SULLE

SUPERFICIE CHE HANNO UN SISTEMA DI LINEE

DI CURVATURA SFERICHE

DI

ULISSE DINI

1. Le superficie aventi un sistema di linee di curvatura sferiche sono state studiate da vari distinti geometri, ma finora non sono state trovate le loro equazioni sotto forma finita. Ora io darò qui un teorema che fa dipendere la ricerca di queste superficie da quella di certe funzioni di una sola variabile, e di certi sistemi di linee ortogonali della sfera, e questo teorema potrà essere utile per la ricerca se non di tutte, almeno di alcune classi di queste superficie.

Supponiamo che in una superficie le linee di curvatura v siano sferiche, e siano (V_1, V_2, V_3) le coordinate (funzioni di v) del centro C della sfera su cui è tracciata una linea v. Sia M un punto di questa linea, MN la normale alla superficie. Per la proprietà caratteristica delle superficie le cui linee di curvatura v sono sferiche, l'angolo CMN sarà costante lungo una stessa linea v; CM essendo pure costante lungo la stessa linea, ne viene che la sua proiezione MP su MN sarà pure costante per questa linea, e lo stesso accadrà di CP, e si avrà:

$$MP = \alpha\,, \qquad CP = \beta\,,$$

essendo α e β due funzioni della sola v.

Ora, il piano condotto per la normale e pel centro della sfera, è perpendicolare alla linea v, quindi la linea di curvatura del sistema u, che passa per M, ha la sua tangente in questo piano e parallela a CP; e perciò i coseni X_1, Y_1, Z_1 degli angoli di CP coi tre assi saranno, all' infuori del segno, quelli della linea u sulla superficie o sulla sfera di raggio uno, su cui si può immaginare fatta la rappresentazione della superficie col solito metodo di GAUSS, e si avrà:

$$X_1 = \pm \frac{\frac{dX}{dv}}{\sqrt{G'}} = \pm \frac{\frac{dx}{dv}}{\sqrt{G}}\,, \quad Y_1 = \pm \frac{\frac{dY}{dv}}{\sqrt{G'}} = \pm \frac{\frac{dy}{dv}}{\sqrt{G}}\,, \quad Z_1 = \pm \frac{\frac{dZ}{dv}}{\sqrt{G'}} = \pm \frac{\frac{dz}{dv}}{\sqrt{G}}\,,$$

ritenendo che x, y, z siano le coordinate di un punto (u, v) della nostra superficie, X, Y, Z i coseni degli angoli che la normale alla superficie in quel punto fa coi tre assi, e

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2\,,$$
$$ds'^2 = E'\,du^2 + G'\,dv^2\,,$$

i quadrati respettivi dell'elemento lineare della superficie e della sua rappresentazione sferica.

Se dunque si proiettano sui tre assi le rette CP, PM, CM, e si suppone che β sia affetto dal segno conveniente, si vede che le equazioni delle superficie nelle quali le linee di curvatura v sono sferiche saranno le seguenti:

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} x &= \alpha X + \beta \frac{\frac{dX}{dv}}{\sqrt{G'}} + V_1\,, \\ y &= \alpha Y + \beta \frac{\frac{dY}{dv}}{\sqrt{G'}} + V_2\,, \\ z &= \alpha Z + \beta \frac{\frac{dZ}{dv}}{\sqrt{G'}} + V_3\,; \end{aligned} \right.$$

ovvero quelle che si dedurrebbero da queste ponendovi per $\dfrac{\frac{dX}{dv}}{\sqrt{G'}}, \ldots$ respettivamente $\dfrac{\frac{dx}{dv}}{\sqrt{G}}, \ldots\ldots$

Viceversa, considerando la superficie rappresentata dalle equazioni (1), ove X, Y, Z sono funzioni di due parametri indipendenti u e v, $\sqrt{G'}=\Sigma\left(\dfrac{dX}{dv}\right)^2$, e α, β, V_1, V_2, V_3 sono funzioni di v soltanto, se X, Y, Z sono i coseni degli angoli che la normale a questa superficie fa coi tre assi, si vede che le linee v di essa saranno sferiche, poichè si avrà:

$$(x-V_1)^2+(y-V_2)^2+(z-V_3)^2=\alpha^2+\beta^2\,;$$

e inoltre, osservando che si ha l'equazione:

$$X\frac{x-V_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+Y\frac{y-V_2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+Z\frac{z-V_3}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,,$$

per un teorema noto, si vede che le linee v saranno anche di curvatura; e con ciò si rende manifesto che per trovare le superficie, le cui linee di curvatura v sono sferiche, basta trovare quelle le cui equazioni possono porsi sotto la forma (1), ove X, Y, Z sono i coseni degli angoli della normale coi tre assi ecc.

2. Ciò posto, vediamo quali relazioni devono esistere fra le funzioni X, Y, Z, α, β, V_1, V_2, V_3, affinchè le quantità X, Y, Z (che ora riguarderemo come coordinate dei punti di una sfera di raggio uno) siano effettivamente i coseni degli angoli della normale alla superficie (1) coi tre assi.

Osserviamo perciò che le (1) danno derivando:

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{dx}{du}&=\alpha\frac{dX}{du}+\beta\frac{\frac{d^2X}{du\,dv}}{\sqrt{G'}}+\beta\frac{dX}{dv}\frac{d\frac{1}{\sqrt{G'}}}{dv}\,,\\ \frac{dx}{dv}&=\left(\alpha+\frac{\beta'}{\sqrt{G'}}+\beta\frac{d\frac{1}{\sqrt{G'}}}{dv}\right)\frac{dX}{dv}+\alpha' X+\beta\frac{\frac{d^2x}{dv^2}}{\sqrt{G'}}+V_1'\,,\end{aligned}\right.$$

e analogamente per y e per z; e affinchè X, Y, Z siano i coseni degli angoli della normale alla superficie (1) coi tre assi, sarà necessario e sufficiente che oltre ad aversi, come supponiamo, $\Sigma X^2 = 1$, si abbia anche:

$$\Sigma X \frac{dx}{du} = 0 \,, \qquad \Sigma X \frac{dx}{dv} = 0 \,.$$

Ora, la prima di queste condizioni è soddisfatta quando si abbia $\Sigma X \frac{d^2 X}{du\,dv} = 0$, cioè quando le linee u e v sulla sfera di raggio uno siano ortogonali, come avevamo supposto da principio, e quindi che sulla superficie (1) anche le u siano di curvatura.

La seconda condizione poi ci dà:

$$\alpha' + \beta \frac{\Sigma X \frac{d^2 X}{dv^2}}{\sqrt{G'}} + \Sigma V_1' X = 0 \,;$$

e poichè dalla $\Sigma X \frac{dX}{dv} = 0$ si trae

$$\Sigma X \frac{d^2 X}{dv^2} = -G' \,;$$

così si vede che la condizione precedente si riduce all'altra:

$$\Sigma V' X + \alpha' = \beta \sqrt{G'} \,,$$

e ora si può dire che quando questa sia soddisfatta, e che le linee u e v sulla solita sfera siano ortogonali, X, Y, Z saranno effettivamente i coseni degli angoli della normale alla superficie (1) coi tre assi, e quindi su essa le linee u e v saranno di curvatura, e le v saranno sferiche.

Per avere anche i raggi di curvatura r_1 e r_2 della superficie relativi alle linee u e v respettivamente, si osserverà che dalla prima delle (2) si ha per le note formole di Rodrigues:

$$(r_2 - \alpha) \frac{dX}{du} - \beta \frac{\frac{d^2 X}{du\,dv}}{\sqrt{G'}} - \beta \frac{dX}{dv} \frac{d \frac{1}{\sqrt{G'}}}{du} = 0 \,,$$

e analogamente per Y e Z.

E moltiplicando questa per $\frac{dX}{du}$, e le altre in Y e Z per $\frac{dY}{du}$, $\frac{dZ}{du}$, e sommando si avrà:

$$(r_2 - \alpha) E' - \frac{\beta}{2} \frac{\frac{dE'}{dv}}{\sqrt{G'}} = 0 \ ;$$

da cui si avrà:

$$r_2 = \alpha + \beta \frac{\frac{d \log \sqrt{E'}}{dv}}{\sqrt{G'}} \, ,$$

pel raggio di curvatura relativo alle linee sferiche.

Per avere r_1 si osserverà che dalla seconda delle (2) si ha:

$$\left(r_1 - \alpha - \frac{\beta'}{\sqrt{G'}} - \beta \frac{d \frac{1}{\sqrt{G'}}}{dv} \right) \frac{dX}{dv} - \alpha' X + \beta \frac{\frac{d^2 X}{dv^2}}{\sqrt{G'}} - V_1' = 0 \ ,$$

e analogamente per Y e Z.

Da queste, moltiplicando per $\frac{dX}{dv}$, $\frac{dY}{dv}$, ... si avrà pel valore di r_1:

$$r_1 = \alpha + \frac{\beta'}{\sqrt{G'}} + \frac{\Sigma V_1' \frac{dX}{dv}}{G'} \, .$$

Dietro questi risultati si può dunque enunciare il seguente teorema: *Essendo u e v un doppio sistema di linee ortogonali sulla sfera di raggio uno, tali che se X, Y, Z sono le coordinate dei punti di questa sfera espresse per u e v, si abbia:*

$$(3) \ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Sigma V_1' X + \alpha' = \beta \sqrt{G'} \, ,$$

ove le V_1, V_2, V_3, α, β sono funzioni della sola v, quelle linee corrisponderanno alle linee di curvatura di una superficie (1), *per la quale le u e v saranno linee di curvatura, e le v saranno sferiche. I raggi di curvatura della superficie relativi alle u e v respettivamente saranno:*

$$(4) \dots\dots\dots\dots \left\{ \begin{aligned} r_1 &= \alpha + \frac{\beta'}{\sqrt{G'}} + \frac{1}{G'} \Sigma V_1' \frac{dX}{dv}, \\ r_2 &= \alpha + \beta \frac{\dfrac{d \log \sqrt{E'}}{dv}}{\sqrt{G'}} . \end{aligned} \right.$$

Viceversa da ciò che precede risulta chiaramente che *quando le linee di curvatura* v *di una superficie sono sferiche, vengono soddisfatte le condizioni precedenti;* e quindi la ricerca delle superficie nelle quali le linee di curvatura v sono sferiche, dipende da quella dei sistemi di linee u e v ortogonali della sfera, per le quali esistono cinque funzioni α, β, V_1, V_2, V_3 di v che soddisfanno alla condizione (3).

3. I risultati precedenti conducono immediatamente al teorema di Picart sulle superficie nelle quali le linee di curvatura v sono situate sopra sfere concentriche.

In questo caso infatti si può supporre $V_1 = V_2 = V_3 = 0$, e β non può essere zero, altrimenti la (3) darebbe $\alpha = \text{cost.}$, e la superficie (1) sarebbe sferica. Dunque in questo caso per la (3) si avrà $G' = \frac{\alpha'}{\beta'} = \varphi(v)$, e quindi si avrà con Picart che: *le* u *saranno geodetiche, e quindi piane, e inoltre i loro piani passeranno tutti pel centro delle sfere*, giacchè avendosi ora:

$$U_1 X + U_2 Y + U_3 Z = 0 ,$$

ove U_1, U_2, U_3 sono certe funzioni di u, se ne deduce:

$$U_1 \frac{dX}{dv} + U_2 \frac{dY}{dv} + U_3 \frac{dZ}{dv} = 0 ,$$

e quindi per le (1) si ha:

$$U_1 x + U_2 y + U_3 z = 0 .$$

4. Inoltre colle formole precedenti si può vedere che: *queste superficie che hanno un sistema di linee di curvatura sferiche, e situate su* *sfere concentriche, sono le sole, oltre a quelle di rivoluzione, che abbiano un sistema di linee di curvatura geodetiche e le altre sferiche.*

Se infatti le linee u sono geodetiche e le v sono sferiche, sarà $G'=\psi^2(v)$, e quindi la relazione (3) diverrà:

$$V_1' X + V_2' Y + V_3' Z = \beta\psi(v) - \alpha',$$

e perciò o sarà $V_1 = \text{cost.}$, $V_2 = \text{cost.}$, $V_3 = \text{cost.}$, e le sfere che contengono le linee v sono concentriche, e saremo nel caso precedente, o altrimenti anche le linee v saranno piane, e allora la superficie sarà di rivoluzione, giacchè le linee v essendo piane e sferiche, saranno circolari, e saranno inoltre situate in piani paralleli perchè le u sono geodetiche.

5. Per questi risultati è facilissimo di trovare le equazioni in termini finiti delle superficie in cui le linee di curvatura di un sistema sono situate su sfere concentriche, o, se vuolsi, di quelle in cui le linee u sono geodetiche e le v sono sferiche.

Infatti, i valori generali dei coseni X, Y, Z essendo le u geodetiche, sono (*):

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} X = \lambda_1 \cos v + \mu_1 \operatorname{sen} v\,, \\ Y = \lambda_2 \cos v + \mu_2 \operatorname{sen} v\,, \\ Z = \lambda_3 \cos v + \mu_3 \operatorname{sen} v\,, \end{cases}$$

ove le λ e μ sono funzioni di v tali che si abbia:

$$\Sigma\lambda_1^2 = 1\,, \qquad \Sigma\mu_1^2 = 1\,, \qquad \Sigma\lambda_1\mu_1 = 0\,, \qquad \Sigma\lambda_1'\mu_1 = 0\,.$$

Queste formole danno $G' = 1$, e poichè le v devono essere sferiche e concentriche, così prendendo $V_1 = V_2 = V_3 = 0$, bisogna prendere $\alpha' = \beta$ per soddisfare alla (3), e per questo, servendosi del teorema del § 2 della Memoria citata, si trova subito che le equazioni delle superficie in discorso sono le seguenti:

(*) Vedasi la mia Memoria *Ricerche sopra la teorica delle superficie* in questo Vol., § 34.

$$(6) \ldots \begin{cases} x = \alpha(\lambda_1 \cos v + \mu_1 \operatorname{sen} v) - \alpha'(\lambda_1 \operatorname{sen} v - \mu_1 \cos v) \,, \\ y = \alpha(\lambda_2 \cos v + \mu_2 \operatorname{sen} v) - \alpha'(\lambda_2 \operatorname{sen} v - \mu_2 \cos v) \,, \\ z = \alpha(\lambda_3 \cos v + \mu_3 \operatorname{sen} v) - \alpha'(\lambda_3 \operatorname{sen} v - \mu_3 \cos v) \,. \end{cases}$$

I raggi di curvatura di queste superficie saranno per le (4):

$$(6) \begin{cases} r_1 = \alpha + \alpha'' \,, \\ r_2 = \alpha + \alpha' \dfrac{d}{dv} \left\{ \log \sqrt{\Sigma \lambda_1'^2 \cos^2 v + 2 \Sigma \lambda_1' \mu_1' \cos v \operatorname{sen} v + \Sigma \mu_1'^2 \operatorname{sen}^2 v} \right\} . \end{cases}$$

6. Osserviamo ora che alla condizione (3) può sostituirsi la seconda delle (4) purchè le u e v siano le linee di curvatura, giacchè se la superficie è a linee di curvatura v sferiche, si avrà la seconda delle (4), e viceversa, se le u e v sono linee di curvatura, e il raggio di curvatura r_2 relativo alle linee v è dato dalla seconda delle (4), queste linee v saranno sferiche, giacchè essendo X, Y, Z i coseni della normale, se si pone:

$$A = (r_2 - \alpha) \frac{dX}{du} - \beta \frac{d^2 X}{du\, dv} - \beta \frac{dX}{dv} \frac{d \frac{1}{\sqrt{G}}}{dv} \,,$$

$$A_1 = (r_2 - \alpha) \frac{dY}{du} - \beta \frac{d^2 Y}{du\, dv} - \beta \frac{dY}{dv} \frac{d \frac{1}{\sqrt{G}}}{dv} \,,$$

$$A_2 = (r_2 - \alpha) \frac{dZ}{du} - \beta \frac{d^2 Z}{du\, dv} - \beta \frac{dZ}{dv} \frac{d \frac{1}{\sqrt{G}}}{dv} \,,$$

per la seconda delle (4) si avrà:

$$\Sigma A X = 0 \,, \qquad \Sigma A \frac{dX}{du} = 0 \,, \qquad \Sigma A \frac{dX}{dv} = 0 \,;$$

e perciò sarà $A = A_1 = A_2 = 0$, e alle equazioni di Rodrigues:

$$\frac{dx}{du} = r_2 \frac{dX}{du} \,, \qquad \frac{dy}{du} = r_2 \frac{dY}{du} \,, \qquad \frac{dz}{du} = r_2 \frac{dZ}{du} \,,$$

si potranno sostituire la prima delle (2) e quelle che se ne deducono col cangiarvi x e X in y e Y, z e Z; e queste integrate conducono alle (1), le quali ci dicono che le v sono sferiche.

Da ciò dunque risulta che: *la condizione necessaria e sufficiente affinchè le linee di curvatura v siano sferiche, è che il raggio di curvatura corrispondente a queste linee sia dato dalla formola:*

$$(8) \dots\dots\dots \qquad r_2 = \alpha + \beta \frac{\frac{d \log \sqrt{E'}}{dv}}{\sqrt{G'}},$$

ove E' e G' sono i coefficienti di du^2 e dv^2 nell'elemento lineare sferico, e u e v sono i parametri delle linee di curvatura; e quindi, per quanto si è detto al § 2 della Memoria citata, si può ora enunciare il seguente teorema: *Se le linee u e v sulla sfera di raggio uno sono ortogonali, e tali che avendosi:*

$$ds'^2 = E'\,du^2 + G'\,dv^2,$$

si possa soddisfare alle equazioni:

$$(9) \dots\dots\dots \qquad \left\{ \begin{aligned} &(r_1 - r_2)\frac{d \log \sqrt{E'}}{dv} - \frac{dr_2}{dv} = 0, \\ &(r_1 - r_2)\frac{d \log \sqrt{G'}}{du} + \frac{dr_1}{du} = 0, \end{aligned} \right.$$

prendendo

$$r_2 = \alpha + \beta \frac{\frac{d \log \sqrt{E'}}{dv}}{\sqrt{G'}},$$

ove α e β sono funzioni di v, con un conveniente r_1, la superficie

$$x = \int \left(r_2 \frac{dX}{du} du + r_1 \frac{dX}{dv} dv \right),$$

$$y = \int \left(r_2 \frac{dY}{du} du + r_1 \frac{dY}{dv} dv \right),$$

$$z = \int \left(r_2 \frac{dZ}{du} du + r_1 \frac{dZ}{dv} dv \right),$$

ove X, Y, Z sono al solito le coordinate sferiche (ovvero le (1), *quando le V siano determinate convenientemente, e α e β abbiano i valori che entrano in r_2), avrà le linee di curvatura v sferiche. Queste linee saranno tracciate su sfere di raggio $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, e che taglieranno la superficie sotto un angolo il cui coseno è $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, purchè $\frac{\frac{d \log \sqrt{E'}}{dv}}{\sqrt{G'}}$ contenga anche u; e se $\frac{\frac{d \log \sqrt{E'}}{dv}}{\sqrt{G'}}$ contenesse soltanto v, la sfera che contiene le linee v sarà indeterminata;* e ciò è ben naturale, perchè siccome $\frac{\frac{d \log \sqrt{E'}}{dv}}{\sqrt{G'}}$ non è altro che la curvatura geodetica delle linee v sulla sfera, in questo caso le linee v sulla sfera e quindi anche sulla superficie sono circolari, ed appartengono allora ad infinite sfere, e in particolare a sfere tangenti e a sfere normali alla superficie.

Notiamo poi, che per ciò che si è visto al § 2 della Memoria citata, onde potere soddisfare alle equazioni (9) col prendere:

$$r_2 = \alpha + \beta \frac{\frac{d \log \sqrt{E'}}{dv}}{\sqrt{G'}},$$

e con un conveniente r_1, se le v non sono geodetiche, basta che con questo valore di r_2 si possa soddisfare alla equazione:

$$(10) \ldots \quad \frac{d^2 r_2}{du\, dv} = \frac{dr_2}{dv} \frac{d}{du} \left\{ \log \frac{\frac{d \log \sqrt{E'}}{dv}}{\sqrt{G'}} \right\} - \frac{dr_2}{du} \frac{d \log \sqrt{E'}}{du};$$

e quando ciò sia, il valore di r_1 sarà:

$$(11) \ldots\ldots\ldots \quad r_1 = r_2 + \frac{\frac{dr_2}{du}}{\frac{d \log \sqrt{E'}}{dv}}.$$

Osserviamo ancora che questo teorema serve per trovare le superficie le cui linee di curvatura di un sistema v sono sferiche e hanno per corrispondenti sulla sfera delle linee dotate di speciali proprietà.

7. Il prof. Brioschi in una sua Memoria pubblicata negli Annali del sig. Tortolini (1857) dette una condizione necessaria e sufficiente perchè le linee di curvatura v siano sferiche, che differisce dalla (8), ma che si riduce facilmente ad essa.

Osserviamo infatti che se si chiama θ l'angolo sotto cui i piani osculatori delle linee v tagliano la superficie, e R il raggio di curvatura di queste linee, la loro curvatura geodetica $\dfrac{\frac{d \log \sqrt{E}}{dv}}{\sqrt{G}}$ è anche espressa da $\dfrac{\cos\theta}{R}$; e poichè pel teorema di Meunier $R = r_2 \operatorname{sen}\theta$, sarà:

$$\frac{\frac{d \log \sqrt{E}}{dv}}{\sqrt{G}} = \pm \frac{\cos\theta}{r_2 \operatorname{sen}\theta}.$$

Ma i piani osculatori delle linee v sulla sfera tagliano pure la superficie sotto l'angolo θ, e il raggio di curvatura di queste linee è evidentemente $\operatorname{sen}\theta$; dunque $\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ è la curvatura geodetica delle linee v sulla sfera, e perciò si ha la formola notevole:

$$(12) \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{\frac{d \log \sqrt{E}}{dv}}{\sqrt{G}} = \pm \frac{1}{r_2} \frac{\frac{d \log \sqrt{E'}}{dv}}{\sqrt{G'}},$$

mediante la quale la (8) si trasforma nell'altra:

$$r_1 = \alpha \pm \beta r_2 \frac{\frac{d \log \sqrt{E}}{dv}}{\sqrt{G}},$$

che si riduce a quella del Brioschi, quando in luogo delle α e β si introduca l'angolo CMN e il raggio della sfera.

8. Supponiamo ora che un sistema di linee di curvatura v abbiano la curvatura geodetica costante, cioè siano di quelle linee che Hamilton denominò *didonie*. Siccome la loro curvatura geodetica è $\frac{\frac{d \log \sqrt{E}}{d v}}{\sqrt{G}}$, così per queste linee si avrà:

$$\frac{\frac{d \log \sqrt{E}}{d v}}{\sqrt{G}} = \frac{1}{\gamma},$$

essendo γ una funzione di v; e quindi per la (12) se ne dedurrà:

$$r_2 = \pm \gamma \frac{\frac{d \log \sqrt{E'}}{d v}}{\sqrt{G'}};$$

e da questa, per quanto si è detto nel § 6, qualunque sia $\frac{\frac{d \log \sqrt{E'}}{d v}}{\sqrt{G'}}$, se ne deduce subito questo teorema dovuto al sig. Brioschi: *Se un sistema di linee di curvatura di una superficie sono didonie, esse sono sferiche e appartengono a sfere che tagliano ad angolo retto la superficie e il cui raggio è uguale al raggio di curvatura geodetica delle stesse linee.*

La reciproca di questo teorema, vale a dire che: *Se una superficie ha un sistema di linee di curvatura sferiche e tracciate su sfere normali alla superficie esse sono didonie*, risulta subito dalla definizione della curvatura geodetica, e risulta pure dalle formole (8) e (12), giacchè in questo caso $\alpha = 0$.

9. Il sig. Bonnet nella sua Memoria sulle superficie applicabili, dopo avere dato (come io pure feci nella mia) la forma dell'elemento lineare di una superficie quando su essa esistono due sistemi di linee didonie ortogonali che si prendono per linee coordinate, ha ricercato quali siano le superficie per le quali le linee di curvatura sono uno di questi doppi sistemi di linee.

Questa ricerca che il Bonnet fa in un modo assai complicato, pel teorema precedente di Brioschi e pel suo reciproco si vede ora che non è se non che la ricerca delle superficie aventi i due sistemi di linee di curvatura sferiche e tracciate su sfere normali alla superficie, e fondandosi su questa osservazione essa può farsi con moltissima semplicità nel modo seguente.

Indichiamo con (V_1, V_2, V_3), (U_1, U_2, U_3) le coordinate dei centri C, C' delle sfere che contengono le linee v e u che passano per un punto $M(u, v)$ della superficie, e siano β e μ i loro raggi rispettivi. Per essere queste sfere normali alla superficie, i loro centri C, C' saranno nel piano tangente al punto M, e le rette CC', $CM=\beta$, $C'M=\mu$ formeranno un triangolo rettangolo di cui $CC'=\sqrt{\beta^2+\mu^2}$ sarà l'ipotenusa, e conseguentemente si avrà:

$$\Sigma(U_1-V_1)^2=\mu^2+\beta^2,$$

come facilmente avremmo ricavato anche dalle equazioni (1) applicate anche alle linee u.

Di qui segue che dovrà aversi

$$\Sigma U_1 V_1=\lambda(u)+\lambda_1(v)\ ;$$

e quindi

$$(13)\ \ldots\ldots\quad U_1' V_1'+U_2' V_2'+U_3' V_3'=0\ .$$

Ora qui osserviamo che si può escludere il caso che tutte le funzioni U o tutte le V siano costanti, poichè in tal caso i piani tangenti passerebbero tutti per uno stesso punto, e la superficie sarebbe conica e noi escludiamo sempre le superficie sviluppabili.

Dietro ciò almeno una delle funzioni U non sarà costante, e potremo supporre che questa sia p. es. U_1.

Allora la funzione

$$\frac{U_2'}{U_1'}V_2'+\frac{U_3'}{U_1'}V_3',$$

non dovrà contenere u, e quindi non si potranno dare che i seguenti casi:

$$\frac{U_2'}{U_1'} = \text{cost.} \qquad \text{con} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{U_3'}{U_1'} = \text{cost.} \\ \text{o } V_3' = 0 , \end{array} \right.$$

ovvero si dovrà avere (come si vede derivando):

$$\frac{U_2'}{U_1'} = m . \frac{U_3'}{U_1'} + n ,$$

$$V_3' = - m . V_2' ;$$

e quindi, avendo riguardo alla (13), si vede che in ogni caso le U o le V dovranno essere legate da una relazione lineare, e corrispondentemente le V o le U da due, e da ciò si può intanto concludere che i centri delle sfere che contengono le linee di curvatura di uno dei due sistemi sono in linea retta, e quelli delle sfere dell'altro sistema sono in un piano.

Dietro ciò potremo supporre che i centri delle sfere delle linee u siano in linea retta, e prendendo questa retta per asse delle x, avremo $U_2 = U_3 = 0$, e quindi si dovrà avere $U_1' V_1' = 0$ ciò che porta $V_1' = 0$, e per ciò i centri delle sfere delle linee v saranno in un piano perpendicolare all'asse delle x, cioè alla linea dei centri delle sfere u.

Da ciò risulta subito ora il teorema del Bonnet.

Osserviamo infatti che per l'ipotesi in cui siamo, le sviluppabili circoscritte alla superficie lungo le linee u e formate dalle tangenti alle linee v sono superficie coniche i cui vertici sono i centri delle sfere che contengono le linee u. Siccome questi vertici sono tutti in linea retta, ne viene che le tangenti ad una linea v sono tutte in uno stesso piano, quindi le linee v sono piane, e siccome sono sferiche, esse sono circolari e i loro piani passano per una retta fissa.

Viceversa, le superficie nelle quali le linee di curvatura di un sistema v sono circolari (e quindi didonie) e situate in piani passanti per una retta fissa, hanno le linee di curvatura dell'altro sistema sferiche e situate su sfere normali alla superficie e coi centri su questa retta, giacchè le tangenti alle linee v lungo una stessa linea u, dovendo incontrarsi successivamente, si incontrano in un punto di quella retta e formano una superficie conica in cui la linea u è una traiettoria ortogonale delle generatrici, e perciò questa linea è sferica e appartiene a una sfera normale alla superficie.

Con ciò resta pienamente dimostrato che le superficie che cercavamo sono gli inviluppi di sfere nelle quali le linee circolari v sono in piani passanti per una retta fissa. Inoltre, se si osserva che i centri delle infinite sfere che contengono uno stesso cerchio v sono tutti su una retta perpendicolare al piano del cerchio, e quindi in un piano perpendicolare alla retta fissa; e d'altronde i centri delle sfere normali alla superficie che contengono questi cerchi sono tutti in uno stesso piano perpendicolare a questa retta, se ne conclude che anche le sfere inviluppate avranno i loro centri in questo piano; e prendendo perciò la retta fissa (come precedentemente) per asse delle x, e questo piano per quello delle yz, e indicando con V_2 e V_3 le coordinate dei centri di queste sfere inviluppate, e con R il raggio, l'equazione delle superficie che studiamo risulterà dalla eliminazione di v fra le due:

$$x^2+(y-V_2)^2+(z-V_3)^2=R^2\,,$$
$$-(y-V_2)V_2'-(z-V_3)V_3'=RR'\,,$$

quando V_2, V_3 ed R siano determinati in modo che i piani delle linee v passino tutti per l'asse delle x, ciò che porta che si abbia:

$$V_2V_2'+V_3V_3'=RR'\,;$$

ovvero:

$$V_2^2+V_3^2=R^2+k\,,$$

ove k è una costante.

Le equazioni fra cui bisogna eliminare v sono dunque le seguenti:

$$x^2+y^2+z^2-2V_2y-2V_3z+k=0\,,$$
$$V_2'y+V_3'z=0\,,$$

e queste mostrano che le sfere passano tutte pei due punti $y=0$, $z=0$, $x=\pm\sqrt{k}$ (reali o immaginari) dell'asse delle x; e dietro ciò, poichè evidentemente non vi sono altre superficie inviluppi di sfere che godano di questa proprietà, si potrà concludere che: *le superficie le cui linee di curvatura sono didonie, o, se vuolsi, quelle le cui linee di curvatura sono sferiche e tracciate su sfere normali alla superficie, sono quelle inviluppo di una sfera variabile il cui centro percorre una curva piana e passa costantemente per due punti fissi reali o immaginari situati simmetricamente rispetto a questo piano.* Questi punti possono essere coincidenti, e allora si trovano su questo piano.

10. Siccome $\frac{V_2'}{V_3'}$ evidentemente non può essere costante, si può supporre di avere scelto v in modo che sia:

$$\frac{V_2'}{V_3'} = -v \,,$$

e allora sarà:

$$V_2 = -\int v\, V_3'\, dv - k_1 \,,$$

e l'equazione in termini finiti delle superficie testè considerate sarà la seguente:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\left\{\int v\, V_3'\, dv + k_1\right\} y - 2 V_3 z + k = 0 \,,$$

essendo V_3 una funzione qualunque di v, e $v = \frac{z}{y}$.

Scegliendo convenientemente V_3 la superficie sarà algebrica. Così se si prende $V_3 = v$ sarà $V'_3 = 1$, e si avrà la superficie:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{z^2}{y} + 2 k_1 y + k = 0 \,,$$

che è del terz'ordine e contiene l'asse delle x.

11. Dietro il teorema dimostrato, appoggiandosi sui teoremi noti sui sistemi di linee didonie ortogonali, e su quelli dati nel § 8, se ne possono enunciare anche altri, come p. es. i seguenti:

Se in un doppio sistema di linee ortogonale e isotermo, un sistema è formato di linee didonie e circolari, l'altro sistema sarà di linee sferiche, e questi due sistemi di linee saranno linee di curvatura e la superficie sarà di quelle testè considerate.

Essendo infatti le linee di un sistema didonie e circolari, i loro piani taglieranno sotto angoli costanti la superficie, e quindi esse saranno linee di curvatura, e le altre saranno pure linee di curvatura, e quindi, poichè sono didonie, esse saranno sferiche ecc.

Così pure si ha che: *Se in una superficie le linee di curvatura sono isoterme, e quelle di un sistema appartengono a sfere che tagliano ad angolo retto la superficie, le linee di curvatura dell'altro sistema godranno della stessa proprietà, ecc. ecc.*

Pisa - gennaio 1869.