SU DUE LIBRI
DI APOLLONIO PERGEO
DETTI DELLE INCLINAZIONI
E SULLE DIVERSE RESTITUZIONI DI ESSI
DISQUISIZIONE

DEL SOCIO ATTUALE

CAVALIERE VINCENZO FLAUTI

Ricevuta il 13 *Maggio* 1850.

Tra gli altri libri del gran Geometra Apollonio, che formavan parte del *Luogo Risoluto* delle greche Scuole, ve n' eran due intitolati *περι νευσεων*, cioè *delle Inclinazioni*, l' argomento de' quali vien così generalmente dichiarato da Pappo: *Duabus lineis positione datis, inter eas inserere rectam magnitudine datam, quae ad datum punctum pertingat.* Ed egli poi vi soggiugne, che i diversi problemi di questo argomento erano altri *Piani*, altri *Solidi*, altri *Lineari*; ma che quelli nel genere de' Piani, scelti da Apollonio, come più utili a grandi applicazioni, erano i seguenti: I. In un cerchio dato di sito, adattare una retta di data grandezza, che passi per un dato punto II. Dati di posizione un semicerchio ed una retta perpendicolare al diametro, o due semicerchi co' diametri in una medesima retta; applicare tra le loro circonferenze una retta di data grandezza, che passi per un degli angoli di un semicerchio. III. Applicare tra' lati di un angolo una retta di data grandezza, che passi per un dato punto equidistante da' lati dell' angolo (1).

(1) È da credere, che gli antichi Geometri avessero anche trattati problemi di questa famiglia negli altri due generi, di che un esempio ne rimane, pel terzo de' problemi enunciati, nel caso del punto dato comunque, del quale si valsero per la trisezione angolare. Nè è presumibile, che come per questo problema ne avevano resa più generale

Quest' ultimo problema, il primo, e quello di un solo semicerchio e la retta, distinti ne' loro casi, e con le rispettive determinazioni componevano il primo degl' indicati due libri;

---

la soluzione, variando la posizione del punto, non avessero fatto ancor lo stesso pel semicerchio e la perpendicolare al diametro, e pe' due semicerchi, variando il punto di tendenza. E giova quì recare la soluzione del primo di questi, per comprovare il detto di Pappo, di esser tali problemi utili a grandi applicazioni.

Problema.

Dati di posizione il semicerchio POV (fig. 1ª) e la perpendicolare AR al diametro di esso: inclinare tra la semicirconferenza e la perpendicolare la retta RB di data grandezza, tendente al punto G dato nel diametro.

Soluzione.

Dal punto B che si cerca, si ordini nel semicerchio la BF, e si tiri al centro C la BC. Pongasi $GB = x$, $RB = b$, e quindi $GR = b + x$, $GA = a$, $GC = c$, $CB = r$; sarà, pe' triangoli simili GAR, GFB, GR: GA:: GB: $GF = \frac{ax}{b+x}$; e però $CF = GF - GC = \frac{ax}{b+x} - c$. Ma $\overline{GB}^2 = \overline{GC}^2 + \overline{CB}^2 + 2CG \times CF$. Adunque sarà ne' loro simboli

$$x^2 = c^2 + r^2 + \frac{2acx}{b+x} - 2c^2,$$

equazione che convenevolmente ridotta diviene

$$x^3 + bx^2 + (c^2 - r^2 - 2ac)x + (c^2 - r^2)b = 0.$$

La quale ne mostra esser *solido* il problema in tal caso; ed in essa ponendo $c = r$, cioè supponendo il punto G starne in P, si ha $x^2 + bx - 2ac = 0$, corrispondente al problema *piano* di Apollonio.

Scol. Essendo $\overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 = \overline{CB}^2 + 2FG \times CG$; sarà, toltevi rispettivamente le uguali grandezze $\overline{CO}^2$ e $\overline{CB}^2$, $\overline{GB}^2 - \overline{GO}^2 = 2FG \times CG$. E moltiplicando il primo membro di questa equazione per $GB + BR$, ed il secondo per GR, n' emergerà

$$\overline{GB}^3 + BR \times \overline{GB}^2 - \overline{GO}^2 \times GB - BR \times \overline{GO}^2 = 2FG \times CG \times GR.$$

Ma essendo GF: GB:: GA: GR, si ha $FG \times GR = GB \times AG$; e quindi $2GF \times GR \times CG = 2GB \times AG \times CG$. Che però sostituendo questo secondo prodotto al primo nella precedente equazione, esso diverrà

$$\overline{GB}^3 + BR \times \overline{GB}^2 - (2CG \times AG + \overline{GO}^2)GB - BR \times \overline{GO}^2 = 0;$$

che coincide con quella del problema risoluto, e che potrebbe tradursi in un geometrico teorema, qual fu proposto dal Newton, per ridurre la costruzione delle equazioni cubiche ad *applicare una retta data tra un cerchio ed un' altra retta dati di sito, in modo che l' applicata passi per un punto dato* (App. de aequo const. lin. n. XXXIV.).

mentre l' altro problema de' due semicerchi, da se solo, atteso il gran numero di casi e de' diorismi loro corrispondenti, ne componeva il secondo.

Or non appena si ebbe conoscenza nella nostra Italia delle *Collezioni Matematiche* di Pappo, dalle quali sole, incompiute e mutile come sono, ci è dato raccogliere poca parte dell' estesa scienza geometrica degli antichi, e prima ancora, che dopo le non terminate fatiche dell' illustre Commandini venissero pubblicate in latino, e rese quindi di un uso più comune (1), si diedero i Geometri, principalmente gl' Italiani, a tentar la restituzione de' libri perduti di quel *Luogo Risoluto*. E torna a lode delle nostre felici regioni, che primo in questo aringo si fosse mostrato Francesco Maurolico, il quale, sulla semplice generalissima indicazione di Pappo, imprese a restituire i libri V. e VI. de' Conici di Apollonio.

Da questo primo esempio si mosse il geometro raguseo Marino Ghetaldo, già per altri lavori sopra Archimede conosciuto e riputato, a restituire l' argomento *delle Inclinazioni*; ma egli non valse, che a compiere solamente i problemi del I. libro, sia (come egli afferma nello scolio col quale chiuse il suo lavoro pubblicato in Venezia nel 1607, col titolo di *Apollonius redivivus* (2)), che una missione diplomatica presso

---

(1) Il Commandini mancato di vita non potè perfezionare il grave e difficile lavoro delle *Collezioni Matematiche* di Pappo, le quali dopo la di lui morte furono pubblicate dal suo genero Valerio Spaccioli, impari a tale impresa; ond' è, che a torto l' Halley, con poca urbanità verso un uomo tanto benemerito dell' antica Geometria, taccia la costui versione di assurda ed insulsa (*ita in plerisque absurda adeo et insulsa erat Commandini versio. — Praef. in Apoll. Perg. de Sectione* rationis, lib. II.). Ed avrebbe dovuto ancora considerare aver egli potuto lavorare su due Codici mss. della Biblioteca Saviliana, all' un de' quali dà l' Horsley l' epiteto di *esimio*, e che nel 1770 il credeva trascritto, con grandissima accuratezza ed eleganza, da mano italiana, da ben 250 anni indietro. Qual meraviglia dunque, se noi altri Italiani non avessimo potuto perfezionare tal versione! spogliati come siamo stati e siamo tuttavia dallo straniero di quello che prepariamo in aumento delle scienze e delle arti.

(2) Il Vossio nel cap. LVIII *de Scientiis Mathematicis*, dopo aver detto, che l' *Apollonius redivivus* era *Apollonii Pergaei Inclinationum Geometria*, così ripiglia: *Apollonium*

l' Imperator di Costantinopoli, della quale venne incaricato dalla sua repubblica, non glielo avesse permesso, sia che i tentativi fatti per risolvere compiutamente il problema del II. libro, non gli fossero riusciti felici (1). Ad ogni modo tal sua pubblicazione, alla quale lo spinsero due suoi amici, non fu inutile alla Geometria; poichè da essa venne mosso Alessandro Anderson, geometra scozzese traspiantato in Parigi, a trattare questo problema, pubblicando quivi, cinque anni dopo del Ghetaldo, tal suo lavoro col titolo di *Supplementum Apollonii redivivi* (2).

Il Ghetaldo tacque le analisi de' problemi che risolveva, riportandone la semplice composizione, con le rispettive determinazioni, e giudicò ben l' Horsley, ch' egli avesse trasmutate in sintesi le soluzioni ottenute con l' analisi algebrica (3); e

---

vero redivivum nuncupavit, quia cum Apollonii Conicorum libri Graece admodum forent vitiati; quos etiam secutus esset intralatione sua Federicus Commandinus: ipse loca corrupta ita sanitati restituerit; ut ex eo solvi possent problemata quae ante non poterant. Il che quanto sia poco esatto e puerile, il vede anche chiunque sia per poco versato nella Geometria antica.

(1) Si avverte che Ghetaldo in questo medesimo anno potè pubblicare eziandio il suo *Supplementum Apollonii Galli*, e l' altre opere *Variorum problematum collectio*, il numero di ben XLII, tra' quali sono quelli, che il Regiomontano non potè geometricamente risolvere. Sembra poi che l' Halley non avesse avuto per le mani l'*Apollonius redivivus*, e che avesse creduto aver costui trattato l' intero argomento *delle Inclinazioni*, così esprimendosi: *Denique inclinationum problemata, per omnes casus executus est Marinus Ghetaldus.*

(2) Ecco come sul proposito esprimesi lo stesso Ghetaldo: *Distulissem autem, ut omnia simul evolgerentur, libri editionem ad reditum meum libentissime, nisi Nicolaus Tuditius et Lucas Bonus ingeniosi sane viri et prudentes, mihique conjunctissimi aliud mihi suasissent; ajebant enim hac arte excitari, acuique multorum ingenia posse, ut dum problematis solutionem desiderant, ipsi interim studeant excogitare solutionem: acquievi, edidi librum, proposito tantum non soluto problemate, expecto dum solvatur ab alio*; e la sua aspettazione non rimase delusa.

(3) *Alias longe et admodum perplexas casuum variorum constructiones, ineunte saeculo decimoseptimo, in Apollonio suo redivivo Gheltaldus edidit, quas calculo algebraico derivatas (ut ex opere ejus postumo* de Compositione et Resolutione mathematica *sat liquido constat) in Apollonio suo sinthetice demonstrare aggressus est, dissimulato qua usus sit analysi.* Ed

come infatti l'Anderson confessò aver trattate le sue ricerche, per le quali non però riporta le Analisi geometriche, che per tal ragione veggonsi talvolta stentate. Ma che che ne sia non può negarsi alle une e le altre una tal quale eleganza, che se a prima vista non appare al paragone di altre, ciò deriva dal modo di esporle, e dal vedervisi compiute le costruzioni, e non già ridotte a lemmi o ad altri problemi. E sì l'uno che l'altro vi riportarono i casi e le determinazioni, da che risultano pel I. libro i nove problemi, che secondo l' indicazione di Pappo dovevano comporlo, come si ha in fine de' lemmi, che questo Geometra ne recò per tali libri, dicendovi: *Primus liber Inclinationum habet problemata novem*; il che non combinando con ciò che ne aveva egli medesimo già detto nella prefazione al VII. libro delle Collezioni Matematiche, cioè: *In primo autem libro demonstratur problema de uno semicirculo et recta, quod quidem quatuor casus habet, ut et illud de circulo in duos casus divisum: atque etiam illud de rhombo, duos quoque casus habens*, convien supporre, che in questa indicazione avesse egli ridotti in un solo problema due de' casi del semicerchio e la retta, come poteva benissimo avvenire per quelli della retta tangente o pur no il semicerchio.

Nessuna ragione tenne il Ghetaldo de' lemmi riportati da Pappo come adoperati da Apollonio nelle sue soluzioni e determinazioni, nè tampoco, pel problema del rombo, di cui per altro dà ne' due casi una non dispregevole soluzione. L' Anderson poi stabilì per fondamento di sue ricerche tre lemmi, che non sono in effetto, che la costruzione geometrica delle equazioni del 2.° grado. Da ciò si vede, che nè il Ghetaldo, nè l' Anderson s' impegnarono a procedere sulle orme segnate da Pappo per le soluzioni Apolloniane, ma che semplicemente cercarono riuscire nell' intento di dar risoluti tutt' i problemi di quella famiglia. Nè essi avrebbero potuto a quello uniformarsi, ripetendo le loro soluzioni dall' Analisi algebrica.

il veder riportata dal Ghetaldo la sola analisi geometrica del problema XII tra XLII ch' egli ne risolve nell' opera *Variorum problemarum collectio*, conferma vieppiù il detto dell' Horsley.

Or erano scorsi ben 160 anni da che questi due Geometri avevan trattato tale argomento, quando un insigne geometra inglese uscito dalla Scuola del Newton, e forte coltivatore dell' Analisi degli antichi, Samuele Horsley, giudicando con più severità che non meritavano i lavori de' due suoi predecessori Ghetaldo ed Anderson, intraprese a restituire fondamentalmente i due libri perduti *delle Inclinazioni*, cercando approssimarsi il più possibile alla mente del Geometra greco. E messosi al lavoro, tenendo innanzi l' argomento di esso tratto da Pappo, ne diede con grandissima esattezza geometrica le soluzioni di tutt' i problemi indicativi, divisi ne' due libri e ne' loro casi, con le rispettive determinazioni da lui dette *Limiti*, tenendovi quella forma medesima, che altri Geometri connazionali avevano osservata in restituire altri libri del *Luogo Risoluto*, modellandosi a' due libri *de Sectione rationis* pur di Apollonio, rinvenuti in arabo, e dall' Halley trasportati in latino idioma, e pubblicati per le stampe di Oxford nel 1706 (1). E tanta fu nell' Horsley la tenacità in adempiere ad una restituzione fedele de' libri *delle Inclinazioni*, da fargli trasandare ancora l' elegante soluzione dell' Ugenio pel problema *del rombo*, dandone una di minor eleganza, sol perchè egli giudicava aver dovuto quella via tenere il Geometra di Perga, così esprimendosi nello scolio dopo i problemi 4° e 5° lib. I.: *Problematum duorum ultimorum constructiones expositae* (sono essi i due casi pel problema del rombo) *fallor ni Apollonii fuerint*; e continuando il ragionamento per convincere di tale identità. Ma non potendo poi resistere al paragone delle soluzioni di Eraclito tra gli antichi, e di Ugenio tra' moderni, chiuse tale scolio dicendo: *Problematum 4.ⁱ et 5.ⁱ constructiones a nostris diversas, sed concinnas ad modum Heracliti et Hugenii, praeterire nefas esset*, e le riporta compendiandole; senza aver

(1) L' Halley restituì con esattezza greca i due libri di Apollonio *de Sectione spatii*, e Roberto Simson del pari i due *Determinatae sectionis*, cui ne aggiunse due altri, ed i due *de Loca Plana*. Ed a questo sistema rigoroso di restituzione, usato solo nella Scuola inglese, modellossi l' Horsley.

tenuto affatto conto di quella del Ghetaldo, che pur non manca di una certa eleganza; e che ha il merito di essere stata la prima ad apparire di nuovo conio eseguita da Geometri moderni. Ma poichè nè questa, nè l' Ugeniana veggonsi corredate della corrispondente analisi geometrica, non credo fuori proposito l' esibirne quì quella elegantissima orditavi dal Fergola, compiendola.

Problema.

Inclinare pel vertice di un angolo di un dato rombo una retta, che arrestandosi tra' lati dell' angolo opposto, sia quanto una retta data.

Cas. 1.° Vogliasi primieramente applicarla nell'angolo esteriore DCG (fig. 2ª) del dato rombo AC, e che passi per l' angolo opposto A di tal figura, e ne pareggi la *rg*.

Analisi geometrica.

Sia RG una tal retta; e pe' tre punti R, C, G intendasi descritto il cerchio PGCR, che interseghi la diagonale AC del rombo in E; e dal punto medio P dell' arco RPG conducansi a' punti R, C, E, G le rette PR, PC, PE, PG. Saranno uguali i due angoli ECG, EPG, che sono nello stesso segmento ERPG, non meno che gli altri DCB, RPG, ciascun de' quali compie due retti col medesimo angolo RCG. Ma l'angolo DCB è duplo di BCA, o del suo uguale ECG. Dunque sarà benanche l' angolo RPG doppio di EPG. Cioè saranno uguali gli angoli GPK, RPK, come il sono per costruzione i lati che li comprendono; e però sarà GK=RK, e l'angolo PKG=PKA. Quindi sarà PE un diametro del cerchio descritto, e retto l' angolo PCE. Ciò posto, essendo equiangoli i due triangoli AKE, PCE, sarà AE : EK :: PE : EC; e quindi le due rette AE, EC avendo per differenza la data AC, ed essendo reciproche alle due date EK, PE, si potranno esibire.

Composizione geometrica.

Costr. Sulla data retta *rg* descrivasi il segmento circolare capiente l' angolo uguale al dato RCG, ed *eg* sia la corda della metà dell'arco *reg*. Inoltre si trovino le due rette AE, CE reciproche alla *eg* ed aventi AC per differenza. Finalmente dal punto E s' inclini alla BG la EG uguale alla *eg*; sarà G il punto cercato.

Dimost. Se la retta che unisce il dato punto A col punto G di già ritrovato non abbia la sua parte RG uguale alla data *rg*, intendesi esserne un altro punto M della CG soddisfacente al problema, cioè la retta AM abbia la sua parte LM uguale alla *rg*. Ciò supposto intendesi descritto il cerchio pe' tre punti L, C, M, che dovrà segare la CE in un punto N diverso da E; poichè segandola in E sarebbe $\overline{EM}^2 = \overline{EG}^2$. Si dimostrerà col ragionamento addotto nell' analisi geometrica essere $ANC = \overline{eg}^2$, e con ciò ad AEC, lo che è un assurdo.

Cas. 2°. La retta da inclinarsi per A (fig. 3ª) sia ora la RAG, nell' angolo interiore del rombo.

La soluzione per questo caso è precisamente la medesima, che pel precedente: ciò non ostante ne esibirò la semplice

Analisi geometrica.

Sia RAG la richiesta retta, e descritto il cerchio pe' punti R, C, G, che interseghi in E la diagonale CA del rombo; dal punto medio P dell' arco RPG si tirino a' punti C, R, E, G le rette PC, PR, PE, PG. Sarà l' angolo RCG = RPG, e l' angolo RCE = RPE; e però siccome RCG è doppio di RCE, così sarà RPG doppio di RPE, e l' arco RE uguale all' arco EG; e quindi EP sarà diametro del cerchio ECG, e perpendicolare alla RG. Laonde essendo simili i triangoli EAK, ECP, sarà EK : EA :: EC : EP; e le due rette EA, EC, che hanno per differenza la data AC, e sono reciproche alle due date EK, EP si potranno geometricamente esibire.

Ritornando ora alla restituzione dell' Horsley, dirò come avendo egli esaurita la materia del lib. I., dicendo: *Ad alia propero legitima indagine post Apollonium nemini hactenus aggressa*, per nulla contento del lavoro dell' Anderson, come poi il dichiara nell' ultima noterella in fine del II. libro, s' introduce a questo col porre due lemmi, il primo desunto da Pappo, l' altro che è una proposizione semplicissima di dati, ch' egli enuncia in modo generale, limitandone poi la dimostrazione al caso di cui aveva bisogno. E dopo aver trattato il problema de' due semicerchi concentrici, per tutti i suoi casi, dovendo procedere oltre, di ben quattro altri lemmi ha bisogno, i primi tre de' quali, che divide in otto casi, esigono, al modo come egli li tratta, lunghe e complicate dimostrazioni. Sicchè per questa ragione principalmente, il suo lavoro, eseguito per altro con sommo rigore geometrico, riesce alquanto duro pe' nostri tempi, che lo più frequente uso de' metodi algebrico-geometrici ha deviata l' instituzione matematica del sistema che vi tennero gli antichi, e che nel risorgimento di queste scienze, e fino a tutto il secolo XVII serbò la Scuola Italiana, l' Olandese e l' Inglese. Ma poichè una favorevole contingenza, della quale dirò più appresso, ha dato luogo ad una elegantissima riduzione di tali lemmi, da che molto pregio acquista la restituzione dell' Horsley, ho creduto far cosa grata a' dotti coltivatori dell'antica Geometria di quì recarla. Tal riduzione contiensi nel seguente lemma problematico, e nel teorema di dati, che vien dopo.

Lemma problematico.

Nel lato PQ del dato angolo P (fig. 4ª) sia dato il punto A; si vuol ritrovarne un altro D, dal quale inclinata ad esso lato la retta DC, nel dato angolo P, e sino all'altro lato PR, risulti dato il rettangolo di AD in DC.

Soluzione.

Al punto A della PQ costituiscasi l' angolo PAB uguale al dato N, ed il rettangolo dato sia quello di AB in M; sarà AB : DC :: AD : M; e però PA : PD :: AD : M; e la AD sarà data (29 Elem. vi).

I lemmi dell' Horsley sono nel seguente modo ennunciati:

Lem. III. Due rette comprendano uno spazio dato in un dato angolo; e l' una di esse accresciuta, o minorata di una terza retta data, serbi all' altra ancor essa accresciuta o minorata della stessa terza retta una data ragione: saranno date le rette proposte.

Lem. IV. Due rette comprendano uno spazio dato in dato angolo, e tolta ciascuna di esse da una terza retta data, le differenze risultino in data ragione. Le rette proposte saranno date.

Lem. V. Due rette comprendano uno spazio dato in dato angolo; ed all' una di esse aggiunta o tolta una terza retta, la somma o la differenza serbi ragion data alla somma o differenza di quelle rette; ciascuna di queste sarà data. Or tutti essi, distinti ne' loro casi, possonsi comprendere nella seguente

Proposizione di Dati.

Due rette X, Y comprendano un dato spazio in un angolo dato; e per mezzo di una data retta M, che loro si aggiunga o si tolga abbia luogo una delle seguenti analogie:

Lem. III.	I.ª	$X + M : Y + M :: P : Q$
	II.ª	$X - M : Y - M :: P : Q$
	III.ª	$X + M : Y - M :: P : Q$
Lem. IV.	IV.ª	$M - X : M - Y :: P : Q$
Lem. V.	V.ª	$M + X : X + Y :: P : Q$
	VI.ª	$M + Y : X - Y :: P : Q$
	VII.ª	$M - X : X + Y :: P : Q$
	VIII.ª	$M - X : X - Y :: P : Q$.

Dico che le rette X, Y risulteranno date.

Dimost. Dalla retta M, nell' angolo dato, costituiscasi il rombo ABMC (fig. 5.ª); e pel

Cas. 1°, il prolungamento AX del lato AC dinoti la X, quello AY del lato BA dinoti la Y, e compiasi la figura come si vede. Sarà data la ragione di MF ovvero ED : EM, nell' angolo dato E; e però il punto D si apparterrà ad una retta MD data di sito. Ed è similmente data la AX, ed in esse il punto A. Adunque la determinazione delle AX, XD (X, Y) dipenderà dal lemma precedente.

Cas. 2°. Fatto lo stesso apparecchio precedente, le X, Y sieno prese dal punto M, e però dinotate dalle MF, ME. Il ragionamento procederà analogamente; ed il punto dato invece di essere A, nella retta di sito AX, sarà M nella retta di sito MF.

Cas. 3.° Costruita la figura, le X, Y sieno dinotate dalle BF, BY; e però le X + M, Y — M vengano rappresentate dalle CX, CE; il punto D si apparterrà alla retta di sito CD; e le MF, MD risulteranno date pel lemma precedente.

Cas. 4.° Il rombo costruito sia ora EF, e le MB, MC rappresentino le X, Y, sarà data di sito la AD; ed è pur data la MF ed il punto M in essa. Quindi ancor questo caso vedesi ridotto al lemma.

Cas. 5.° Essendo data la ragione di X + M : X + Y, sarà data, convertendo, ancor quella di X + M : Y — M (*cas.* 3.).

Cas. 6.° Dall'esser data la ragione di M + Y : X — Y, sarà, componendo, data ancor l'altra di M + X : X — Y; e per equalità l'altra di M + X : M + Y, che è il caso 1.

Cas. 7.° Data la ragione di M — X : X + Y, sarà pur data quella di M + X : X + Y; ed il caso presente riducesi al 5.

Cas. 8.° Finalmente essendo data la ragione di M — X : X — Y, sarà, componendo, data ancor quella di M — Y : X — Y; e per equalità l'altra di M — X : M — Y, che è il caso 4.

Laonde in tutti i casi rimane dimostrato il proposto teorema.

Proseguendo le considerazioni su questo argomento, non debbo tralasciare di dire, come lo avesse illustrato il Fergola, nel suo elaboratissimo trattato, che prima conoscevasi in sua Scuola col titolo di *Arte Euristica*; del quale poi fu da me pubblicato il Prospetto nel 1809 col titolo di *Arte d'Inventare*; e che finalmente avendolo io rifatto, per la dispersione di talune parti di esso, ed accresciuto specialmente per ciò che riguardava i nuovi metodi algebrico-geometrici, e pubblicatane la parte I.ª intitolandola *dell' Invenzione geometrica*, nell' Appendice al III. libro vi recai per saggio delle opere del *Luogo Risoluto Piano* i principali problemi de' libri di esso, tra quali l'elegantissima soluzione del Fergola al problema de' due semicerchi separati affatto tra loro, e l' uno fuori dell' altro, che credo a proposito di quì riportare, perchè si renda più nota.

Problema.

Dati di sito i due semicerchi AIC, DGB (fig. 6ª) co' loro diametri per dritto; condurre dall'estremo A del primo di essi diametri la segante AIG, e fare che l' interposta IH tra le due semicirconferenze sia data.

Analisi geometrica.

Dal centro O del secondo de' due semicerchi tirisi sulla segante AG la perpendicolare OP, che risulterà parallela alla corda CI nel primo semicerchio; e nel prolungamento della linea AB de' diametri, prendasi la BQ uguale alla CD distanza tra quelli; indi dal punto Q si tiri la QF perpendicolare alla stessa AG. Finalmente si faccia QA : AC :: IH : IK.

Ed essendo parallele le tre rette CI, OP, QF, sarà CO : OQ :: IP : PF; e quindi IP = PF; che però tolte da esse le uguali PH, PG, resterà IH = GF. Ciò premesso, alla ragione di QA : AC è uguale tanto quella di FA : AI, quanto l' altra di IH, IK. Adunque sarà QA : AC :: GA : KA :: GA × AH : KA × AH. Ma è dato il rettangolo GA × AH come uguale al dato BAD. Adunque sarà pur dato l' altro KA × AH. Ed essendo data la KH, sarà data ciascuna delle AK, AH. E quindi si farà noto il punto H.

Stava la cosa in questi termini, quando un antico allievo del Fergola, il Sig. Raffaele Minervini, che dopo aver ben fatti gli studi matematici, gli aveva per lungo tempo messi da banda, per attendere attivamente alla professione d' ingegnere, da lui con molto profitto esercitata, vi ritornava per compiere l' argomento del II. libro delle Inclinazioni, per nulla conoscendo quanto vi si era già fatto, e neppure, com' egli afferma, la precedente soluzione del Fergola, pubblicata fin dal 1842, ed alla quale la sua è identica, a meno di una semplicissima inversione, che la rende un poco meno elegante; e messosi al lavoro, e compiutene analogamente le soluzioni di tutti gli altri casi, e le rispettive determinazioni, si affrettò a stamparle. Nel qual tempo avendone fatta parola col suo collega di professione F. R., della nostra Accademia di scienze, costui senza dirmene il motivo, richiesemi l' opera dell' Horsley, che mostrò al Minervini; e nel medesimo tempo avendola egli scorsa, gli venne da prima il pensiero di rifare le dimostrazioni di que' tre lemmi sopra una retta, imitando l' Horsley, e quasi a modo de' problemi *Determinatae sectionis*, co' quali quelli hanno una certa analogia. Ma visto il poco vantaggio che ne ritraeva, gli si risvegliò la felice idea, che una costruzione in figura potesse contribuire alla buona riuscita, di che conferitone meco, si ottenne il risultamento di sopra esposto, dal quale il lavoro dell' Horsley acquista non poca perfezione.

Per compimento di tutto il fin quì esposto, aggiugnerò, che il Fergola, universalizzando l'argomento *delle Inclinazioni*, che piacquegli dirlo piuttosto *delle Applicazioni*, ne fece il soggetto di sue ricerche, in diversi Opuscoli, che veggonsi tra quelli di sua Scuola, da me pubblicati nel 1811, mostrando ancora in essi in quali problemi possa ottenersene il risolvimento a modo de' *piani*, quantunque di loro natura *solidi*, *ipersolidi* o *lineari*; facendo così col fatto rilevare quale preponderanza abbia in taluni casi la Geometria pura su' metodi algebrico-geometrici. Ed a questo proposito non istimo superfluo, atteso il modo come veggo da più tempo procedere l' instituzione matematica, di chiuder questa mia disquisizione con inculcare alla gioventù che si avvia per l' invenzione geometrica di coltivare ogni qualunque metodo per essa; e però di estendersi con alacrità all' apprendimento ed all' uso de' metodi attivi e comodissimi, che offre la moderna Analisi; ma di non trascurare, come ora purtroppo n' è invalso il costume, quelli dell' antica Geometria, che oltre alla loro venustà, stampano tale impronta sicura ed indelebile nell' animo di chi li apprende, da potervi in ogni tempo ritornar sopra, e prevalersene con vantaggio. Di che un esempio evidentissimo ne offre il fatto del Minervini, il quale ha potuto, dopo il lungo periodo

Fig. 1.

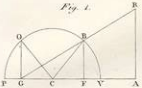


Fig. 2.

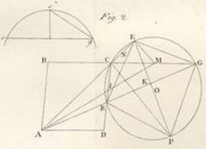


Fig. 4.

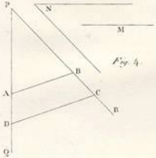


Fig. 3.

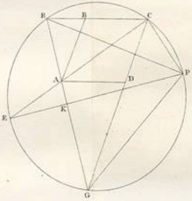


Fig. 5.

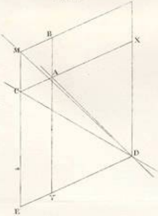
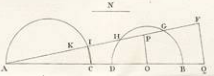


Fig. 6.



G Bruni inc.

di ben cinquant' anni, porsi di nuovo in cammino, compilando la restituzione di un argomento geometrico, non senza qualche precisione ed eleganza. A ciò aggiungo, che i geometrici problemi possonsi alle seguenti classi ridurre, cioè altri essere di *ragione*, comprendendo in questa quelli di tal natura precisamente, non che gli altri di *grandezza* e di *specie*, che a quelli di ragione si rimettono; ed a questi, per la natura de' loro dati, non v' ha dubbio che possasi co' metodi algebrico-geometrici vantaggiosamente riuscire. Altri sono di *genesi*; e per essi può con pari successo adoperarsi l' uno e l' altro metodo. Finalmente che per quelli di *sito* i metodi algebrici sono inefficaci, se non vengano da una convenevole preparazione geometrica ajutati. E però conviene, che il Geometra il cui scopo non è di dare di un problema geometrico una tal quale soluzione, ma la più elegante che può ottenersene, sappia a proposito adoperare l' un metodo o l' altro; e talvolta accoppiarli insieme. Nè debbo tacere, che ne' problemi trascendenti, ne' quali l' Analisi algebrica si dimostra impotente, è alla Geometria che può in qualche modo ricorrersi.