SUI CRITERJ DI INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI, E SULLE EQUAZIONI ISOPERIMETRICHE.

NOTA

DEL PROFESSORE FRANCESCO BRIOSCHI

Presentata dal Socio Cavaliere ANTONIO BORDONI,
Approvata dal Socio GIUSEPPE BIANCHI

Ricevuta il giorno 22 *Dicembre* 1853.

I caratteri generali dai quali si possa desumere se una funzione alle derivate dell' ennesimo ordine

$$V(t, x, x', x'', \ldots\ldots x^{(n)})$$

sia derivata esatta di una funzione alle derivate dell' ordine $(n-1)$ si hanno, come è noto, dalla equazione

$$(1) \qquad \frac{dV}{dx} - \left(\frac{dV}{dx'}\right)' + \left(\frac{dV}{dx''}\right)'' - \ldots\ldots + (-1)^n \left(\frac{dV}{dx^{(n)}}\right)^{(n)} = 0,$$

ed è anche noto come le equazioni isoperimetriche conducano ad equazioni di questa forma.

Lagrange nella ventunesima delle Lezioni sulle funzioni, dopo aver ritrovata la equazione superiore, dimostra come la equazione analoga pel caso in cui nella funzione proposta la derivata d' ordine più alto fosse la x'' decompongasi in due equazioni più semplici; ed aggiunge potersi provare come in generale la equazione (1) sia decomponibile in n equazioni, le quali devono tutte verificarsi identicamente allorquando la funzione sia una derivata esatta.

Questa importante decomposizione, indicata da Lagrange solamente come possibile, venne effettuata dal Ch. Professore

Bordoni in una delle sue Lezioni di calcolo sublime, nella quale si rinvengono trovate assai semplicemente le n equazioni da sostituirsi alla (1). Nella medesima lezione, l'Autore osserva che quelle n equazioni non saranno essenzialmente differenti fra loro, e considerando il caso in cui la funzione proposta sia alle derivate del terzo ordine dimostra che delle tre equazioni che si ottengono dalla (1), due sole sono essenzialmente differenti fra loro. In progresso di tempo i geometri Raabe e Joachimsthal giunsero per vie differenti a quella decomposizione, e dimostrarono che delle n equazioni che ne risultano, le essenzialmente differenti sarebbero $\frac{n}{2}+1$ od $\frac{n+1}{2}$ secondo che n è pari o dispari. (*)

In questa nota, partendo dalle formole del Prof. Bordoni, determiniamo quelle equazioni che essendo essenzialmente differenti fra loro, sono i veri criterj per l'integrabilità della funzione proposta, ed il metodo adoperato ci condurrà ad altre equazioni le quali si ponno assumere come criterj di integrabilità, e che in moltissimi casi particolari saranno più semplici delle prime. Dimostriamo in seguito come una analoga decomposizione eseguita sulle equazioni isoperimetriche conduca ad un interessante risultato ottenuto recentemente dal Sig. Ostrogradsky, pel quale risultato l'integrazione di quelle equazioni è ridotta a quella di equazioni alle derivate del primo ordine; affatto analogamente a quanto già fecero Hamilton e Jacobi per le equazioni della dinamica.

La funzione V supposta derivata esatta dovrà essere della forma

$$V = q + x^{(n)} p$$

essendo q, p funzioni delle sole $t, x, x' \ldots\ldots x^{(n-1)}$. Questo valore di V riduce la (1) alla

$$(2) \quad p^{(n)} - \left[\frac{dq}{dx^{(n-1)}} + x^{(n)} \frac{dp}{dx^{(n-1)}}\right]^{(n-1)} + \ldots\ldots \pm \left[\frac{dq}{dx} + x^{(n)} \frac{dp}{dx}\right] = 0.$$

(*) Lezioni di Calcolo Sublime del Professore Antonio Bordoni. Milano. Anno 1831. Tomo 1°, pag. 407. — Giornale del Sig. Crelle. T. 31, 33. Anno 1846.

Si pongano le seguenti denominazioni

$$(3)\quad \begin{aligned} &\frac{dq}{dx^{(n-1)}} - p\,(t, x, x' \ldots\ldots x^{(n-2)})' = p_1 \\ &\frac{dq}{dx^{(n-2)}} - p_1\,(t, x, x' \ldots\ldots x^{(n-2)})' = p_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dq}{dx'} - p_{n-2}\,(t, x, x' \ldots\ldots x^{(n-2)})' = p_{n-1} \\ &\frac{dq}{dx} - p_{n-1}\,(t, x, x' \ldots\ldots x^{(n-2)})' = p_n, \end{aligned}$$

nelle quali col simbolo

$$p_r\,(t, x, x' \ldots\ldots x^{(n-2)})'$$

intendesi rappresentare la derivata della funzione composta p_r rispetto alla t contenuta nelle componenti $t, x, x' \ldots\ldots x^{(n-2)}$. Osservando essere

$$(4)\quad \begin{aligned} &p' = p\,(t, x, x' \ldots\ldots x^{(n-2)})' + x^{(n)}\frac{dp}{dx^{(n-1)}} \\ &p'_1 = p_1\,(t, x, x' \ldots\ldots x^{(n-2)})' + x^{(n)}\frac{dp_1}{dx^{(n-1)}} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

la equazione (2) si trasformerà nella

$$\left[\left\{\frac{dp}{dx^{(n-2)}} - \frac{dp_1}{dx^{(n-1)}}\right\} x^{(n)}\right]^{(n-2)} - \left[\left\{\frac{dp}{dx^{(n-3)}} - \frac{dp_2}{dx^{(n-1)}}\right\} x^{(n)}\right]^{(n-3)} + \\ \ldots\ldots \pm \left\{\frac{dp}{dx} - \frac{dp_{n-1}}{dx^{(n-1)}}\right\} x^{(n)} \mp p_n = 0,$$

la quale dovendo essere identica allorquando la V sia derivata esatta, dà luogo alle

$$(5)\quad \frac{dp}{dx^{(n-2)}} - \frac{dp_1}{dx^{(n-1)}} = 0, \quad \frac{dp}{dx^{(n-3)}} - \frac{dp_2}{dx^{(n-1)}} = 0, \\ \ldots\ldots \quad \frac{dp}{dx} - \frac{dp_{n-1}}{dx^{(n-1)}} = 0, \quad p_n = 0.$$

Queste sono le n equazioni trovate dal Prof. Bordoni, le quali si ponno sostituire alla (1).

Le equazioni (3), osservate le (4), (5), si trasformano nelle

$$
(6)\qquad
\begin{cases}
p' + p_1 = \dfrac{dV}{dx^{(n-1)}} \\[2mm]
p'_1 + p_2 = \dfrac{dV}{dx^{(n-2)}} \\[2mm]
\dots\dots\dots \\[2mm]
p'_{n-2} + p_{n-1} = \dfrac{dV}{dx'} \\[2mm]
p'_{n-1} = \dfrac{dV}{dx}
\end{cases}
$$

e da queste, indicando con r un numero qualunque fra quelli della serie $1, 2, 3 \dots\dots n$, si ottengono le seguenti

$$
(7)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{dp_1}{dx^{(n-r)}} = \dfrac{d^2 V}{dx^{(n-1)}\, dx^{(n-r)}} - \left(\dfrac{dp}{dx^{(n-r)}}\right)' - \dfrac{dp}{dx^{(n-r-1)}} \\[3mm]
\dfrac{dp_2}{dx^{(n-r+1)}} = \dfrac{d^2 V}{dx^{(n-2)}\, dx^{(n-r+1)}} - \left(\dfrac{dp_1}{dx^{(n-r+1)}}\right)' - \dfrac{dp_1}{dx^{(n-r)}} \\[3mm]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\[3mm]
\dfrac{dp_{r-1}}{dx^{(n-2)}} = \dfrac{d^2 V}{dx^{(n-r+1)}\, dx^{(n-2)}} - \left(\dfrac{dp_{r-2}}{dx^{(n-2)}}\right)' - \dfrac{dp_{r-2}}{dx^{(n-3)}} \\[3mm]
\dfrac{dp_r}{dx^{(n-1)}} = \dfrac{d^2 V}{dx^{(n-r)}\, dx^{(n-1)}} - \left(\dfrac{dp_{r-1}}{dx^{(n-1)}}\right)' - \dfrac{dp_{r-1}}{dx^{(n-2)}}.
\end{cases}
$$

Rappresentando per brevità col simbolo $A_{u,v}$ il binomio

$$\frac{dp_u}{dx^{(n-v-1)}} - \frac{dp_v}{dx^{(n-u-1)}},$$

le equazioni (5) si potranno scrivere

$$(8)\qquad A_{0,1} = 0,\quad A_{0,2} = 0 \;\dots\dots\; A_{0,n-1} = 0,\quad p_n = 0,$$

e sostituendo nell' ultima delle equazioni (7) il valore di $\frac{dp_{r-1}}{dx^{(n-2)}}$ dato dalla penultima, e quindi quello di $\frac{dp_{r-2}}{dx^{(n-3)}}$ dato dalla terz' ultima, e così via; supponendo essere r un numero pari si giunge alla

$$(9) \qquad -A_{0,r} = A'_{0,r-1} - A'_{1,r-2} + A'_{2,r-3} - \ldots\ldots + (-1)^{\frac{r}{2}} A'_{\frac{r}{2}-2,\frac{r}{2}+1} - (-1)^{\frac{r}{2}} A'_{\frac{r}{2}-1,\frac{r}{2}}$$

Analogamente col mezzo delle equazioni (7) si ottengono le

$$-A_{1,r-2} = A'_{0,r-2} + A_{0,r-1}$$

$$A_{2,r-3} = A''_{0,r-3} + 2A'_{0,r-2} + A_{0,r-1}$$

$$-A_{3,r-4} = A'''_{0,r-4} + 3A''_{0,r-3} + 3A'_{0,r-2} + A_{0,r-1}$$

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-(-1)^{\frac{r}{2}} A_{\frac{r}{2}-1,\frac{r}{2}} = A^{\left(\frac{r}{2}-1\right)}_{0,\frac{r}{2}} + \frac{r-2}{2} A^{\left(\frac{r}{2}-2\right)}_{0,\frac{r}{2}+1} + \frac{(r-2)(r-4)}{2.4} A^{\left(\frac{r}{2}-3\right)}_{0,\frac{r}{2}+2} + \ldots\ldots + \frac{r-2}{2} A'_{0,r-2} + A_{0,r-1}.$$

Sostituendo questi valori nella (9) si arriva facilmente alla

$$A_{0,r} + \frac{r}{2} A'_{0,r-1} + \frac{r(r-2)}{2.4} A''_{0,r-2} + \frac{r(r-2)(r-4)}{2.4.6} A'''_{0,r-3} + \ldots\ldots + \frac{r}{2} A^{\left(\frac{r}{2}-1\right)}_{0,\frac{r}{2}+1} + A^{\left(\frac{r}{2}\right)}_{0,\frac{r}{2}} = 0,$$

nella quale fatto $r=2, 4, 6, \ldots.$ si ottengono altre equazioni analoghe. È evidente che supposto

$$A_{0,r-1}=A_{0,r-3}=A_{0,r-5}=\ldots\ldots=A_{0,3}=A_{0,1}=0$$

quelle equazioni renderanno nulle anche le espressioni

$$A_{0,r},\quad A_{0,r-2},\ \ldots\ldots\ A_{0,4},\quad A_{0,2};$$

quindi le effettive condizioni per l' integrabilità saranno le

$$(11)\qquad p_n=0,\quad A_{0,1}=A_{0,3}=\ldots\ldots=A_{0,n-2}\ \text{od}\ =A_{0,n-1}=0,$$

secondo che n sarà dispari o pari; giacchè soddisfatte queste lo sono tutte le (8). Quindi se n è dispari saranno in numero $\frac{n+1}{2}$ le equazioni a soddisfarsi, e se n è pari saranno in numero $\frac{n}{2}+1$.

Se nell' ultima delle equazioni (10) poniamo $r=s+1$, (quindi s numero dispari) si ottiene la seguente

$$A_{0,s}+\frac{s-1}{2}A'_{0,s-1}+$$
$$\ldots\ldots+\frac{s-1}{2}A^{\left(\frac{s-3}{2}\right)}_{0,\frac{s+3}{2}}+A^{\left(\frac{s-1}{2}\right)}_{0,\frac{s+1}{2}}+(-1)^{\frac{s-1}{2}}A_{\frac{s+1}{2},\frac{s-1}{2}}=0.$$

Ne deriva che si potranno assumere come criterj di integrabilità le equazioni

$$p_n=0,\qquad A_{0,1}=0,\quad A_{1,2}=0,\quad A_{2,3}=0,$$
$$A_{\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}}=0\ \text{od}\ A_{\frac{n-2}{2},\frac{n}{2}}=0,$$

secondo che n dispari o pari. Queste equazioni potranno in alcuni casi particolari sostituirsi alle (11) con qualche vantaggio.

Si indichi con

$$(12)\qquad \frac{dV}{dx_r}-\left(\frac{dV}{dx_r'}\right)'+\left(\frac{dV}{dx_r''}\right)''-\ldots\ldots+(-1)^n\left(\frac{dV}{dx_r^{(n)}}\right)^{(n)}=0$$

una equazione isoperimetrica, e supponiamo la r possa assumere i valori $1, 2, 3 \ldots\ldots m$. Posto

$$\varphi_{r,s} = \frac{dV}{dx_r^{(s+1)}} - \left(\frac{dV}{dx_r^{(s+2)}}\right)' + \ldots\ldots \pm \left(\frac{dV}{dx_r^{(n)}}\right)^{(n-s-1)}$$

si ha evidentemente il gruppo di equazioni analoghe alle (6)

$$\begin{aligned} \varphi_{r,n-1} &= \frac{dV}{dx_r^{(n)}} \\ \varphi'_{r,n-1} + \varphi_{r,n-2} &= \frac{dV}{dx_r^{(n-1)}} \\ \varphi'_{r,n-2} + \varphi_{r,n-3} &= \frac{dV}{dx_r^{(n-2)}} \qquad (13) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi'_{r,1} + \varphi'_{r,0} &= \frac{dV}{dx'_r} \\ \varphi'_{r,0} &= \frac{dV}{dx_r}. \end{aligned}$$

Se queste equazioni vengono ordinatamente moltiplicate per $x_r^{(n+1)}, x_r^{(n)} \ldots\ldots x'_r$ e si sommano le equazioni che ne risultano membro per membro si ottiene la

$$\Sigma_r \left(\varphi_{r,n-1} x_r^{(n)} \pm \varphi_{r,n-2} x_r^{(n-1)} + \ldots\ldots + \varphi_{r,0} x'_r\right)' = V' - \frac{dV}{dt},$$

e posto

$$T = \Sigma_r \left(\varphi_{r,n-1} x_r^{(n)} + \varphi_{r,n-2} x_r^{(n-1)} + \ldots\ldots + \varphi_{r,0} x'_r\right), \quad V - T = \theta,$$

si ha

$$\theta' = \frac{dV}{dt}.$$

La equazione (12) è alle derivate del $2n$ ordine, quindi il primo membro di essa conterrà in generale le

$$x_r, x'_r, x''_r \ldots\ldots x_r^{(2n-1)}.$$

Se queste quantità si considerano quali incognite, sarà $2mn$ il numero delle incognite contenute nelle m equazioni analoghe alla (12). Sostituiamo alle mn incognite

$$x_r^{(n)},\ x_r^{(n+1)}\ \ldots\ldots\ x_r^{(2n-1)}$$

le quantità

$$\phi_{r,n-1},\ \phi_{r,n-2}\ \ldots\ldots\ \phi_{r,0},$$

talchè si considerino le $2mn$ quantità

$$(14)\qquad x_r,\ x'_r,\ x''_r\ \ldots\ldots\ x_r^{(n-1)},\ \phi_{r,n-1},\ \phi_{r,n-2}\ \ldots\ldots\ \phi_{r,0}$$

quali variabili indipendenti. Osservando al valore di θ si avranno le equazioni

$$\frac{d\theta}{dx_r}=\frac{d\mathrm{V}}{dx_r},\qquad \frac{d\theta}{dx'_r}=\frac{d\mathrm{V}}{dx'_r}-\phi_{r,0},\qquad \frac{d\theta}{dx''_r}=\frac{d\mathrm{V}}{dx''_r}-\phi_{r,1},\ \ldots\ldots$$

$$\frac{d\theta}{dx_r^{(n-1)}}=\frac{d\mathrm{V}}{dx_r^{(n-1)}}-\phi_{r,n-2}$$

$$\frac{d\theta}{d\phi_{r,n-1}}=-x_r^{(n)},\quad \frac{d\theta}{d\phi_{r,n-2}}=-x_r^{(n-1)},\quad \frac{d\theta}{d\phi_{r,n-3}}=-x_r^{(n-2)},$$

$$\ldots\ldots\ \frac{d\theta}{d\phi_{r,0}}=-x'_r,$$

dalle quali per le equazioni (13) si hanno le

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\phi_{r,0}}{dt}=\dfrac{d\theta}{dx_r},\quad \dfrac{d\phi_{r,1}}{dt}=\dfrac{d\theta}{dx'_r}\ \ldots\ldots\ \dfrac{d\phi_{r,n-1}}{dt}=\dfrac{d\theta}{dx_r^{(n-1)}} \\[2ex] \dfrac{dx_r}{dt}=-\dfrac{d\theta}{d\phi_{r,0}},\quad \dfrac{dx'_r}{dt}=-\dfrac{d\theta}{d\phi_{r,1}},\ \ldots\ldots\ \dfrac{dx_r^{(n-1)}}{dt}=-\dfrac{d\theta}{d\phi_{r,n-1}}. \end{cases}$$

Queste $2mn$ equazioni alle derivate del primo ordine contengono le $2mn$ quantità (14), e le m quantità analoghe alla $x_r^{(n)}$. Se si eliminano queste ultime col mezzo delle m equazioni

$$\phi_{r,n-1}=\frac{d\mathrm{V}}{dx_r^{(n)}}$$

si avranno tante equazioni quante bastano a determinare le $2mn$ incognite (14). Le equazioni (15) sono dovute al Signor Ostrogradsky; il modo col quale vennero quì trovate mostra come esse siano una trasformazione delle (13), le quali corrispondono alle (6) nel caso in cui la funzione V sia una derivata esatta. L' importanza di questa osservazione si fa manifesta allorquando si consideri il modo col quale il Sig. Hamilton giunse ad integrare le equazioni della dinamica poste sotto forma analoga a quella delle equazioni (15).

Se supponiamo $V = H + U$, e riteniamo H funzione omogenea del secondo grado rispetto alle x_r', ed indipendente dalle x_r'', x_r'''....., ed U funzione delle sole x_r; la equazione (12) trasformasi nella

$$(16) \qquad \frac{d(H+U)}{dx_r} - \left(\frac{dH}{dx_r'}\right)' = 0.$$

Inoltre si ha

$$\phi_{r,0} = \frac{dV}{dx_r'} = \frac{dH}{dx_r'}, \qquad \phi_{r,1} = \phi_{r,2} = \ldots\ldots = 0,$$

quindi

$$T = \Sigma_r \frac{dH}{dx_r'} x_r' = 2H \quad \text{e} \quad \theta = U - A.$$

Le equazioni (15) per questi valori danno le

$$(17) \qquad \frac{d\phi_{r,0}}{dt} = -\frac{d(A-U)}{dx_r}, \qquad \frac{dx_r}{dt} = \frac{d(A-U)}{d\phi_{r,0}}.$$

Se la A rappresenta la funzione delle forze vive, e la U la funzione delle forze, le equazioni (16), (17) sono le due forme assegnate da Lagrange e da Hamilton alle equazioni della dinamica.