ALCUNE RICERCHE

INTORNO

AGLI ASSI DI ROTAZIONE ED AL MOTO DEI SISTEMI RIGIDI

NOTA

DEL PROF.

DOMENICO TURAZZA

1. Nel volume undecimo delle Memorie del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti sta una mia Memoria *intorno alcune proprietà relative agli assi di rotazione di un sistema rigido*, nella quale ho cercato di mostrare l'importanza di certi punti, che io denominai centri di giratore minimo, i quali godono della proprietà che, supponendo per essi passare la risultante delle quantità di moto di cui, a un dato istante, è dotato un sistema rigido che ruota intorno ad un asse dato, il giratore risultante delle quantità di moto è il minore possibile; ed ho dimostrato pure che tali punti godono anche di alcune delle principali proprietà che erano già state segnalizzate pei centri di percossa, i quali altro non sono che centri di giratore nullo. Mi propongo ora di estendere l'uso di questi punti specialmente alla generalizzazione di alcune proprietà relative all'urto dei corpi rigidi, già trovate così luminosamente dal Poinsot, non che di mostrare

alcune nuove relazioni, non per anco, almeno ch' io mi sappia, avvertite. Riprendo sommariamente la questione dal principio, allo scopo di legare queste ricerche in un solo sistema.

2. Abbiasi un sistema rigido il quale, a un dato istante, ruoti con velocità angolare w intorno ad un asse, pur dato. Si fissi l'origine delle coordinate nel baricentro, e si prenda l'asse Z parallelo all'asse dato, e le X, Y in piano passante pel baricentro e perpendicolare all'asse; sieno a e b le coordinate del punto in cui l'asse di rotazione incontra il piano XY; sia r la sua distanza dal baricentro, ed indichiamo con $m.i_h^2$ il momento d' inerzia del sistema rapporto ad una retta generica h, e con $mi\lambda_{h,k}$ il suo momento complesso rapporto a due piani rispettivamente perpendicolari a due rette h e k normali fra loro. Trasportando tutte le quantità di moto di cui, nell' istante dato, sono dotati i vari elementi materiali costituenti il sistema in un punto di coordinate x_0, y_0, z_0, e componendo quivi in uno le quantità di moto ed i giratori, si avrà facilmente che le dette quantità di moto si riducono ad un'unica quantità di moto mwr diretta perpendicolarmente al piano che passa per l'asse di rotazione e pel baricentro del sistema ed in senso opposto a quello secondo cui avviene la rotazione; più ad un giratore di quantità di moto che è risultante dei tre; $mw\{i\lambda_{xz}+az_0\}$ parallelo ed opposto alle X: $mw\{i\lambda_{yz}+bz_0\}$ parallelo ed opposto alle Y; ed $mw\{i_z^2+ax_0+by_0\}$ parallelo e nello stesso senso delle Z.

Se il punto di trasporto è il baricentro, allora, essendo $x_0=y_0=z_0=0$, i tre giratori componenti si riducono ad $mwi\lambda_{xz}$ parallelo ed opposto alle X; $mwi\lambda_{yz}$ parallelo ed opposto alle Y; ed mwi_z^2 parallelo ed egualmente diretto delle Z; donde si scorge che, trasportando tutte le quantità di moto nel baricentro, il giratore risultante è indipendente dalla posizione assoluta dell'asse e dipende unicamente dalla sua direzione.

3. Volendo assegnare tal punto ove trasportando le quantità di moto si abbia il giratore il più piccolo possibile, le x_0, y_0, z_0 dovranno soddisfare le equazioni

$$\{i_z^2+a.x_0+b.y_0\}.a=0\ ; \qquad \{i_z^2+a.x_0+b.y_0\}.b=0\ :$$

$$\{i\lambda_{xz}+a.z_0\}.a+\{i\lambda_{yz}+b.z_0\}.b=0\ ;$$

l'ultima di queste dà

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad z_0 = -\frac{a.i\lambda_{xz} + b.i\lambda_{yz}}{r^2} \; ;$$

e perchè le altre due sieno soddisfatte, qualunque sieno a e b, dovrà essere

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad i_z^2 + a.x_0 + b.y_0 = 0 \; .$$

Quest'ultima rappresenta manifestamente un piano perpendicolare al piano che passa per l'asse di rotazione e pel baricentro, e distante dal baricentro stesso di una quantità

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad D = -\frac{i_z^2}{r} \; .$$

Discende da ciò che i punti cercati stanno sopra la retta perpendicolare al piano che passa per l'asse dato di rotazione e pel baricentro, e pel punto di questo piano che dista dall'asse Z della quantità D data dalla (3), e dal piano XY della quantità z_0 data dalla (1).

4. In quanto al valore del giratore risultante, detti mC_x, mC_y, mC_z i suoi componenti secondo i tre assi, ed mC il valore risultante, sarà

$$mC_x = -mw.\frac{b.\{b.i\lambda_{xz} - a.i\lambda_{yz}\}}{r^2} \; ,$$

$$mC_y = mw.\frac{a.\{b.i\lambda_{xz} - a.i\lambda_{yz}\}}{r^2} \; ,$$

$$mC_z = 0 \; ;$$

donde

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad mC = -mw.\frac{a.i\lambda_{yz} - b.i\lambda_{xz}}{r} \; ;$$

ed essendo

$$a.C_x + b.C_y = 0 \; ,$$

si scorge che il giratore minimo sarà parallelo alla quantità di moto risultante e diretto nel medesimo senso.

Se sia

$$a.i\lambda_{yz} - b.i\lambda_{xz} = 0 \; ,$$

il giratore risultante sarà nullo. Ciò ha luogo per tutti gli assi di rotazione paralleli a Z, che stanno sopra il piano passante pel baricentro che taglia il piano XY lungo la retta

(5) . . . . $$i.\lambda_{yz}.x - i.\lambda_{xz}.y = 0 \ ,$$

la quale rappresenta il piano dei centri di giratore nullo corrispondente ad assi paralleli a Z.

Prendendo, per semplicità, l'asse X nel piano che passa per l'asse dato di rotazione e pel baricentro, il punto del piano XZ, ove trasportando tutte le quantità di moto si ha un giratore che è il minore possibile per tutti gli assi paralleli a Z e giacenti nel piano XZ, avrà per coordinate

(6) . . . . $$x_0 = -\frac{i_z^2}{r} \ ; \qquad z_0 = -\frac{i\lambda_{xz}}{r} \ .$$

Egli è questo il punto che io dico *centro di giratore minimo.*

Quando la quantità di moto mwr risultante passa pel punto stesso, allora il giratore risultante è

(7) . . . . $$mC = -mw.i\lambda_{yz} \ ,$$

diretto in senso opposto ad Y, cioè parallelo alla mwr e diretto nel suo medesimo senso.

5. Dividendo le (6) l'una per l'altra si ha

(8) . . . . $$z_0 = \frac{i\lambda_{xz}}{i_z^2} . x_0 \ ,$$

la quale, essendo $\frac{i\lambda_{xz}}{i_z^2}$ costante per tutti gli assi paralleli a Z e giacenti nello stesso piano passante pel baricentro, ci dice che:

« Tutti i centri di giratore minimo corrispondenti ad assi paralleli fra loro e giacenti in uno stesso piano col baricentro sono situati sopra una retta passante pel baricentro stesso. »

Così pure, se diciamo x_1, z_1 le coordinate del centro di giratore minimo che compete ad asse di rotazione parallelo al primo e passante pel centro di giratore minimo di questo, sarà

$$x_1 = \frac{-i_z^2}{-x_0} = r \; : \qquad z_1 = \frac{-i\lambda_{xz}}{-x_0} = \frac{r.z_0}{x_0} \; ,$$

cioè:

« Il centro di giratore minimo, corrispondente ad asse O_1 parallelo ad O e passante pel centro di giratore minimo corrispondente a quest'ultimo, sta sopra questo asse e precisamente nel punto dove esso è tagliato dalla retta luogo dei centri di giratore minimo corrispondenti ad assi paralleli ad O e giacenti con esso in un medesimo piano passante pel baricentro. »

Quindi ancora:

« Gli assi di rotazione giacenti in un medesimo piano passante pel baricentro e paralleli fra loro sono coniugati a due a due, così che l'uno passa pel centro di giratore minimo dell'altro. »

Finalmente, se diciamo α l'angolo che la retta, luogo dei centri di giratore minimo corrispondente a dato sistema di assi, fa colla direzione degli assi stessi, e d e d_1 le distanze dal baricentro di due centri reciproci di giratore minimo, sarà

$$(9) \; \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad d_1 = \frac{r}{\text{sen.}\,\alpha} \; : \qquad d = -\frac{i_z^2}{r.\,\text{sen.}\,\alpha} \; ;$$

donde

$$d.d_1 = -\frac{i_z^2}{\text{sen.}^2\,\alpha} \; ,$$

e siccome i_z^2 ed α sono costanti per tutti gli assi paralleli a Z e giacenti in un medesimo piano col baricentro, così:

« Il rettangolo formato colle distanze dal baricentro di due centri coniugati di giratore minimo, corrispondenti ad assi paralleli fra loro e giacenti in uno stesso piano passante pel baricentro, è costante. »

6. Queste proprietà sussistono eziandio per tutti quei punti a cui trasportando le quantità di moto di cui è dotato un sistema, che ruota intorno ad assi paralleli e giacenti in uno stesso piano passante pel baricentro, si hanno giratori risultanti eguali ed egualmente diretti.

Se infatti prendiamo per piano XZ il piano comune ai detti assi, perchè i giratori sieno eguali ed egualmente diretti basterà che le coordinate

x_0, z_0 del punto di trasporto delle quantità di moto soddisfino alle relazioni

$$i\lambda_{xz} + r.z_0 = m\ ; \qquad i_z^2 + r.x_0 = n\ ,$$

essendo m ed n due costanti arbitrarie.

Da queste ricaveremo

$$x_0 = \frac{n - i_z^2}{r}\ ; \qquad z_0 = \frac{m - i\lambda_{xz}}{r}\ ;$$

donde

$$z_0 = \frac{m - i\lambda_{xz}}{n - i_z^2} . x_0\ ,$$

la quale rappresenta appunto una retta passante pel baricentro, per essere pei detti assi costanti le quantità $m - i\lambda_{xz}$, ed $n - i_z^2$.

Così pure, dette x_1, z_1 le coordinate del punto di giratore eguale corrispondente ad asse parallelo al primo e passante pel punto x_0, z_0, sarà

$$x_1 = \frac{n - i_z^2}{x_0} = r\ ; \qquad z_1 = \frac{m - i\lambda_{xz}}{x_0} = \frac{r.z_0}{x_0}\ .$$

Finalmente, essendo β l'angolo che la retta, luogo dei centri di giratore eguale corrispondente ad assi paralleli a Z e giacenti nello stesso piano passante pel baricentro, forma con Z, e d e d_1 le distanze dei due centri coniugati, sarà

$$d = \frac{r}{\text{sen.}\,\beta}\ ; \qquad d_1 = \frac{n - i_z^2}{r.\text{sen.}\,\beta}\ ,$$

e

$$d.d_1 = \frac{n - i_z^2}{\text{sen.}^2\,\beta}\ ,$$

e quindi $d.d_1$ costante.

7. Pel paragrafo quarto, le coordinate x_0, y_0, z_0 del centro di giratore minimo, corrispondente ad asse di rotazione parallelo a Z e passante pel punto del piano $X\,Y$ avente per coordinate a e b, devono soddisfare alle equazioni

$$r^2.z_0+a.i\lambda_{xz}+b.i\lambda_{yz}=0\ ,$$
$$i_z^2+a.x_0+b.y_0=0\ ,$$
$$a.y_0-b.x_0=0\ ;$$

eliminando fra queste le quantità a e b, avremo

$$(10)\ \ldots\ldots\ldots\ \quad i_z^2.z_0-i\lambda_{yz}.y_0-i\lambda_{xz}.x_0=0\ ,$$

donde conchiuderemo che:

« Tutti i centri di giratore minimo corrispondenti ad assi paralleli fra loro sono situati in uno stesso piano passante pel baricentro. »

Essendo di più

$$(11)\ \ldots\ldots\ldots\ \quad i\lambda_{yz}.x-i\lambda_{xz}.y=0\ ,$$

l'equazione del piano di giratore nullo, così si scorge che il piano (10) sarà perpendicolare al piano dei centri di giratore nullo, e taglierà quindi quest'ultimo lungo la linea dei centri di percossa.

8. Essendo $mwi\lambda_{xz}$ parallelo ed opposto ad X; $mwi\lambda_{yz}$ parallelo ed opposto ad Y; mwi_z^2 parallelo e diretto secondo Z, i tre giratori componenti, quando le quantità di moto vengono trasportate al baricentro del sistema, ed essendo allora il giratore risultante indipendente dalla posizione assoluta dell'asse, ma dipendendo solo dalla sua direzione, così se pel baricentro si conduce un piano perpendicolare al detto giratore, esso avrà per equazione

$$i_z^2.z-i\lambda_{yz}.y-i\lambda_{xz}.x=0\ ;$$

donde risulta che:

« Il piano, luogo dei centri di giratore minimo, corrispondente ad assi paralleli a Z, è il piano perpendicolare al giratore che si ottiene trasportando tutte le quantità di moto di cui è dotato il sistema al baricentro del sistema medesimo. »

9. Essendo l'equazione dell'elissoide centrale d'inerzia riferita agli assi X, Y, Z

$$i_x^2.x^2+i_y^2.y^2+i_z^2.z^2-i\lambda_{xy}.xy-i\lambda_{xz}.xz-i\lambda_{yz}.yz=k^4\ ,$$

e l'equazione del suo piano tangente nel punto di coordinate x_1, y_1, z_1

$$\left\{ i_x^2 . x_1 - i\lambda_{xy} . y_1 - i\lambda_{xz} . z_1 \right\} . x + \left\{ i_y^2 . y_1 - i\lambda_{xy} . x_1 - i\lambda_{yz} . z_1 \right\} . y$$
$$+ \left\{ i_z^2 . z_1 - i\lambda_{yz} . y_1 - i\lambda_{xz} . x_1 \right\} . z = k^4 ,$$

l'equazione del piano tangente al punto dove l'elissoide stessa è attraversata dall'asse Z, cioè nel punto di coordinate

$$x_1 = 0 \; ; \qquad y_1 = 0 \; ; \qquad z_1 = \frac{k^2}{i_z} ,$$

sarà

$$i_z^2 . z - i\lambda_{yz} . y - i\lambda_{xz} . x = k^2 . i_z ,$$

e quella del piano diametrale coniugato coll'asse Z:

$$i_z^2 . z - i\lambda_{yz} . y - i\lambda_{xz} . x = 0 \; ;$$

quindi:

« Il piano, luogo dei centri di giratore minimo, corrispondente ad assi paralleli all'asse Z, è il piano diametrale coniugato con Z dell'elissoide centrale d' inerzia del sistema. »

Questo teorema discende tosto dal precedente e dal noto teorema, che un giratore tende a far ruotare intorno ad asse che è il diametro coniugato col piano perpendicolare al giratore stesso dell'elissoide d'inerzia corrispondente al punto dell'asse in cui si immagina concentrata la forza.

10. Inversamente, dato un piano, luogo dei centri di giratore minimo, corrispondente ad un sistema di assi paralleli fra loro, per assegnare la direzione di questi assi basterà costruire l'elissoide centrale d' inerzia, e determinare il diametro della stessa che è coniugato col piano dato. La determinazione dunque dell'asse Z, rapporto a cui un piano dato è luogo dei centri di giratore minimo corrispondente ad un sistema di assi paralleli a Z, ricade nel problema geometrico di assegnare il diametro coniugato a dato piano diametrale di data elissoide.

11. Se il sistema rigido dato si muove unicamente con moto di traslazione, e che la sua velocità assoluta a un dato istante sia v, allora tutte le quantità di moto, di cui sono dotati i suoi elementi materiali, si riducono ad un'unica quantità di moto mv passante pel baricentro, e diretta

parallelamente e nello stesso senso della traslazione. Per ciò, quando il sistema sia dotato di una traslazione con velocità v e ruoti contemporaneamente intorno a dato asse con velocità angolare w, tutte le quantità di moto di cui sono dotati i suoi elementi materiali si ridurranno alla quantità di moto mv passante pel baricentro, ed alla quantità di moto ed al giratore di quantità di moto corrispondenti alla rotazione, e determinati superiormente. Al giratore potendosi poi sostituire due quantità di moto eguali, parallele e direttamente contrarie, situate nel piano perpendicolare allo stesso e tali che il prodotto di una delle quantità di moto componenti per la reciproca loro distanza eguagli il giratore che rappresenta la coppia stessa, così in ultima analisi si avranno quattro quantità di moto, cioè la mv, la mwr e le due rappresentate dal giratore.

Per ridurre un tale sistema al minor numero possibile di quantità di moto bisognerà ridurre la quantità di moto corrispondente alla rotazione a passare, come la mv, pel baricentro, e allora, facendo passare per questo punto una delle quantità di moto della coppia rappresentata dal giratore, e componendo in una le quantità di moto concorrenti nel baricentro, avremo il sistema di due uniche quantità di moto, l'una passante pel baricentro e l'altra giacente nel piano perpendicolare al giratore corrispondente al baricentro, cioè giacente nel piano luogo dei centri di giratore minimo corrispondente alla direzione data dell'asse di rotazione; questa ultima passerà quindi per uno dei punti della retta luogo dei centri di giratore minimo corrispondente ad assi paralleli all'asse dato e giacenti collo stesso in un medesimo piano passante pel baricentro del sistema. Potendosi girare la coppia comunque nel suo piano ed alterare a volontà quantità di moto componente e braccio, purchè resti costante il loro prodotto, così la precedente riduzione potrà farsi in infinite maniere, fra le quali potremo sempre scegliere quella che più torni opportuna pel genere di ricerche che ci proponiamo d' intraprendere.

12. Quando la risultante delle due quantità di moto mwr ed mv giaccia nel piano, luogo dei centri di giratore minimo corrispondente ad assi di rotazione paralleli all'asse dato, allora si potrà prendere una delle quantità di moto costituenti la coppia, corrispondente al giratore, eguale e direttamente opposta alla risultante stessa; con ciò si annullerà la quantità

di moto passante pel baricentro, e tutte le quantità di moto di cui è dotato il sistema si ridurranno ad una quantità di moto unica, parallela alla risultante delle due mwr ed mv, e passante per un punto della retta, luogo dei centri di giratore minimo corrispondente all'asse dato di rotazione. Egli è poi evidente non potersi le quantità di moto, di cui è dotato il sistema, ridurre ad una soltanto, se non in questo caso, perchè, riducendosi tutte le quantità di moto dovute alla rotazione al baricentro, per comporre quivi la loro risultante colla mv, il giratore risultante è perpendicolare al piano, luogo dei centri di giratore minimo corrispondente ad assi paralleli all'asse dato, e in questo piano devono di necessità giacere le quantità di moto rappresentate dal giratore.

13. Se diciamo v_x, v_y, v_z le tre componenti la velocità assoluta di traslazione secondo i tre assi, presi così che la loro origine essendo nel baricentro, l'asse Z sia parallelo all'asse dato di rotazione, e quello delle X nel piano passante per l'asse stesso e pel baricentro, dovendo la risultante delle quantità di moto mwr ed mv giacere nel piano, luogo dei centri di giratore minimo corrispondente ad assi paralleli a Z, dovrà essere soddisfatta l'equazione

$$(12) \;\ldots\ldots\quad i_z^2 . v_z - i\lambda_{yz} . \left\{ v_y - wr \right\} - i\lambda_{xz} . v_x = 0 \;;$$

e se di più diciamo a_x, a_y, a_z le coordinate correnti della retta secondo cui opera l'unica risultante delle quantità di moto, per giacere essa nel piano suddetto, dovrà pure sussistere anche la

$$(13) \;\ldots\ldots\quad i_z^2 . a_z - i\lambda_{yz} . a_y - i\lambda_{xz} . a_x = 0 \;,$$

e per l'eguaglianza dei giratori componenti dovranno verificarsi le

$$(14) \;\ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} v_z . a_y - \left\{ v_y - wr \right\} . a_z + w . i\lambda_{xz} = 0 \;; \\ v_x . a_z - v_z . a_x + w . i\lambda_{yz} = 0 \;; \\ \left\{ v_y - wr \right\} . a_x - v_x . a_y - w . i_z^2 = 0 \;. \end{array} \right.$$

Dalle quali avremo, per le equazioni rappresentanti la retta predetta, le

$$(15) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} a_z = \dfrac{v_z}{v_x} \cdot a_x - \dfrac{w \cdot i\lambda_{yz}}{v_x} \; ; \\ a_y = \left\{ \dfrac{v_z}{v_x} - \dfrac{i\lambda_{xz}}{i_z^2} \right\} \cdot \dfrac{i_z^2}{i\lambda_{xz}} \cdot a_x - \dfrac{w \cdot i_z^2}{v_x} \; . \end{cases}$$

Indicando quindi con x_1 e z_1 le coordinate del punto in cui la retta, luogo dei centri di giratore minimo corrispondente all'asse dato di rotazione, è incontrata dalla direzione dall'unica quantità di moto risultante, sarà

$$(16) \ldots \quad x_1 = w \cdot \frac{i_z^2 \cdot i\lambda_{yz}}{i_z^2 \cdot v_z - i\lambda_{xz} \cdot v_x} \; ; \qquad z_1 = w \cdot \frac{i\lambda_{yz} \cdot i\lambda_{xz}}{i_z^2 \cdot v_z - i\lambda_{xz} \cdot v_x} \; ,$$

ossia, per la (12),

$$(17) \ldots\ldots\ldots \quad x_1 = w \cdot \frac{i_z^2}{v_y - wr} \; ; \qquad z_1 = w \cdot \frac{i\lambda_{xz}}{v_y - wr} \; .$$

Detta poi mU l'unica quantità di moto a cui si riducono in questo caso tutte le quantità di moto di cui è dotato il sistema, sarà

$$(18) \ldots\ldots\ldots \quad mU = m \cdot \sqrt{\left\{ v_x^2 + \{v_y - wr\}^2 + v_z^2 \right\}} \; ,$$

e sarà

$$(19) \ldots \cos.\widehat{UX} = \frac{v_x}{U} \; ; \qquad \cos.\widehat{UY} = \frac{v_y - wr}{U} \; ; \qquad \cos.\widehat{UZ} = \frac{v_z}{U} \; .$$

Se è $v_y = 0$, allora è

$$x_1 = -\frac{i_z^2}{r} \; ; \qquad z_1 = -\frac{i\lambda_{xz}}{r} \; ,$$

cioè l'unica risultante delle quantità di moto passa pel centro di giratore minimo corrispondente all'asse dato di rotazione.

14. Se la traslazione avviene parallelamente all'asse di rotazione, nel qual caso il moto del corpo è quello di una vite nella sua chiocciola, allora sarà $v_x = 0$, $v_y = 0$, e perchè tutte le quantità di moto di cui è dotato il sistema sieno riducibili ad una soltanto, dovrà per la (12) essere

$$(20) \ldots\ldots\ldots \qquad v_2 = -wr.\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2},$$

e sarà

$$(21) \ldots\ldots\ldots \qquad mU = mwr.\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}\right)^2\right\}};$$

$$(22) \ldots \left\{\begin{array}{l} \cos.\widehat{UX} = 0\ ; \qquad \cos.\widehat{UY} = -\dfrac{1}{\sqrt{\left\{1 + \left(\dfrac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}\right)^2\right\}}}\ ; \\ \cos.\widehat{UZ} = -\dfrac{\left(\dfrac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}\right)}{\sqrt{\left\{1 + \left(\dfrac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}\right)^2\right\}}}, \end{array}\right.$$

e, come sopra,

$$x_1 = -\frac{i_z^2}{r}\ ; \quad y_1 = -\frac{i\lambda_{xz}}{r}\ ;$$

cioè, l'unica risultante delle quantità di moto passerà pel centro di giratore minimo corrispondente all'asse di rotazione, giacerà in un piano parallelo all'asse stesso e perpendicolare al piano passante pel detto asse e pel baricentro, e formerà coll'asse Z un angolo tale che sia

$$(23) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{tang.}\,\widehat{UZ} = -\frac{i_z^2}{i\lambda_{yz}}.$$

15. Qualunque sia v e qualunque il piano passante pel baricentro e per l'asse di rotazione, nonchè la direzione di quest'asse, esisterà sempre nel detto piano un asse intorno al quale girando il sistema con velocità angolare w la risultante delle due quantità di moto mwr ed mv giacerà nel piano luogo dei centri di giratore minimo corrispondente alla data direzione dell'asse, e quindi vi sarà sempre un asse intorno a cui girando il corpo con velocità angolare w, tutte le quantità di moto di cui è dotato il sistema si ridurranno ad una soltanto. Infatti, supponendo riferito il sistema ai soliti assi, il piano delle due mwr ed mv taglierà il piano suddetto lungo una retta, e si potrà sempre stabilire un tal valore della

mwr, ossia della r, per cui la risultante delle due mwr ed mv coincida colla retta medesima. Basterà a quest'uopo, per la (12), prendere

$$(24) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad r = \frac{i\lambda_{xz}.\, v_x + i\lambda_{yz}.\, v_y - i_z^2.\, v_z}{w.\, i\lambda_{yz}} \ .$$

Mantenendo costante la direzione dell'asse di rotazione, ma variando il piano passante per l'asse e pel baricentro, avremo poi altri assi paralleli al primo, i quali godono della stessa proprietà; ora, questi assi giaciono tutti in un piano parallelo al piano di giratore nullo, § 4°, corrispondente alla data direzione degli assi, e discosto dallo stesso di una quantità che ora assegneremo.

Ritenendo lo stesso asse delle Z si prenda l'asse X' nel piano passante pel nuovo asse di rotazione e pel baricentro, e si dica φ l'angolo che il piano $X'Z$ forma col primitivo XZ; sia di più r_1 la distanza dal baricentro dall'asse giacente nel piano $X'Z$, per cui le quantità di moto sono riducibili ad una soltanto, sarà

$$r_1 = \frac{i\lambda_{x'z'}.\, v_{x'} + i\lambda_{y'z'}.\, v_{y'} - i_{z'}^2.\, v_{z'}}{w.\, i\lambda_{y'z'}} \ ,$$

ma è

$$x' = x.\cos.\varphi + y.\,\mathrm{sen}.\varphi \ ; \qquad y' = y.\cos.\varphi - x.\,\mathrm{sen}.\varphi \ ; \qquad z' = z \ ;$$

quindi sarà

$$i_{z'}^2 = i_z^2 \ ; \qquad i\lambda_{x'z'} = i\lambda_{xz}.\cos.\varphi + i\lambda_{yz}.\,\mathrm{sen}.\varphi \ ;$$

$$i\lambda_{y'z'} = i\lambda_{yz}.\cos.\varphi - i\lambda_{xz}.\,\mathrm{sen}.\varphi \ ;$$

$$v_{z'} = v_z \ ; \qquad v_{y'} = v_y.\cos.\varphi - v_x.\,\mathrm{sen}.\varphi \ ; \qquad v_{x'} = v_x.\cos.\varphi + v_y.\,\mathrm{sen}.\varphi \ ;$$

$$\cos.\varphi = \frac{x}{r_1} \ ; \qquad \mathrm{sen}.\varphi = \frac{y}{r_1} \ ; \qquad r_1^2 = x^2 + y^2 \ .$$

Sostituendo questi valori nella precedente, essa si muta nella

$$(25) \ldots\ldots \quad i\lambda_{yz}.\, x - i\lambda_{xz}.\, y = \frac{i\lambda_{xz}.\, v_x + i\lambda_{yz}.\, v_y - i_z^2.\, v_z}{w} \ .$$

Ora, per la (5),

$$i\lambda_{yz}.\,x - i\lambda_{xz}.\,y = 0 \;,$$

rappresenta il piano degli assi a giratore nullo, dunque tutti gli assi intorno a cui girando il sistema con velocità angolare w, nel mentre che si trasporta con velocità assoluta v, i quali godono della proprietà che le quantità di moto, di cui è dotato il sistema, si riducono ad una soltanto, stanno in un piano parallelo al piano degli assi di giratore nullo, e discosto dal medesimo di una quantità

$$(26) \;\ldots\ldots\ldots \qquad \Delta = \frac{i\lambda_{xz}.\,v_x + i\lambda_{yz}.\,v_y - i_z^2.\,v_z}{w.\,\sqrt{\{i\lambda_{xz}^2 + i\lambda_{yz}^2\}}} \;,$$

che si ricava tosto dalla (25).

16. Con eguale facilità si troverebbe che gli assi di rotazione giacenti in uno stesso piano passante pel baricentro, i quali godono della proprietà che, ruotando il sistema intorno ai medesimi con velocità angolare w e trasportandosi contemporaneamente con velocità v, tutte le quantità di moto, di cui è dotato il sistema, sono riducibili ad un'unica quantità di moto, sono la famiglia di rette perpendicolari a v che lo tagliano nei punti dalla curva del quarto ordine, che, in coordinate polari, è rappresentata dalla

$$(27) \;\ldots\ldots\ldots \qquad r = \frac{1}{w}\,.\,\frac{m - n.\,\text{tang.}\,\theta}{i\lambda_{yz} - i\lambda_{xz}.\,\text{tang.}\,\theta} \;;$$

dove, per semplicità, è

$$m = i\lambda_{xz}.\,v_x + i\lambda_{yz}.\,v_y - i_z^2.\,v_z \;;$$
$$n = i\lambda_{xz}.\,v_z + i\lambda_{xy}.\,v_y - i_x^2.\,v_x \;,$$

e θ rappresenta l'angolo che r forma con X.

17. Se il sistema è dotato di una rotazione w intorno l'asse O e di una traslazione v parallela all'asse stesso, ma non sia soddisfatta la (20), allora le quantità di moto, di cui è dotato il sistema stesso, non saranno più riducibili ad una soltanto, ma potranno sempre ridursi a due, l'una

passante pel baricentro parallela all'asse di rotazione e diretta nello stesso senso, e l'altra passante pel centro di giratore minimo, nella seguente maniera:

Si riducano le quantità di moto dovute alla rotazione al centro di giratore minimo corrispondente all'asse di rotazione dato, ed avremo al detto punto una quantità di moto mwr parallela ed opposta ad Y, ed un giratore $mwi\lambda_{yz}$ parallelo anch'esso ed opposto alle Y. A questo giratore si sostituiscano due quantità di moto, l'una

$$mwr.\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2},$$

applicata al centro di giratore minimo parallela ed opposta a Z, e l'altra eguale alla precedente applicata al baricentro del sistema ma diretta nello stesso senso di Z. Componendo la prima colla mwr si avrà la quantità di moto

$$(28) \ldots\ldots\ldots \qquad mU = mwr.\sqrt{\left\{1+\left(\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}\right)^2\right\}},$$

applicata al centro di giratore minimo, situata in un piano parallelo all'asse e perpendicolare al piano passante per l'asse di rotazione e pel baricentro, e così diretta da formare coll'asse Z un angolo tale che sia

$$(29) \ldots\ldots\ldots \qquad \text{tang.}\, \widehat{UZ} = -\frac{i_z^2}{i\lambda_{yz}};$$

e di più la quantità di moto

$$mwr.\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2},$$

applicata al baricentro e parallela a Z; se a questa aggiungiamo la quantità di moto mv dovuta alla traslazione, avremo che il sistema delle quantità di moto sarà ricondotto alla mU assegnata di sopra, ed alla

$$(30) \ldots\ldots\ldots \qquad mV = mwr.\left\{\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}+\frac{v}{wr}\right\},$$

passante pel baricentro e diretta parallelamente a Z.

Se sia

$$v = -w r . \frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2} ,$$

la mV diventa zero, e cadiamo nel caso del § 14.

18. Risulta da ciò, che se facciamo agire sopra il sistema due forze, l'una applicata al baricentro, diretta nel senso dell'asse Z e capace di ingenerare nel sistema stesso la quantità di moto mV; l'altra passante pel centro di giratore minimo corrispondente ad asse O parallelo all'asse Z, diretta come si è detto sopra della mU e capace d'ingenerare nel sistema stesso una quantità di moto mU, per la loro simultanea azione il sistema concepirà due movimenti, l'uno di rotazione intorno all'asse O con velocità angolare w, data dalla

$$(31) \ldots\ldots\ldots \qquad w = \frac{U}{r . \sqrt{\left\{ 1 + \left\{ \frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2} \right\}^2 \right\}}} ;$$

l'altro di traslazione parallelo all'asse di rotazione con velocità assoluta v, data dalla

$$(32) \ldots\ldots\ldots \qquad v = V - \frac{U . \frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}}{\sqrt{\left\{ 1 + \left\{ \frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2} \right\}^2 \right\}}} .$$

Che se si faccia agire soltanto la forza capace d'ingenerare la quantità di moto mU, diretta come si è detto della mU e passante pel centro di giratore minimo corrispondente all'asse O, il sistema concepirà pure due movimenti, l'uno di rotazione intorno ad O con velocità angolare w data dalla (31), l'altro di traslazione parallelo e in senso opposto all'asse, con velocità assoluta v data dalla

$$(33) \ldots\ldots\ldots \qquad v = - U . \frac{\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}}{\sqrt{\left\{ 1 + \left\{ \frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2} \right\}^2 \right\}}} .$$

Se $i\lambda_{yz} = 0$, cioè se l'asse di rotazione è un asse permanente, allora sarà $v = 0$, e il sistema non concepirà che la sola rotazione w, come è già noto.

19. Da quanto abbiam detto nel paragrafo precedente e nel paragrafo 12, risulta un modo assai facile per determinare il moto che concepirà un corpo sollecitato da una forza data, capace di ingenerare nel corpo stesso una data quantità di moto mU. Per ciò, data la direzione della forza, faremo passare per la forza stessa e pel baricentro un piano, e determineremo la direzione dell'asse Z per cui questo piano è luogo dei centri di giratore minimo corrispondente ad assi paralleli a Z, come si è detto al paragrafo 10: ciò fatto, per la direzione della forza si farà passare un piano parallelo all'asse Z, e pel baricentro si condurrà l'asse X perpendicolarmente a questo piano, poi per X e Z si condurrà un piano il quale taglierà il piano passante per la forza e pel baricentro lungo una retta, che sarà la retta luogo dei centri di giratore minimo corrispondente ad assi paralleli a Z e giacenti nel piano XZ. Questa retta incontrerà la direzione della forza in un punto e, il quale sarà il centro di giratore minimo corrispondente all'asse intorno cui avviene la rotazione. Assegnato per tal modo e, si assegnerà l'asse O di rotazione coniugato con esso, e il corpo concepirà una rotazione intorno l'asse O con velocità angolare w data dalla (31), ed una traslazione parallela all'asse Z con velocità assoluta v data dalla (33).

20. Essendo la quantità

$$\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}$$

costante per tutti gli assi paralleli a Z e giacenti in un medesimo piano passante pel baricentro, le mU corrispondenti ai detti assi saranno tutte parallele fra loro, e proporzionali alla distanza dell'asse, a cui si riferiscono, dal baricentro.

Nel caso in cui il sistema essendo dotato di una rotazione w intorno all'asse O e di una traslazione v parallela al detto asse, le quantità di moto sieno riducibili ad una soltanto passante pel centro di giratore minimo corrispondente all'asse O, allora l'unica quantità di moto mU, qualunque sia l'asse, purchè parallelo a Z e giacente in uno stesso piano passante pel baricentro, è la quantità di moto di cui sarebbe dotato il baricentro del sistema se in esso si fosse concentrata tutta la massa del sistema medesimo. Infatti, in tal caso essendo

$$v_z = -wr.\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2},$$

la velocità assoluta v del baricentro sarà la risultante delle due wr parallela ed opposta ad Y, e v_z parallela a Z, cioè sarà:

$$v = wr.\sqrt{\left\{1+\left\{\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}\right\}^2\right\}}:$$

quindi

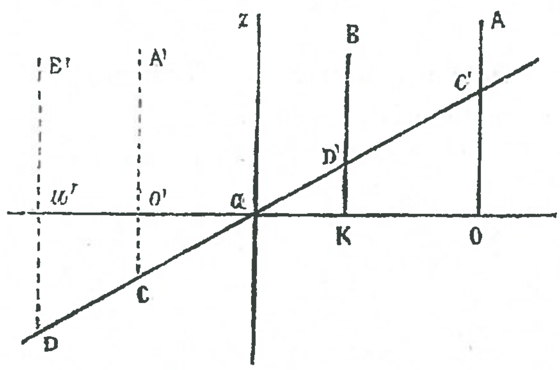
$$mv = mwr.\sqrt{\left\{1+\left\{\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}\right\}^2\right\}} = mU,$$

e

$$\cos.\widehat{vX} = 0 = \cos.\widehat{UY}; \qquad \cos.\widehat{vY} = -\frac{1}{\sqrt{\left\{1+\left\{\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}\right\}^2\right\}}} = \cos.\widehat{UY};$$

$$\cos.\widehat{vZ} = -\frac{\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}}{\sqrt{\left\{1+\left\{\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}\right\}^2\right\}}} = \cos.\widehat{UZ}.$$

21. Sieno ora D e D' due centri reciproci di giratore minimo corrispondenti ad assi paralleli all'asse O e giacenti con esso in un medesimo piano passante pel baricentro G del sistema; si scomponga la quantità di moto mU applicata in C, centro di giratore minimo corrispondente all'asse O, in due, l'una mu applicata in D, l'altra mu' applicata in D', sarà:



$$U = u + u' \, ,$$

e di più

$$u = U . \frac{CD'}{DD'} \; ; \qquad u' = U . \frac{CD}{DD'} \; ;$$

ma, detto α l'angolo ZGC' che la retta, luogo dei centri di giratore minimo fa colla direzione Z degli assi, r la distanza GO ed x la Gk, è

$$GC' = \frac{r}{\text{sen.}\alpha} \; ; \quad GD' = \frac{x}{\text{sen.}\alpha} \; ; \quad GC = \frac{i_z^2}{r.\,\text{sen.}\alpha} \; ; \quad GD = \frac{i_z^2}{x.\,\text{sen.}\alpha} \; ;$$

quindi, sostituendo questi valori nelle precedenti relazioni, sarà

$$u = U . \frac{\{i_z^2 + r x\} . x}{r . \{i_z^2 + x^2\}} \; ; \qquad u' = U . \frac{(r - x) . i_z^2}{r . \{i_z^2 + x^2\}} \; ,$$

e sostituendo ad U il suo valore

$$(34) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} u &= w . \frac{\{i_z^2 + r x\} . x}{i_z^2 + x^2} . \sqrt{\left\{ 1 + \left\{ \frac{i \lambda_{yz}}{i_z^2} \right\}^2 \right\}} \; ; \\ u' &= w . \frac{(r - x) . i_z^2}{i_z^2 + x^2} . \sqrt{\left\{ 1 + \left\{ \frac{i \lambda_{yz}}{i_z^2} \right\}^2 \right\}} \; , \end{aligned} \right.$$

e il sistema si potrà supporre animato dalla quantità di moto mV passante pel baricentro e diretta secondo l'asse Z, e dalle due quantità mu ed mu' applicate in D ed in D', giacenti in piani paralleli ad O e perpendicolari al piano passante per l'asse e pel baricentro, parallele fra loro e formanti coll'asse Z un angolo la cui tangente è

$$- \frac{i_z^2}{i \lambda_{yz}} \; .$$

22. Il massimo valore che possono prendere u ed u' corrisponde ai due valori di x

$$(35) \ldots\ldots\ldots \qquad x_1 = i_0 + r \; ; \qquad x_2 = (i_0 - r) \; ,$$

nei quali, posto per brevità di scrittura

$$\sqrt{\left\{1+\left\{\frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2}\right\}^2\right\}}=k\ ,$$

diventano rispettivamente

$$(36)\ \ldots\ldots\quad u={}^1/_2 k.w(i_0+r)\ ;\qquad u'={}^1/_2 k.w(i_0-r)$$

nel primo, ed

$$u=-{}^1/_2 k.w(i_0-r)\ ;\qquad u'=-{}^1/_2 k.w(i_0+r)$$

nel secondo.

La minima distanza a cui possono giacere i due centri reciproci D e D' essendo poi corrispondente ad $x=i_z$, nel qual caso distano egualmente dal baricentro, quando ciò succeda sarà

$$(37)\ \ldots\ldots\quad u={}^1/_2 k.w\left\{i_z+r\right\}\ ;\qquad u'=-{}^1/_2 k.w\left\{i_z-r\right\}\ .$$

23. Si abbia ora un corpo il quale ruoti intorno all'asse OA con velocità angolare w, e contemporaneamente si trasporti parallelamente ad OA con velocità assoluta v, e con un mezzo qualunque venga trasmessa al sistema una quantità di moto mu' eguale e direttamente opposta alla mu' calcolata di sopra, passante cioè per D' e diretta in senso opposto ad u', allora si estinguerà tutta la quantità di moto raccolta in D', e resterà solo la quantità di moto mu raccolta in D, e la quantità di moto mV applicata al baricentro e diretta parallelamente all'asse. In virtù di queste due quantità di moto, § 18, il corpo concepirà una rotazione intorno all'asse kB, parallelo ad OA e coniugato con D, con velocità angolare w_1 data dalla

$$(38)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\quad w_1=w.\frac{i_z^2+rx}{i_z^2+x^2}\ ,$$

ed una traslazione parallela all'asse con velocità assoluta v_1 data dalla

$$(39)\ \ldots\ldots\ldots\quad v_1=v+wi\lambda_{yz}.\frac{r-x}{i_z^2+x^2}\ .$$

Che se invece venga comunicata al corpo una quantità di moto mu

passante per D, eguale e direttamente opposta alla mu calcolata sopra, allora si estinguerà la quantità di moto raccolta in D, e per virtù delle due rimanenti, il corpo prenderà a girare intorno l'asse u' con velocità angolare w_2 e si sposterà parallelamente all'asse con velocità v_2 data dalle

$$w_2 = - w . \frac{(r-x).x}{i_z^2 + x^2} ;$$

$$v_2 = v + w . \frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2} . \frac{\{i_z^2 + rx\}.x}{i_z^2 + x^2} .$$

Il caso si realizzerebbe mediante un corpo il quale venga ad urtare il sistema nella direzione di u o di u' con una quantità di moto mu od mu', e si fermi a far parte del sistema; oppure venendo il sistema ad urtare contro un ostacolo in modo che la normale al punto di contatto passi per D' o per D e sia diretta secondo u, e che di più l'ostacolo opposto non impedisca menomamente il moto di trasporto parallelamente all'asse di rotazione.

24. Possiamo ora proporci una serie di problemi analoghi a quelli così elegantemente risolti dal Poinsot relativamente all'urto dei corpi, fra i quali mi accontenterò di sceglierne alcuni che mi pare poter meritare maggiore attenzione.

Problema I. Assegnare il punto D' per cui deve passare la quantità di moto mu' comunicata al sistema, eguale ed in senso opposto alla mu', perchè sia estinta la traslazione e resti soltanto la rotazione intorno all'asse passante per D'.

Dovendo essere $v_1 = 0$, sarà

$$v . \{i_z^2 + x^2\} + w i \lambda_{yz} . (r - x) = 0 ;$$

donde avremo

$$x = \frac{1}{2} . \frac{w . i\lambda_{yz}}{v} \pm \sqrt{\left\{ \left\{ \frac{1}{2} . \frac{w . i\lambda_{yz}}{v} - r \right\}^2 - i_0^2 \right\}} .$$

Perchè il problema sia possibile è necessario che sia

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{w . i \lambda_{yz}}{v} - r > i_0 ;$$

ossia

$$v < \frac{1}{2} w . \frac{i \lambda_{yz}}{i_0 + r} ;$$

se ciò ha luogo, i punti che godono della proprietà accennata sono due, situati ambedue dalla medesima parte del baricentro.

Se v fosse negativo, ossia se il moto di trasporto fosse in senso opposto all'asse, sarebbe

$$x = -\frac{1}{2} w . \frac{i \lambda_{yz}}{v} \pm \sqrt{\left\{ \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{w . i \lambda_{yz}}{v} + r \right)^2 - i_0^2 \right\}} :$$

e perchè il problema fosse possibile dovrebbe essere

$$v < \frac{1}{2} w . \frac{i \lambda_{yz}}{i_0 - r} .$$

Se fosse nel primo caso

$$v = \frac{1}{2} w . \frac{i \lambda_{yz}}{i_0 + r} ,$$

i due punti si ridurrebbero al solo punto dato dalla

$$x = i_0 + r ,$$

e se fosse nel secondo

$$v = \frac{1}{2} w . \frac{i \lambda_{yz}}{i_0 - r} ,$$

i punti si ridurrebbero al solo

$$x = -(i_0 - r) .$$

In ambedue i casi si estinguerebbe la traslazione, e il corpo girerebbe intorno all'asse passante pel punto corrispondente con velocità angolare

$$w_1 = {}^1/_2 w ,$$

cioè con una velocità angolare che sarebbe la metà della primitiva.

25. *Problema II.* Assegnare quel punto per cui deve passare la quantità di moto opposta al corpo perchè la velocità angolare di rotazione, dopo l'urto, sia la più grande o la più piccola possibile, nonchè quello per cui sia massima o minima la velocità assoluta di rotazione del baricentro.

Per assegnare il primo punto converrà render massima la quantità

$$\frac{i_z^2 + r x}{i_z^2 + x^2} ;$$

ed i soliti metodi ci somministreranno i due valori

$$x_1 = \frac{i_z \{ i_0 - i_z \}}{r} ; \qquad x_2 = - \frac{i_z \{ i_0 + i_z \}}{r} ,$$

ai quali corrispondono le due velocità angolari

$$w_1 = \frac{1}{2} w . \frac{i_0 + i_z}{i_0} ; \qquad w_1' = - \frac{1}{2} w . \frac{i_0 - i_z}{i_z} ,$$

per essere $i^2_0 - i_z^2 = r^2$

Per assegnare invece quei punti per cui riesce massima la velocità assoluta di rotazione del baricentro converrà rendere massima la quantità

$$\frac{i_z^2 . x + r . x^2}{i_z^2 + x^2} ,$$

e i soliti criteri daranno

$$x_1 = i_0 + r ; \qquad x_2 = - \{ i_0 - r \} ,$$

pei quali sarà

$$w_1 \, x_1 = {}^1/_2 \, w . \{ i_0 + r \} ; \qquad w_1 \, x_2 = - {}^1/_2 \, w . \{ i_0 - r \} ;$$

questi ultimi punti corrispondono a quelli pei quali è massima la quantità di moto comunicata.

26. *Problema III.* Assegnare quel punto pel quale convien far passare la quantità di moto opposta al sistema perchè la velocità di traslazione dopo l'urto sia la massima possibile.

Essendo

$$v_1 = v + w \,.\, i\lambda_{yz} \,.\, \frac{r - x}{i_z^2 + x^2} ,$$

converrà render massima la quantità

$$\frac{r - x}{i_z^2 + x^2} ;$$

e per ciò avremo

$$x_1 = i_0 + r ; \qquad x_2 = -(i_0 - r) ,$$

pei quali punti passando la quantità di moto opposta sarà, dopo l'urto,

$$v_1 = v - \frac{1}{2} w \,.\, \frac{i\lambda_{yz}}{i_0 + r} ; \qquad v_1' = v + \frac{1}{2} w \,.\, \frac{i\lambda_{yz}}{i_0 - r} .$$

Evidentemente i punti x_1 ed x_2 corrispondono ai due centri coniugati di giratore minimo per cui sono massime u ed u'.

27. *Problema IV.* Assegnare quei punti per cui deve passare la quantità di moto opposta al sistema perchè la velocità assoluta di rotazione del baricentro, e la velocità assoluta di traslazione dopo l'urto abbiano colle primitive un determinato rapporto.

Dovendo essere

$$w_1 \,.\, x = m \,.\, wr ; \qquad v_1 = n \,.\, v ,$$

avremo, per soddisfare alla prima,

$$x = \frac{1}{2} \,.\, \frac{i_z^2}{r(m-1)} \,.\, \left\{ 1 \pm \sqrt{\left\{ 1 - 4m(m-1) \,.\, \frac{r^2}{i_z^2} \right\}} \right\} ,$$

e per soddisfare alla seconda

$$x = -\frac{1}{2} w \,.\, \frac{i\lambda_{yz}}{(n-1)r} \pm \sqrt{\left\{ \left\{ \frac{1}{2} w \,.\, \frac{i\lambda_{yz}}{(n-1)v} + r \right\}^2 - i_0^2 \right\}} .$$

Perchè il primo caso sia possibile è mestieri che sia

$$4m(m-1) \,.\, \frac{r^2}{i_z^2} < 1 .$$

Ora, essendo la massima velocità assoluta di rotazione che può concepire il baricentro

$$\frac{1}{2} w . \left\{ i_0 + r \right\} ,$$

si scorge che dovrà sempre essere

$$m < \frac{1}{2} . \frac{i_0 + r}{\rho} ;$$

donde

$$4m(m - 1) . \frac{r^2}{i_z^2} < 1 .$$

La condizione superiore dunque non altro dice se non se che il rapporto sia tale che non debba dopo l'urto la velocità assoluta di rotazione del baricentro diventare più grande di quella ch'egli può concepire.

Lo stesso si scorgerà essere per la velocità di traslazione, essendo il problema possibile solo quando u abbia un tale valore che v_1 non superi la massima possibile.

28. *Problema V.* Assegnare quei punti per cui deve passare la quantità di moto opposta al sistema perchè la velocità assoluta del baricentro dopo l'urto sia la più grande possibile:

Essendo il quadrato della velocità assoluta del baricentro dopo l'urto

$$w_1^2 x^2 + v_1^2 ,$$

bisognerà soddisfare alla

$$w_1 . x . \left\{ \frac{d . w_1 x}{dx} \right\} + v_1 . \left\{ \frac{d v_1}{d x} \right\} = 0 .$$

Sostituendo in questa i valori di w_1 e di v_1 dati superiormente, si ottiene un'equazione del quarto grado, la quale è risolubile nelle due

$$x^2 - 2 r x - i_z^2 = 0 ;$$

$$\left\{ \frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2} . \frac{\rho}{wr} - 1 \right\} . x^2 - \frac{i_z^4 + \overline{i\lambda_{yz}}^2}{r . i_z^2} . x + i\lambda_{yz} . \left\{ \frac{\rho}{wr} + \frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2} \right\} = 0 .$$

La prima somministra

$$x_1 = i_0 + r \; ; \qquad x_2 = i_0 - r \; ,$$

come ai §§ 25 e 26, essendo evidente che deve essere massima la velocità assoluta del baricentro quando, colpendo nello stesso punto, è massima tanto la sua velocità assoluta di rotazione quanto la sua velocità di traslazione.

La seconda poi avrà due radici reali se sarà

$$\frac{v^2}{w^2 r^2} + \left\{ \frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2} - \frac{i_z^2}{i\lambda_{yz}} \right\} \cdot \frac{v}{wr} + 1 < \left\{ \frac{i_z^4 + \overline{i\lambda_{yz}}^2}{2\, i\lambda_{yz} \cdot i_z \cdot r} \right\}^2 ,$$

ed i valori di x corrispondono al caso in cui la velocità assoluta del baricentro è minima.

Se sia

$$v = -wr \cdot \frac{i\lambda_{yz}}{i_z^2} \; ,$$

nel qual caso tutte le quantità di moto sono riducibili ad una sola passante pel centro di giratore minimo, avremo

$$x = -\frac{i_z^2}{r} \; ;$$

cioè il centro stesso di giratore minimo, e si estinguerà qualunque movimento; l'altro valore $x = 0$ corrisponde ad un centro situato a distanza infinita, ossia ad un caso fuori di quelli da noi contemplati.

29. Non mi fermerò qui a mostrare la corrispondenza di questi teoremi con quelli di Poinsot, perchè ciascuno può facilmente trovarla da sè, e mi accontenterò di chiudere queste ricerche con una osservazione.

Se diciamo asse spontaneo di rotazione quell'asse intorno a cui il corpo prende a girare sotto l'azione di un'unica forza senza che l'asse stesso soffra alcuno spostamento, allora, da quanto abbiam detto superiormente, si scorge che ciò non può aver luogo a meno che non sia $i\lambda_{yz} = 0$, ossia a meno che l'asse non sia uno di quelli che si dicono assi permanenti, e allora la forza dovrà operare perpendicolarmente al piano che passa per l'asse di rotazione e pel baricentro, e passare pel centro di giratore nullo, centro di percossa, corrispondente all'asse medesimo. Se però, come pare più consentaneo alla denominazione, diciamo asse spontaneo di rotazione quell'asse intorno a cui il corpo, sollecitato da un'unica forza, prende a girare senza ingenerare alcuna pressione normale all'asse, ma lasciando libero al corpo di strisciare lungo l'asse, o all'asse di strisciare sopra se stesso, allora qualunque asse può essere asse spontaneo di rotazione; cioè, in altre parole, si può sempre mediante l' impiego di un'unica forza comunicare ad un corpo una rotazione intorno ad un asse dato, purchè si conceda all'asse di strisciare lungo se stesso, nel qual caso il suo moto diventa quello di una vite nella sua chiocciola; per far ciò basterà far passare la forza pel centro di giratore minimo corrispondente all'asse dato, e dirigerla in modo che giaccia in un piano parallelo all'asse e perpendicolare al piano che passa per l'asse e pel baricentro, e formi colla direzione dell'asse un angolo la cui tangente trigonometrica sia eguale a $-\frac{i_z^2}{i\lambda_{yz}}$.