{sen} x \,.\, \gamma\,,$$

acciocchè il punto R appartenga a due normali infinitamente vicine dovrà annullarsi la derivata della precedente CR, cioè

$$d\mathrm{R} \bumpeq -(a+bp)\operatorname{sen} x \,.\, dx + (b+ap)\cos x \,.\, \gamma\, dx +$$
$$+ (b\cos x + a \operatorname{sen} x\gamma)\, dp \bumpeq 0\,,$$

ne viene

$$-(a+bp)\operatorname{sen} x : (b+ap)\cos x = b\cos x : a \operatorname{sen} x\,,$$

da cui

$$p = -\frac{a}{b}\operatorname{sen}^2 x - \frac{b}{a}\cos^2 x\,,$$

e sostituendo

$$\mathrm{CR} \bumpeq \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\cos^3 x + \left(b - \frac{a^2}{b}\right)\operatorname{sen}^3 x \,.\, \gamma\,.$$

Se i coefficienti dei due termini fossero eguali, l'equipollenza diventerebbe

$$\mathrm{CR} \bumpeq (\varepsilon^x + \varepsilon^{-x})^3 - (\varepsilon^x - \varepsilon^{-x})^3 \bumpeq 6\varepsilon^x + 2\varepsilon^{-3x}\,,$$

che è appunto quella della ipocicloide quadricuspidata.

Differenze di raggi vettori.

60. Sarebbe inutile considerare la curva che risulta dalla somma di due raggi vettori di due circoli, che passino per l'origine O dei raggi vettori; oppure dalla somma dei due raggi vettori spettanti ad un circolo che non passi per O; giacchè in ambedue i casi non si avrebbe che un nuovo circolo. Consideriamo invece la curva M, il cui raggio vettore sia la differenza dei due raggi vettori OK OL condotti ad un circolo KL, che non passa per O. Cioè per ogni retta OKL, sia

$$\mathrm{OM} \bumpeq \pm \mathrm{KL}\,;$$

la curva M sarà simmetrica rispetto ad O, ed avrà due assi.

61. Dato un circolo col centro C, ed un punto O interno od esterno al medesimo, per ogni corda KL congruente con O, si prenda

$$\mathrm{OM} \bumpeq \pm \mathrm{KL}\,;$$

mediante considerazioni analoghe a quelle fatte nei § **2, 26, 34, 39, 51** si vedrà che prendendo sui raggi CK CL le porzioni CP = OK, CQ = OL, la retta PQ riuscirà perpendicolare alla tangente in M della curva che ora vogliamo descrivere; se O sia esterno al circolo una delle CP CQ dovrà esser diretta oppostamente al raggio CK o CL.

62. Inverse delle ditome rispetto al centro. La curva M come sopra descritta è inversa di una ditoma rispetto al suo centro; infatti chiamato 1 il raggio del circolo, e posto $\mathrm{CO} \triangleq c$, $\mathrm{CL} \triangleq \varepsilon^x$ si trova (Sposizione del metodo delle equipollenze 1854 [76^a] § 78)

$$\mathrm{CK} \triangleq \frac{c-\varepsilon^x}{1-c\varepsilon^x},$$

quindi

$$\mathrm{OM} \triangleq \mathrm{KL} \triangleq \mathrm{CL}-\mathrm{CK} \triangleq \frac{2\varepsilon^x - c\varepsilon^{2x} - c}{1-c\varepsilon^x};$$

(si noti che $\mathrm{OL} \triangleq \varepsilon^x - c$, e che

$$\mathrm{OM} \triangleq \frac{2-c\varepsilon^x - c\varepsilon^{-x}}{\varepsilon^{-x}-c} \triangleq \frac{2-2c\cos x}{\mathrm{cj\,OL}} \backsim \mathrm{OL}$$

il che verifica l'assunta espressione di CK, si ha pure $\mathrm{OK}\,.\,\mathrm{cj\,OL} \triangleq c^2-1$ proprietà ben nota dal circolo). Le formule si riducono funzioni razionali della t ponendo al solito

$$\varepsilon^x \triangleq \frac{1+t\daleth}{1-t\daleth}\quad,\quad t=\tan\frac{x}{2},$$

così si ottiene

$$\mathrm{OM} \triangleq \frac{2\varepsilon^x - c\varepsilon^{2x} - c}{1-c\varepsilon^x} \triangleq 2\,\frac{1-c+t^2+ct^2}{1-c-t^2-ct^2-2t\daleth};$$

la curva inversa data da

$$\mathrm{OM'} \triangleq \frac{1}{\mathrm{cj\,OM}} \triangleq \frac{1-c-t^2-ct^2+2t\daleth}{2(1-c+t^2+ct^2)}$$

è evidentemente del 2° ordine cioè, una ditoma.

63. — Inversa dell'ellisse rispetto al centro. Sarà meglio assumere l'equipollenza dell' ellisse di assi $2a$ $2b$

$$\mathrm{OM'} \triangleq \frac{a-at^2+2bt\daleth}{1+t^2},$$

la sua curva inversa

$$\mathrm{OM} \triangleq \frac{1}{\mathrm{cj\,OM'}} \triangleq \frac{1+t^2}{a-2bt\daleth-at^2} \triangleq \frac{(1+t^2)(a+2bt\daleth-at^2)}{a^2(1-t^2)^2+4b^2t^2}$$

avrà le coordinate

$$(a-at^4\,,\,2b(1+t^2)t : a^2-2a^2t^2+4b^2t^2+a^2t^4),$$

$$[a^2b(t^6-1)+(5a^2b-4b^3)(t^4-t^2)\,,\,2a^3(t^2-1)^2t-4ab^2(t^4+1)t : ab(t^2+1)^3];$$

perciò anche questa curva è tetratoma esattomena razionale, le sue singolarità possono essere due paja di flessi e due tangenti doppie; quando $a^2=2b^2$ tutto si riduce a due punti di *raddrizzamento* qualificati dal numero $s=3$. — L'equazione che dà i fochi è la $u+v\daleth=0$, la quale si risolve tanto più facilmente quantochè ponendo

$t\gamma = \tau$ essa diventa un'equazione a coefficienti reali, che è inoltre convertibile, sicchè posto $\tau + \frac{1}{\tau} = \xi$ si riduce alla

$$a^2 b\xi^3 - (2a^3 - 4ab^2)\xi^2 - (8a^2 b - 4b^3)\xi - 8ab^2 = 0\,,$$

che ha la radice semplice $\frac{2a}{b}$ ed una radice doppia $-\frac{2b}{a}$, così dalle

$$\tau^2 - \xi\tau + 1 = 0 \quad , \quad t = -\tau\gamma$$

si deduce che t ha le due radici semplici $t = \frac{\pm e - a\gamma}{b}$, e due radici doppie $t = \frac{\pm e + b\gamma}{a}$, avendo posto $e^2 = a^2 - b^2$; sostituendo questi valori immaginari di t nella

$$\mathrm{OF} \bumpeq \frac{1 + t^2}{a + 2bt\gamma - at^2}$$

avremo i due fochi semplici dati da $\mathrm{OF} \bumpeq \mp \frac{1}{e}$, ed i due fochi doppi dati da

$$\mathrm{OF}_2 \bumpeq \frac{\mp e}{2ab}\gamma\,;$$

i primi sono inversi dei fochi dell'ellisse. Potrebbe ricercarsi se gli inversi dei secondi avessero qualche notevole relazione coll'ellisse.

64. — Inversa dell'iperbola rispetto al centro. Precisamente nello stesso modo dall'iperbola

$$\mathrm{OM}' \bumpeq \frac{a + at^2 + 2bt\gamma}{1 - t^2}$$

dedurremo

$$\mathrm{OM} \bumpeq \frac{1}{\mathrm{cj\,OM}'} \bumpeq \frac{1 - t^2}{a + at^2 - 2bt\gamma} \bumpeq \frac{(1 - t^2)(a + 2bt\gamma + at^2)}{a^2(1 + t^2)^2 + 4b^2 t^2}$$

e le coordinate saranno

$$\left(a(1 - t^4)\,,\, 2bt - 2bt^3 : a^2 + 2(a^2 + 2b^2)t^2 + a^2 t^4\right),$$

$$[\,a^2 b(t^6 + 1) - (5a^2 b + 4b^3)(t^4 + t^2)\,,\, 2a^3(t^2 + 1)^2 t + 4ab^2(t^5 + t) : ab(t^2 - 1)^3]\,;$$

la curva ha due flessi riuniti insieme in un punto doppio corrispondente a $t = \pm 1$ (le tangenti sono $[b\,,\, \pm a : 0]$). La curva ha eziandío due tangenti doppie parallele all'asse della x. — L'equazione $u + v\gamma = 0$ posto $t\gamma = \tau$, $\tau - \frac{1}{\tau} = \xi$ dà per ξ la radice semplice $\frac{2a}{b}$ e la doppia $\frac{2b}{a}$; pertanto, fatto $e^2 = a^2 + b^2$, la curva ha i due fochi semplici $\mathrm{OF} \bumpeq \pm \frac{1}{e}$ e i due fochi doppi $\mathrm{OF}_2 \bumpeq \pm \frac{e}{2ab}$; questi sono posti sullo stesso asse dei F, mentre nella curva inversa dell'ellisse essi sono posti sull'altro asse.

Nel caso di $b = a$ i due fochi doppi coincidono coi fochi semplici dati da $\mathrm{OF} = \pm \frac{1}{a\sqrt{2}}$; allora si ha la *lemniscata*, che è inversa dell'iperbola equilatera rispetto al centro; essa ha inoltre la proprietà che le distanze di ogni punto della curva dai due fochi (tripli) hanno prodotto costante. — All'equipollenza della lemniscata possono darsi anche altre forme; come le

$$\mathrm{OM} \bumpeq \sqrt{\cos 2u} \,.\, \varepsilon^u \bumpeq \sqrt{(1+\varepsilon^u)}\,;$$

la seconda mostra che la curva è *sudduplicata* del circolo, come lo sono in generale tutte le Cassiniane (Spozione dei nuovi metodi ecc. [104ª] *Mem. Istit. Veneto,* 1860, VIII, § 57).

65. È singolare come i fochi definiti ai § **18, 19, 29** abbiano proprietà tanto diverse rispetto ad alcune curve. Nell'ellisse

$$\mathrm{OM} \bumpeq a\cos t + b \operatorname{sen} t \,.\, \gamma$$

la distanza del foco F dalla tangente nel punto M la si trova

$$\mathrm{FP} \bumpeq \frac{b(a - e\cos t)}{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t}(b\cos t + a \operatorname{sen} t \,.\, \gamma)\,,$$

perchè essa è perpendicolare alla tangente $\mathrm{dM} \bumpeq -a\operatorname{sen} t + b\cos t \,.\, \gamma$, e la

$$\mathrm{PM} \bumpeq \mathrm{OM} - \mathrm{OF} - \mathrm{FP}$$

ha la direzione della dM; similmente per l'altro foco F_1 la perpendicolare abbassata sulla medesima tangente è

$$\mathrm{F}_1\mathrm{P}_1 \bumpeq \frac{b(a + e\cos t)}{b\cos t - a \operatorname{sen} t \,.\, \gamma}\,,$$

ed il loro prodotto risulta

$$\mathrm{FP} \,.\, \mathrm{F}_1\mathrm{P}_1 \bumpeq \frac{b^2(a^2 - e^2\cos^2 t)}{(b\cos t - a\operatorname{sen} t\gamma)^2} \bumpeq \frac{b^2(a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)}{(b\cos t - a\operatorname{sen} t\gamma)^2}$$

che si vede avere la lunghezza costante b^2. Così le tangenti dell'ellisse hanno rispetto ai fochi una proprietà in qualche modo analoga a quella dei punti della Cassiniana.

Leggi dell'inversione.

66. — Giacchè vedemmo che parecchie curve si ricavano da altre col mezzo dell'inversione (ed è anche molto facile descrivere la curva inversa di una data; infatti descritto un circolo che passi per I, e tirata una retta parallela alla tangente in I, su ogni retta IMM' il circolo e la retta tagliano due lunghezze IM IM' inversamente proporzionali) non è fuor di luogo raccogliere qui le leggi sulla derivazione d' inversione, che servono a trovare le proprietà delle curve inverse di altre (Mia mem. [26*] negli *Ann. del Regno Lomb. Veneto,* 1836, VI, p. 126-141) ommetto le facili dimostrazioni.

67. — Se i due punti A A' sono in linea retta col centro d' inversione I, e se

$$\mathrm{IA}\,.\,\mathrm{IA}'=\mu \qquad (1)$$

(μ *modulo d'inversione*), essi si dicono *inversi*, ed inverse sono le due figure ABC A'B'C' formate di punti inversi, tutti rispetto allo stesso *centro d' inversione* I ed allo stesso modulo μ. Quando tutto sia posto in uno stesso piano l' equazione (1) dà anche l' equipollenza

$$\mathrm{IA}\,.\,\mathrm{cj}\,\mathrm{IA}' \bumpeq \mu\,. \qquad (\mathrm{I})$$

Secondo che il modulo μ è positivo o negativo, i punti inversi sono dalla stessa parte o da parti opposte del centro I. — Nelle figure inverse le distanze fra i punti sono legate oltre che dalla (1) anche dalla

$$\mathrm{AB}=\mathrm{IA}\,.\,\mathrm{A'B'}:\mathrm{IB'} \quad , \quad \text{ossia} \quad \mathrm{IB'}\,.\,\mathrm{AB}=\mathrm{IA}\,.\,\mathrm{A'B'}\,. \qquad (2)$$

Considerando il piano IABA'B' questa equazione si completa nella equipollenza

$$\mathrm{cj}\,\mathrm{IB'}\,.\,\mathrm{AB} \bumpeq \mathrm{IA}\,.\,\mathrm{cj}\,\mathrm{A'B'}\,. \qquad (\mathrm{II})$$

Col mezzo delle (1) (2) da ogni relazione tra le distanze dei punti di una figura si deduce quella relativa alla figura inversa. Similmente ove si tratti di figure poste in un solo piano, le (I) (II) serviranno a trasportare un' equipollenza da una figura alla sua inversa.

68. — Il rapporto di due distanze, che hanno un punto comune, si riduce nella figura inversa ad un rapporto tra due prodotti

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathrm{A'B'}\,.\,\mathrm{IC'}:\mathrm{A'C'}\,.\,\mathrm{IB'}\,; \qquad (3)$$

io lo dico il *rapporto-duplice* fra i quattro punti A' B' I C', esso è identico a quello tra i quattro punti I C' A' B', nonchè tra i quattro B' A' C' I, o tra i C' I B' A'. — I rapporti duplici quando i quattro punti sono su una stessa retta sono *projettivi*, e nella geometria superiore tengono in qualche modo il luogo dei rapporti semplici della geometria elementare.

69. — Un rapporto-duplice fra quattro punti differenti dal centro d' inversione si mantiene lo stesso nella figura inversa, cioè

$$\mathrm{AB}\,.\,\mathrm{CD}:\mathrm{AD}\,.\,\mathrm{CB}=\mathrm{A'B'}\,.\,\mathrm{C'D'}:\mathrm{A'D'}\,.\,\mathrm{C'B'}\,. \qquad (4)$$

Vale lo stesso per ogni altro rapporto-multiplice formato con un numero pari di punti presi nei due ordini opposti conservando lo stesso primo punto; così

$$\mathrm{AB}\,.\,\mathrm{CD}\,.\,\mathrm{EF}:\mathrm{AF}\,.\,\mathrm{ED}\,.\,\mathrm{CB}$$

è un rapporto-multiplice.

70. — Derivazione isogonale. Se due linee si tagliano in un punto differente dal centro d'inversione, anche le loro inverse si tagliano sotto il medesimo angolo; e se le prime si toccano, le seconde hanno un contatto del medesimo ordine.

71.—La retta può considerarsi come il luogo geometrico dei punti equidistanti da due punti I C, cioè IM$=$MC; dunque la linea inversa della retta avrà per le (1) (2) i punti M′ che soddisfanno alla C′I$=$C′M′, e sarà il circolo col centro C′ inverso di C, e che passa pel centro d'inversione I.

72. — Preso per centro d'inversione il centro I d'un circolo, e per modulo il quadrato del suo raggio, i punti M N ecc. del circolo sono inversi di sè medesimi; due altri punti inversi D D′ si dicono *conjugati-armonici* rispetto al circolo. L'equipollenza.

$$\frac{MD}{ND} \triangleq cj\left(\frac{MD'\,.\,MI}{ND'\,.\,NI}\right)$$

comprende due teoremi, cioè rispetto alla grandezza (essendo MI$=$NI), si ha la proporzione

$$MD : ND = MD' : ND' ,$$

e rispetto alle inclinazioni

$$\text{ang}\, MDN + \text{ang}\, MD'N = \text{ang}\, MIN .$$

Non mi fermo a dimostrare altre proprietà del circolo e dei quadrilateri in esso inscritti, avendolo già fatto nella memoria succitata.

Costruzioni col mezzo della sola riga.

73. — Credendo utile che sia generalmente conosciuta ed adoperata la segnatura proposta dall'illustre Grassmann, ne riporto qui i principî. Come l'unione AB dei segni di due punti si adopera bene spesso ad indicare la retta indefinita che passa pei medesimi; così l'unione mn delle lettere che indicano due rette m n serve a disegnare il loro punto d'intersezione. Ciò può continuarsi: così ABcDe indica che la retta AB è tagliata dalla c in un punto ABc, il quale si congiunge col punto D e si ottiene una retta ABcD, la quale finalmente si taglia colla retta e, e si ha il punto ABcDe. Questa *formula* ABcDe ha le due *parti* ABcD, e; la prima si decompone ancora nelle due parti ABc, D, e le due parti delle ABc sono AB e c. Le due parti di una formula sono sempre *omonime* (cioè o due rette o due punti). Gli elementi A B c D ecc. di una formula possono essere espressi anzichè da una sola lettera da una formula, ed allora questa si pone tra parentesi; soglio adoperare le ( ), oppure le [ ], secondo che la formula contenuta rappresenta un punto od una retta.

α) Canone 1°. Le due *parti* di una formula possono tra loro permutarsi, cioè ABcD, D(ABc), c[AB]D, ecc. hanno il medesimo significato. Questo canone si segna con PQ *coinc.* QP, in luogo delle P Q potendosi intendere qualisivogliano formule omonime. La *coincidenza* fra due rette non riguarda menomamente la loro lunghezza.

β) Canone 2°. Due oggetti *eteronomi* (cioè un punto ed una retta) si dicono *congruenti*, quando il punto appartiene alla retta, ossia questa passa per quello. Un membro di una *coincidenza* è congruente con ciascuna parte dell' altro membro, cioè se

PQ *coinc.* r , sarà P *congr.* r , Q *congr.* r .

γ) Canone 3°. Viceversa se

P *congr.* r e Q *congr.* r , sarà PQ *coinc.* r .

In questi canoni, la cui verità è evidente, dee sempre escludersi il caso che una formula divenga *indeterminata,* in quanto che due sue parti sieno tra loro coincidenti.

δ) Canone 4°. Se

PQ *congr.* R , sarà P *congr.* RQ ;

cioè in ogni congruenza una delle due parti di un membro può trasportarsi nell' altro membro. Ripetendo l'uso di questo canone dalla PQrS *congr.* T si deducono le

PQr *congr.* TS , PQ *congr.* STr *coinc.* r[ST] , PQ[ST] *congr.* r , ecc.

ε) Canone 5°. Se

P *congr.* p si ha PQp *coinc.* P ,

che pel canone 1° può anche scriversi p[PQ] *coinc.* P; così pure prP ossia P(pr) *coinc.* p.

Corollario

PQ(PS) *coinc.* P .

Tre, o più, elementi omonimi li diciamo *congruenti* quando ciascuno di essi è congruente con un medesimo elemento dell' altra specie.

74. — Quando una ditoma è pienamente determinata conoscendone o cinque punti A B C D E, o cinque tangenti **a b c d e**, od altrimenti, si può costruirne infiniti punti M ed infinite tangenti **m** mediante semplici allineamenti. Osserviamo da prima che se β δ sono due rette, la congruenza

M *congr.* MAβSδE (1)

rappresenta i punti M di una ditoma; infatti pel 4° canone (§ **73** , δ), si ha

MEδ *congr.* MAβS ,

la quale significa che i tre punti MEδ , MAβ, S sono congruenti; ora, posto

D *coinc.* ASδ , B *coinc.* ESβ , e C *coinc.* $\beta\delta$,

quei tre punti sono

ME[CD] , MA[CB] , AD[BE] ,

cioè sono i due punti d'intersezione dei lati opposti dell'esagono ADCBEM, e quindi pel teorema del Pascal il punto M appartiene alla ditoma ADCBE. — Con altri principî si dirà che il luogo del punto M è una ditoma se è costituito dalle intersezioni dei raggi corrispondenti AM EM di due *radiati* A E tra loro *collineari;* ora il primo radiato segna sulla β la *punteggiata* costituita da $(MA\beta)$ ed il secondo è ugualmente *prospettivo* colla punteggiata dei $(ME\delta)$, e queste due punteggiate sono pure tra loro prospettive perchè le rette $MA\beta$ $(ME\delta)$ sono tutte congruenti col punto S (ossia le due punteggiate sono prospettive col medesimo *radiato* S), ed è ben noto che due radiati A E prospettivi con due punteggiate collineari sono essi pure collineari. — Le congruenze identiche

$$\text{C } \textit{congr}.\ \text{CA}\beta\text{S}\delta\text{E} \quad , \quad \text{E } \textit{congr}.\ \text{EA}\beta\text{S}\delta\text{E} \quad , \quad \text{B } \textit{congr}.\ \text{BA}\beta\text{S}\delta\text{E} \quad , \quad \text{ecc.}$$

mostrano che la ditoma costruita colla (1) che può scriversi

$$\text{M } \textit{congr}.\ \text{MA [CB] (AD [BE]) [CD] E} \qquad (1')$$

comprende i punti C E B A D.

75. — Sopra una retta condotta ad arbitrio per uno A dei cinque punti dati, si determina il punto M della ditoma mediante una retta passante per uno qualsivoglia E degli altri quattro punti, della qual retta EM si possono determinare tre punti, che sono le intersezioni dei lati CD BD BC ciascuno con due rette di Pascal. Ciò si ottiene permutando tra loro sulla (1') i punti BCDE. Colle segnature da me adottate rendendo conto di un osservabile lavoro del giovine Ingegnere Sig. Veronese (*Quattordicesima* [181ª], N. 744) sostituendo alle lettere ABCDEM i numeri 1-6 la precedente

$$6\ \textit{congr}.\ 61\,[23]\,(14\,[25])\,[34]5 \qquad (1)$$

pel 4° canone dà

$$65\,[34]\ \textit{congr}.\ 61\,[23]\,(14\,[25])$$

identica alla

$$65\,[34]\ \textit{congr}.\ s\,[165234]\,,$$

a cui si aggiunge l'altra

$$65\,[34]\ \textit{congr}.\ s\,[165243]\,.$$

Dicasi lo stesso degli altri due *conlateri* 65[42] , 65[23], che servono egualmente a determinare il punto M *coinc.* 6 sulla data MA *coinc.* 61.

76. — Per determinare la tangente **a** nel punto A della ditoma che passa per cinque punti dati A B C D E osserviamo che la (1) dà $ME\delta S\beta$ *congr.* MA, e supponendo che M sia infinitamente vicino ad A, sicchè la MA divenga la tangente **a**, sarà

$$(\text{I}')\quad \text{a } \textit{congr}.\ \text{AE}\delta\text{S}\beta \quad , \quad \text{ossia} \quad (\text{I})\quad \text{a } \textit{congr}.\ \text{AE [CD] (AD [BE]) [BC]}\,.$$

Colle segnature adottate nella succitata rivista il secondo membro della (I) è il punto

P(1 : 23), il quale oltre appartenere al lato 23 del tetragono 2345 si trova nelle due rette

$$P_6[1;23]\ \textit{coinc.}\ 14[52](15[43])\ \ ,\ \ P_6[1;32]\ \textit{coinc.}\ 14[53](15[42])\ .$$

La stessa tangente a è determinata da altri cinque punti

$$P(1;34)\ \ ,\ \ P(1;45)\ \ ,\ \ P(1;25)\ \ ,\ \ P(1;24)\ \ ,\ \ P(1;35)\ .$$

Se si voglia la tangente m in un sesto punto M serviranno le stesse formule applicando i numeri 2 3 4 5 a quattro dei punti dati ABCDE.

77. — La ditoma può esser determinata anzichè da 5 punti, da 4 punti e dalla tangente a oppur b in uno A oppur B dei quattro punti dati; in tal caso si descriverà un qualsivoglia altro punto M col mezzo di una delle congruenze

M *congr.* MA [BC] (BEa) [AC] E (2)

M *congr.* MAb (AD [BE]) [BD] E (3)

o di altre ottenute mediante permutazione di lettere. Si avverte che nella (2) il punto M è dato dall'intersezione di due rette, una delle quali parte dal punto A pel quale si conosce la tangente a; mentre nella (3) si conosce la tangente b spettante al punto B differente dai due A E, dai quali partono le rette che s'intersecano in M. — La (2) si trovò supponendo che il punto D sia infinitamente vicino ad A, sicchè la retta AD si cangi nella tangente a. Per la (3) si suppose che C fosse infinitamente vicino a B, e perciò determinasse la tangente b. — Nel caso della congruenza (2) la tangente in E sarà data da

e *congr.* EA [BC] (BEa) [AC] ; (II)

e nel caso della (3) si possono descrivere le due tangenti

a *congr.* AE [BD] Sb , e *congr.* EAbS [BD] . (III)

78. — Similmente si hanno due congruenze pel caso che sieno dati due punti A B colle rispettive tangenti a b ed un altro punto C oppure E

M *congr.* MA [BC] (ab) [AC] B , (4)

M *congr.* MAb (BEa) [AB] E ; (5)

nell'ultimo caso si determina la tangente in E mediante la

e *congr.* EAb (BEa) [AB] . (V)

Le congruenze (2) (3) possono servire anche per descrivere la parabola, che ha una tangente all'infinito, purchè si conosca la direzione dei suoi diametri. Le (5) valgono per descrivere l'iperbola che ha gli assintoti a b e passa per E, ed anche a determinarne le tangenti; sempre peraltro che oltre gli allineamenti si possa tirare una retta parallela ad un'altra.

79. — Congruenze pienamente correlative alle (1) (I) (2) (3) (II) (III) (4) (5) (V) servono a determinare quante si vogliano tangenti **m** della diattomena di cui sono date cinque tangenti **abcde**, il punto di contatto A, la tangente generica **m** conoscendo **aAbce**, oppure **abBde**, ed inoltre i punti di contatto E A, finalmente la **m** conoscendo **aAbBC** oppure **aAbBE**, ed in quest'ultimo caso il punto di contatto E.

Curve aplanetiche.

80. — Le curve aplanetiche, dette anche ovali del Cartesio, hanno la proprietà che formando la linea di separazione di due *mezzi*, i raggi luminosi, che nel primo mezzo sono congruenti con un certo foco D, dopo rifratti nel secondo mezzo divengono congruenti con un altro foco E. — In forza del sincronismo delle ondulazioni luminose che non fanno interferenza, bisogna che per ogni punto M della curva dirimente aplanetica sia costante la somma o la differenza dei tempi, che la luce impiega nei due mezzi a percorrere le lunghezze DM ME colle due differenti velocità $1:p$, $1:q$ dipendenti dalle differenti nature dei mezzi.

81. — Ogni aplanetica ha in generale tre fochi D E F *(fig. 9ª)* posti sull'asse; essa è costituita da due ovali, una esterna A_1MA_4 ed una interna $A_2M_1A_3$, e dipende da tre parametri positivi $p<q<r$ (inversamente proporzionali alle velocità della luce nei mezzi corrispondenti ai fochi D E F) deve essere

$$p(\mathrm{DM}\mp p)=q(\mathrm{EM}\mp q)=\pm r(\mathrm{FM}-r):$$

ed i fochi avere da un punto O dell'asse le distanze

$$\mathrm{DO} \triangleq \frac{qr}{p}\ ,\quad \mathrm{EO} \triangleq \frac{rp}{q}\ ,\quad \mathrm{FO} \triangleq \frac{pq}{r}\ .$$

82. — Se sono dati i fochi D E ed i parametri $p\,q$, la curva si costruisce facilmente nel seguente modo: si prenda sull'asse DE una lunghezza $\mathrm{DG}=(q^2-p^2):p$, e si tiri per G una retta **e**, la quale formi coll'asse un angolo, che abbia il seno $=p:q$; poscia ogni circolo col centro D, di cui sia LL_1 il diametro sull'asse, lo si tagli coi due circoli col centro E ed i raggi eguali alle distanze dei punti L L_1 dalla retta **e** (le quali distanze si prendono col compasso con esattezza eguale a quella cui si prende la distanza di due punti), si otterranno così due punti M dell'ovale esterno, e due M_1 dell'interno. — Il terzo parametro r si dedurrà dall'equipollenza

$$\mathrm{DE} \triangleq \frac{qr}{p}-\frac{rp}{q}\ ,\quad \text{ossia}\quad pq\,.\,\mathrm{DE} \triangleq (q^2-p^2)\,r\ .$$

Dopo ciò, e dopo costruito il punto O mediante la $p \, . \, \mathrm{DO} \triangleq qr$, si otterranno facilmente i punti $A_1 A_4$, $A_2 A_3$, in cui l'ovale esterna e la interna incontrano l'asse mediante le

$$A_1O \triangleq -p+q+r \quad , \quad A_2O \triangleq p-q+r \quad , \quad A_3O \triangleq p+q-r \quad , \quad OA_4 \triangleq p+q+r \, ;$$

il punto O è il baricentro dei quattro vertici A della curva e può dirsi il suo punto *mediano*.

83. — Secondo le condizioni della diottrica l'ovale interna $A_1 M_2 A_3$ non potrebbe far convergere in E i raggi emanati da D, bensì li può far convergere in F, se l'indice di rifrazione sia $r : p$. Se sieno dati questi fochi D F e si abbia soddisfatto la $pr \, . \, \mathrm{DF} \triangleq q(r^2-p^2)$, per costruire l'ovale si adopererà una retta **f**, la cui inclinazione sull'asse abbia il seno$=p:r$, e che tagli l'asse ad una distanza da D eguale a $(r^2-p^2):q$; ogni circolo $\mathrm{LMM_1L_1}$ col centro D si taglierà coi due circoli, che hanno F per centro ed i raggi eguali alle distanze della retta **f** dai punti L L_1, nei quali il primo circolo taglia l'asse. — I raggi di curvatura della aplanetica nei suoi vertici $A_1 A_2 A_3 A_4$ sono

$$\rho_1=\frac{(q+r)(q-p)(r-p)}{qr-pq-rp} \, , \, \rho_2=\frac{-(r-q)(q-p)(r+p)}{-qr-pq+rp} \, , \, \rho_3=\frac{(r-q)(p+q)(r-p)}{-qr+pq-pr} \, ,$$

$$\rho_4=\frac{-(q+r)(q+p)(r+p)}{qr+pq+pr} \, .$$

Quando $pq+rp>qr$ l'ovale esterna ha due punti di flesso contrario.

84. — Se due parametri sono eguali l'aplanetica diventa una concoide del circolo (§ **40**); se il parametro r è uguale al medio q i due fochi E F coincidono insieme nel punto *isolato* a cui si riduce l'ovale interno $A_2 A_3$, oltre questo foco-doppio E (che è il centro d'inversione, mediante il quale la concoide si trasforma in un'ellisse), la curva ha un foco semplice D, che è l'inverso-foco della concoide: il punto mediano O è il centro del circolo di raggio OE, che è la base della concoide, mentre E ne è il polo. Si ha

$$\mathrm{DO} \triangleq q^2:p \quad , \quad \mathrm{EO} \triangleq A_2O \triangleq p \quad , \quad A_1O \triangleq 2q-p \quad , \quad OA_4 \triangleq p+2q \, ,$$

$2q$ è la lunghezza costante compresa su ogni retta condotta per E, tra il circolo di base e la concoide. Se $q=2p$ la concoide ha in A_1 un punto di *raddrizzamento*.

85. — Che se invece è uguale al parametro medio il parametro minore p, coincidono insieme i due fochi D E, questo foco-doppio E è il punto doppio $A_1 A_2$, ed è il centro d'inversione, col quale la curva aplanetica si trasforma in un'iperbola; il foco semplice F della aplanetica è l'inverso-foco della concoide, il punto mediano O è il centro del circolo di raggio OE, che è la base della concoide, essendone E il polo, si ha

$$EO \triangleq A_1O \triangleq A_2O \triangleq r \quad , \quad FO \triangleq q^2 : r \quad , \quad A_3O \triangleq 2q - r \quad , \quad OA_4 \triangleq 2q + r \, .$$

86. — Quando un foco D dell'aplanetica va all'infinito, e sia perciò $p = 0$, la curva diventa un'ellisse od una iperbola coi due fochi E F. Per descrivere l'ellisse che ha i fochi E F ed il centro O, essendo n il rapporto tra il semiasse e l'eccentricità, il quale è anche l'indice di rifrazione, prenderemo $OG \triangleq n^2 . OE$, per G condurremo una retta **e**, la cui inclinazione sull'asse abbia il seno $= 1 : n$; i circoli col centro D (§ **83**) divengono rette LM perpendicolari all'asse, ognuna di queste LM si taglierà col centro nel foco E ed il raggio eguale alla distanza dalla retta **e** del punto dell'asse. Per la teoria della diottrica i raggi paralleli all'asse che incidono sull'ellisse convergono nel foco F più lontano dal punto d'incidenza M. Alla retta **e** io do il nome di *direttrice obbliqua*, perchè la vera direttrice passante per G è perpendicolare all'asse. — Se vuol descriversi l'iperbola col foco E ciascuna ordinata LM si taglia col circolo di centro E e raggio eguale alla retta parallela ad un assintoto e compresa tra il punto G e l'ordinata.

finita stampare il dì 30 maggio 1879