INTORNO

AL MOVIMENTO DI UN PUNTO MATERIALE

SOPRA UNA SUPERFICIE QUALSIVOGLIA

MEMORIA

DI FRANCESCO BRIOSCHI

Presentata dal Socio Cavaliere Antonio Bordoni, *Approvata dal Socio* Giuseppe Bianchi

Ricevuta il dì 8 *Giugno* 1852.

1°. La integrazione delle equazioni del moto di un punto materiale, o di un sistema di punti, in alcune circostanze particolari di movimento, fu di recente scopo alle indagini dei Geometri. Le nuove forme assegnate da Lagrange e da Hamilton alle equazioni della dinamica, la integrazione delle medesime ridotta dipendente pei teoremi di Hamilton e di Jacobi dalla integrazione di una equazione alle derivate parziali del primo ordine non lineare, e la teorica dell' ultimo moltiplicatore dovuta a Jacobi aprirono la via a quelle ricerche. Il Sig. Liouville assumendo le formole di Lagrange e giovandosi dei risultamenti del Jacobi, prese in tre differenti Memorie a considerare alcuni casi in cui le equazioni del moto di un punto sopra una superficie, del moto di un punto libero nello spazio, e del moto di un sistema di punti sono integrabili; i quali due ultimi problemi vennero anche discussi, il primo dal Sig. Serret mediante le formole di Lagrange, ed il secondo dal Sig. Richelot partendo dalle formole della dinamica trasformate col metodo di Hamilton (*).

(*) Journal de Liouville; T. xi, xii, xiii, xiv. – Journal de Crelle; T. 40.

Le ricerche che, innanzi il lavoro del Sig. Liouville, esistevano intorno alle circostanze del moto di un punto sopra una superficie non piana, si riassumono in quelle del moto di un grave sopra una sfera o sopra una superficie di rotazione; e nelle più recenti del movimento di un punto materiale sopra una superficie di rivoluzione ammesse alcune particolari condizioni per le forze agenti, le quali fanno parte di una Memoria del Sig. Jacobi (*). L' uso delle linee esistenti sopra una superficie a rappresentare punti della medesima di tanto vantaggio nella trattazione di problemi di statica e di geometria fu anche di giovamento in questa parte della dinamica, ed i problemi discussi dal Signor Liouville devono appunto il loro successo a quel metodo di rappresentazione, come pure lo devono quelle cose che qui si aggiungono sul medesimo argomento.

2°. Se colla

$$f(x, y, z) = 0$$

si indica la equazione di una superficie qualsivoglia riferita a tre assi ortogonali, e con X, Y, Z le componenti parallele a quegli assi della risultante di tutte le forze acceleratrici agenti sopra un punto materiale il quale deve moversi sopra quella superficie, si hanno le tre equazioni

$$(1) \quad x'' = X + \lambda d f'(x), \quad y'' = Y + d f'(y), \quad z'' = Z + d f'(z);$$

nelle quali

$$\lambda d = \pm \frac{N}{\sqrt{[f'(x)^2 + f'(y)^2 + f'(z)^2]}},$$

ed N è una forza di grandezza incognita, diretta normalmente alla superficie, e che rappresenta la resistenza della superficie medesima.

Dalle equazioni (1) si passa come è noto alla

$$\tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \int (Xx' + Yy' + Zz')\, dt + H,$$

essendo H una costante.

(*) De motu puncti singularis. Journal de Crelle, T. 24.

Si ritengano ora le x, y, z funzioni di due quantità u, v; parametri variabili di due superficie le quali colle loro comuni intersezioni colla superficie data determinano due sistemi di linee esistenti nella medesima, per l'uno dei quali sistemi $u =$ cost., e per l'altro $v =$ cost. Ritenuto inoltre che le linee di un sistema sieno ortogonali alle linee dell'altro; ponendo secondo le notazioni di Gauss (*)

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \mathrm{E}, \quad \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 = \mathrm{G}$$

la equazione superiore si trasformerà nella

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{E}u'^2 + \mathrm{G}v'^2) = \int (\mathrm{P}\sqrt{\mathrm{E}}.u' + \mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{G}}.v')\,dt + \mathrm{H},$$

essendo P, Q le componenti dirette secondo le tangenti le linee $v =$ cost., $u =$ cost., della risultante di tutte le forze acceleratrici agenti sul mobile. Suppongasi abbia luogo il principio delle forze vive talchè sia

$$(2) \qquad \int (\mathrm{P}\sqrt{\mathrm{E}}.u' + \mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{G}}.v')\,dt = \mathrm{U}(u, v)$$

e si avranno le

$$\mathrm{P}\sqrt{\mathrm{E}} = \frac{d\mathrm{U}}{du}, \quad \mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{G}} = \frac{d\mathrm{U}}{dv},$$

ed

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{E}u'^2 + \mathrm{G}v'^2) = \mathrm{U} + \mathrm{H},$$

e le espressioni $u'\sqrt{\mathrm{E}}$, $v'\sqrt{\mathrm{G}}$ rappresenteranno le componenti secondo le tangenti alle linee $v =$ cost., $u =$ cost. della velocità che ha il mobile alla fine del tempo t.

3°. Indicando con T la semisomma delle forze vive, alle formole (1) si ponno sostituire le

$$(3) \qquad \frac{d\frac{d\mathrm{T}}{du'}}{dt} - \frac{d\mathrm{T}}{du} - \frac{d\mathrm{U}}{du} = 0, \qquad \frac{d\frac{d\mathrm{T}}{dv'}}{dt} - \frac{d\mathrm{T}}{dv} - \frac{d\mathrm{U}}{dv} = 0;$$

ammessa la sussistenza della equazione (2). Queste sono le formole date da Lagrange nella Sezione IV. della seconda parte

(*) Disquisitiones generales circa Superficies curvas. Atti della Società di Gottinga Vol. VI.

della Meccanica Analitica; nel caso poi del moto di un punto sopra una superficie essendo $T=\frac{1}{2}(Eu'^2+Gv'^2)$, le medesime si mutano nelle

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dEu'}{dt}-\frac{1}{2}\left(\dfrac{dE}{du}u'^2+\dfrac{dG}{du}v'^2\right)-\dfrac{dU}{du}=0, \\ \dfrac{dGv'}{dt}-\frac{1}{2}\left(\dfrac{dE}{dv}u'^2+\dfrac{dG}{dv}v'^2\right)-\dfrac{dU}{dv}=0. \end{cases}$$

Jacobi ha dimostrato che le formole ordinarie (1) pel moto di un punto sopra una superficie si ponno ridurre alla forma assegnata da Hamilton alle equazioni pel moto di un sistema libero. Queste formole, utili nella trattazione di alcuni problemi, si ponno dedurre dalle superiori (3) di Lagrange nel modo seguente. Pongansi

$$\frac{dT}{du'}=p,\qquad \frac{dT}{dv'}=q,$$

e da queste equazioni le quali sono lineari rispetto ad u', v' si ricavino i valori di u', v' in funzione di p e di q; quindi si sostituiscano questi valori nella funzione T, la quale potrà così considerarsi come una funzione delle u, v, p, q. Dunque la T che è funzione delle u, v, u', v', ammesse le equazioni superiori potrà ritenersi funzione delle u, v, p, q. Ora si ha

$$T=\frac{1}{2}(Eu'^2+Gv'^2),$$

ossia

$$T=pu'+qv'-T.$$

Suppongasi la T nel primo membro funzione delle $u, v, u'\, v'$, e la T nel secondo membro funzione delle u, v, p, q, e derivando l' equazione superiore rispetto a t si avrà dopo una riduzione

$$\left(\frac{dT}{du}\right)u'+\left(\frac{dT}{dv}\right)v'=p'u'+q'v'-\frac{dT}{du}u'-\frac{dT}{dv}v'-\frac{dT}{dp}p'-\frac{dT}{dq}q',$$

essendo $\left(\frac{dT}{du}\right)$, $\left(\frac{dT}{dv}\right)$ le derivate della T rispetto alle u, v quando si supponga la T funzione delle u, v, u', v'. Da quest' ultima equazione si hanno le

$$\frac{dT}{dp}=u',\quad \frac{dT}{dq}=v',\qquad \left(\frac{dT}{du}\right)=-\frac{dT}{du},\qquad \left(\frac{dT}{dv}\right)=-\frac{dT}{dv};$$

per le quali le formole (3) riduconsi alle

$$p' = \frac{d(U-T)}{du}, \qquad q' = \frac{d(U-T)}{dv},$$

e queste insieme alle due

$$\frac{dT}{dp} = u', \qquad \frac{dT}{dq} = v'$$

sono le quattro formole richieste.

4°. Dalle equazioni (4) si passa facilmente alle

$$E'u' + Eu'' = \frac{1}{2}\left(\frac{dE}{du}u'^2 + \frac{dG}{du}v'^2\right) + \frac{dU}{du}$$

$$G'v' + Gv'' = \frac{1}{2}\left(\frac{dE}{dv}u'^2 + \frac{dG}{dv}v'^2\right) + \frac{dU}{dv}.$$

Ora

$$E' = \frac{dE}{du}u' + \frac{dE}{dv}v', \qquad G' = \frac{dG}{du}u' + \frac{dG}{dv}v',$$

per cui sostituendo e riducendo si avranno le

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{du'\sqrt{E}}{dt} = \dfrac{v'}{2\sqrt{E}}\left(\dfrac{dG}{du}v' - \dfrac{dE}{dv}u'\right) + P \\[2ex] \dfrac{dv'\sqrt{G}}{dt} = \dfrac{u'}{2\sqrt{G}}\left(\dfrac{dE}{dv}u' - \dfrac{dG}{du}v'\right) + Q. \end{cases}$$

Si indichi con ω l'angolo che il raggio del circolo osculatore la linea $v = \text{cost.}$ nel punto di coordinate u, v fa colla tangente nello stesso punto alla $u = \text{cost.}$, e con ρ il raggio del circolo osculatore medesimo. Si avrà, come è noto

$$\frac{1}{2}\frac{\frac{dE}{dv}}{E\sqrt{G}} = \frac{\cos\omega}{\rho}, \qquad \text{ed anche} \quad \frac{1}{2}\frac{\frac{dG}{du}}{G\sqrt{E}} = \frac{\cos\omega_1}{\rho_1},$$

essendo le ω_1, ρ_1 rispetto alla linea $u = \text{cost.}$ ciò che sono le ω, ρ rispetto alla linea $v = \text{cost.}$ Alle equazioni superiori si potranno quindi sostituire le

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{du'\sqrt{E}}{dt} = v'\sqrt{G}\left[\dfrac{\cos\omega_1}{\rho_1}v'\sqrt{G} - \dfrac{\cos\omega}{\rho}u'\sqrt{E}\right] + P \\[2ex] \dfrac{dv'\sqrt{G}}{dt} = u'\sqrt{E}\left[\dfrac{\cos\omega}{\rho}u'\sqrt{E} - \dfrac{\cos\omega_1}{\rho_1}v'\sqrt{G}\right] + Q. \end{cases}$$

Chiamisi θ l' angolo che la trajettoria sulla superficie fa colla linea $u=$cost., ed s l'arco percorso nel tempo t, sussisteranno le due equazioni

$$v'\sqrt{G} = s'\cos\theta, \qquad u'\sqrt{E} = s'\operatorname{sen}\theta,$$

per i quali valori le equazioni superiori si trasformano nelle

$$s''\operatorname{sen}\theta + s'\cos\theta\,.\,\theta' = s'^2\cos\theta\left(\frac{\cos\theta_1}{\rho_1}\cos\theta - \frac{\cos\varrho}{\rho}\operatorname{sen}\theta\right) + P$$

$$s''\cos\theta - s'\operatorname{sen}\theta\,.\,\theta' = s'^2\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\cos\varrho}{\rho}\operatorname{sen}\theta - \frac{\cos\theta_1}{\rho_1}\cos\theta\right) + Q\,.$$

Queste equazioni moltiplicate ordinatamente per $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ quindi sommate danno

$$(7) \qquad s'' = P\operatorname{sen}\theta + Q\cos\theta\,;$$

e moltiplicate per $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ e poi sottratte danno

$$(8) \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{\cos\theta_1}{\rho_1}\cos\theta - \frac{\cos\varrho}{\rho}\operatorname{sen}\theta + \frac{P\cos\theta - Q\operatorname{sen}\theta}{s'^2}\,.$$

Quest' ultima equazione può ridursi ad una forma assai più semplice. Infatti chiamando r il raggio di contingenza geodesica della linea descritta dal mobile, vale a dire il raggio del circolo osculatore della linea piana nella quale si trasfigurerebbe la trajettoria, considerata come linea di contatto fra la superficie data ed una superficie sviluppabile, allorquando quest' ultima si distendesse in un piano, si ha come è noto

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} - \left(\frac{\cos\theta_1}{\rho_1}\cos\theta - \frac{\cos\varrho}{\rho}\operatorname{sen}\theta\right),$$

per cui l' equazione superiore diventa la

$$\frac{1}{r} = \frac{P\cos\theta - Q\operatorname{sen}\theta}{s'^2},$$

dalla quale

$$(9) \qquad P\cos\theta - Q\operatorname{sen}\theta = \frac{s'^2}{r}\,.$$

Le equazioni (7), (9) tengono luogo delle (6) e quindi delle (4). Ora osservisi essere $P\operatorname{sen}\theta + Q\cos\theta$ la componente diretta secondo la tangente alla trajettoria della risultante di tutte le forze sollecitanti il mobile, e $P\cos\theta - Q\,\mathrm{sen}\,\theta$ la componente della forza medesima diretta secondo la tangente alla trajettoria ortogonale della linea descritta dal mobile. È evidente l'analogia fra le formole (7), (9) e quelle che si danno comunemente per le questioni di moto di un punto sopra una linea. Dalle (9) se $P = 0$, $Q = 0$, oppure $P\cos\theta - Q\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$, si ha $r = \infty$, cioè la linea descritta dal mobile è geodetica. Dalla equazione medesima se $P\cos\theta - Q\,\mathrm{sen}\,\theta = k s'^2$, k costante, si ha $r = \frac{1}{k}$; cioè la linea descritta dal mobile sarà della famiglia di quelle della massima o minima area fra le isoperimetre.

5°. La equazione (8) può porsi sotto una forma che prestasi facilmente all'integrazione in alcuni casi. Infatti rammentati i valori di $\frac{\cos\omega}{\rho}$, $\frac{\cos\omega_1}{\rho_1}$ si passa da quella alla seguente

$$\frac{d\theta}{ds}\sqrt{EG} = \frac{\cos^2\theta}{v'}\left\{\frac{\frac{dG}{du}}{2G}s' + \frac{P\sqrt{E}}{s'}\right\} - \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{u'}\left\{\frac{\frac{dE}{dv}}{2E}s' + \frac{Q\sqrt{G}}{s'}\right\},$$

e da questa richiamati i valori di $\mathrm{sen}\,\theta$, $\cos\theta$, alla

$$\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\frac{d\theta}{ds} = \cos^2\theta\left\{\frac{\frac{dG}{du}}{2G} + \frac{\frac{dU}{du}}{2(U+H)}\right\}\frac{du}{ds} - \mathrm{sen}^2\theta\left\{\frac{\frac{dE}{dv}}{2E} + \frac{\frac{dU}{dv}}{2(U+H)}\right\}\frac{dv}{ds}$$

per essere $$s'^2 = 2(U+H).$$

Moltiplicando i termini dell'equazione superiore per $2GE(U+H)$, la risultante si riduce alla

$$(10)\quad 2GE(U+H)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\frac{d\theta}{ds} = E\cos^2\theta\frac{dG(U+H)}{du}\frac{du}{ds} - G\,\mathrm{sen}^2\theta\frac{dE(U+H)}{dv}\frac{dv}{ds},$$

la quale evidentemente è l'equazione della trajettoria.

Si indichi con λ una funzione di u e di v, e suppongasi essere

$$G = \lambda\varphi(v), \qquad E = \lambda\psi(u);$$

l'ultima equazione trovata dopo alcune riduzioni mutasi nella

$$2\lambda(U+H)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\frac{d\theta}{ds} = \cos^2\theta\frac{d\lambda(U+H)}{du}\frac{du}{ds} - \mathrm{sen}^2\theta\frac{d\lambda(U+H)}{dv}\frac{dv}{ds}.$$

Dalla forma di questa equazione apparisce subito che ogni qualvolta risulti

$$\lambda(\mathrm{U}+\mathrm{H})=f(u)-\mathrm{F}(v),$$

la equazione stessa potrà integrarsi. Infatti essa riducesi alla

$$2[f(u)-\mathrm{F}(v)]\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\frac{d\theta}{ds}=\cos^2\theta\, f'(u)\,\frac{du}{ds}-\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{F}'(v)\,\frac{dv}{ds},$$

che integrata dà

$$f(u)\cos^2\theta+\mathrm{F}(v)\,\mathrm{sen}^2\theta.=\mathrm{A} \tag{11}$$

A costante; e quest' ultima è l' equazione della trajettoria alle derivate del primo ordine. Nel caso considerato più sopra sono compresi tutti quelli trattati dal Sig. Liouville nella Memoria citata, la formola cui siamo giunti coincide perfettamente colle sue in quei casi particolari.

Per applicare le formole trovate a qualche esempio supponiamo che la superficie sulla quale muovesi il punto materiale sia rappresentata dalla equazione

$$\frac{x^2}{t^2-a^2}+\frac{y^2}{t^2-b^2}+\frac{z^2}{t^2-c^2}=1,$$

e le superficie a parametri variabili dalle

$$\frac{x^2}{u^2-a^2}+\frac{y^2}{u^2-b^2}+\frac{z^2}{u^2-c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{v^2-a^2}+\frac{y^2}{v^2-b^2}+\frac{z^2}{v^2-c^2}=1.$$

Queste equazioni danno

$$x^2=\frac{(t^2-a^2)(u^2-a^2)(v^2-a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\quad y^2=\frac{(t^2-b^2)(u^2-b^2)(v^2-b^2)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)},\quad z^2=\frac{(t^2-c^2)(u^2-c^2)(v^2-c^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$$

e quindi

$$\mathrm{E}=\frac{u^2(t^2-u^2)(v^2-u^2)}{(u^2-a^2)(u^2-b^2)(u^2-c^2)},\qquad \mathrm{G}=\frac{v^2(t^2-v^2)(u^2-v^2)}{(v^2-a^2)(v^2-b^2)(v^2-c^2)}.$$

Per cui se avrà luogo la

$$\mathrm{U}+\mathrm{H}=\frac{f(u)-\mathrm{F}(v)}{v^2-u^2}$$

la equazione della trajettoria sarà la (11) essendo $\lambda=v^2-u^2$.

Suppongasi che il sistema di linee per le quali $v = \text{cost.}$ sieno geodetiche; assumendo come si fa comunemente pel parametro u la lunghezza di un arco delle linee medesime si avrà $E = 1$, per cui se ritiensi anche essere U funzione della sola variabile u, la equazione (10) darà

$$2G(U+H)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\frac{d\theta}{ds} = \cos^2\theta\,\frac{dG(U+H)}{du}\frac{du}{ds},$$

che integrata conduce alla

$$G\cos^2\theta = \frac{k}{U+H}$$

k costante. Se $U = 0$ e quindi la linea descritta dal mobile sia geodetica si ha

$$\cos\theta = \frac{A}{\sqrt{G}}$$

proprietà notissima pel caso delle superficie di rotazione.

6°. Le circostanze del moto di un punto materiale sopra una superficie nelle ipotesi ammesse quì sopra, si deducono completamente dalle equazioni (5). Verremo così ad estendere ad una superficie qualunque un teorema dimostrato dal Signor Jacobi per le sole superficie di rotazione (*). Dalle (5) si hanno le equazioni

$$u'' = \frac{1}{2}v'^2\frac{dG}{du} + P$$

$$\frac{dv'\sqrt{G}}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{G}}u'v'\frac{dG}{du}.$$

La seconda di queste integrata dà

(12) $$Gv' = a$$

a costante arbitraria. Per questo valore la prima equazione diventa

(13) $$u'' = a^2\frac{\frac{2G}{du}}{2G^2} + P,$$

dalla quale integrando e riducendo

$$u' = \sqrt{\left[2\int P\,du - \frac{a^2}{G}\right]},$$

(*) Journal de Crelle; T. 24. — Journal de l'Ecole Polytecnique; T. 19.

e quindi

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{\sqrt{\left[2\int P\,du - \frac{a^2}{G}\right]}},$$

e

$$(14) \qquad t + A = \int \frac{1}{\sqrt{\left[2\int P\,du - \frac{a^2}{G}\right]}}\,du.$$

Ma dalla (12) si ha

$$\frac{dv}{du} = \frac{a}{G}\,\frac{dt}{du},$$

per cui si avrà anche la

$$(15) \qquad v + B = a\int \frac{1}{G\sqrt{\left[2\int P\,du - \frac{a^2}{G}\right]}}\,du.$$

Le equazioni (14), (15) sono le soluzioni del problema: la (14) avendo origine dalla (13) ci porge il tempo impiegato dal mobile a percorrere l' arco di geodetica per la quale $v =$ cost., e la (15) ci fa conoscere la posizione della geodetica medesima rispetto ad una fissa.

Supponiamo che la superficie sia di rotazione, i meridiani saranno le linee geodetiche, i paralleli le trajettorie ortogonali. Riteniamo essere l' asse delle x quello della superficie, ed indichiamo con r il raggio del parallelo corrispondente al punto di coordinate x, y, z della superficie; e sia $x = \phi\psi(r)$ la equazione di un meridiano qualunque. Chiamisi v l' angolo che il meridiano corrispondente al punto in cui trovasi il mobile alla fine del tempo t fa con un meridiano fisso che supporremo coincidere col piano delle xz; e sia u l' arco di quel meridiano. Saranno $y = r\,\mathrm{sen}\,v$, $z = r\cos v$ e quindi $E = 1$, $G = r^2$, e le equazioni (14), (15) diverranno

$$t + A = \int \frac{1}{\sqrt{\left[2\int P\,du - \frac{a^2}{r^2}\right]}}\,du,$$

$$v + B = \int \frac{a}{r^2\sqrt{\left[2\int P\,du - = \frac{a^2}{r^2}\right]}}\,du,$$

od anche

$$
(16)\qquad \left\{
\begin{aligned}
t + \mathrm{A} &= \int \frac{\sqrt{\left[1 + \phi'^2 \psi'^2 (r)\right]}}{\sqrt{\left[2 \int \mathrm{P}\, du - \frac{\alpha^2}{r^2}\right]}}\, dr, \\
v + \mathrm{B} &= \int \frac{\alpha \sqrt{\left[1 + \phi'^2 \psi'^2 (r)\right]}}{r^2 \sqrt{\left[2 \int \mathrm{P}\, du - = \frac{\alpha^2}{r^2}\right]}}\, dr,
\end{aligned}
\right.
$$

le quali sono le formole trovate direttamente dal Sig. Jacobi.

7°. Supponiamo l' asse della superficie di rotazione essere verticale, ed agire sul punto materiale la sola gravità. Sarà $\mathrm{P} = g \frac{dx}{du}$, e quindi per una delle superiori equazioni:

$$\frac{dv}{du} = \frac{\alpha}{r \sqrt{\left[r^2 (2gx + 2\beta) - \alpha^2\right]}}$$

β costante introdotta dalla integrazione. A determinare le costanti α, β si osservi che se con k indicasi la velocità iniziale, con θ l' angolo che la direzione della medesima forma colla sua projezione sul meridiano che passa pel punto della superficie in cui trovasi il mobile al principio del tempo; il valore di rv' corrispondente a $t = 0$, sarà $k \operatorname{sen} \theta$; e quindi chiamando d il valore di x corrispondente a $t = 0$, si avrà

$$(r^2 v')_0 = \psi(d)\, k \operatorname{sen} \theta,$$

talchè per la (12) sarà

$$\alpha = \psi(d)\, k \operatorname{sen} \theta.$$

essendo $r = \psi(x)$ il valore di r ricavato dalla $x = \phi(r)$.

Così dalla (13) o dalla susseguente si ha

$$k^2 \cos^2 \theta = 2 g d + 2\beta - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta,$$

e quindi

$$2\beta = k^2 - 2 g d.$$

Questi valori posti nella equazione superiore danno

$$\frac{dv}{du} = \frac{\psi(d)\, k \cos \theta}{r \sqrt{\left[r^2 (2g(x - d) + k^2) - \psi^2 (d)\, k^2 \cos^2 \theta\right]}},$$

e siccome dalla equazione $x = \varphi(r)$ si è dedotta la $r = \psi(x)$, sarà anche

$$(17) \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{\psi(d)\, k \cos\theta \, \frac{du}{dx}}{\psi(x)\sqrt{[\psi^2(x)(2g(x-d)+k^2) - \psi^2(d)\, k^2 \cos^2\theta]}}.$$

Sia

$$\psi(x) = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

la superficie sarà un elissoide di rotazione, e si avrà

$$(18) \quad \frac{dv}{dx} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{(a^2-d^2)}\, k \cos\theta \sqrt{(a^2+e^2 x^2)}}{(a^2-x^2)\sqrt{[(a^2-x^2)(2g(x-d)+k^2)-(a^2-d^2)k^2\cos^2\theta]}},$$

avendo posto $e^2 = \frac{b^2 - a^2}{a^2}$.

Nella Sezione VIII.ª della seconda parte della Meccanica Analitica, Lagrange ha dimostrato che allorquando un punto pesante si muove sopra una sfera, la curva che esso descrive presenta una serie di punti le di cui ordinate verticali sono alternativamente massime o minime. Questa proprietà la quale formò anche argomento ad una nota del Sig. Puiseux (*) può venire estesa ad un gran numero di casi mercè delle formole trovate.

Considerando la equazione (18) è facile il concepire che i valori della x i quali annulleranno il denominatore nel secondo membro della medesima senza annullare il numeratore corrisponderanno alle ordinate massime o minime dei punti della linea descritta dal mobile. Ora questi valori della x esistono effettivamente, giacchè facendo nel polinomio sotto il segno radicale, $x = -\infty$, $x = -a$, $x = d$, $x = a$ i risultati sono positivo, negativo, positivo e negativo; talchè la equazione risultante dall'eguagliare a zero quel polinomio ammette tre radici reali. Anzi se indicansi con m, ed n i valori, ordinatamente compresi fra $x = a$, $x = d$; $x = d$, $x = -a$, che

(*) Sur le mouvement d' un point matériel pesant sur une sphère. Journal de Liouville; T. 7.

soddisfanno alla detta equazione, sarà m il valore massimo di x, n il valore minimo.

Quanto si è detto partendo dall' equazione (18) intorno alla linea descritta da un grave sopra l' Elissoide di rotazione, evidentemente osservando alla forma della (17) potrà valere per un grandissimo numero di altri casi; ed inoltre la proprietà può verificarsi anco in altre ipotesi sulla natura della forza agente, il che facilmente provasi in molti casi particolari usando della seconda delle equazioni (16).