SU LE CONDIZIONI
DI INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI
MEMORIA

DEL SOCIO ATTUALE

PROF. GASPARE MAINARDI

Ricevuta il 15 Settembre 1856.

Le condizioni a cui deve soddisfare una funzione di due variabili dipendenti e dei differenziali dell' una rispetto all' altra perchè sia differenziale prima esatta, cercate col metodo diretto di Condorcet, sono tante quant' è l' ordine del più elevato differenziale implicito nella funzione; e la celebre equazione di Eulero si offre quale complessiva espressione di quelle parziali condizioni. Gli illustri Geometri Joachimsthal e Raabe dimostrarono dipoi che le vere condizioni elementari non sono quante offriva spontaneamente l' analisi di Condorcet; ma la stessa analisi conduce con grande semplicità alla importante riduzione. — Dopo queste invenzioni rimane, a mio avviso, un campo da investigare, cioè lo studio delle condizioni a cui deve soddisfare una funzione differenziale esatta di qualunque ordine superiore al primo: che è il tema del presente mio lavoro. Quelle condizioni sono certamente implicite nelle equazioni di Lexell, ma si trovano in esse celate più che la scoperta di Joachimsthal nella equazione di Eulero.

I. Indico colla lettera x una variabile, con y una funzione indeterminata di x, con y_n il coefficiente differenziale $\frac{d^n y}{dx^n}$, e con $f(x, y, y_1, y_2 \ldots\ldots y_{r+1})$ una funzione differenziale esatta del primo ordine di altra funzione incognita $F(x, y, y_1 \ldots\ldots y_r)$, onde

$$(a)\quad f(x \ldots y_{r+1}) = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y_1 + \frac{dF}{dy_1} y_2 + \ldots + \frac{dF}{dy_{r-1}} y_r + \frac{dF}{dy_r} y_{r+1}.$$

Siccome il secondo membro contiene y_{r+1} solo esplicitamente sarà la forma di $f = Ay_{r+1} + B$, potendo essere A, B funzioni di $x, y, y_1 \dots y_r$. Saranno per conseguenza

$$(1) \qquad \frac{dF}{dy_r} = A, \qquad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y_1 + \dots\dots + \frac{dF}{dy_{r-2}} y_{r-1} + \frac{dF}{dy_{r-1}} y_r = B.$$

Differenziamo parzialmente la seconda equazione rispetto ad y_r, e per la prima conseguiremo la seguente

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dy} y_1 + \frac{dA}{dy_1} y_2 + \dots\dots + \frac{dA}{dy_{r-1}} y_r + \frac{dF}{dy_{r-1}} = \frac{dB}{dy_r}.$$

Il primo membro di questa equazione, esclusovi l' ultimo termine, indichiamolo col simbolo $\phi(A)$ e sarà

$$(2) \qquad \frac{dF}{dy_{r-1}} = \frac{dB}{dy_r} - \phi(A) = A_1 \quad \text{per abbreviazione di scrittura.}$$

Differenziata la seconda equazione (1) rispetto ad $y_{r-1}, y_{r-2}, y_{r-3} \dots$ porgerà le seguenti

$$(3) \qquad \frac{dF}{dy_{r-2}} = \frac{dB}{dy_{r-1}} - \phi(A_1) = A_2$$

$$(4) \qquad \frac{dF}{dy_{r-3}} = \frac{dB}{dy_{r-2}} - \phi(A_2) = A_3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(r+1) \qquad \frac{dF}{dy} = \frac{dB}{dy_1} - \phi(A_{r-1}) = A_r$$

$$(r+2) \qquad \frac{dF}{dx} = B - A_r y_1 - A_{r-1} y_2 \dots - A_1 y_r = A_{r+1}.$$

Confrontando fra loro queste equazioni, per esempio la prima (1) con tutte le seguenti ne deduciamo $r+1$ condizioni espresse dalle due

$$(b) \qquad \frac{dA}{dy_{r-t}} = \frac{dA_t}{dy_r}, \qquad \frac{dA}{dx} = \frac{dA_{r+1}}{dy_r}$$

ove si faccia $t = 1, 2, 3 \dots\dots r$.

Consideriamo due di quelle equazioni (1), (2) ..... che scrivo

$$\frac{dB}{dy_{r-t}} - \phi(A_t) = A_{t+1}, \qquad \frac{dB}{dy_{r-u}} - \phi(A_u) = A_{u+1},$$

e differenziate la prima rispetto ad y_{r-u}, la seconda per y_{r-t}, siccome

$$\frac{d\varphi(A_t)}{dy_{r-u}} = \varphi\left(\frac{dA_t}{dy_{r-u}}\right) + \frac{dA_t}{dy_{r-u-1}}, \qquad \frac{d\varphi(A_u)}{dy_{r-t}} = \varphi\left(\frac{dA_u}{dy_{r-t}}\right) + \frac{dA_u}{dy_{r-t-1}},$$

sottratte l' una dall'altra le equazioni che ne derivano, posto per brevità

$$\frac{dA_{u+1}}{dy_{r-t}} - \frac{dA_t}{dy_{r-u-1}} = z_{u,t-1} = -z_{t-1,u}$$

avremo la relazione

$$z_{u,t-1} - z_{t,u-1} + \varphi(z_{u-1,t-1}) = 0,$$

ovvero, supponendo $u = h \pm \omega$, $t = h \pm \theta$, essendo h, ω, θ simboli di numeri interi positivi

$$z_{h\pm\omega,\,h\pm\theta-1} - z_{h\pm\theta,\,h\pm\omega-1} + \varphi(z_{h\pm\omega-1,\,h\pm\theta-1}) = 0,$$

la quale equazione dimostra che supposte

$$z_{h,h\pm1} = z_{h,h\pm3} = z_{h,h\pm5} \ldots\ldots = 0,$$

sarà $z_{u,t} = 0$ per tutti i possibili valori di u, t.

Siccome poi dalla precedente equazione $(r+2)$, differenziata parzialmente rispetto a qualunque y_t, si desume

$$\frac{d^2F}{dx\,dy_t} = \frac{dB}{dy_t} - y_1\frac{dA_r}{dy_t} - y_2\frac{dA_{r-1}}{dy_t} \ldots\ldots - y_r\frac{dA_1}{dy_t} - A_{r-t+1}$$

$$= \varphi(A_{r-t}) - y_1\frac{dA_{r-t}}{dy} - y_2\frac{dA_{r-t}}{dy_1} \ldots\ldots - y_r\frac{dA_{r-t}}{dy_{r-1}} = \frac{dA_{r-t}}{dx},$$

concludiamo che le condizioni (b) necessarie e sufficienti sono $\frac{r+1}{2}$, ovvero $\frac{r+2}{2}$, secondo che il numero $r=1$ è pari o dispari: Teorema di Joachimsthal e Raabe che ho brevemente ricordato.

Se la equazione (a) si differenzia di seguito rispetto ad y_{r+1}, y_r, y_{r-1} ..... ne derivano

$$\frac{df}{dy_{r+1}} = \frac{dF}{dy_r}, \quad \frac{df}{dy_r} = d_x\left(\frac{dF}{dy_r}\right) + \frac{dF}{dy_{r-1}}, \quad \frac{df}{dy_{r-1}} = d_x\left(\frac{dF}{dy_{r-1}}\right) + \frac{dF}{dy_{r-2}},$$

$$\ldots\ldots \frac{df}{dy_1} = d_x\left(\frac{dF}{dy_1}\right) + \frac{dF}{dy}, \quad \frac{df}{dy} = d_x\left(\frac{dF}{dy}\right),$$

d' onde si ricava la condizione complessa di Eulero

$$\frac{df}{dy} - d_x\left(\frac{df}{dy_1}\right) + d_x^2\left(\frac{df}{dy_2}\right) \dots + (-1)^{r+1}\, d_x^{r+1}\left(\frac{df}{dy_{r+1}}\right) = 0.$$

Questa equazione si scrive nel seguente modo

$$\Sigma(-1)^{t+1}\Big[d_x^{r-t}\left(\frac{dB}{dy_{r-t}} + y_{r+1}\frac{dA}{dy_{r-t}}\right) -$$
$$d_x^{r-t-1}\left(\frac{dB}{dy_{r-t-1}} + y_{r+1}\frac{dA}{dy_{r-t-1}}\right)\Big] = 0,$$

e siccome $\quad \frac{dB}{dy_{r-t}} = \bar{\varphi}(A_t) + A_{t+1}, \quad \bar{\varphi}(A_t) = d_x(A_t) - y_{r+1}\frac{dA_t}{dy_r}$,

avremo $\quad \Sigma(-1)^{t+1}\Big[d_x^{r-t}\Big\{d_x(A_t) + A_{t+1} + y_{r+1}\left(\frac{dA}{dy_{r-t}} - \frac{dA_t}{dy_r}\right)\Big\} -$

$$d_x^{r-t-1}\Big\{d_x(A_{t+1}) + A_{t+2} + y_{r+1}\left(\frac{dA}{dy_{r-t-1}} - \frac{dA_{t+1}}{dy_r}\right)\Big\}\Big] = 0,$$

ossia $\quad \Sigma(-1)^{t+1}\Big[d_x^{r-t}\, y_{r+1}\left(\frac{dA}{dy_{r-t}} - \frac{dA_t}{dy_r}\right)\Big] = 0,$

la quale, secondo l' analisi del Sig. Com.^{e} Bordoni, riconduce alle condizioni (b).

II. Supponiamo

$$f(x, y, y_1, \dots y_r, y_{r+1}, y_{r+2}) = d_x^2 F(x, y, y_1, \dots y_r) =$$

$$= \frac{d^2F}{dx^2} + 2\sum_0^{r-1}\frac{d^2F}{dx\,dy_t}y_{t+1} + 2\sum_0^{r-1}\sum_0^{r-1}\frac{d^2F}{dy_t\,dy_u}y_{t+1}y_{u+1} + \sum_0^{r-1}\frac{d^2F}{dy_t^2}y_{t+1}^2$$

$$+ 2y_{r+1}\left\{\frac{d^2F}{dx\,dy_r} + \sum_0^{r-1}\frac{d^2F}{dy_t\,dy_r}y_{t+1}\right\} + \frac{d^2F}{dy_r^2}y_{r+1}^2 + \frac{dF}{dy_r}y_{r+2}$$

$$+ \frac{dF}{dy}y_2 + \frac{dF}{dy_1}y_3 + \dots + \frac{dF}{dy_{r-1}}y_{r+1}.$$

Sarà quindi la forma di

$$f(x, y, \dots y_{r+2}) = Ay_{r+2} + By_{r+1} + Cy^2_{r+1} + D,$$

dove $A, B \dots$ possono essere funzioni di $x, y, y_1 \dots y_r$: epperò avremo

$$\frac{dF}{dy_r} = A, \quad \frac{d^2F}{dy_r^2} = C = \frac{dA}{dy_r}, \quad B = \frac{dF}{dy_{r-1}} + 2\frac{dA}{dx} + 2\sum_0^{r-1} \frac{dA}{dy_t} y_{t+1},$$

$$\begin{aligned} &\frac{d^2F}{dx_2} + 2\sum_0^{r-1} \frac{d^2F}{dx\,dy_t} y_{t+1} + 2\sum_0^{r-1}\sum_0^{r-1} \frac{d^2F}{dy_t\,dy_u} y_{t+1} y_{u+1} + \sum_0^{r-1} \frac{d^2F}{dy_t^2} y_{t+1}^2 \\ (b) \qquad &+ \frac{dF}{dy} y_2 + \frac{dF}{dy_1} y_3 \ldots\ldots + \frac{dF}{dy_{r-3}} y_{r-1} + \frac{dF}{dy_{r-2}} y_r = D, \end{aligned}$$

ove dal terzo termine della prima riga di quest' ultima equazione si escludano quelli compresi nel quarto. Abbiamo quindi le due condizioni

$$(1) \qquad C = \frac{dA}{dy_r}, \quad \frac{dB}{dy_r} = 3\frac{dA}{dy_{r-1}} + 2\frac{d^2A}{dx\,dy_r} + 2\sum_0^{r-1} \frac{d^2A}{dy_t\,dy_r} y_{r+1},$$

poi (2) $\dfrac{dF}{dy_r} = A, \quad \dfrac{dF}{dy_{r-1}} = B - 2\dfrac{dA}{dx} - 2\sum_0^{r-1} \dfrac{dA}{dy_t} y_{t+1} = A_1,$

per brevità di scrittura.

Indichiamo la prima riga della equazione (b) col segno $\varphi(F)$, la seconda con $\psi(F)$, e poniamo

$$\frac{dF}{dx} + y_1\frac{dF}{dy} + y_2\frac{dF}{dy_1} \ldots\ldots + y_r\frac{dF}{dy_{r-1}} = \xi(F).$$

Si differenzii la equazione (b) successivamente rispetto ad y_r, y_{r-1}, y_{r-2} ..... e ne dedurremo

$$(3) \qquad \frac{dF}{dy_{r-2}} = \frac{dD}{dy_r} - \varphi(A) - 2\xi(A_1) - \psi(A) = A_2$$

$$(4) \qquad \frac{dF}{dy_{r-3}} = \frac{dD}{dy_{r-1}} - \varphi(A_1) - 2\xi(A_2) - \psi(A_1) = A_3$$

. . . .

$$\frac{dF}{dy} = \frac{dD}{dy_1} - \varphi(A_{r-2}) - 2\xi(A_{r-1}) - \psi(A_{r-2}) = A_r.$$

Queste equazioni paragonate fra loro, per esempio ciascuna colla (2), porgono tante condizioni espresse dalla seguente

$$(5) \qquad \frac{dA_t}{dy_r} = \frac{dA}{dy_{r-t}}$$

in cui si faccia $t = 1, 2, 3 \ldots\ldots r$: le quali insieme alla (1) forniscono $r+1$ condizioni irreducibili.

Siccome $\frac{d^2F}{dx^2} = D - (y_2 A_r + y_3 A_{r-1} \ldots\ldots + y_r A_2)$

$$-2\sum_0^{r-1} \frac{dA_{r-t}}{dx} y_{t+1} - 2\sum_0^{r-1}\sum_0^{r-1} \frac{dA_{r-t}}{dy_u} y_{t+1} y_{u+1} - \sum_0^{r-1} \frac{dA_{r-t}}{dy_t} y^2_{t+1}$$

differenziando rispetto a qualunque y_h, in forza della equazione (5), si deduce

$$\frac{d^3F}{dx^2\,dy_h} = \frac{dD}{dy_h} - \left(y_2 \frac{dA_{r-h}}{dy} + y_3 \frac{dA_{r-h}}{dy_1} \ldots\ldots + y_r \frac{dA_{r-h}}{dy_{r-2}} + A_{r-h+2}\right)$$

$$-2\sum_0^{r-1} \frac{d^2A_{r-h}}{dx\,dy_t} y_{t+1} - 2\Sigma\Sigma \frac{d^2A_{r-h}}{dy_t\,dy_u} y_{t+1} y_{u+1} - \Sigma \frac{d^2A_{r-h}}{dy_t^2} y^2_{t+1}$$

$$-2\frac{dA_{r-h+1}}{dx} - 2\Sigma \frac{dA_{r-h+1}}{dy_u} y_{u+1} - 2\frac{dA_{r-h+1}}{dy_{h-1}} y_h$$

$$= \frac{dD}{dy_h} - A_{r-h+2} - \psi(A_{r-h}) - 2\xi(A_{r-h+1}) - \varphi(A_{r-h}) + \frac{d^2A_{r-h}}{dx^2} = \frac{d^2A_{r-h}}{dx^2},$$

che non aggiunge ulteriore condizione: il loro numero è quindi espresso da $r+1$; quante appunto ne indica il teorema di Joachimsthal, cioè $\frac{r+1}{2} + \frac{r+1}{2}$ se $r+1$ è pari; $\frac{r+2}{2} + \frac{r}{2}$ se $r+1$ è dispari.

III. Sia $\quad f(x, y, y_1 \ldots\ldots y_{r+3}) = d^3_x F(x, y, y_1 \ldots\ldots y_r) =$

$$= \frac{d^3F}{dx^3} + 3\sum_0^{r-1} \frac{d^3F}{dx^2\,dy_t} y_{t+1} + 2.3\sum_0^{r-1} \frac{d^3F}{dx\,dy_t\,dy_u} y_{t+1} y_{u+1}$$

$$+ 3\Sigma \frac{d^3F}{dx\,dy_t^2} y^2_{t+1} + \Sigma \frac{d^3F}{dy_t^3} y^3_{t+1} + 2.3\,\Sigma\Sigma\Sigma \frac{d^3F}{dy_t\,dy_u\,dy_v} y_{t+1} y_{u+1} y_{v+1}$$

$$+ 3\Sigma \frac{d^3F}{dy_t^2\,dy_u} y^2_{t+1} y_{u+1}$$

$$+ \sum_0^{r-2} \frac{d^2F}{dx\,dy_t} y_{t+2} + 3\sum_0^{r-2} \frac{d^2F}{dy_t\,dy_u} (y_{t+1} y_{u+2} + y_{t+2} y_{u+1})$$

$$+ y_{r+1}\Bigg[3\frac{d^3F}{dx^2\,dy_r} + 2.3\sum_0^{r-1} \frac{d^3F}{dx\,dy_t\,dy_r} y_{t+1} + 3\sum_0^{r-2} \frac{d^2F}{dy_t\,dy_{r-1}} y_{t+2} + \frac{d^2F}{dx\,dy_{r-1}}$$

$$+ 3\sum_0^{r-1} \frac{d^3F}{dy_t^2\,dy_{r-1}} y^2_{t+1} + 2.3\,\Sigma\Sigma \frac{d^3F}{dy_t\,dy_u\,dy_r} y_{t+1} y_{u+1}\Bigg] +$$

$$+ y^2_{r+1}\left[3\,\frac{d^3F}{dx\,dy_r^2} + 3\sum_0^{r-1}\frac{d^3F}{dy_t\,dy_r^2}\,y_{t+1} + 3\,\frac{d^3F}{dy_{r-1}\,dy_r}\right] + y^3_{r+1}\,\frac{d^3F}{dy_r^3} +$$

$$+ y_{r+2}\left[\frac{d^2F}{dx\,dy_r} + 3\sum_0^{r-1}\frac{d^2F}{dy_t\,dy_r}\,y_{t+1}\right] + 3\,y_{r+1}\,y_{r+2}\,\frac{d^2F}{dy_r^2}$$

$$+ \frac{dF}{dy}\,y_3 + \frac{dF}{dy_1}\,y_4\,\ldots\ldots + \frac{dF}{dy_{r-2}}\,y_{r+1} + \frac{dF}{dy_{r-1}}\,y_{r+2} + \frac{dF}{dy_r}\,y_{r-3}\,, \qquad (a)$$

quindi deduciamo, la forma di

$$f = Ay_{r+3} + By_{r+1}\,y_{r+2} + Cy^3_{r+1} + Dy^2_{r+1} + Ey_{r+2} + Gy_{r+1} + H$$

le condizioni

$$(1) \qquad A = \frac{dF}{dy_r}, \qquad B = 3\,\frac{d^2F}{dy_r^2} = 3\,\frac{dA}{dy_r}, \qquad C = \frac{d^3F}{dy_r^3} = \frac{d^2A}{dy_r^2},$$

$$D = 3\left[\frac{d^2A}{dx\,dy_r} + \frac{dA}{dy_{r-1}} + \sum_0^{r-1}\frac{d^2A}{dy_t\,dy_r}\,y_{t+1}\right]$$

ed anche

$$(2) \qquad \frac{dF}{dy_{r-1}} = E - \frac{dA}{dx} - 3\sum_0^{r-1}\frac{dA}{dy_t}\,y_{t+1} = A_1 \quad \text{per brevità di scrittura,}$$

$$\frac{dF}{dy_{r-2}} = G - 3\,\frac{d^2A}{dx^2} - 2.3\sum_0^{r-1}\frac{d^2A}{dx\,dy_t}\,y_{t+1} - 2.3\,\Sigma\Sigma\,\frac{d^2A}{dy_t\,dy_u}\,y_{t+1}\,y_{u+1} -$$

$$- \frac{dA_1}{dx} - 3\sum_0^{r-2}\frac{dA_1}{dy_t}\,y_{t+2} - 3\,\Sigma\,\frac{d^2A_1}{dy_t^2}\,y^2_{t+1} = A_2\,.$$

Ciò che rimane nella equazione (a) rappresentiamolo colla scrittura simbolica

$$(b) \qquad \phi(F) + \psi(F) + y_3\frac{dF}{dy} + y_4\frac{dF}{dy_1}\,\ldots\ldots + \frac{dF}{dy_{r-1}}\,y_{r-1} + \frac{dF}{dy_{r-3}}\,y_r = H,$$

ove $\phi(F)$ indica la somma dei termini che contengono i differenziali terzi di F, $\psi(F)$ quella dei differenziali secondi. Differenziamo ora parzialmente la equazione (b) rispetto ad $y_r\,,\,y_{r-1}\,,\,y_{r-2}\,\ldots\ldots,$ e posti per brevità

*

$$3\frac{d^2A_1}{dx^2}+2.3\sum_0^{r-2}\frac{d^2A_1}{dx\,dy_t}y_{t+1}+3\frac{d^2A_1}{dy^2_{r-1}}y_r^2+2.3\frac{d^2A_1}{dx\,dy_{r-1}}+$$

$$+2.3\Sigma\Sigma\frac{d^2A_1}{dy_t\,dy_u}y_{t+1}y_{u+1}+2.3\Sigma\frac{d^2A_1}{dy_{r-1}\,dy_t}y_{t+1}+3\Sigma\frac{d^2A_1}{dy_t^2}y^2_{t+1}=\xi(A_1)$$

$$\frac{dA_2}{dx}+2.3\Sigma\frac{dA_2}{dy_t}y_{t+1}=\zeta(A_2)$$

$$y_3\frac{dF}{dy}+\ldots\ldots+\frac{dF}{dy_{r-3}}y_r=\lambda(F),$$

si ottengono

$$(3)\quad \frac{dF}{dy_{r-3}}=\frac{dH}{dy_r}-\phi(A)-\psi(A)-\lambda(A)-\zeta(A_1)-\xi(A_2)=A_3$$

$$\frac{dF}{dy_{r-4}}=\frac{dH}{dy_{r-1}}-\phi(A_1)-\psi(A_1)-\lambda(A_1)-\zeta(A_2)-\xi(A_3)=A_4$$

. . . .

Queste equazioni paragonate per esempio colla prima (1) porgono r condizioni simbolicamente espresse dalla seguente $\frac{dA_t}{dy_r}=\frac{dA}{dy_{r-t}}$ ove si faccia $t=1,2,3\ldots\ldots r$. Aggiungendo a queste le altre tre indicate in (1) avremo $r+3$ condizioni irreducibili, essenziali e sufficienti, da che la funzione $\frac{d^3F}{dx^3}$ data dalla equazione (b) non ingiunge altra condizione. L' applicazione del Teorema di Joachimsthal al presente caso avrebbe indicato un eccedente numero di condizioni espresso da $\frac{r+3}{2}+\frac{r+3}{2}+\frac{r+1}{2}=r+3+\frac{r+1}{2}$, ovvero da

$$\frac{r+4}{2}+\frac{r+2}{2}+\frac{r+2}{2}=r+3+\frac{r+2}{2}.$$

IV. Fingiamo a cagione d' esempio

$$f=d_x^2F=x^3y_4+2x(3x-2)y_3+2(3x-1)y_2,$$

per cui $r=2,\ A=x^3,\ C=0,\ B=2x(3x-2),\ D=2(3x-1)y_2,$
$\phi(A)=6x,\ \psi(A)=0,\ A_1=-4x,\ \xi(A_1)=-4$

$$\frac{dF}{dy_2}=x^3,\quad \frac{dF}{dy_1}=A_1=-4x,\quad \frac{dF}{dy}=A_2=6,\quad \frac{d^2F}{dx^2}=6xy_2.$$

Le condizioni (1), (5) del n. 2° sono identicamente soddisfatte. Dalla equazione $\frac{dF}{dy}=6$ caviamo $F=6y+F_1(x,y_1,y_2)$, poi

$$\frac{dF}{dy_1}=\frac{dF_1}{dy_1}=-4x,\quad F_1=-4xy_1+F_2(x,y_2),\quad F=6y-4xy_1+F_2(x,y_2),$$

$$\frac{dF}{dy_2}=\frac{dF_2}{dy_2}=x^3,\quad F_2=x^3y_2+F_3(x),\quad F=6y-4xy_1+x^3y_2+F_3(x),$$

$$\frac{d^2F}{dx^2}=6xy_2+\frac{d^2F_3}{dx^2}=6xy_2,\quad \frac{d^2F_3}{dx^2}=0,\quad F_3=Mx+N,$$

$$F=6y-4xy_1+x^3y_2+Mx+N.$$

Sia $\quad f=d_x^2F=2xyy_4+[4(x-2)y_1+4y]y_3+2(x-4)y_2^2+$

$$+2(2y_1-5y)y_2+10y_1^2-36x$$

per cui $\quad r=2,\quad A=2xy,\quad C=0,\quad B=4(x-2)y_1+4y,$

$$D=2(x-4)y_2^2+2(2y_1-5y)y_2+10y_1^2-36x$$

$$\frac{dF}{dy_2}=2xy,\quad \frac{dF}{dy_1}=A_1=-8y_1,\quad \frac{dF}{dy}=A_2=2xy_2+10y,\quad \frac{d^2F}{dx^2}=-36x$$

le condizioni (1), (5) del n. 2° sono soddisfatte e troviamo

$$F=2xyy_2+5y^2-4y_1^2-6x^3+Mx+N.$$

V. Il proseguire tali ricerche non richiede ormai che lo sviluppo di un facile calcolo, per cui mi limito a determinare brevemente il numero delle condizioni cui deve soddisfare una funzione $f(x,y,y_1,y_2\ldots\ldots y_{r+n})$ perchè sia differenziale esatta dell' ordine n. Con qualche attenzione comprendiamo le seguenti deduzioni. Se da una funzione $F(x,y,y_1\ldots\ldots y_r)$ si ricava la sua conseguente d_x^nF, vedremo che questa contiene esplicitamente le quantità

$$y_{r+1}:\ y_{r+1}^2,\ y_{r+2}:\ y_{r+1}^3,\ y_{r+1}y_{r+2},\ y_{r+3}:$$

$$y_{r+1}^4,\ y_{r+1}^2y_{r+2},\ y_{r+2}^2,\ y_{r+4}:\ldots\ldots \text{ fino a tutte le seguenti}$$

$$y_{r+1}^n,\ y_{r+1}^{n-2}y_2,\ y_{r+1}^{n-3}y_3\ldots\ldots y_{r+n-1}y_{r+1},\ y_{r+n} \qquad (1)$$

il di cui numero, che indico con N, è quello dei modi coi quali ognuno dei numeri $1, 2, 3 \ldots\ldots n$, aggiunti ad r, può comporsi sommando gli stessi numeri ammesse le loro ripetizioni. Se $f = d_x^n F$, la f deve contenere esplicitamente le funzioni (1), per cui eguagliandone i coefficienti si avranno $N+1$ equazioni, una delle quali contiene $\frac{d^n F}{dx^n}$. Se non è $n<r$, da quelle equazioni caveremo i valori delle funzioni (2) $\frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dy_1} \ldots\ldots \frac{dF}{dy_r}$, che entrano esplicite in $r+1$ di esse. Quelle funzioni sostituite nelle $N-r-1$ equazioni che rimangono, esclusa quella che contiene $\frac{d^n F}{dx^n}$, daranno altrettante condizioni cui deve soddisfare la funzione $f(x, y_1 \ldots\ldots)$. Altre r condizioni si avranno eguagliando fra loro i valori dei differenziali secondi parziali dati da quelli delle funzioni (2); cosicchè il numero totale delle condizioni sarà espresso da $N-1$. I valori dei coefficienti (2), insieme a quello del $\frac{d^n F}{dx^n}$, determineranno l' integrale F.

Se $r = n + t$ fra le $N+1$ equazioni, comprese nella $f = d_x^n F$, quella che contiene $\frac{d^n F}{dx^n}$ avrà un membro della forma (3) $A + \frac{dF}{dy} y_n + \frac{dF}{dy_1} y_{n+1} \ldots\ldots + \frac{dF}{dy_t} y_{t+n}$: l' altro essendo dato dipendentemente dalla funzione f. Delle altre N equazioni, un numero $r-t$ contiene esplicitamente $\frac{dF}{dy_{t+1}} \ldots\ldots \frac{dF}{dy_{t+n}}$, di cui porgono i valori; e ne rimangono $N-(r-t) = N-n$. La equazione (3) differenziata parzialmente rispetto ad $y_{n+t}, y_{n+t-1} \ldots\ldots y_n$ darà i valori dei coefficienti $\frac{dF}{dy_t} \ldots\ldots \frac{dF}{dy}$. Le $N-n$ equazioni non impiegate, colla eliminazione di questi coefficienti $\frac{dF}{dy_t}, \ldots\ldots$ daranno altrettante condizioni alle quali deve soddisfare la funzione $f(x, y \ldots\ldots)$: ed altre r si conseguiranno eguagliando i valori dei differenziali secondi parziali desunti da quelli determinati di $\frac{dF}{dy} \ldots\ldots \frac{dF}{dy_r}$: per cui il numero totale delle condizioni di f sarà espresso dal numero $N-n+r$.

Se $n=2$ siccome $N=3$ sarà $N-n+r=r+1$
$=3$ $=6$ $=r+3$

come abbiamo direttamente provato

$=4$ $=11$ $=r+7$
$=5$ $=17$ $=r+12$

. . . .

Per riconoscere, se una funzione $f(x, y, y_1 \ldots\ldots y_r, y_{r+1} \ldots\ldots y_{r+n})$ sia differenziale esatta, quali ne siano l' ordine e l' integrale, utilissimo è il metodo insegnato dal ch. Geometra Sig. Sarrus, che qui richiamo, aggiungendovi alcuni criterj di facile verificazione.

Se $f(x, y, y_1 \ldots\ldots y_{r+n}) = d_x^n F(x, y, y_1 \ldots\ldots y_r)$ sarà

$$(a) \quad f = Ay_{r+n} + By_{r+n-1}y_{r+1} + Cy_{r+n-2}y_{r+2} + Dy_{r+n-3}y_{r+3} + \ldots\ldots$$

ove $A, B \ldots\ldots$ rappresentino funzioni di $x, y, y_1 \ldots\ldots y_r$.

Siccome $$d_x^{n+1} F = Ay_{r+n+1} + \left(\frac{dA}{dy_r} + B\right) y_{r+n}y_{r+1} +$$

$$+ (B + C)\, y_{r+n-1}y_{r+2} + (C + D)\, y_{r+n-2}y_{r+3} + \ldots\ldots,$$

ricordando quanto abbiamo superiormente notato, si deduce essere

$$(b) \quad A = \frac{dF}{dy_r},\; B = n\frac{dA}{dy_r},\; C = \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{dA}{dy_r},\; D = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{dA}{dy_r}, \ldots\ldots$$

epperò: 1° La funzione $f(x, y \ldots\ldots)$ deve avere la forma (a). 2° I coefficienti $A, B, C \ldots\ldots$, che moltiplicano i prodotti della forma $y_{r+n-t}y_{r+t}$, ove non sia $t = \frac{n}{2}$, devono rendere soddisfatte le equazioni (b). 3° Il numero n è la differenza fra gli ordini dei differenziali y_{r+n}, y_r contenuti in $f(x, y \ldots\ldots)$ ed A. 4° Sarà $f(x, y \ldots\ldots) = \int A dy_r + F_1(x, y, \ldots\ldots y_{r-1})$, dove F_1 deve rendere

$$d_x^n F_1(x, y, \ldots\ldots y_{r-1}) = Ay_{r+n} + By_{r+n-1}y_{r+1} + \ldots\ldots - d_x^n \int A dy_r.$$

Il secondo membro di questa equazione sarà della forma

$$A_1 y_{r+n-1} + B_1 y_{r+n-2} y_r + C_1 y_{r+n-3} y_{r+1} + \ldots\ldots$$

e saranno $$F_1 = \int A_1 dy_{r-1} + F_2(x, y \ldots\ldots y_{r-2}),$$

$$B_1 = (n-1)\frac{dA_1}{dy_{r-1}}, \quad C_1 = \frac{(n-1)(n-2)}{1 \, . \, 2}\frac{dA_1}{dy_{r-1}} \ldots\ldots$$

e proseguendo collo stesso metodo, se non troviamo alcuna incompatibilità, giungeremo a conseguire l' integrale cercato.