DI UN FACILE PROBLEMA DI GEOMETRIA
RIMARCABILE PER LA NOVITÀ DELLE CONSEGUENZE
ESAME.

DEL SOCIO ATTUALE

PROF. GASPARE MAINARDI.

Ricevuta il 28 *Luglio* 1849.

Il problema che mi propongo consiste nella ricerca di quei punti del piano di un poligono dai quali condotte le perpendicolari a tutti i lati la somma delle loro lunghezze abbia un dato valore. In una operetta sulla Geometria analitica in piano, nella quale credo di avere riunite molte cose non immeritevoli di osservazione, ho fatto cenno della questione che riprendo: ivi ebbi di mira specialmente la interpretazione dei segni da cui sono affette certe espressioni analitiche: nel presente scritto mi propongo di far notare la discontinuità variabile del luogo di risoluzione, il quale può essere immaginario, consistere in un unico punto, ovvero nel perimetro di un poligono ed anche in una superficie limitata. La novità di queste conseguenze mi sembrò degna di qualche attenzione tanto più dopo di essermi convinto che un più diligente esame di altre questioni note che riguardano poligoni e poliedri conduce a questo genere notevole di risoluzioni varianti e discrete; epperò di buon animo offro alla gioventù studiosa questo scritto che apre la via a non poche nuove ed utili meditazioni.

Immagino un poligono rettilineo, piano, saliente, e percorrendone il perimetro secondo una direzione, ne segno i vertici successivi coi numeri naturali 1, 2, 3, 4.....: indico pure coi numeri 1, 2, 3.... i lati che hanno per estremi i vertici segnati dai numeri 1, 2; 2, 3; 3, 4;.....: figuro nel piano del poligono una retta terminata ai punti A, B la quale non seghi il contorno: rappresento coi segni A(1), A(2), A(3)..... le perpendicolari condotte dal punto A ai lati 1, 2, 3.....: con B(1), B(2)... quelle condotte da B: con S(A), S(B) le somme A(1) + A(2) + A(3)....., B(1) + B(2) + B(3)..... Se da un punto M intermedio fra A e B e da questi estremi si conducono ad un lato r le perpendicolari $M(r)$, $A(r)$, $B(r)$, fra esse avrà luogo la equazione

$$\frac{A(r)-M(r)}{A(r)-B(r)} = \frac{AM}{AB}, \quad \text{ossia} \quad M(r) = A(r) - \frac{AM}{AB}[A(r)-B(r)]$$

$$= B(r) + \frac{BM}{AB}[A(r)-B(r)],$$

e quindi

$$(1) \quad S(M) = S(A) - \frac{AM}{AB}[S(A)-S(B)] = S(B) + \frac{BM}{AB}[S(A)-S(B)].$$

Se il punto M, interno al poligono, sarà nel prolungamento di AB da B verso A

$$(2) \qquad S(M) = S(A) + \frac{AM}{AB}[S(A)-S(B)],$$

e trovandosi nel prolungamento da A verso B

$$M(r) = A(r) - \frac{AM}{AB}[A(r)-B(r)] = B(r) - \frac{BM}{AB}[A(r)-B(r)];$$

$$(3) \qquad S(M) = S(B) - \frac{BM}{AB}[S(A)-S(B)].$$

Supposto che la retta AB prolungata da A verso B incontri un lato r, preso M dalla parte di questo lato opposta all' altra in cui si trova AB, avremo

$$(4) \quad \frac{A(r)+M(r)}{A(r)-B(r)} = \frac{AM}{AB}, \quad \text{ed} \quad M(r) = -A(r) + \frac{AM}{AB}[A(r)-B(r)]$$

$$= -B(r) + \frac{BM}{AB}[A(r)-B(r)].$$

Dunque, supposto $S(A) > S(B)$ ed M intermedio fra A e B, S(M) cresce avvicinandosi M ad A e viceversa, e può assumere tutti i valori dal più grande S(A) al più piccolo S(B). Essendo M interno al poligono sarà $S(M) > S(A)$ se si prende nel prolungamento di AB da B verso A, e viceversa. Se il punto M si trova dalla parte di un lato r opposta a quella dalla quale giacciono i punti A, B alle equazioni (3) sostituiremo le (4). Se la retta AB è talmente disposta che siano $S(A) = S(B)$ ovunque si prenda M nell'interno del poligono sarà $S(M) = S(A) = S(B)$. Le somme $S(1)$, $S(2)$,.... che corrispondono ai vertici 1, 2, 3.... non possono crescere e decrescere più volte, cioè non ponno esistere molti vertici ai quali corrispondano valori massimi e minimi di quella sommatoria discontinua: perchè se due somme $S(r)$, $S(r+t)$ fossero minime per cui

$$S(r-2) > S(r-1) > S(r) < S(r+1) < S(r+2) \ldots\ldots$$

$$S(r+t-2) > S(r+t-1) > S(r+t) < S(r+t+1) < S(r+t+2) \ldots,$$

siccome $S(r+1)$, $S(r+2)$...... crescenti nella direzione dei vertici r, $r+1$, $r+2$..... si fanno poi decrescenti, essendo $S(r+t-1) > S(r+t)$, fra il vertice r ed $r+t$ ve ne sarà almeno uno di massimo tanto nella direzione r, $r+1$, $r+2$... come nella direzione opposta $r-1$, $r-2$, $r-3$..... Il primo massimo corrisponda al vertice $r+t-u$ ed il secondo al vertice $r+t+v$. Immagino le diagonali del poligono che uniscono ogni vertice di minimo con ogni vertice di massimo. Siccome il valore della sommatoria S corrispondente ai varj punti di ognuna delle diagonali

$$r,\ r+t-u;\quad r,\ r+t+v;\quad r+t,\ r+t-u;\quad r+t,\ r+t+v$$

varia rispettivamente fra i limiti

$$S(r),\ S(r+t-u);\quad S(r),\ S(r+t+v);\quad S(r+t),\ S(r+t-u);$$
$$S(r+t),\ S(r+t+v),$$

se $S(r+t)$ non $< S(r)$, $S(r+t+v)$ non $< S(r+t-u)$; indicata con X una quantità positiva e tale che sia

$$X > S(r+t) > S(r),\quad X < S(r+t-u) < S(r+t+v),$$

in ciascuna di quelle diagonali esisterà un punto suscettibile di una somma della grandezza X: epperò tanto alle rette che uniscono quei punti, come a tutte le infinite che le incontrano, e ad ogni punto preso nell' interno e nel contorno del poligono corrisponderebbe una somma del valore costante X: il che ha luogo unicamente nei poligoni regolari. Dunque percorrendo il contorno del poligono o troveremo un solo punto di massimo ed uno di minimo, conseguenti, cioè corrispondenti agli estremi $1, m$ di uno stesso lato $\overline{1,m}$, se $S(1) < S(2) < S(3) \dots < S(m)$, oppure essendo $S(1) < S(2) \dots < S(r) > S(r+1) > S(r+2) \dots > S(m) > S(1)$ i valori massimo e minimo $S(r)$, $S(1)$ corrisponderanno ai termini di una diagonale $\overline{1,r}$. Ma i punti di massimo e minimo potranno essere due per ciascuna specie ed ogni copia corrisponderà agli estremi di un lato.

Queste considerazioni dimostrano ancora che a nessun punto interno del poligono può corrispondere una somma minore della minima $S(1)$, nè maggiore della massima $S(r)$, perchè unito quel punto, che chiamo M col vertice 1 e prolungata la retta congiungente fino ad incontrare un lato $\overline{t-1,t}$ in un punto N, se $S(M) < S(1)$ la somma decresce dal punto 1 verso M, sarà $S(1) > S(M) > S(N)$, ed $S(N)$ non è media fra $S(t-1)$ ed $S(t)$.

Indicata con S una quantità maggiore della minima $S(1)$ e minore della massima $S(m)$ ovvero $S(r)$, nel primo caso S sarà compresa fra due valori conseguenti $S(1), S(2), S(3) \dots$: se $S(t), > S > S(t-1)$ tanto nel lato $\overline{t-1,t}$ come nell' altro $\overline{1,m}$ esisteranno due punti, che indico rispettivamente con M, N suscettibili della somma S, la quale avrà lo stesso valore per tutti i punti intermedj della retta che li congiunge. Siccome

$$S = S(t-1) + \frac{\overline{t-1,M}}{\overline{t-1,t}}\,[S(t) - S(t-1)] = S(1) + \frac{\overline{1,N}}{\overline{1,m}}\,[S(m) - S(1)],$$

ove i segni $\overline{t-1,M}$; $\overline{1,N}$ rappresentano le lunghezze delle rette terminate ai punti $t-1, M$; $1, N$; ne segue

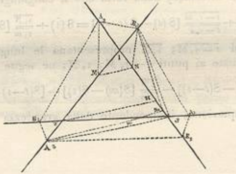
$$\frac{\overline{t-1,M}}{\overline{t-1,t}}\,[S(t) - S(t-1)] - \frac{\overline{1,N}}{\overline{1,m}}\,[S(m) - S(1)] + [S(t-1) - S(1)] = 0,$$

la quale equazione, indipendente dalla grandezza S, insegna che tutte le rette, alle quali corrisponde una somma costante, sono parallele fra loro ed incontrano il lato $\overline{1,m}$.

Il poligono in questo caso è intercetto fra due parallele che passano per gli estremi del lato $\overline{1,m}$; cosicchè la somma dei due angoli interni corrispondenti a quegli estremi non è maggiore di due retti. Generalmente i valori massimo e minimo fra gli $S(1), S(2) \ldots$ corrispondono ad una diagonale $\overline{1,r}$: ogni somma S media fra $S(1)$ ed $S(r)$ lo sarà pure fra due copie $S(t-1), S(t)$; $S(u-1), S(u)$: in ciascuno dei lati $\overline{t-1,t}$; $\overline{u-1,u}$ e nella diagonale $\overline{1,r}$ esisteranno tre punti in linea retta cui corrisponderà la somma S. Queste rette sono tutte parallele fra loro, e le somme che ad esse corrispondono vanno aumentando quanto più ogni retta si avvicina al vertice r. Il poligono è compreso fra due parallele che passano per gli estremi $1, r$.

In qualche caso in luogo di un solo punto di massimo o di minimo, o dell' una e dell' altra grandezza, ne avremo due, corrispondenti ad un lato, il quale sarà parallelo al solito sistema di rette: il che ha luogo essendo il poligono simmetrico intorno ad un asse.

Anche nell' esterno del poligono si trovano più rette capaci di somme medie fra $S(1)$ ed $S(r)$, ed anche più grandi di $S(r)$ senza limitazione. I luoghi geometrici dei punti ai quali corrisponde una somma S di valore prefisso sono contorni di poligoni di diversa natura dipendente dalla grandezza di quel parametro e dalla natura del poligono: le quali circostanze giova studiarle su di ogni figura: come farò per il triangolo.



Il triangolo sia 1, 2, 3: Suppongo $S(1) < S(2) < S(3)$: nel lato $\overline{1,3}$ esisterà un punto H cui corrisponde $S = S(2)$, e che troveremo col mezzo della equazione

$$S(2) = S(1) + \frac{\overline{1,H}}{\overline{1,3}}[S(3) - S(1)], \quad \text{ossia} \quad \frac{\overline{1,H}}{\overline{1,3}} = \frac{S(2) - S(1)}{S(3) - S(1)}:$$

e siccome

$$\overline{2,3}\,.\,S(1) = \overline{1,3}\,.\,S(2) = \overline{1,2}\,.\,S(3), \quad \overline{1,H} = \frac{\overline{2,3} - \overline{1,3}}{\overline{2,3} - \overline{1,2}}\,.\,\overline{1,2}$$

tutte le rette a somme costanti il cui valore è medio fra $S(1)$ ed $S(3)$ sono parallele alla $\overline{2,H}$; e questo valore aumenta quanto più la parallela si discosta dal vertice 1 verso il vertice 3.

Nel lato	$\overline{1,2}$	esteso da	1	verso	2	fisso	un punto	A_3
	$\overline{2,3}$		2		3			A_1
	$\overline{3,1}$		3		1			A_2
nel lato	$\overline{1,2}$	esteso da	2	verso	1	fisso	un punto	B_3
	$\overline{2,3}$		3		2			B_1
	$\overline{3,1}$		1		3			B_2

condotte da ognuno di quei punti le perpendicolari ai lati, troviamo

$$\frac{\overline{1,A_2}}{\overline{1,3}} = \frac{A_2(1)}{S(3)} = \frac{A_2(2) - S(1)}{S(1)}, \qquad A_2(1) = \frac{\overline{1,A_2}}{\overline{1,3}}S(3),$$

$$A_2(2) = S(1) + \frac{\overline{1,A_2}}{\overline{1,3}}S(1)$$

$$S(A_2) = S(1) + \frac{\overline{1,A_2}}{\overline{1,3}}[S(1) + S(3)].$$

Troviamo pure $S(B_3) = S(1) + \frac{\overline{1,B_3}}{\overline{1,2}}[S(1) + S(2)]$

$$S(A_1) = S(3) + \frac{\overline{3,A_1}}{\overline{2,3}}[S(2) + S(3)],$$

$$S(B_2) = S(3) + \frac{\overline{3,B_2}}{\overline{1,3}}[S(1) + S(3)]$$

$$S(A_3) = S(2) + \frac{\overline{2,A_3}}{\overline{1,2}}[S(1) + S(2)],$$

$$S(B_1) = S(2) + \frac{\overline{2,B_1}}{\overline{2,3}}[S(2) + S(3)],$$

dalle quali caviamo

$$\overline{1,A_2} = \frac{S(A_2)-S(1)}{S(1)+S(3)}\,\overline{1,3}; \qquad \overline{1,B_3} = \frac{S(B_3)-S(1)}{S(1)+S(2)}\,\overline{1,2}$$

$$\overline{3,A_1} = \frac{S(A_1)-S(3)}{S(2)+S(3)}\,\overline{2,3}; \qquad \overline{3,B_2} = \frac{S(B_2)-S(3)}{S(1)+S(3)}\,\overline{1,3}$$

$$\overline{2,A_3} = \frac{S(A_3)-S(2)}{S(1)+S(2)}\,\overline{1,2}; \qquad \overline{2,B_1} = \frac{S(B_1)-S(2)}{S(2)+S(3)}\,\overline{2,3};$$

epperò: A nessun punto del piano del triangolo corrisponde una somma minore di $S(1)$: ed al solo vertice $\underline{1}$ compete una somma del valore $S(1)$. I punti che danno una somma S media fra $S(1)$ ed $S(2)$ sono quelli di una retta MN parallela alla $\overline{2,H}$ interna al triangolo della quale troviamo gli estremi N, M colle equazioni

$$\overline{1,M} = \frac{S-S(1)}{S(2)-S(1)}\,\overline{1,2}; \qquad \overline{1,N} = \frac{S-S(1)}{S(3)-S(1)}\,\overline{1,3}.$$

Poi tutti i punti di una retta esterna terminata ai prolungamenti dei lati intorno all' angolo $\underline{1}$ della quale troviamo gli estremi A_2, B_3 colle equazioni

$$(a) \qquad \overline{1,A_2} = \frac{S-S(1)}{S(1)+S(3)}\,\overline{1,3}; \qquad \overline{1,B_3} = \frac{S-S(1)}{S(1)+S(2)}\,\overline{1,2}.$$

Finalmente i punti delle due rette terminate MA_2, NB_3: per cui il luogo geometrico cercato è il perimetro del quadrilatero $A_2B_3NMA_2$. Se $S=S(2)$ la retta interna al triangolo coincide colla $\overline{2,H}$.

I punti ai quali corrisponde una somma S media fra $S(2)$ ed $S(3)$ sono quelli di una retta M_1N_1 interna al triangolo, parallela alla $\overline{2,H}$, i cui estremi M_1N_1 posti nei lati $\overline{1,3}$; $\overline{2,3}$ si hanno colle equazioni

$$\overline{1,N_1} = \frac{S-S(1)}{S(3)-S(1)}\,\overline{1,3}; \qquad \overline{3,M_1} = \frac{S(3)-S}{S(3)-S(2)}\,\overline{2,3}.$$

Altri punti sono quelli di una retta esterna terminata ai prolungamenti dei lati dell'angolo $\underline{1}$, i di cui termini A_2, B_3 sono dati dalle stesse equazioni (a), attribuendo ad S il nuovo valore.

Altri punti ancora sono quelli di una retta terminata ai prolungamenti dei lati intorno all' angolo $\underline{2}$, della quale fisseremo i termini colle equazioni

$$(\beta) \qquad \overline{2,A_3} = \frac{S - S(2)}{S(1) + S(2)}\,\overline{1,2}; \qquad \overline{2,B_1} = \frac{S - S(2)}{S(2) + S(3)}\,\overline{2,3}.$$

Alle tre rette nominate si aggiungono ancora le tre A_2B_1; A_3M_1; B_3N_1: e siccome i punti A_3, M_1, N_1 non sono in linea retta, il luogo geometro dei punti ai quali corrisponde una somma S media fra $S(2)$, $S(3)$, è il contorno dell' esagono $A_2B_3N_1M_1A_3B_1A_2$.

Se $S = S(3)$ la retta M_1N_1 si riduce al solo vertice $\underline{3}$, e l' esagono si converte nel pentagono $A_2B_3\,3A_3B_1A_2$.

Se la somma $S > S(3)$, qualunque ne sia la grandezza, anche nell'angolo compreso dai prolungamenti dei lati formanti il vertice $\underline{3}$ esiste una retta A_1B_2 ad ogni punto della quale corrisponde la somma S, ed il luogo discreto è il perimetro di un esagono $A_2B_3A_1B_2A_3B_1A_2$. Siccome poi per uno stesso valore di S, sono

$$\frac{\overline{1,A_2}}{\overline{1,B_3}} = \frac{S(1)+S(2)}{S(1)+S(3)} \cdot \frac{\overline{1,3}}{\overline{1,2}}; \qquad \overline{1,A_3} = \frac{S + S(1)}{S(1) + S(2)}\,\overline{1,2};$$

$$\overline{1,B_2} = \frac{S + S(1)}{S(1) + S(3)}\,\overline{1,3},$$

quindi $\dfrac{\overline{1,A_2}}{\overline{1,B_3}} = \dfrac{\overline{1,B_2}}{\overline{1,A_3}}$; cioè i lati A_2B_3, A_3B_2 sono paralleli; e lo sono pure A_1B_2, A_2B_1; B_1A_3, B_3A_1.

I quadrilateri del primo sistema, e gli esagoni del secondo e terzo hanno i lati posti nei medesimi angoli rispettivamente paralleli.

Se il triangolo è isoscele, ed $S(2) = S(3)$, la retta $\overline{2,H}$ è la stessa base $\overline{2,3}$.

Essendo $\dfrac{\overline{1,A_2}}{\overline{1,B_3}} = \dfrac{\overline{1,3}}{\overline{1,2}}$ le rette A_2B_3, A_3B_2 sono parallele a quella base.

Siccome poi $\overline{3,A_2} = \dfrac{S + S(2)}{S(1) + S(2)}\,\overline{1,2}$; $\quad \overline{3,B_1} = \dfrac{S + S(2)}{2.S(2)}\,\overline{2,3}$

$$\overline{2,A_1} = \frac{S + S(2)}{2.S(2)}\,\overline{2,3} = \overline{3,B_1}; \qquad \overline{2,B_3} = \frac{S + S(2)}{S(1) + S(2)}\,\overline{1,2} = \overline{3,A_2},$$

le rette A_2B_1, B_3A_1 sono egualmente inclinate alla base del triangolo.

Se il triangolo è equilatero, a tutti i punti interni e del perimetro corrisponde una somma costante $S(1) = S(2) = S(3)$, ed i poligoni esterni sono esagoni equiangoli di cui i lati opposti sono paralleli ad uno dei lati del triangolo equilatero.

Non prendo ad esaminare altre figure, essendo agevole il farlo: ma svolgerò in seguito non poche questioni le quali conducono ad analoghe conseguenze.