DEI PRIMI PRINCIPII

DELLA MECCANICA E DELLA GEOMETRIA

IN RELAZIONE AL POSTULATO D'EUCLIDE

MEMORIA

DI

ANGELO GENOCCHI

In una breve comunicazione fatta alla R. Accademia delle Scienze di Torino nell'adunanza del 24 gennaio 1869 ricordai una *teorica della leva*, pubblicata sotto il nome di Daviet de Foncenex nel secondo Volume delle *Miscellanea taurinensia,* della quale il vero autore, per testimonianza dell'illustre Delambre, è il nostro Lagrange. Esposi come quella teorica ingegnosa fosse imperfetta perchè un' equazione di condizione che in essa si adoperava poteva soddisfarsi non solo nel modo particolarissimo determinato dall'autore, ma con formole più generali, che furono indicate da Laplace; e accennai che D'Alembert e Fourier avevano tentato di emendarla e compierla. Aggiunsi poi che la soluzione più generale di quell'equazione conduce alla geometria *immaginaria* o *non euclidea,* che ai nostri giorni fu creata e illustrata da insigni pensatori, supponendo non vero il famoso postulato d'Euclide intorno alle parallele, mentre la soluzione particolare condurrebbe alla geometria euclidea; e dissi che le formole analitiche per la composizione delle forze concorrenti restavano le stesse in entrambi i sistemi di geometria.

L'attenzione che oggi si è rivolta a codesta nuova geometria ha fatto che venisse proposta e discussa con molto calore la questione del miglior modo di esporre gli elementi della scienza dell'estensione. Dai più si è riconosciuta l'impossibilità di provare il postulato d'Euclide, e si è ammessa la necessità o di accettare senz'altro questo postulato o di ricorrere alla esperienza, cioè alle misure effettive, che assolutamente escludono la geometria non euclidea e le attribuiscono il carattere d'una mera speculazione astratta.

Alcune considerazioni che intendo esporre sopra questo argomento, tenendomi lontano egualmente dall'entusiasmo e dal disprezzo (per usare le belle parole del prof. Beltrami), non meno che la dichiarazione delle proposizioni meccaniche dianzi rammentate, formano il soggetto della presente Memoria.

Affinchè riuscisse ben palese che le mie deduzioni e dimostrazioni non si appoggiavano in modo alcuno sopra il postulato d'Euclide, nè lo presupponevano, ho dovuto entrare in lunghe spiegazioni, forse troppo minute, richiamare e riprodurre non poche nozioni e dimostrazioni già molto divulgate ed elementari; e ciò spero mi valga a discolpa.

Ammetto tuttavia come evidenti questi principii:

Che si può trasportare il punto d'applicazione d'una forza in un altro punto qualsivoglia della sua direzione connesso invariabilmente col primo;

Che la risultante di due forze applicate ad un punto e aventi la stessa direzione è uguale alla loro somma se esse operano per lo stesso verso, alla loro differenza se operano in versi contrari;

Che la risultante di due forze concorrenti in un medesimo punto è situata nel loro piano, e divide in metà il loro angolo se esse sono eguali, o si accosta di più alla maggiore se sono disuguali.

Ho divisa come segue la materia che presi a trattare:

§ I. Lemmi di statica.

§ II. Formole per l'equilibrio nella leva e per la composizione delle forze concorrenti.

§ III. Geometria euclidea dedotta dalle dimostrazioni elementari del parallelogrammo delle forze e del parallelogrammo delle velocità.

§ IV. Geometria non euclidea. Angolo del parallelismo. Distanza di due rette. Distanza di due punti.

§ V. Indeterminazione della geometria non euclidea. Intorno alla impossibilità di provare la euclidea.

§ VI. Definizioni della linea retta e del piano. Definizioni che implicano il postulato d'Euclide.

§ VII. Di alcuni tentativi per dimostrar il postulato d'Euclide. Uso di quantità infinite.

§ VIII. Postulato che si propone di sostituire a quello d'Euclide.

Torino, 31 marzo 1869.

§ I. — Lemmi.

1° A due forze concorrenti AB e AC (fig. 1) non si possono sostituire per produrre il medesimo effetto altre due forze AE e AF che abbiano le stesse direzioni. Poichè prolungate queste in contraria parte, e prese sui prolungamenti $AG = AE$, $AH = AF$, le forze AB e AC dovrebbero fare equilibrio alle AG ed AH; ma le forze contrarie AB e AG avranno per risultante una forza AI eguale alla loro differenza e diretta come la maggiore di esse, e le forze contrarie AC e AH avranno similmente per risultante una forza AK eguale alla loro differenza e diretta come la maggiore; quindi dovrebbero farsi equilibrio le forze AI e AK operanti sotto un angolo KAI, e aggiungendo un' altra forza AL eguale e opposta alla AI, si spingerebbe il punto A verso L, mentre nel medesimo tempo, distruggendosi le forze AI e AL, il punto A sarebbe tratto verso K dalla forza AK.

2° Dato un angolo BAC e una forza P operante lungo un lato AB dell'angolo, si può applicare lungo l'altro lato una forza tanto grande che l'angolo di essa con la risultante sia minore di un dato qualsivoglia. Perocchè, se si applica una forza eguale a P, si avrà una risultante R il cui angolo con AC sarà $= {}^1/_2 BAC$; se si aggiunge una forza eguale ad R, la risultante sarà quella di due forze eguali ad R che concorrono sotto un angolo $= {}^1/_2 BAC$, e farà quindi con AC un angolo $= {}^1/_4 BAC$; aggiungendo lungo AC un'altra forza eguale alla nuova risultante, si ridurrà l'angolo a ${}^1/_8 BAC$, e così via via.

3° Se due forze eguali P e P' siano applicate ai termini A e A' d'una leva retta o verga rigida AA' (fig. 2), e le loro direzioni siano in un medesimo piano, perpendicolari alla retta AA', e per lo stesso verso, possiamo dimostrare che la loro risultante passerà pel mezzo B della stessa retta e sarà pure perpendicolare a questa. Si applichino ad A, A' due altre forze eguali Q, Q' dirette lungo AA', l'una nel verso da A' ad A, l'altra nel verso da A ad A', e sia R la risultante delle due P e Q, R' la risultante delle due P' e Q'. Prendendo Q e Q'

abbastanza grandi potremo supporre piccoli quanto vorremo gli angoli QAR e $Q'A'R'$, e quindi potremo supporre che RA e $R'A'$ incontrino la BC perpendicolare ad AA'. L'incontro si farà in un medesimo punto C al quale potremo intender applicate le forze eguali R e R': e la risultante di queste, che sarà anche risultante delle P e P', poichè le due Q e Q' eguali e contrarie si distruggono, avrà la direzione CB che divide in mezzo l'angolo ACA' e potrà intendersi applicata al punto B.

4° Siano in un piano due forze eguali P, P' applicate a due punti A, A' con direzione perpendicolare alla retta AA' (fig. 3) e tendenti per lo stesso verso; sia R la loro risultante pure perpendicolare alla medesima retta, volta per lo stesso verso, e applicata al punto di mezzo B: fatto $AB = x$, si ponga $\frac{R}{P} = \varphi(x)$, e quindi $R = P\varphi(x)$.

Se si raddoppia la leva AA' prolungandola da un lato fino in E, dall'altro fino in E', e prendendo $AE = A'E' = x$, e si suppongono le forze P, P' applicate in E, E', avremo un'altra risultante

$$S = P\varphi(2x);$$

e se si suppongono altre due forze eguali alla P applicate in B, avremo in B le forze P, P e S, la cui risultante eguaglierà la loro somma $2P + S$. Ma la forza P applicata in E e la forza P applicata in B hanno una risultante che passa per A ed espressa da

$$R = P\varphi(x),$$

e similmente la forza P' applicata in E' e la forza $P = P'$ applicata in B hanno una risultante che passa per A' ed espressa da

$$R' = P'\varphi(x);$$

quindi la forza totale che opera sul punto B può anche considerarsi come la risultante delle due forze eguali R, R' applicate ai punti A, A', e sarà per ciò espressa da $R\varphi(x)$. Avremo dunque:

$$2P + S = R\varphi(x),$$

ossia: $$2 + \varphi(2x) = \varphi(x)^2$$

come trovò FONCENEX (1).

5° Premetto anche la dimostrazione *a priori* della possibilità di risolvere una forza data AD (fig. 4) in due forze dirette lungo i lati d'un angolo retto BAC che abbia il vertice nel punto d'applicazione della forza, e il cui piano contenga la direzione di questa. Conduciamo per A una retta indefinita EF, che faccia con AB un angolo eguale a quello che AB fa con AD, cioè $EAB = BAD$: essendo retto l'angolo BAC, sarà l'angolo CAF eguale al CAD, essendo il primo complemento di EAB e il secondo di BAD. Presa $AG = \frac{1}{2} AD$, potremo intendere applicate ad A lungo AD due forze eguali ad AG; e potremo inoltre immaginare applicate ad A lungo EF due altre forze eguali ad AG, l'una diretta verso E, e l'altra verso F, poichè queste essendo eguali e contrarie si annulleranno. Allora il punto A sarà tratto da quattro forze eguali AG ed AE, AG ed AF: le prime due hanno una risultante che dovrà dividere in mezzo il loro angolo, e quindi avrà la direzione AB; le ultime due hanno parimente una risultante che sarà diretta secondo AC, poichè AC divide in mezzo l'angolo delle componenti. Or dunque alla forza data avremo sostituite due forze, l'una diretta secondo AB e l'altra secondo AC, come si voleva. Ma ciò potrà farsi in un modo solo pel 1° lemma.

6° Aggiungerò un altro lemma, dimostrando che la risultante di due forze AB e AC (fig. 5) che concorrono ad angolo retto, cresce con una delle componenti AC se l'altra componente AB resta costante. Sia AD la risultante di AB ed AC, e la forza AC cresca e divenga AE; preso $AF = CE$, la risultante diverrà quella delle due forze AD e AF, e sarà per ciò rappresentata da una retta AG situata nell'angolo DAE. Si contrapponga ad AG una forza eguale AL che farà equilibrio alle due componenti AD e AF: la risultante delle due forze AD e AL sarà AH eguale e contraria ad AF, e poichè l'angolo HAL è

(1) *Miscellanea taurinensia*, tom. II, pag. 320.

minore di HAD, essendo il primo eguale all'angolo acuto GAE e il secondo ottuso, la componente AL dovrà esser maggiore dell'altra AD, e quindi la nuova risultante AG sarà maggiore della risultante primitiva AD.

Segue da ciò che se la forza AC decresca in luogo di crescere, decrescerà anche la risultante; e che se la risultante e una delle componenti non variano, non potrà tampoco variare l'altra: onde, quando sia determinata la risultante e una delle componenti ortogonali, sarà determinata anche l'altra componente, e quindi saranno anche determinati gli angoli che fa con esse la risultante.

§ II.

Ammessi questi principii, abbiasi un triangolo rettilineo ABC rettangolo in B (fig. 2): si prolunghi il lato AB d'una quantità eguale BA', e tirando $A'C$ si formi il triangolo $A'BC$ eguale al primo. S'intendano applicate in C due forze eguali R, R' dirette, l'una sopra CA da C verso A, l'altra sopra CA' da C verso A': se i punti A, A', C si suppongono invariabilmente connessi, potremo trasportare nel punto A la forza R, e nel punto A' la forza R', e risolvere ciascuna in due componenti, l'una diretta sopra AA', e l'altra perpendicolare ad AA'. Avremo due forze eguali P e P' perpendicolari alla AA' e cospiranti, e due forze eguali Q e Q', che tireranno in versi opposti i punti A e A' e si distruggeranno; cosicchè la risultante delle forze R e R' sarà la stessa che quella delle forze P e P'. Ma condotta per C una retta DD' perpendicolare a BC potremo risolvere secondo queste due rette ciascuna delle forze R e R': le componenti secondo DD' si distruggeranno, le componenti secondo BC si sommeranno, e questa somma rappresenterà una forza che potrà supporsi applicata in B e perpendicolare ad AA', e che sarà la risultante delle due forze P e P'. Essa sarà dunque espressa da $P\varphi(x)$ se chiamiamo x la distanza AB; e si potrà o prendere con Foncenex $\varphi(x) = 2$, o più generalmente con D'Alembert e LAPLACE fare $\varphi(x) = k^x + k^{-x}$, intendendo con k una quantità costante ovvero una funzione *periodica* arbitraria che avrà lo stesso valore per x e per $2x$ [1].

Nel primo caso, essendo $2P$ la somma di due forze eguali dirette secondo CB, ciascuna di esse sarà P, e così la forza R, risoluta in due lungo i lati dell'angolo retto BCD, avrà eguale a P una delle componenti; mentre la stessa forza aveva due altre componenti ortogonali P e Q applicate nel punto A: dunque anche la componente diretta lungo CD eguaglierà Q, e le componenti P e Q faranno con R angoli eguali a quelli che BC e CD fanno con AC. Sono pertanto eguali gli angoli PAR e ACB, e poichè la somma degli angoli PAR e QAR vale un retto, e l'angolo QAR eguaglia BAC, sarà eguale ad un retto anche la somma degli angoli ACB e BAC del triangolo rettangolo ABC: il che basta per dimostrare il postulato d'EUCLIDE e la dottrina euclidea delle parallele.

Nel secondo caso, nel quale $\varphi(x)$ non è una costante ma varia con x, indichiamo con A e C gli angoli BAC e BCA, ed essendo R la risultante delle forze ortogonali P e Q che fa l'angolo $\frac{\pi}{2} - A$ con la forza P, poniamo $P = R\psi\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$, poichè il quoziente $\frac{R}{P}$ sarà una determinata funzione di quell'angolo. Ma la stessa forza R è anche la risultante di due forze dirette secondo CD e CB, di cui la seconda eguaglierà $^1/_2 P\varphi(x)$, e farà l'angolo C colla risultante; quindi si avrà pure

$$^1/_2 P\varphi(x) = 2\psi(C) \ ,$$

ed eliminando R se ne trarrà

$$\varphi(x)\,\psi\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = 2\psi(C) \ ,$$

(1) *Miscell. taurin.*, tom. II, pag. 320 (FONCENEX); *Acad. des Sciences de Paris, année* 1769, pag. 285 (D'ALEMBERT); *Mém. présentés par divers savants*, tom. VII, année 1773, pag. 74 (LAPLACE).

relazione fra i due angoli acuti del triangolo rettangolo ABC e il cateto AB.

Ora, le dimostrazioni che D'ALEMBERT diede in alcuni de' suoi *Opuscoli*, e che furono riprodotte da POISSON e CORIOLIS (1), valgono eziandio nella geometria immaginaria per provare che, se R è la risultante di due forze eguali a P concorrenti sotto l'angolo $2A$, dovrà essere $R=2P\cos.A$: può anche usarsi la dimostrazione riferita dall'abb. MOIGNO nella sua *Statica* n° 7 (Parigi 1868, pag. 14-17). Dal caso di due forze concorrenti eguali si passa facilmente al caso di due forze diseguali ortogonali con un raziocinio dovuto anch'esso in sostanza al FONCENEX (2). Siano AB, AC (fig. 4) due forze concorrenti ad angolo retto, AD la loro risultante, e tiriamo per A l'indefinita EF che faccia eguali gli angoli EAB e BAD, e per conseguenza anche CAF e CAD; applicate in A due forze eguali alla metà AG di AD e opposte nelle direzioni AE e AF, avremo le forze eguali AE e AG la cui risultante avrà la direzione AB, e le altre AF e AG la cui risultante avrà la direzione AC, e infine le forze ortogonali AB e AC la cui risultante deve essere AD. Adunque le due risultanti parziali AB e AC non saranno diverse dalle due componenti date (1° lemma), e così avremo le relazioni:

$$AB=2AG\cos BAD=AD\cos BAD\ ,$$
$$AC=2AG\cos CAD=AD\cos CAD\ .$$

Vediamo pertanto che tra due componenti ortogonali P e Q, la loro risultante R, e gli angoli A e B che quelle fanno con R, sussistono le relazioni

$$P=R\cos A\ ,\qquad Q=R\cos B\ ,\qquad A+B=\frac{\pi}{2}\ ,$$

come nel sistema della geometria euclidea.

(1) D'ALEMBERT, *Opuscules mathématiques*, tom. I, pag. 169-179; tom. VI, pag. 360-370. Una dimostrazione dello stesso genere era stata data dal FONCENEX, *Miscell. taurin.*, tom. II, pag. 306-308.

(2) *Miscell. taurin.*, tom. II, pag. 308-309.

Le stesse formole si possono anche dimostrare col metodo usato da Laplace nella *Meccanica celeste* (1797, tom. I, pag. 4, cap. I, n° 1).

Risulta da esse che la funzione dianzi rappresentata con $\psi(z)$ non è altro se non cos z, e però tra gli angoli e uno de' lati d'un triangolo rettilineo rettangolo si avrà l'equazione

$$\varphi(x) \text{ sen } A = 2 \cos C \, ,$$

ovvero

$$\frac{k^x + k^{-x}}{2} \text{ sen } A = \cos C \, ,$$

la qual formola può riguardarsi come fondamentale nella geometria immaginaria.

Abbiamo pertanto che la dottrina euclidea delle parallele sarebbe pienamente stabilita se si ammettesse il postulato d'Archimede sopra la risultante di due forze eguali che tirino perpendicolarmente una leva retta; e così questo postulato d'Archimede terrebbe luogo del postulato d'Euclide. Ma sebbene siano state date parecchie dimostrazioni del postulato d'Archimede intorno alla leva, nessuna di esse potrebbe invocarsi per liberar dai postulati la geometria d'Euclide. La dimostrazione d'Ugenio, riferita da Lagrange nell'*Introduzione* alla sua *Meccanica analitica*, quella di Fourier nel Giornale della scuola politecnica (5° *cahier*, pag. 50-51), quella di Poinset nel suo Trattato di statica (Parigi 1830, pag. 21-22), presuppongono la teorica delle parallele come Euclide l'ha esposta; la dimostrazione che diede D'Alembert nelle Memorie dell'Accademia di Parigi pel 1769, non è abbastanza evidente.

Non ammesso il postulato d'Archimede, si ha la geometria immaginaria. Ma le formole per la composizione delle forze concorrenti ortogonali rimangono le stesse. Resta a vedere come se ne traggono quelle che servono alla composizione delle forze concorrenti oblique, e delle forze disuguali applicate perpendicolarmente ad una leva retta.

Prima di occuparcene dedurremo dalla formola dianzi trovata le relazioni che nella geometria immaginaria collegano i lati e gli angoli d'un triangolo rettilineo. Supporremo k costante, poichè vedremo più innanzi che deve essere necessariamente tale.

Seguendo il chiar. prof. BATTAGLINI [1], useremo le denotazioni che qui esponiamo:

$$\mathrm{Cos}\, x = \frac{k^x + k^{-x}}{2} , \quad \mathrm{Sen}\, x = \frac{k^x - k^{-x}}{2} , \quad \mathrm{Tang}\, x = \frac{k^x - k^{-x}}{k^x + k^x} .$$

Siano α, β gli angoli acuti d'un triangolo rettilineo rettangolo; a, b i lati opposti. La formola trovata darà le due relazioni

$$\cos\alpha = \mathrm{Cos}\, a \,\mathrm{sen}\,\beta , \qquad \cos\beta = \mathrm{Cos}\, b \,\mathrm{sen}\,\alpha .$$

Da queste eliminando β si trae:

$$\cos^2\alpha + \mathrm{Cos}^2 a\, \mathrm{Cos}^2 b\, \mathrm{sen}^2\alpha = \mathrm{Cos}^2 a ,$$

e mettendo $1 + \mathrm{Sen}^2 b$ in luogo di $\mathrm{Cos}^2 b$, si trova:

$$\mathrm{Cos}^2 a\, \mathrm{Sen}^2 b\, \mathrm{sen}^2\alpha = (\mathrm{Cos}^2 a - 1)\cos^2\alpha ,$$

onde

$$\mathrm{Sen}^2 b\, \mathrm{tang}^2\alpha = \mathrm{Tang}^2 a ,$$

e finalmente

$$\mathrm{Tang}\, a = \mathrm{Sen}\, b\, \mathrm{tang}\,\alpha .$$

Si avrà per eguali ragioni anche

$$\mathrm{Tang}\, b = \mathrm{Sen}\, a\, \mathrm{tang}\,\beta .$$

Sia ora un triangolo rettilineo qualsivoglia ABC (fig. 6), e chiamiamo α, β, γ i suoi angoli in A, B, C; chiamiamo pure a, b, c i tre lati opposti. Da C tiriamo una perpendicolare CD sul lato AB, e facciamo $AD = c'$, $BD = c''$, ang $ACD = \gamma'$, ang $BCD = \gamma''$, $CD = p$. Nei triangoli rettangoli ADC, BDC avremo:

---

(1) V. *Rendiconto dell'Accademia delle Scienze di Napoli*, 1867, pag. 157-173; *Giornale di matematiche*, Napoli, 1867, pag. 217-231.

$$\cos\gamma' = \mathrm{Cos}\, c' \operatorname{sen}\alpha\ , \qquad \cos\gamma'' = \mathrm{Cos}\, c'' \operatorname{sen}\beta\ ,$$

$$\mathrm{Tang}\, p = \mathrm{Sen}\, c' \operatorname{tang}\alpha\ , \qquad \mathrm{Tang}\, p = \mathrm{Sen}\, c'' \operatorname{tang}\beta\ ;$$

donde

$$(\mathrm{Cos}\, c'\, \mathrm{Cos}\, c'' + \mathrm{Sen}\, c'\, \mathrm{Sen}\, c'') \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta =$$
$$\cos\gamma' \cos\gamma'' + \mathrm{Tang}^2 p \cos\alpha\cos\beta\ ,$$

ovvero

$$\cos\gamma = -\operatorname{sen}\gamma' \operatorname{sen}\gamma'' - \mathrm{Tang}^2 p \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\,\mathrm{Cos}\, c\ ,$$

per essere $\gamma = \gamma' + \gamma''$, $c = c' + c''$. Ma gli stessi triangoli rettangoli daranno pure:

$$\cos\alpha = \mathrm{Cos}\, p \operatorname{sen}\gamma'\ , \qquad \cos\beta = \mathrm{Cos}\, p \operatorname{sen}\gamma''\ ,$$

e quindi

$$\operatorname{sen}\gamma' \operatorname{sen}\gamma'' = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\mathrm{Cos}^2 p} = \cos\alpha\cos\beta - \mathrm{Tang}^2 p \cos\alpha\cos\beta\ ;$$

dunque sostituendo resterà:

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\,\mathrm{Cos}\, c\ .$$

Si è qui ammesso che la perpendicolare CD cadesse entro il triangolo; è facile riconoscere quali modificazioni dovrebbero farsi se cadesse fuori.

Possiamo anche supporre che l'angolo γ sia retto; allora sarà c l'ipotenusa del triangolo rettangolo ACB, e la relazione ottenuta diverrà:

$$\mathrm{Cos}\, c = \cot\alpha\cot\beta\ .$$

Ma abbiamo pure $\mathrm{Cos}\, a\, \mathrm{Cos}\, b = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta} \cdot \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$; dunque sarà eziandio:

$$\mathrm{Cos}\, a\, \mathrm{Cos}\, b = \mathrm{Cos}\, c\ .$$

Ci basterà aver dimostrate queste relazioni, e rimanderemo per le altre alla Memoria dell'esimio prof. Battaglini.

Veniamo, ciò posto, a considerare due forze P e Q applicate ad un punto A e inclinate l'una all'altra sotto un angolo θ; sia R la loro risultante che faccia con P l'angolo α, con Q l'angolo β. La forza Q si risolva in due, l'una perpendicolare a P, l'altra diretta secondo la linea che segna la direzione di P; l'intensità della prima componente sarà $Q \operatorname{sen} \theta$, quella della seconda sarà $Q \cos \theta$, e tenderà nello stesso verso della forza P se l'angolo θ sarà acuto, nel verso opposto se θ sia ottuso, onde avrà anche il medesimo segno di $Q \cos \theta$, prese P e Q come positive. Adunque R sarà la risultante di due forze ortogonali $Q \operatorname{sen} \theta$ e $P + Q \cos \theta$, e farà con questa l'angolo α, con l'altra l'angolo $\frac{\pi}{2} - \alpha$; avremo pertanto:

$$P + Q \cos \theta = R \cos \alpha \,, \qquad Q \operatorname{sen} \theta = R \operatorname{sen} \alpha \,,$$

che sono le formole note. Così può dirsi che le formole analitiche rimangono le stesse quantunque sia cambiata la loro significazione geometrica.

Consideriamo ora l'equilibrio d'una leva retta AA' (fig. 2) tirata da due forze disuguali P, P' che operino in uno stesso piano con direzioni perpendicolari alla medesima leva. Aggiungiamo due forze eguali Q, Q' che operino lungo la leva in versi contrari, e tali che le risultanti di P e Q, di P' e Q' s'incontrino, la qual cosa si otterrà se gli angoli delle stesse risultanti con AA' siano abbastanza piccoli (lemma 2°). Siano R e R' tali risultanti; β, β' i loro angoli (acuti) con AA'; C il punto in cui concorrono; θ l'angolo che fanno in C. Avremo due forze concorrenti R, R', la cui risultante sarà pure la risultante di P e P'; sia S questa risultante, e α, α' gli angoli che farà con R, R'. Tra questi dati dovranno sussistere le relazioni:

$$P = R \operatorname{sen} \beta \,, \qquad P' = R' \operatorname{sen} \beta' \,,$$

$$Q = Q' = R \cos \beta = R' \cos \beta' \,,$$

$$R + R' \cos \theta = S \cos \alpha \,, \qquad R' \operatorname{sen} \theta = S \operatorname{sen} \alpha \,.$$

Dalle ultime due si trae:

$$\frac{R}{R'} + \cos \theta = \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \alpha} \,, \quad \text{ossia} \quad \frac{R}{R'} = \frac{\operatorname{sen} \alpha'}{\operatorname{sen} \alpha} \,,$$

poichè $\theta = \alpha + \alpha'$; quindi per essere

$$\frac{R}{R'} = \frac{\cos\beta'}{\cos\beta},$$

risulterà

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\beta} = \frac{\operatorname{sen}\alpha'}{\cos\beta'}.$$

Questa esprime che la risultante di P e P' avrà una direzione CB perpendicolare alla AA', poichè ne' triangoli rettangoli ABC e $A'BC$ si avrà secondo una formola dianzi dimostrata:

$$\varphi(BC)\operatorname{sen}\alpha = 2\cos\beta\,, \qquad \varphi(BC)\operatorname{sen}\alpha' = 2\cos\beta'\,.$$

Si può anche, per dimostrare che la risultante è perpendicolare ad AA', risolvere le forze R e R' in componenti ortogonali lungo CB perpendicolare ad AA', e lungo DCD' perpendicolare a CB: si troverà che le componenti dirette secondo DCD' sono eguali ed opposte, e che però restano soltanto le componenti dirette secondo CB.

Abbiamo inoltre:

$$\frac{P}{P'} = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\beta'}\,, \qquad S^2 = R^2 + R'^2 + 2RR'\cos\theta\,;$$

e nel triangolo ACA', fatto $AA' = l$, abbiamo pure:

$$\cos\theta = -\cos\beta\cos\beta' + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\beta'\operatorname{Cos} l\,;$$

dunque

$$S^2 = R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\beta\cos\beta' + 2RR'\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\beta'\operatorname{Cos} l\,.$$

D'altra parte

$$RR'\cos\beta\cos\beta' = R^2\cos^2\beta = R'^2\cos^2\beta'\,,$$

onde

$$S^2 = R^2\operatorname{sen}^2\beta + R'^2\operatorname{sen}^2\beta' + 2RR'\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\beta'\operatorname{Cos} l\,;$$

e infine

$$S^2 = P^2 + P'^2 + 2PP'\operatorname{Cos} l\,,$$

che determina l'intensità della risultante S.

Si faccia $AB=a$, $A'B=a'$, $CB=b$, sarà:

$$\mathrm{Tang}\, b = \mathrm{Sen}\, a \,\mathrm{tang}\,\beta \;, \qquad \mathrm{Tang}\, b = \mathrm{Sen}\, a' \,\mathrm{tang}\,\beta' \;,$$

e però

$$1 = \frac{\mathrm{Sen}\, a}{\mathrm{Sen}\, a'} \cdot \frac{\mathrm{tang}\,\beta}{\mathrm{tang}\,\beta'} \;;$$

talchè se ne dedurrà:

$$\frac{\mathrm{Sen}\, a}{\mathrm{Sen}\, a'} = \frac{P'}{P} \;,$$

che determina il punto B, al quale la risultante S può intendersi applicata.

Queste formole si riducono alle cognite nel caso di $k=1$, che dà:

$$\mathrm{Cos}\, l = 1 \;, \qquad \frac{\mathrm{Sen}\, a}{\mathrm{Sen}\, a'} = \frac{a}{a'} \;.$$

§ III.

Oltre al postulato d'Archimede, altri postulati ammessi da Newton e da D'Alembert nella dimostrazione del parallelogrammo delle forze e del parallelogrammo delle velocità, possono condurre alla dottrina euclidea delle parallele.

Poniamo due forze operanti ad angolo retto, e ammettiamo con Newton che il mobile dopo un tempo qualsivoglia t si troverà tanto lontano dalla direzione di una di esse, quanto sarebbe se l'altra operasse sola [1]. D'altra parte il moto deve essere uniforme e rettilineo; quindi, se chiamasi c lo spazio percorso dal mobile e a la distanza alla quale si trova da una di quelle direzioni dopo il tempo t, sarà costante la proporzione $\frac{a}{t}$ come la proporzione $\frac{c}{t}$, e così anche $\frac{a}{c}$. Ciò basta per concludere la teorica

(1) Segue la dimostrazione quale fu esposta dal Mozzoni nei suoi *Elementi di fisica generale* (Milano, 1827, pag. 37 e 38). — V. anche Moigno, *Leçons de mécan. analyt.* (Parigi, 1868), Préface, pag. XXXII.

euclidea, poichè nella non euclidea si avrebbero, secondo il § precedente, le formole:

$$\operatorname{Tang} \alpha = \operatorname{Sen} b \operatorname{tang} \alpha \ , \qquad \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} b = \operatorname{Cos} c \ ,$$

da cui si deduce $\frac{\operatorname{Sen} a}{\operatorname{Sen} c} = \operatorname{sen} \alpha$ costante.

Si può anche, senza ricorrere a queste formole, trarre immediatamente dalla proposizione dimostrata il postulato d' Euclide. Imperocchè, se siano DB, $D'B'$ (fig. 7) due perpendicolari condotte ad una retta $AB'B$ da due punti D, D' d'un'altra retta $AD'D$, si potrà intendere che AD, AD' siano gli spazi percorsi da un mobile sollecitato da due forze ortogonali, delle quali una abbia la direzione $AB'B$, onde sarà:

$$AD : DB = AD' : D'B' ,$$

e quindi

$$AD : DD' = DB : DB - D'B' .$$

Adunque, date le rette BB' e DD', l'una perpendicolare, l'altra obbliqua alla terza BD, da un punto D' della seconda si abbasserà un'altra perpendicolare $D'B'$ sulla prima, e si cercherà una quarta proporzionale dopo le lunghezze $DB - D'B'$, DB, DD': questa quarta proporzionale (che in numeri si può sempre trovare) portata da D sopra DD', finirà in un punto A che sarà il concorso di BB' e DD'. E sarà così provato che queste due rette concorrono.

Possiamo invece far fondamento nel parallelogrammo delle velocità. Sia A un punto materiale animato da due velocità rappresentate in grandezza e direzione da due rette AB, AC (fig. 8), l'una perpendicolare all'altra; prendiamo col D'Alembert (*Traité de dynamique*) per evidente che il moto sarà lo stesso se A scorra sulla retta AC con velocità AC, e nel medesimo tempo la retta AC scorra lungo AB con velocità AB, rimanendo sempre nel piano BAC e perpendicolare ad AB. Condotta per B la BD perpendicolare ad AB ed eguale ad AC, sarà D il punto dove si troverà il mobile dopo l'unità di tempo, e così la diagonale AD rappresenterà in grandezza e direzione la velocità effettiva del mobile.

Deducendosi la composizione delle velocità da quella delle forze, si potranno applicare a questa costruzione geometrica le formole analitiche sopra dimostrate, e se ne conchiuderà la dottrina antica delle parallele ad esclusione della nuova. D'altra parte, se si avverte che la linea descritta dal punto A, portato dalla retta AC mentre questa si move sulla retta AB, è retta, poichè si suppone uniforme e rettilineo il moto impresso al punto A, si vedrà che dovendo gli spazi essere proporzionali alle velocità saranno costanti le ragioni $AD:AC:AB$, onde risulta il postulato d'Euclide come dianzi.

Sono considerazioni di cinematica simili alle precedenti quelle sopra le quali è fondata la dimostrazione ingegnosa di questo postulato, data dal sig. Lamarle nei *Bulletins de l'Acad. roy. de Belgique*, 1856, n[i] 10 e 11, e riprodotta a pag. 27–31 delle sue *Notions fondamentales sur plusieurs points élémentaires de géométrie, de dynamique et d'analyse transcendante* (Memorie della stessa Accademia, tom. XXX). Egli si è proposto di determinare il luogo delle sommità di tutte le perpendicolari eguali alzate in un piano sopra una retta; e in questo aspetto aveva già considerata la questione il Venini ne' suoi *Elementi di matematica* (Parma, 1770, vol. II, pag. 17 e 18), tentando di scioglierla per mezzo delle sole nozioni di *convessità* e *concavità*; il sig. Lamarle si è valso invece del *moto* di rette obbligate a conservare una certa posizione respettiva.

Anche il sig. Bouniakowsky indicò una dimostrazione tratta dai principii della meccanica (*Mém. Acad. de S.t-Pétersb.*, 6ª serie, t. IV, p. 106-107).

§ IV.

Nella espressione generale della funzione $\varphi(x)$ dianzi rammentata (§ II), la quantità k è una funzione arbitraria di $\operatorname{sen} 2\pi z$ e $\cos 2\pi z$, rappresentato con z il quoziente $\frac{\log x}{\log 2}$. Si può quindi assegnare a k un valore costante qualsiasi, e si hanno allora precisamente le formole stesse usate dai cultori della geometria immaginaria; ma parrebbe che anche si potesse prendere per k una espressione il cui valore variasse con x. Tuttavia è da notarsi che il D'Alembert nel tomo VI de' suoi *Opuscoli matematici*, pag. 371, con raziocinii simili a quelli del Foncenex ma applicati ad un caso più generale, dimostrò che quella stessa funzione $\varphi(x)$ deve soddisfare all'equazione

$$\varphi(x-y)+\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y) ,$$

qualunque siano x e y. Ponendo $x=y$ si ha l'equazione del Foncenex, perchè $\varphi(0)=2$, ma lasciando x e y independenti, se ne deduce

$$\varphi(x)=k^x+k^{-x} ,$$

con k costante. Supporremo dunque anche in progresso che a k si attribuiscono solamente valori costanti.

Nell'equazione

$$\text{Tang}\, a=\text{Sen}\, b \,\text{tang}\, \alpha ,$$

tra i cateti e uno degli angoli acuti d'un triangolo rettangolo, possiamo far crescere indefinitamente il cateto a lasciando costante l'altro b, e ne trarremo l'angolo α. Il triangolo sarà sempre possibile, ma l'angolo α tenderà verso un limite che si otterrà ponendo a infinito; ciò darà $\text{Tang}\, a=1$ (supposto a positivo), e quindi:

$$\text{tang}\, \alpha=\frac{1}{\text{Sen}\, b} ,$$

che determinerà *l'angolo del parallelismo* per la distanza b, e una delle due *parallele* che da un punto dato si possono nella geometria immaginaria condurre ad una retta data. L'altra parallela, posta simmetricamente, si determinerà supponendo a negativo.

Possiamo anche cercare come varii la distanza tra due rette, l'una perpendicolare e l'altra obbliqua ad una terza, misurando tale distanza tra i punti dell'obbliqua e la perpendicolare. Sia AC (fig. 9) obbliqua e BD perpendicolare ad AB, e sia l'angolo BAC acuto; preso un punto M sopra AC, si cali MP perpendicolare a BD, MQ perpendicolare ad AB, e si tiri MB. Si faccia $AB=a$, $AM=r$, $MP=x$,

$MQ=y$, $MB=z$, $AQ=q$, e si chiamino α e θ gli angoli BAC e MBQ. Dai triangoli rettangoli AQM, BQM e BPM avremo:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{Cos} r = \operatorname{Cos} q \operatorname{Cos} y \ , & \operatorname{Tang} y = \operatorname{Sen} q \operatorname{tang} \alpha \ , \\ \operatorname{Sen} y = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{Sen} r \ , & \operatorname{Sen} y = \operatorname{Sen} z \operatorname{sen} \theta \ , \\ \operatorname{Tang} y = \operatorname{Sen} (a-q) \operatorname{tang} \theta \ , & \operatorname{Sen} x = \operatorname{Sen} z \cos \theta \ , \end{array}$$

e ne dedurremo:

$$\frac{\operatorname{Tang} y}{\operatorname{tang} \theta} = \operatorname{Sen} a \operatorname{Cos} q - \operatorname{Cos} a \operatorname{Sen} q \ , \quad \frac{\operatorname{Sen} y}{\operatorname{Sen} x} = \operatorname{tang} \theta \ ,$$

$$\frac{\operatorname{Sen} y}{\operatorname{tang} \theta} = \operatorname{Sen} a \operatorname{Cos} r - \operatorname{Cos} a \operatorname{Sen} r \cos \alpha = \operatorname{Sen} x \ ,$$

e quindi

$$\frac{\operatorname{Sen} x}{\operatorname{Cos} r} = \operatorname{Sen} a - \operatorname{Tang} r \operatorname{Cos} a \cos \alpha \ ,$$

che determina la distanza x per ogni punto M della AC.

Se il punto M si allontana da A, crescerà r, e $\operatorname{Tang} r$ tenderà verso 1, mentre $\operatorname{Cos} r$ crescerà indefinitamente. Ma potrà essere $\operatorname{Tang} a$ minore di $\cos \alpha$, oppure eguale o maggiore: cioè l'angolo α minore, eguale o maggiore dell'angolo del parallelismo. Nel primo caso si potrà trovare un valore di r che renda

$$\operatorname{Tang} a = \operatorname{Tang} r \cos \alpha \ ,$$

e però $\operatorname{Sen} x = 0$, ossia $x = 0$, cosicchè l'obbliqua AC incontrerà la perpendicolare BD. Nel secondo caso sarà:

$$\operatorname{Sen} x = \operatorname{Sen} a \left(\operatorname{Cos} r - \operatorname{Sen} r\right) \ ,$$

e $\operatorname{Sen} x$ decrescerà indefinitamente crescendo r, senza mai potersi annullare; quindi l'obbliqua AC si accosterà indefinitamente alla perpendicolare senza poterla mai incontrare. Finalmente nel terzo caso resterà sempre positiva e finita la quantità

$$\operatorname{Sen} a - \operatorname{Tang} r \operatorname{Cos} a \cos \alpha \ ,$$

onde $\operatorname{Sen} x$ crescerà indefinitamente con $\operatorname{Cos} r$, ossia con r, e crescerà così indefinitamente la distanza MP mentre il punto M si allontana sempre più dal punto A.

Le formole date da Lobatcheffsky nel Giornale di Crelle, tom. XVII, pag. 296-307, permettono di trattare un'altra questione, quella di determinare la più breve distanza tra due punti in un piano. Prese le coordinate ortogonali x e y, e chiamato s l'arco d'una curva piana riferita a quelle coordinate, si ha:

$$ds = \sqrt{dx^2 \operatorname{Cos}^2 y + dy^2}.$$

Volendo render un minimo s, le regole del calcolo delle variazioni daranno:

$$\frac{1}{\operatorname{Cos} y} \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 y} \cdot \frac{dy^2}{dx^2}} = a \text{ costante};$$

e però

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{Cos} y \sqrt{a^2 \operatorname{Cos}^2 y - 1}},$$

e integrando:

$$x + b = \frac{1}{\log k} \log \left(\frac{\operatorname{Sen} y + \sqrt{a^2 \operatorname{Cos}^2 y - 1}}{\cos y} \right),$$

ossia

$$2 \operatorname{Tang} y = k^{x+b} + (1 - a^2) k^{-x-b}.$$

Supposto che uno dei termini della linea brevissima sia l'origine delle coordinate, e fatto perciò $x = 0$ e $y = 0$, avremo $k^b = -(1 - a^2) k^{-b}$, e quindi

$$\operatorname{Tang} y = k^b \cdot \frac{k^x - k^{-x}}{2} = k^b \operatorname{Sen} x.$$

Questa equazione indica una linea retta, poichè, se chiamasi θ l'angolo formato coll'asse delle x dalla retta che unisce i due punti dati, si avrà un triangolo rettangolo in cui sarà:

$$\operatorname{Tang} y = \operatorname{tang} \theta \operatorname{Sen} x,$$

e però l'equazione precedente, se intendasi essere $k^b = \operatorname{tang} \theta$.

Risulta pertanto che anche nella geometria immaginaria la linea brevissima, almeno in un piano, è la linea retta.

Chiamata r la lunghezza della retta si avrà pure:

$$\mathrm{Cos}\, r = \mathrm{Cos}\, x \,\mathrm{Cos}\, y \;,$$

e si potrà chiedere qual valore debba darsi alla costante k, affinchè r sia il più piccolo possibile, restando gli stessi x e y. Si risponderà che questo valore è 1, cioè quello che conduce alla geometria euclidea; imperocchè nella geometria euclidea si ha $r = \sqrt{x^2+y^2}$, e se k non è 1, sarà $r > \sqrt{x^2+y^2}$, crescendo $\mathrm{Cos}\, r$ col valor assoluto di r, e avendosi:

$$\mathrm{Cos}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) < \mathrm{Cos}\, x \,\mathrm{Cos}\, y \;,$$

ossia

$$e^{h\sqrt{x^2+y^2}} + e^{-h\sqrt{x^2+y^2}} < \tfrac{1}{2}\left(e^{hx}+e^{-hx}\right)\left(e^{hy}+e^{-hy}\right) \;,$$

come sarebbe facile dimostrare (1).

Adunque la distanza r è la minima possibile nella geometria euclidea.

§ V.

Tanto i principii della statica usati dal Foncenex, quanto le considerazioni geometriche di cui si valsero Lobatcheffsky e Bolyai lasciano indeterminata la quantità k, che entra nelle relazioni fra i lati e gli angoli de' triangoli rettilinei, e da cui dipendono perciò tutte le proprietà dell'estensione quale sogliamo rappresentarcela e considerarla.

Ciò non si può spiegare, se non erro, fuorchè per l'una o per l'altra di queste ragioni: o perchè i principii da cui si prendon le mosse,

---

(1) Basta provare che per m intero e positivo sarà sempre

$$(x+y)^{2m}+(x-y)^{2m} > 2(x^2+y^2)^m,$$

e ciò risulta dall'essere

$$\frac{2m(2m-1)\ldots(2m-2n+1)}{1.2\ldots 2n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\cdot\frac{(2m-1)(2m-3)\ldots(2m-2n+1)}{1.3.5\ldots(2n-1)},$$

dove l'ultima frazione non è mai minore di 1, per $n = 1, 2, \ldots m$.

e sopra i quali si fondano tutte le deduzioni e dimostrazioni, non sono abbastanza precisi e determinati, o perchè, se son tali, non si traggono da essi tutte le conseguenze che in essi sono contenute. Restringendoci alle considerazioni geometriche, possiamo dire che o le definizioni della *linea retta* e del *piano* di cui si fa uso non sono abbastanza precise e compiute per distinguere queste linee e superficie da tutte le altre, o non si profitta di tutte le proprietà contenute nelle definizioni, ma solo d'alcune che son comuni anche ad altre linee e superficie. Nel primo di questi casi deve comprendersi anche quello che sembra essere stato ammesso da Gauss, Lobatcheffsky e Bolyai, d'una indeterminazione insita nell'argomento stesso, e non già procacciata da imperfetta espressione dei principii e delle definizioni, la quale non possa essere dissipata fuorchè per mezzo di osservazioni e sperienze.

Ora tutti riconoscono senza dubbio che dalle osservazioni e sperienze nasca la certezza degli assiomi espressi e non espressi, che sono la base delle dimostrazioni geometriche: anzi fu da gran tempo avvertito che dalla stessa nostra organizzazione dipendono le prime nozioni della geometria. « Reid a montré (così Ampère nel suo *Essai sur la philos. des sciences*, » Parigi 1838, tomo I, pag. 67) que si l'homme était réduit au simple » sens de la vue, ne pouvant dès lors connaître que l'étendue superficielle » à deux dimensions, et prenant pour des lignes droites ce qui serait » réellement des arcs de grands cercles tracés sur une surface sphérique » dont le centre serait dans son œil, les triangles qu'il considérerait » comme rectilignes pourraient avoir deux angles, ou même leurs trois » angles droits ou obtus, et que la géométrie d'un tel homme serait » toute différente de la nôtre, deux de ces lignes qu'il prendrait pour » droites se rencontrant, par exemple, toujours en deux points, en sorte » que la notion de deux droites parallèles serait contradictoire pour lui. »

Ma non è per ciò indubitabile che posta la nostra organizzazione qual essa è, poste le nozioni che le osservazioni e la esperienza rendono per noi evidenti, non si possano da esse dedurre con una serie di ragionamenti del tutto esatti i teoremi della geometria euclidea.

Le definizioni comuni della linea retta e del piano, anche quelle che accumulano condizioni superflue o non abbastanza semplici, sono tali nondimeno che distinguono queste da tutte le altre linee e superficie. Sembra dunque che debbano racchiudere virtualmente tutte le proprietà della linea retta e del piano, e che un raziocinio rigoroso debba bastare a trarle fuori. Avviene all'incontro che nelle relazioni a cui si giunge si trova una quantità indeterminata k, che è una funzione periodica se le deduzioni si fondano sopra una formola di FONCENEX, ed è una costante se si fa uso di altre considerazioni statiche o geometriche. Siamo quindi condotti a sospettare che non siasi saputo nelle dimostrazioni adoperate trar profitto di tutte le proprietà inchiuse nelle definizioni.

In questo pensiero ci conferma l'esame d'alcune proposizioni della geometria non euclidea, che vengono riferite a linee o figure descritte in un piano, ma, per non essersi tenuto conto sufficiente delle proprietà distintive della superficie piana, si applicano veramente e nella geometria euclidea a linee e figure esistenti nello spazio e in piani diversi. Così per un punto dello spazio passano effettivamente infinite rette che non incontrano una retta data. Due rette che non s'incontrano sono sempre perpendicolari ad una stessa retta: esse possono (se non sono in un medesimo piano) allontanarsi indefinitamente l'una dall'altra a destra e a sinistra della perpendicolare comune. Se una retta fa un angolo acuto con un'altra, e una terza le è perpendicolare, potrà la prima, in luogo di accostarsi sempre più alla perpendicolare, allontanarsi indefinitamente da essa, e ciò avverrà quando l'obbliqua e la perpendicolare non siano in uno stesso piano. Non è sempre possibile per un punto dato condurre una retta che incontri i due lati d'un angolo: poichè ciò non può eseguirsi quando il punto dato non è nel piano dell'angolo.

Parimente la somma degli angoli d'un quadrilatero, se esso non è piano, sarà minore di quattro angoli retti. Se due lati opposti d'un quadrilatero sono eguali e perpendicolari ad uno degli altri due lati, gli altri due angoli saranno pure eguali, ma non saranno retti quando il quadrilatero non sia piano, e il lato adiacente sarà allora maggiore del suo opposto.

Queste proposizioni spiegano pure l'insufficienza di certi tentativi fatti per dimostrare la teorica delle parallele, poichè i raziocini usati applicandosi anche a figure non situate in uno stesso piano, non potevano essere atti a provare la falsità di proposizioni, che per tali figure sono vere (1).

Ma non si spiegava nello stesso modo la possibilità di triangoli che avessero minore di due retti la somma dei loro angoli, nè di linee rette che si accostassero indefinitamente senza concorrere; cose impossibili assolutamente nella geometria euclidea. E anche questa difficoltà è ora rimossa pei trovati notabilissimi del professore Eugenio Beltrami, il quale ha dimostrato (2) che i teoremi della geometria non euclidea si verificano puntualmente per le linee geodetiche delle superficie di curvatura costante negativa, e pei triangoli da esse formati. Egli osservò con tutta ragione che « nella geometria piana il carattere specifico della linea retta non viene esaurito in tutta la sua latitudine perchè, a ben guardare, la retta non è introdotta nelle considerazioni della planimetria che mercè il seguente *postulato:* Facendo combaciare due piani su ciascuno dei quali esiste una retta, basta che le due rette si sovrappongano in due punti perchè riescano sovrapposte in tutta la loro estensione; e questo carattere così circoscritto non è peculiare alle linee rette, ma sussiste per le linee geodetiche delle superficie dianzi indicate rapporto a queste superficie. »

Una siffatta interpretazione della planimetria non euclidea, e quella che il valente professore ha data per la stereometria, sono a mio giudizio luminose. Esse porgono la più soddisfacente spiegazione dell'apparizione di quella quantità indeterminata k, che s'intenderebbe perfettamente se si trattasse delle proprietà del circolo e della sfera, ma difficilmente si giustifica quando si considerano linee e superficie pienamente determinate, anzi *uniche*, come sono le rette e i piani: la quantità k entra a rappresentare la curvatura costante della superficie che si studia in luogo del

---

(1) Tal è la dimostrazione data da Legendre nelle prime edizioni della sua *Geometria*, e quella ch'egli diede poi nella Nota II aggiunta alle ultime edizioni (Parigi, 1827, pag. 224). Tal è pure la dimostrazione di Camillo Minarelli, stampata come appendice al *Corso di matematica elementare* del Brunacci (Veggasi l'edizione di Bologna, 1851). Un compendio di essa fu inserito nelle *Nouvelles Annales de mathémat.* di Parigi, tom. VIII, pag. 313 (anno 1849), e le obbiezioni a cui è soggetta furono ivi indicate nel tom. IX, pag. 37 (1850).

(2) *Saggio d'interpretazione della geometria non euclidea* (Giornale di matematiche, Napoli, 1868, pag. 284-312); *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante* (Annali di matematica, Milano, 1868, pag. 232-255). Cauchy si fece a considerare spazi di n dimensioni in una Memoria *Sur les lieux analytiques* (v. *Comptes rendus*, 1847, tom. XXIV, pag. 885).

piano, e che dal professore Beltrami è chiamata *pseudosferica*. E si deve concludere, che non facendosi uso se non delle proprietà che le linee rette e i piani hanno comuni con le superficie pseudosferiche e con le loro geodetiche, si costruisce una geometria dove non si mostrano più le proprietà distintive e caratteristiche delle linee rette e dei piani.

Ma per ottenere queste proprietà distintive sarà egli necessario di ricorrere alla *esperienza*, cioè a misure effettivamente eseguite, oppure di assumere come *postulato* che tali proprietà corrispondono al valore $k=1$, cioè ad un raggio di curvatura infinito? L'asserir ciò sarebbe a mio credere come asserire che per esempio le proprietà della parabola non possano essere stabilite direttamente perchè la parabola è limite d'un'ellisse, il cui asse cresce in infinito restando fissi un vertice ed un fuoco, e si debbano invece desumere dall'esperienza o da una trasformazione delle proprietà dell'ellisse, operata col supporre infinito l'asse, finita la distanza da un vertice ad un fuoco.

Pare che generalmente siasi tenuta come provata l'impossibilità di dimostrare il postulato di Euclide per la sola ragione addotta dal Lobatcheffsky (1), che l'ipotesi contraria guida ad una geometria compiuta senza alcuna contraddizione; ma questo argomento ha perduto ogni valore dopo la teorica esposta dal professore Beltrami, poichè non è meraviglia che non presentino alcuna impossibilità nè contraddizione le proprietà delle superficie pseudosferiche. Del resto la ragione indicata non fu riputata sufficiente da Giovanni Bolyai, perocchè, dopo aver dimostrato tutti quei teoremi che dimostrò anche Lobatcheffsky, non ne conchiude già l'impossibilità di decidere quale sia il vero tra il sistema euclideo e gli infiniti sistemi non euclidei, ma riserva ad una più propizia occasione il dimostrare tale impossibilità (2).

Non mi è noto se abbia egli poi mandato ad effetto questo pensiero, e se la dimostrazione da lui promessa (supposto che l'abbia scritta) sia stata pubblicata. Certo sarebbe importante di conoscerla.

---

(1) *Geometrische Untersuchungen*, ecc. alla fine (V. *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, tom. IV, 1866, pag. 120). Veggasi anche alla fine della sua *Pangéométrie* (*Giornale di matem.* diretto dal prof. Battaglini, Napoli, 1867, tom. V, pag. 334).

(2) V. *Giornale di matematiche* del prof. Battaglini, tom. VI, Napoli, 1868, pag. 115.

§ VI.

Si possono dare definizioni precise della linea retta e del piano (1). Tali sono le seguenti, che in sostanza si confondono con quelle del Lobatcheffsky e di Volfango Bolyai (2).

Premessa la spiegazione di ciò che s' intende dicendo che *due distanze sono eguali*, spiegazione data da Bolyai, si può definire il piano come il luogo di tutti i punti da cui sono egualmente distanti due punti fissi; e la linea retta come il luogo di tutti i punti d'un piano da cui sono egualmente distanti due punti fissi del medesimo piano.

Se vuolsi considerare la linea retta senza riguardo ad alcun piano che la contenga, si potrà definire come il luogo dei punti da cui sono egualmente distanti tre punti fissi egualmente distanti tra loro. Si può anche definirla dicendo che un punto M è in linea retta con due altri punti A e B, quando la distanza AB di questi eguaglia la somma o la differenza delle distanze AM, BM degli stessi due punti dal primo.

Queste definizioni non inchiudono condizioni superflue, nè impossibili, ed esprimono proprietà che non possono appartenere ad altre linee o superficie.

I lodati autori Baltzer e Hoüel presentano il piano come generato da una linea retta che si move passando per un punto fisso e per una retta fissa; e di più riconoscono come assioma che se una retta ha due punti sopra un piano giace tutta in esso (3). A me pare che queste nozioni, se possono ammettersi nella geometria euclidea, siano incompatibili colla non euclidea. Imperocchè, tirate due rette DD', EE' pel punto fisso A

(1) Le prime nozioni della geometria sono state discusse in molte opere anche recenti, fra le quali ricorderò soltanto queste tre: *Recherches sur les éléments de la géométrie*, par J. M. de Tilly (Bruxelles e Parigi, 1860); *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*, par J. M. C. Duhamel, *deuxième partie* (Parigi, 1866); *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire, etc.*, par J. Hoüel (Parigi, 1867).

(2) V. *Giornale di Matematiche* del prof. Battaglini, 1867, pag. 274; Hoüel, *Essai critique, etc.*, *Note III*, pag. 60-63.

(3) Baltzer, *Elementi di matematica, parte 4ª, planimetria* (Genova, 1867), pag. 11 e 12; Hoüel, *Essai critique, etc.*, pag. 39 e 40.

(fig. 10) nel piano che contiene la retta fissa BC, anche gli spazi angolari DAE', $D'AE$ dovranno trovarsi nel medesimo piano, e quindi ogni retta HK, condotta per A entro questi spazi, sarà una delle posizioni della generatrice, e dovrà quindi incontrare BC, il che esclude la geometria immaginaria. Nella geometria euclidea si avrebbe soltanto una linea (la parallela a BC) che non sembrerebbe contenuta nella superficie così generata, ma si suol dire che due parallele s'incontrano a distanza infinita, mentre nella geometria immaginaria si hanno due rette DD' ed EE', parallele (o assintote) alla BC, e ogni altra retta HK, tirata per A e compresa fra quelle, non può incontrare la BC, e di più i suoi punti tanto al di sopra, quanto al di sotto di A, si allontanano indefinitamente dalla BC, sicchè non avvi incontro a distanza finita, nè infinita.

Devesi anche avvertire che, presi sul piano due punti F, G in prossimità delle rette AD, AE', ma fuori dell'angolo DAE', la retta FG che li congiunge sarà tutta nel medesimo piano per l'*assioma del piano* che si è ammesso; quindi i punti di essa situati fra AD e AE' saranno pure sulla generatrice in alcune delle sue posizioni, e così la generatrice incontrerà la BC, quantunque passi entro l'angolo DAE'.

Si vede pertanto che la riferita generazione del piano inchiude il postulato d' Euclide.

Ne risulta eziandio il postulato di Legendre, cioè che per un punto F dato nel piano d'un angolo ACB si può condurre una retta che incontri ambedue i lati dell'angolo. Poichè potendosi il piano generare da una retta che passi per un punto fisso A preso sul lato AC, e che incontri l'altro lato BC, la retta AF sarà una delle posizioni della generatrice e però incontrerà BC. Con questo postulato Legendre dimostrava rigorosamente la teorica euclidea delle parallele [1].

Si potrebbe anche definire il piano pel luogo delle posizioni d'una retta che scorra sui lati d'un angolo ACB. Ma questa implicherebbe pure il postulato di Legendre e però quello d'Euclide: poichè ogni punto F del piano deve trovarsi sulla generatrice in una delle sue posizioni, e quindi per esso deve passare una retta AB che seghi entrambi i lati dell'angolo ACB.

---

(1) *Eléments de géométrie*, 12e *édition* (Parigi, 1827), *Note II*, pag. 224-225.

Il Crelle nel tomo XLV del suo *Giornale* dava la stessa generazione del piano alla quale si appigliarono i signori Baltzer e Hoüel, ma faceva menzione d'un'altra definizione che attribuiva a Fourier e che si riduce alla indicata di Bolyai, cioè che il piano è il luogo di tutte le perpendicolari ad una retta fissa condotte per un punto di essa. Egli pretendeva dimostrare l'accordo delle due definizioni, e se lo avesse fatto avrebbe anche dimostrata tutta la geometria euclidea, ma a mio avviso dimostrò soltanto che tutti i punti d'un piano definito nella prima maniera appartengono ad un piano generato secondo la definizione di Fourier, non dimostrò che per converso il piano definito in quella prima maniera contiene tutti i punti del piano di Fourier. La definizione di Fourier è stata adottata dal Duhamel che ha cercato dedurne la proprietà fondamentale del piano, ma egli ammette l'impossibilità di dedurne il postulato d'Euclide (opera citata, pag. 12-16 e 337).

§ VII.

Altri tentarono dimostrare questo postulato fondandosi o nel principio d'omogeneità, o nella considerazione di spazi infiniti, o nel supposto che la somma degli angoli d'un triangolo rettilineo non possa discendere oltre un limite fisso. La geometria immaginaria offre il vantaggio di mettere in chiaro la insufficienza di queste dimostrazioni: cosicchè in conclusione, sebbene essa non risolva a mio avviso la questione delle parallele, è utile tuttavia per indicare precisamente il vero punto della difficoltà.

Daviet de Foncenex (ovvero Lagrange secondo la testimonianza di Delambre), come fu il primo a far uso del principio d'omogeneità e dell'algoritmo delle funzioni nelle questioni di meccanica, fu anche il primo che indicasse l'applicazione dello stesso metodo alle proposizioni della geometria, e specialmente ai teoremi circa le figure simili, ammessi i quali la teorica euclidea delle parallele è stabilita (1). Le dimostrazioni di Legendre

(1) *Miscell. taurin.*, tom. II, pag. 306, nota. Intorno alle dimostrazioni tratte dal principio d'omogeneità si possono vedere gli *Annali* del Gergonne, tom. X, pag. 161-183; tom. XVI, pag. 259-260; tom. XIX, pag. 20-25.

vennero molto tempo dopo; e più recentemente il sig. Bouniakowsky ha data una dimostrazione più semplice, ma dedotta anch'essa dal principio d'omogeneità. [1]. Ora dalla geometria immaginaria si appalesa la possibilità dell'introduzione d'una costante k dipendente dall'unità di misura scelta per le lunghezze, come nella geometria sferica s'introduce il raggio della sfera, in modo che tutte le lunghezze considerate siano ridotte a semplici numeri, e le equazioni divengano per se stesse omogenee. Così apparisce che da un'equazione fra i tre angoli e un lato non è più lecito pel solo principio d'omogeneità eliminare il lato.

Il signor Bouniakowsky suppone un triangolo rettangolo isoscele, e chiamando b l'ipotenusa, a un cateto, e avvertendo che b è determinato col solo a e omogeneo ad a, conchiude $b = m a$, ove m è un numero costante. Questa relazione, se fosse esattamente dimostrata, basterebbe (V. § III); ma non è dimostrata, poichè senza ledere il principio d'omogeneità si ha nella geometria immaginaria l'altra relazione $\mathrm{Cos.}^2 a = \mathrm{Cos.}\, b$.

Parimente nella geometria immaginaria s'incontrano triangoli in cui può essere piccola quanto si vuole la somma degli angoli [2].

Quanto al paragone degli spazi infiniti, senza ricorrere alla geometria immaginaria, si può facilmente conoscere che non è un solido fondamento della teorica delle parallele. Se per esempio una curva piana ABC (fig. 11) ha un assintoto rettilineo DE, e supposta AD perpendicolare a DE, e AF perpendicolare alla AD, l'arco ABC è tutto compreso nell'angolo retto DAF, lo spazio indefinito $GABC$ sarà tutto compreso in questo angolo

---

(1) Legendre nella Nota II alla sua *Geometria* (ediz. cit., pag. 225-231); Bouniakowsky nei *Bull. de l'Acad. Impériale des Sciences de St-Pétersb.*, tom. V, pag. 387-393 (22 agosto 1862). — Il medesimo Bouniakowsky aveva nel 1844 confutate le dimostrazioni del Bertrand e del Legendre (Memorie della stessa Accademia, 6ª serie, tom. IV, pag. 87 e 207).

(2) Il signor De Tilly, nelle sue *Recherches sur les éléments*, ecc., suppone che l'angolo di un triangolo equilatero non possa esser minore d'un certo angolo finito M: cerca eziandio di provare questo postulato, ma con poca fortuna. Nel *Philosoph. Magazine*, anno 1844, vol. XXV, pag. 207, trovo che il signor Meikle riduceva la teorica delle parallele a questo postulato: in nessun triangolo la somma degli angoli può esser minore d'un certo limite; egli provava rigorosamente: 1° che i triangoli le cui aree sono eguali hanno eguale la somma dei loro angoli; 2° che se in un triangolo la somma degli angoli differisce da due angoli retti, ne differirà in ogni triangolo, e la differenza sarà sempre proporzionale all'area.

retto, e nel medesimo tempo comprenderà l'altro spazio GDE formante pure un angolo retto: essendo gli angoli retti tutti eguali, ciò si dovrebbe dire assurdo, e quindi l'arco ABC dovrebbe incontrare (a distanza finita) la retta DE come si afferma che l'obbliqua incontra la perpendicolare, cosicchè nessuna curva avrebbe assintoti.

Per ciò si devono sbandire dalla geometria le proposizioni del Bertrand sopra gli *angoli* e le *strisce* paragonati all'intero piano, le quali del resto, quando si riconoscono inette a provare il postulato d'Euclide, si manifestano come del tutto inutili.

Giova qui riferire dagli *Annali* del Gergonne (tom. XVI, pag. 53-54) questo giustissimo precetto: « une proposition sur des quantités infinies ne » saurait mériter notre assentiment, qu'autant qu'elle est réductible à une » proposition sur des limites de quantités finies variables. Si donc on veut » discuter un raisonnement qui porte sur des quantités infinies, on com- » mencera d'abord par chercher à le traduir en un raisonnement sur des » limites. » Ma possiamo recare a conferma anche l'opinione più autorevole di Gauss: « je commencerai (scriveva egli in una lettera del 12 luglio 1831 » al Barone di Zach) par protester contre l'usage que vous faites d'une » grandeur infinie, en la traitant comme une quantité *déterminée*, ce qui » n'est jamais permis en mathématiques. L'infini n'est qu'une façon de » parler, parce qu'il s'agit en réalité de *limites* dont certains rapports » peuvent approcher autant que l'on voudra, tandis que d'autres sont » susceptibles de croître indéfiniment [1]. » Lo stesso gran Matematico altrove consigliava di non trattare coll'analisi la quantità infinita senza usare molta cautela: « Hocce exemplum monstrat quanta circumspicientia » opus sit in tractandis quantitatibus infinitis, quae in ratiociniis analyticis » nostro judicio eatenus tantum sunt admittendae quatenus ad theoriam » limitum reduci possunt » (*Disquis. circa seriem infin.*, art. 36).

---

(1) Mi valgo della traduzione del signor Houel (*Mém. de la Société des Sciences phys. et nat. de Bordeaux*, tom. IV, pag. 125-126). Intorno all'uso degli spazi infiniti in geometria può vedersi una Nota del signor Lamarle *Sur l'emploi de l'infini dans l'enseignement des mathématiques élémentaires* (*Mém. de l'Acad. royale de Belgique*, tom. XXVII). Possono anche consultarsi gli *Annali* del Gergonne, tom. XVI, pag. 46-54 e 258-259, e gli *Annali* del Terquem, 1844, pag. 381; 1846, pag. 232-234.

Tali ammonimenti di GAUSS non furono sempre seguiti, notandosi oggidì una tendenza al rigore in certi argomenti, in altri alla rilassatezza (1). A cagion d'esempio i matematici del nostro tempo non istanno contenti al definire la lunghezza d'un arco di curva come il limite d'una spezzata iscritta, ma si tengono obbligati a dimostrare che questo limite è finito e unico (2). Per contrario vediamo assumersi talvolta una quantità come limite d'un'altra, non solo senza dimostrare che la seconda quantità ha un limite, ma anche quando è evidente che non v'è alcun limite. Così affermasi non di rado che la linea retta è un circolo di raggio infinito e il piano è una sfera di raggio infinito, donde poi si deduce che la linea retta è una linea rientrante e il piano è una superficie rientrante, cose che ripugnano totalmente alla nozione che abbiamo della retta e del piano; e v'ha chi non si sgomenta ma si compiace anzi dell'assurdo di ammettere che due persone camminando per linea retta in direzione opposta debbano incontrarsi, mentre si allontanano sempre più l'una dall'altra, e che una linea rientrante possa esser unica fra due punti e il più breve cammino fra essi. Certamente, quanto più cresce il raggio, tanto più diminuisce la curvatura, e la tangente e il piano tangente tendono a confondersi colla circonferenza e colla superficie sferica in prossimità del punto di contatto; ma le tangenti e i piani tangenti di tutto il circolo e di tutta la sfera

---

(1) Un insigne promotore della geometria pura, il PONCELET, raccomandava la massima *Allez en avant et la foi vous viendra* (*Applic. d'anal. et de géom.*, tom. II, pag. 598, Parigi, 1864); mentre il DUHAMEL, *geometra algebrista*, la condanna energicamente e vuole che sia proscritta dalle scuole (*Des méthodes, etc.*, 2e partie, pag. XIV, Parigi, 1866).

(2) Noterò di passaggio a questo proposito che in alcuni trattati si è pur cercato di dimostrare l'esistenza d'una tangente per ogni curva, ossia d'una derivata per ogni funzione; ma si è provato soltanto che il rapporto tra gl'incrementi della funzione e della variabile non può costantemente tendere verso zero, nè verso l'infinito, senza escludere che vada oscillando fra diversi limiti. Il signor LAMARLE ha studiato anche questo caso (*Etude approfondie sur les deux équat. fondam.*, ecc. V. *Mém. Acad. royale de Belgique*, tom. XXIX); ma la sua dimostrazione non potrebbe entrare negli elementi. Altri ammettono quella esistenza in via di postulato. Il miglior partito mi sembra quello di dimostrare l'esistenza della derivata particolarmente per ogni funzione o classe di funzioni nello stesso tempo in cui si dimostra la regola per formare la medesima derivata: considerando così successivamente nell'ordine consueto le funzioni analitiche, gli archi delle curve, le aree, ecc., e per la meccanica le velocità e le accelerazioni.

hanno infinite direzioni diverse che non tendono punto a confondersi mentre il raggio cresce in infinito, anzi quelli che son condotti pei termini d'un medesimo diametro si allontanano indefinitamente in luogo di avvicinarsi: e però il circolo e la sfera non tendono verso alcun limite fisso. Anche la parabola si può risguardare come limite d'un'ellisse, ma solo in un certo senso, nè si asserirà rientrante una curva i cui rami divergono indefinitamente [1].

§ VIII.

Quantunque l'impossibilità di provare rigorosamente coi principii della geometria il postulato d'Euclide non sembri posta fuori di controversia, tuttavia l'inutilità degli sforzi fatti già da molti anche valentissimi geometri, e l'autorità che deve tenersi in gran conto di Gauss e Bolyai, rendono molto inverosimile che alcuno giunga a trovare una tal dimostrazione. Si deve anche considerare che le proprietà distintive della linea retta e del piano non sembrano potersi abbracciare in tutta la loro estensione fuorchè nella geometria dello spazio: ora, secondo il metodo consueto di esporre la geometria, si comincia dalla geometria piana, e si fonda tutta la geometria dello spazio sopra le proprietà dei triangoli rettilinei dimostrate nella geometria piana; s'intende così che non si esauriscono tutte quelle proprietà dalle quali dovrebbe scaturire il postulato d'Euclide, e d'altra parte sembra difficile che si possa tenere un altro metodo il quale

(1) Vedi, su questo particolare, Duhamel, *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*, 3e *partie*, pag. 250-255 (Parigi, 1868). I geometri furono condotti a proposizioni sui punti e sugli elementi collocati a distanza infinita usando il metodo della trasformazione delle figure, ma le espressero poi in una forma troppo assoluta e generale, senza più rammentare la trasformazione di figura con cui furono trovate, mentre potrebbero non più sussistere per una trasformazione diversa. Così per mezzo dell'inversione si possono far coincidere tutti i punti collocati a distanza infinita, e si ammette invece che coincidono solamente quelli d'una stessa retta. Tolgo queste riflessioni da un discorso che il sig. ing. Donato Levi lesse pel suo accoglimento qual dottore aggregato della R. Università di Torino (Tip. Foa, 1867), e a lui mi unisco nell'augurare « che quelli i quali con tanto ardore dedicano i loro studi al progresso della geometria, vogliano proporsi per qualche tempo un còmpito apparentemente modesto, ma certamente utilissimo, quello cioè di ridurre i ragionamenti della geometria a quel rigore di forma che dai matematici non deve essere abbandonato giammai. »

guidi meglio allo scopo. Questo è per avventura il senso che deve attribuirsi alle seguenti parole d'Ampère (*Essai sur la phil.*, etc., tom. I, pag. 67): « on sait que le théorème fondamental de la théorie des parallèles, lorsqu'on les considère comme existant réellement dans l'espace à trois » dimensions, ne peut être rigoureusement démontré. C'est que ce théorème » est fondé sur des propriétés de l'espace qui supposent les trois di- » mensions et l'infinité de l'étendue. »

Forse da siffatte difficoltà riescono esenti le dimostrazioni tratte dalla statica e dalla cinematica che sono state esposte al § III, e quelle del signor Lamarle ivi menzionate, perchè le linee e la superficie in cui s'intendono operare le forze, o avvenire il moto, non possono essere se non le rette e il piano. In questo caso sarebbe ad esaminarsi se potesse convenire d'introdurre una di quelle dimostrazioni negli elementi della geometria, premettendo le opportune nozioni intorno alle forze o al moto: e per verità la meccanica razionale è come la geometria fondata tutta sul ragionamento e sugli assiomi, e la considerazione del moto non fu mai estranea alla geometria, dove già è accettata per dichiarare la generazione di molte classi di linee e superficie curve, e dove già si ammette il moto composto, per esempio nella generazione della spirale d'Archimede e della cicloide. Si aggiunga che eziandio nelle matematiche superiori furono introdotte le velocità da Newton, e che non ha guari il signor Lamarle si giovò della cinematica per esporne i principii nel suo *Exposé géométrique du calcul différentiel et intégral précédé de la cinématique du point, de la droite et du plan* (*Mém. cour. et autres de l'Acad. roy. de Belgique*, (tom. XI et XV, in 8°, 1861 e 1863).

Ma posto che non si abbiano per abbastanza evidenti le accennate dimostrazioni, ovvero che non si reputi opportuno di premettere all'insegnamento della geometria alcune nozioni di meccanica e manchi ogni via di dimostrare rigorosamente la dottrina euclidea delle parallele, si dovrà ricorrere ad un postulato come si fa nella meccanica razionale, ovvero alle esperienze come si fa nella fisica? Entrambi i partiti sembrano ammessibili purchè la proposizione che si assume per postulato sia più chiara ed evidente di quelle di cui si reca un'apposita e formale dimostrazione, e le esperienze che si citano siano bene specificate, si possano ripetere

all'uopo, e siano tali da produrre una piena persuasione. Ma sperienze di questa fatta, quali cioè servono alla fisica e sono descritte nei trattati di fisica, non so che siano state indicate per la geometria; trovo bensì la seguente allusione del Lobatcheffsky nel *Giornale* di Crelle (tom. XVII, pag. 303): « J'ai prouvé ailleurs, en m'appuyant sur quelques observa-
» tions astronomiques, que dans un triangle dont les côtés sont de la même
» grandeur à-peu-près que la distance de la terre au soleil, la somme
» des angles ne peut jamais différer de deux angles droits d'une quantité
» qui puisse surpasser $0'',0003$ en secondes sexagésimales. Or, cette
» différence doit être d'autant moindre que les côtés d'un triangle sont
» plus petits. » La Memoria a cui qui si accenna dovrebbe essere tradotta in una lingua più diffusa, perchè gl'intelligenti vedessero quali strumenti hanno potuto dare un'approssimazione così grande, e se o come la loro teorica dipenda dalle parallele. Ad ogni modo parmi che le osservazioni astronomiche possano bensì utilmente invocarsi per determinare gli scienziati a scegliere fra le due geometrie ugualmente possibili in astratto, e forse sono da interpretarsi in questo significato le parole di Gauss e di Lobatcheffsky, ma che non sia conveniente fondare sopra le osservazioni astronomiche un trattato elementare di geometria.

Resta dunque soltanto la via dei postulati, alla quale si rivolse Euclide, senza che il suo postulato adempia le condizioni dianzi espresse e domandate molti anni sono da un savio geometra negli Annali del Gergonne (1824-25, tom. XV, pag. 83): « Ce qu'on pourrait faire de
» mieux, serait, ce nous semble, d'admettre quelque nouvel axiome bien
» clair et bien fécond, et de le choisir tel qu'on pût s'en servir pour
» rendre à la fois les traités élémentaires plus courts et plus métho-
» diques » La proposizione ammessa da Euclide come postulato non solo non è uno di quei « convincimenti che divengono per noi evidenze, assiomi, cose che noi ammettiamo senza discussione nè dubbio [1] », ma neppure è più semplice o più evidente d'altre che Euclide ha credute bisognevoli d'una vera dimostrazione, anzi presuppone nozioni e confronti complessi senza di cui non può tampoco essere intesa. Ora

(1) Bellavitis, Nona Rivista di giornali, 2ª parte, pag. 49.

il dimostrare certe proposizioni, mentre si assumono per evidenti certe altre più difficili ad intendersi, sembra più appropriato ad una *ricreazione matematica* che ad una sposizione scientifica. Le stesse cose vogliońsi applicare all'altro postulato che si proporrebbe dai fautori della geometria immaginaria, cioè che vi siano triangoli ne' quali la somma degli angoli non è minore di due retti.

Credo sia pure da rigettarsi quel modo, che si direbbe furtivo, di presupporre un postulato col mezzo di certe definizioni del piano, delle quali si è parlato al § VI.

Ma una proposizione dimostrata nel § IV ci palesa che per escludere la geometria immaginaria basta assumere il seguente postulato:

« Due linee rette non possono accostarsi indefinitamente senza concorrere. S'intenderà misurata la distanza dalla più breve linea retta che si possa condurre da un punto d'una delle due rette date all'altra. »

Questo postulato presuppone soltanto la nozione della linea retta, non quella del piano, non quella dell'angolo, e non richiede che si paragoni con due angoli retti la somma di più angoli. Può esprimersi al principio del trattato, e la sua verità sembra dover essere facilmente riconosciuta come evidente.

Si potrebbe anche considerare la proprietà qui mentovata come parte della definizione della linea retta, dopo averne espressa un'altra proprietà per cui la linea retta non si distingua dalle geodetiche delle superficie pseudosferiche; e dire:

« È *linea retta* quella che riunisce le seguenti proprietà:

1° Che ogni porzione di essa può applicarsi esattamente sopra un'altra porzione quando queste porzioni hanno due punti comuni (V. Hoüel, *Essai critique* etc., pag. 39).

2° Che una linea retta incontra ogni altra linea retta se la sua distanza da questa decresce indefinitamente. »

Per facilitare le dimostrazioni sintetiche (1) si potrà eziandio esprimere la seconda proprietà, ossia il postulato, in quest'altro modo:

(1) Non è già ch'io abborra dall'unione dell'analisi colla geometria, perchè anzi credo nocivo ai progressi d'entrambe il porre tra l'una e l'altra una barriera. Lobatcheffsky e Bolyai hanno frammisti i calcoli analitici alle dimostrazioni geometriche. Amyot, Baltzer, ecc. fanno

« Se la distanza di due linee rette va sempre più diminuendo, esse concorreranno. »

Questa proprietà non permetterà di confondere la retta colle geodetiche dianzi accennate, ed escluderà la geometria immaginaria, in cui si dimostra anche sinteticamente che una retta si accosta sempre più alla sua parallela (V. Lobatcheffsky, *Untersuchungen*, ecc., § 24; *Mém. de la Société des sciences de Bordeaux*, tom. IV, 1866, pag. 97).

Quanto alla *distanza* di cui si fa menzione in queste proposizioni, parmi che non solo l'eguaglianza di due distanze, ma eziandio una distanza maggiore o minore d'un'altra si possa definire senza determinare la linea che la misura (V. Hoüel, *Essai critique, etc.*, p. 60); poichè dopo aver definita la sfera si può dire che i punti interni alla sfera sono meno distanti e i punti esterni più distanti dal centro che i punti della superficie sferica.

Così per mezzo di definizione o di postulato sarà rimossa ogni somiglianza della linea retta con un'iperbola fra gli assintoti, ciò che Legendre domandava da molti anni; e ne discenderà facilmente tutta la geometria euclidea.

Dal concetto di *distanza* si potrà dedurre altresì che la linea retta è la più breve tra due punti, senza ricorrere, come alcuno ha stimato necessario, agl'infiniti e agl'infinitesimi (1). La dimostrazione è simile a quella di Blanchet e Amyot, che si suole ammettere come sufficiente per determinare la via più breve sulla sfera. Preso un punto M sulla retta AB e dai centri A e B con raggi AM e BM, si descrivono due circoli (se si vuol paragonare AB soltanto alle linee d'un piano), oppure due sfere.

---

uso dell'aritmetica (assai più che Legendre). Ma di più lo stesso Euclide ha collocato alcuni *libri aritmetici* ne' suoi *Elementi di geometria*; e Leonardo Pisano inculcava espressamente il mutuo sussidio della geometria e dell'aritmetica dicendo in principio del *Liber Abbaci: arithmetica et geometriae scientia sunt connexae et suffragatoriae sibi ad invicem.* Tale fu pure l'opinione di Lagrange, approvata persino dal Poncelet (*Applications etc.*, tom. II, pag. 587): « Tant que l'algèbre et la géométrie ont été séparées, leurs progrès ont été lents » et leurs usages bornés; mais lorsque ces deux sciences se sont réunies, elle se sont prêté » des forces mutuelles et ont marché ensemble d'un pas rapide vers la perfection. »

(1) De Tilly, op. cit., pag. 31.

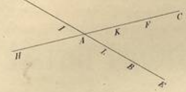

Fig. 1.

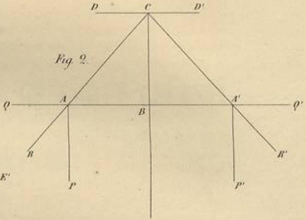

Fig. 2.

Fig. 3.

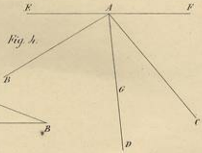

Fig. 4.

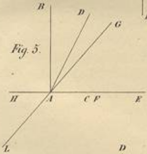

Fig. 5.

Fig. 6.

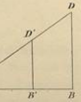

Fig. 7.

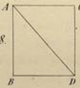

Fig. 8.

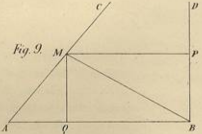

Fig. 9.

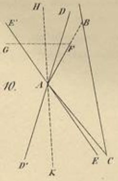

Fig. 10.

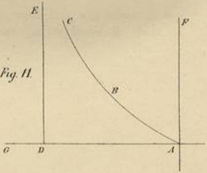

Fig. 11.

Lit. Rotta, Firenze.

La distanza più breve dal punto A al punto B si comporrà della distanza più breve fra le due circonferenze o superficie sferiche, e di quelle dalle stesse circonferenze o superficie ai loro centri A e B: quindi essa passerà per M che è il solo punto comune alle due circonferenze o superficie, mentre dal centro alla circonferenza o alla superficie sferica la distanza più breve è sempre la stessa in tutte le direzioni, potendo generarsi quella circonferenza o superficie col far rotare la distanza più breve intorno al centro.