APPLICAZIONI DEI TRASCENDENTI ELLITTICI
ALLA QUADRATURA DI ALCUNE CURVE SFERICHE

MEMORIA

DEL SOCIO ATTUALE

AB. BARNABA TORTOLINI

PROFESSORE DI CALCOLO SUBLIME

NELLA PONTIFICIA UNIVERSITÀ DELLA SAPIENZA IN ROMA.

Ricevuta il 26 *Luglio* 1849.

INTRODUZIONE.

Se x, y, z rappresentino le coordinate ortogonali di un punto appartenente ad una superficie conica, ed α, β, γ le coordinate del suo vertice, che chiameremo anche Centro del Cono, l' equazioni della generatrice saranno della forma

$$x-\alpha=m(z-\gamma), \quad y-\beta=n(z-\gamma)$$

m, n variano secondo la posizione variabile della generatrice, ed uno è funzione dell' altro. Quando la curva che dirige il movimento della generatrice sia collocata nel piano delle xy, e di equazione

$$f(x', y')=0,$$

facendo $z=0$ nell' equazioni della generatrice i valori delle x, y appartengono ad un punto qualunque (x', y') della direttrice, in modo che si avrà

$$x'=\alpha-m\gamma, \quad y'=\beta-n\gamma,$$

ove sostituendo

$$m=\frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \quad n=\frac{y-\beta}{z-\gamma}$$

si dedurrà per l' equazione della superficie conica

$$f\left(\frac{\alpha(z-\gamma)-\gamma(x-\alpha)}{z-\gamma},\ \frac{\beta(z-\gamma)-\gamma(y-\beta)}{z-\gamma}\right)=0.$$

Se l' asse delle z si confondesse coll' asse del cono e se di più l' origine delle coordinate sia situata nel centro dello stesso cono, sarà $\alpha=0$, $\beta=0$ e converrà inoltre sostituire $\gamma-z$ invece di z; perciò l' equazione della superficie conica diviene

$$f\left(\frac{\gamma x}{z},\ \frac{\gamma y}{z}\right)=0,$$

d' onde segue che dall' equazione $f(x,y)=0$ della direttrice si passa all' equazione del cono costruito sopra questa curva coll' origine al centro del cono, sostituendo $\frac{\gamma x}{z}$, $\frac{\gamma y}{z}$ invece delle coordinate x,y. L' ordinata γ denota l' altezza del cono, e potrebbe anche scriversi semplicemente

$$f\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right)=0.$$

Ciò posto imaginiamo una sfera concentrica al cono, in modo che per gli stessi valori delle coordinate, sia

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

In questo caso dalla mutua intersezione delle due superficie verrà delineata nella sfera una curva a doppia curvatura, che nella sua forma avrà una somiglianza colla figura della direttrice. La varietà di queste *curve sferiche* dipenderà dalla varietà delle curve piane direttrici del cono, e saranno esse completamente determinate dalla coesistenza delle due equazioni

$$f\left(\frac{x}{z},\ \frac{y}{z}\right)=0,\quad x^2+y^2+z^2=1.$$

Dal centro ora della sfera si conduca una retta ad un punto (x,y,z) comune alle due superficie, e che sarà anche un punto della curva sferica, e si chiamino ξ, η gli angoli che le projezioni di questa retta ne' piani xz, yz formano coll' asse delle z, si avrà evidentemente

$$\frac{x}{z} = \operatorname{tang}\xi\,, \quad \frac{y}{z} = \operatorname{tang}\eta\,,$$

d' onde

$$x = \frac{\operatorname{tang}\xi}{\sqrt{(1+\operatorname{tang}^2\xi+\operatorname{tang}^2\eta)}}\,, \quad y = \frac{\operatorname{tang}\eta}{\sqrt{(1+\operatorname{tang}^2\xi+\operatorname{tang}^2\eta)}}\,, \quad z = \frac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{tang}^2\xi+\operatorname{tang}^2\eta)}}\,.$$

Di qui l' equazione della superficie conica diviene

$$f(\operatorname{tang}\xi,\ \operatorname{tang}\eta) = 0\,.$$

Le nuove variabili ξ, η diconsi *coordinate sferiche* della nuova curva, e la precedente equazione si dirà l' equazione della curva sferica riferita alle sue coordinate sferiche: le medesime ξ, η rappresenteranno per ciascun punto (x, y, z) due archi di circoli massimi condotti perpendicolarmente dallo stesso punto (x, y, z) sopra due circoli massimi della sfera, fra loro perpendicolari. Da tutto ciò si deduce, che costruito un cono sopra una curva di equazione $f(x, y) = 0$, ed intersecato con una superficie sferica concentrica, si passerà dall' equazione della direttrice all' equazione della curva sferica, riferita alle sue coordinate sferiche ortogonali colla semplice sostituzione di $\operatorname{tang}\xi$, $\operatorname{tang}\eta$ invece di x, y. Che anzi se intendiamo che x, y sieno queste tangenti trigonometriche, allora la medesima equazione potrà servire a rappresentare tanto la direttrice, quanto la curva sferica. Inoltre come le curve piane si distinguono in diversi ordini secondo il grado delle loro equazioni, così le indicate curve sferiche si distingueranno in altrettanti ordini secondo il grado delle variabili $\operatorname{tang}\xi$, $\operatorname{tang}\eta$, e potremo enunciare che tanto le direttrici, quanto le curve sferiche appartengono ad uno stesso ordine. Queste considerazioni sono d' accordo con quanto nel suo Saggio di Geometria analitica sferica stabilisce il Sig. Professor *A. Borgnet* di Tours (1), e più anticamente anche il Signor *Gudermann* di Munster. Le denominazioni poi si potrebbero desumere in alcuni casi dalle denominazioni delle curve di-

(1) Essai de Géometrie analytique de la sphère. *Tours*, 12 Giugno 1847.

rettrici. Così se la direttrice sia una curva conica, l' intersezione del cono con una sfera concentrica produrrà delle curve, che chiamansi *coniche sferiche*.

Le *coniche sferiche* sono state studiate, e si studiano dai Geometri, e specialmente da Fuss nel secolo scorso negli Atti dell' Accademia di Pietroburgo, dal Sig. *Gudermann*, dal Sig. *Chasles*, *Borgnet* ed altri. Un gran numero di proposizioni eleganti, e di teoremi al tutto somiglianti a quei che già da lungo tempo si conoscono nelle curve coniche ordinarie, si trova sussistere anche per queste nuove curve: l' equazioni poi di una qualunque delle indicate curve riferite alle loro coordinate sferiche ortogonali si ritrova assai facilmente, quando sia data la equazione della direttrice del cono. Così per esempio se

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

sia l' equazione di un ellissi, e sia c l' altezza di un cono da costruirsi sopra questa curva, l' equazione del cono si otterrà col sostituire $\frac{cx}{z}$, $\frac{cy}{z}$ invece di x, y, e sarà

$$\frac{c^2x^2}{a^2}+\frac{c^2y^2}{b^2}=z^2.$$

Chiamando α, β gli angoli formati coll' altezza c dalle due generatrici del cono che vanno all' estremità dei semiassi maggiore, e minore a, b, si avrà

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{a}{c},\quad \operatorname{tang}\beta=\frac{b}{c};$$

per ciò l' equazione del cono diviene

$$\frac{x^2}{\operatorname{tang}^2\alpha}+\frac{y^2}{\operatorname{tang}^2\beta}=z^2.$$

Infine per la sostituzione di $\operatorname{tang}\xi$, $\operatorname{tang}\eta$ invece di $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, otterremo l' equazione dell' ellissi sferica

$$\frac{\operatorname{tang}^2\xi}{\operatorname{tang}^2\alpha}+\frac{\operatorname{tang}^2\eta}{\operatorname{tang}^2\beta}=1$$

riferita alle coordinate sferiche ortogonali. Ognun vede che l' equazione è al tutto somigliante a quella dell' ellissi piana. Nella stessa guisa prendendo la curva

$$(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$$

l'equazione del cono di altezza c e coll'origine al centro sarà

$$c^2(x^2+y^2)^2 = z^2(a^2x^2 - b^2y^2).$$

Qui pure ponendo $a = c \operatorname{tang} \alpha$, $b = c \operatorname{tang} \beta$, otterremo una modificazione relativa alle costanti, ma più semplicemente possiamo supporre $c = 1$, ed allora le costanti a, b rappresenteranno le due indicate tangenti trigonometriche, e potremo scrivere

$$(x^2+y^2)^2 = z^2(a^2x^2 - b^2y^2).$$

Infine per la curva sferica riferita alle sue coordinate sferiche ortogonali, si avrà l' equazione

$$(\operatorname{tang}^2\xi + \operatorname{tang}^2\eta)^2 = a^2 \operatorname{tang}^2\xi - b^2 \operatorname{tang}^2\eta$$

somigliante all' equazione della direttrice. In questa Memoria ci prefiggiamo di intraprendere delle ricerche sulla quadratura di alcune curve sferiche, delle quali la formazione è desunta da quelle curve piane più comunemente studiate dai Geometri. I trascendenti ellittici si presentano in un gran numero di problemi riguardanti la rettificazione delle curve, la quadratura delle superficie curve, e cubatura dei solidi. Si vedrà in molti esempi che in quelle curve piane, ove l' arco viene espresso da qualche trascendente ellittico delle tre note specie, costruendo sopra queste un cono, ed intersecandolo con una sfera concentrica, l' area segnata e compresa da questa intersezione viene in molti casi egualmente espressa da uno o più trascendenti ellittici. Non così accade delle rettificazioni delle medesime che per lo più sono espresse da trascendenti ultraellittici. Gli esempi scelti, la qualità dell'analisi, e gli sviluppi che mi si sono presentati in queste ricerche mostreranno una nuova applicazione ai trascendenti ellittici,

importante ramo di analisi creato da Legendre, che è stato portato al più alto grado di perfezionamento dai più grandi Geometri del nostro secolo.

Quadratura di alcune curve sferiche provenienti dalle intersezioni di un cono, e di una sfera concentrica.

1. La formola generale per la quadratura delle superficie curve è come si conosce

$$S = \int\int dx\,dy \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}.$$

Quando i punti x, y, z sono situati sopra la superficie di una sfera di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

si avrà per le derivate parziali

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z},\ \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z},$$

quindi otterremo per la sostituzione

$$S = \int\int \frac{dx\,dy}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)}}.$$

Intersecando pertanto la sfera con un cono concentrico di equazione

$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$$

ed eliminando la z, otterremo per la projezione della curva sferica nel piano delle xy, l' equazione

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)}}, \frac{y}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2)}}\right) = 0$$

e la integrazione dovrà eseguirsi per tutti quei valori di x, y, che verificano la precedente equazione. Nelle applicazioni che sceglieremo, l' integrazione riesce più comoda col sostituire alle x, y un' angolo u, ed un raggio ρ compreso fra i

limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$, in modo che per la nota teorica della trasformazione degli integrali multipli si otterrà il cangiamento di differenziali e delle derivate, e si procederà quindi alle integrazioni estese entro i convenuti limiti, che soddisfino all' equazione della projezione della curva sferica, come si vedrà dagli esempi che mostreremo.

2. Projettando il centro dell' iperbola sulle sue tangenti, otteniamo pel luogo geometrico la curva del quarto ordine

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 - b^2 y^2.$$

Questa curva dotata di centro, e limitata in tutte le direzioni nella sua figura somiglia alla *lemniscata*, e ad essa si riduce nel caso dell' iperbola equilatera. Costruendo sopra di essa un cono di altezza c, e coll' origine delle coordinate nel centro del cono, si avrà per la sua equazione

$$c^2 (x^2 + y^2)^2 = z^2 (a^2 x^2 - b^2 y^2)$$

I rapporti $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ rappresentano le tangenti trigonometriche degli angoli, che le generatrici del cono formano con il suo asse, allorchè passano per l' estremità dei semiassi a, b; tuttavia le costanti a, b, c potranno nell' equazione del cono ridursi a due per la supposizione di $c=1$, ed in questa guisa le quantità a, b rappresenteranno esse stesse i valori delle indicate tangenti trigonometriche. Adottando adunque la coesistenza delle due equazioni

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad (x^2 + y^2)^2 = z^2 (a^2 x^2 - b^2 y^2)$$

è chiaro che dalla intersezione di queste due superficie concentriche verrà delineata nella sfera una curva a doppia curvatura, e somigliante nella sua figura a quella della *lemniscata*. Eliminando la z, e prendendo per fissare le idee $b < 1$ otterremo per la projezione della curva sferica nel piano delle xy la curva di quarto ordine

$$(x^2 + y^2)[(1 + a^2) x^2 + (1 - b^2) y^2] = a^2 x^2 - b^2 y^2.$$

La figura della nuova curva è parimenti somigliante alla *lemniscata*, il centro è un punto doppio, e le intersezioni coll' asse delle x sono determinate dai valori

$$x=0,\quad x=0,\quad x=\frac{a}{\sqrt{(1+a^2)}},\quad x=-\frac{a}{\sqrt{(1+a^2)}}.$$

Per l' equazione polare prendiamo

$$x=r\cos u,\quad y=r\,\mathrm{sen}\,u;$$

per ciò

$$r^2=\frac{a^2\cos^2 u-b^2\,\mathrm{sen}^2 u}{(1+a^2)\cos^2 u+(1-b^2)\,\mathrm{sen}^2 u}.$$

L'origine del raggio vettore r trovasi nel centro della curva, punto doppio della medesima, ove la direzione del raggio è tangente alla curva, e l' angolo u sarà allora per $r=0$ determinato dalla condizione

$$a^2\cos^2 u-b^2\,\mathrm{sen}^2 u=0,\quad \text{ovvero}\quad \mathrm{tang}\,u=\frac{a}{b}.$$

Infine per $u=0$ il raggio r si confonde con uno dei semiassi della curva, il che porge $r=\frac{a}{\sqrt{(1+a^2)}}$, come si è ritrovato con le coordinate ortogonali. I valori poi delle coordinate x, y, z comuni alle due superficie si esprimeranno evidentemente colla sola variabile u per mezzo delle equazioni

$$x^2=\frac{(a^2+b^2)\cos^4 u-b^2\cos^2 u}{1-b^2+(a^2+b^2)\cos^2 u}$$

$$y^2=\frac{a^2\,\mathrm{sen}^2 u-(a^2+b^2)\,\mathrm{sen}^4 u}{1-b^2+(a^2+b^2)\cos^2 u}$$

$$z^2=\frac{1}{1-b^2+(a^2+b^2)\cos^2 u}$$

e delle quali faremo uso nella ricerca dell' area sferica.

3. Per applicare la formola generale della quadratura sferica riportata al parag. 1. al caso in questione, basterà verificare l' equazione della curva di projezione

$$(x^2+y^2)\left[(1+a^2)x^2+(1-b^2)y^2\right]=a^2x^2-b^2y^2$$

per mezzo di due valori di x, y espressi da altre due variabili, il che avvertendo alle ultime equazioni del parag. antecedente, e ponendo per brevità

$$R^2 = 1 - b^2 + (a^2 + b^2)\cos^2 u$$

potremo fare col prendere

$$x = \frac{\rho \cos u \sqrt{[(a^2+b^2)\cos^2 u - b^2]}}{R}$$

$$y = \frac{\rho \operatorname{sen} u \sqrt{[(a^2+b^2)\cos^2 u - b^2]}}{R}.$$

La variabile ausiliare ρ dovrà esser compresa fra i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$, e per la z avremo

$$z = \sqrt{\left(1 - \frac{\rho^2[(a^2+b^2)\cos^2 u - b^2]}{R^2}\right)}.$$

Ciò posto indichiamo con x', y' le derivate delle x, y relative alla variabile ρ, e con $x_{,}, y_{,}$ le derivate relative ad $u_{,}$, e pongasi per brevità

$$A = a^2 + 2b^2 - b^4,\ B = -2(1-b^2)(a^2+b^2),\ C = -(a^2+b^2)^2$$

$$A_{,} = (1-b^2)b^2,\ R_{,}^2 = (a^2+b^2)\cos^2 u - b^2$$

avremo, eseguite le riduzioni

$$x' = \frac{R_{,}\cos u}{R},\quad y' = \frac{R_{,}\operatorname{sen} u}{R}$$

$$x_{,} = \frac{\rho \operatorname{sen} u\,(A_{,} + B\cos^2 u + C\cos^4 u)}{R_{,} R^3}$$

$$y_{,} = -\frac{\rho \cos u\,(A + B\cos^2 u + C\cos^4 u)}{R_{,} R^3}.$$

Nell' integrale duplicato all' elemento $dx\,dy$ si deve nella trasformazione delle variabili sostituire il nuovo elemento $x'y_{,} - x_{,}y'$, perciò facendo

$$\alpha = -b^2(1-b^2),\ \beta = -(a^2+b^2)(2b^2-1),\ \gamma = -C = (a^2+b^2)^2$$

otterremo

$$x'y_{,} - x_{,}y' = \frac{\rho(\alpha + \beta\cos^2 u + \gamma\cos^4 u)}{R^4},$$

quindi l' integrale del parag. 1. rappresentante la quadratura sferica diviene

$$S = \iint \frac{\rho(\alpha + \beta \cos^2 u + \gamma \cos^4 u)\, d\rho\, du}{R^4 \sqrt{\left(1 - \frac{\rho^2 R_{,}^2}{R^2}\right)}}.$$

Questo integrale è suscettivo di una riduzione: riprendiamo infatti i valori di R^2, $R_{,}^2$ e di α, β, γ, si troverà

$$R^2 . R_{,}^2 = \alpha + \beta \cos^2 u + \gamma \cos^4 u$$

per ciò

$$S = \iint \frac{R_{,}^2\, \rho\, d\rho\, du}{R^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\rho^2 R_{,}^2}{R^2}\right)}}.$$

I limiti dell' integrale sono $\rho = 0$, $\rho = 1$, ed $u = 0$ $u = \text{arc tang}\left(\frac{a}{b}\right) = \theta$ per la quarta parte dell' area sferica, onde per l' intera si ha

$$S = 4 \int_0^\theta \int_0^1 \frac{R_{,}^2\, \rho\, d\rho\, du}{R^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\rho^2 R_{,}^2}{R^2}\right)}}.$$

Integrando adunque relativamente alla variabile ρ fra i prescritti limiti, abbiamo per $R^2 - R_{,}^2 = 1$

$$\int_0^1 \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\left(1 - \frac{R_{,}^2}{R^2}\rho^2\right)}} = \frac{R^2}{R_{,}^2} - \frac{R}{R_{,}^2},$$

quindi l' integrale definito duplicato si ridurrà agli integrali definiti semplici

$$S = 4\left(\int_0^\theta du - \int_0^\theta \frac{du}{R}\right).$$

Il secondo degli integrali è un trascendente ellittico incompleto di prima specie: infatti per $b < 1$ potremo scegliere una quantità k minore dell' unità in modo che sia

$$k^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2+1}, \quad \text{ed} \quad R = \sqrt{(1+a^2)} \cdot \sqrt{(1-k^2 \operatorname{sen}^2 u)}$$

d' onde

$$S = 4\left(\theta - \frac{1}{\sqrt{(1+a^2)}} \int_0^\theta \frac{du}{\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sen}^2 u)}}\right),$$

e ponendo come fa Legendre

$$F(k, \theta) = \int_0^\theta \frac{du}{\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sen}^2 u)}}$$

si avrà in fine

$$S = 4 . \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{4}{\sqrt{(1+a^2)}} F(k, \theta),$$

ove

$$\theta = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a}{b}\right).$$

È dunque esprimibile per un trascendente ellittico incompleto di prima specie l' area della nuova curva sferica.

4. Volendo intraprendere una somigliante ricerca per la misura dell' area compresa fra le due superficie concentriche

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (x^2+y^2)^2 = z^2 (a^2 x^2 + b^2 y^2),$$

nel qual caso la base del cono è una curva del quarto ordine, luogo geometrico della projezione ortogonale del centro dell' ellissi sulle sue tangenti, non si avranno che a ripetere tutte le precedenti operazioni col solo cangiamento di b^2 in $-b^2$, ed i limiti dell' angolo u saranno $u = 0$, $u = \frac{\pi}{2}$, onde la richiesta superficie sarà data immediatamente da

$$S = 4\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi} du - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\sqrt{[1+b^2+(a^2-b^2)\cos^2 u]}}\right].$$

Qui pure facendo pel modulo $k < 1$, $k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2+1}$ si ha definitivamente

$$S = 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{F(k)}{\sqrt{(1+a^2)}}\right),$$

ove per la funzione ellittica completa abbiamo

$$F(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du}{\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sen}^2 u)}}.$$

Quando fosse $a=b$, il cono di quarto ordine si riduce ad un cono retto circolare, ed il valore di S sarà quello di una calotta sferica: infatti per $a=b$, $k=0$ e $F(k)=\frac{\pi}{2}$, quindi

$$S=2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{(1+a^2)}}\right).$$

Il valore del coefficiente di 2π esprimendo l' altezza della calotta sferica, il valore di S è quello che si ha dalla Geometria elementare. Il metodo esposto nei due precedenti esempi, e che seguiremo anche pei nuovi è quello adoperato dal Sig. *Catalan* nella ricerca dell' area dell' ellissi sferica, e che trovasi nel Tomo 6°. del Giornale del Sig. Liouville per l'anno 1841.

5. Sia la curva di equazione

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

la quale priva dei radicali ascenderà al sesto ordine: questa curva è somigliante nella sua figura all' evoluta dell' ellissi, e ad essa si riduce quando fra le costanti a, b passa una certa relazione: se poi fosse $a=b$, allora la curva viene generata dal movimento di una retta fissa a che striscia sopra due rette perpendicolari, ed ammette proprietà eleganti. Ciò posto per ottenere l' equazione di un cono di altezza c coll' origine alla sommità, e per direttrice del moto l'indicata curva del sesto ordine, si avrà per un' osservazione di già emessa nell' introduzione

$$\left(\frac{cx}{az}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{cy}{bz}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

Togliendo i radicali, si trova egualmente che la superficie conica è del sesto ordine: intersechiamola con una sfera concentrica

$$x^2+y^2+z^2=1$$

è chiaro che verrà delineata nella superficie sferica una curva a doppia curvatura, della quale la figura è somigliante all'evoluta dell' ellissi: eliminiamo la z, otterremo l' equazione

$$\left(\frac{cx}{a\sqrt{(1-x^2-y^2)}}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{cy}{b\sqrt{(1-x^2-y^2)}}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

la quale appartiene alla projezione della curva sferica nel piano delle xy: quì pure togliendo le irrazionalità l' equazione è di sesto grado, e non essendovi omogeneità nelle variabili x, y ne segue che fatta la sostituzione polare, il raggio r si trova determinato da un'equazione di sesto grado a tutte potenze pari, il che sarebbe assai complicato per le applicazioni che ci siamo prefissi: per trarre adunque un partito utile osserviamo che ponendo $x^2+y^2=r^2$ la precedente ultima equazione trovasi verificata dalla sostituzione trigonometrica

$$\frac{cx}{a\sqrt{(1-r^2)}}=\cos^3 u, \qquad \frac{cy}{b\sqrt{(1-r^2)}}=\operatorname{sen}^3 u,$$

d' onde

$$c^2x^2=a^2(1-r^2)\cos^6 u, \quad c^2y^2=b^2(1-r^2)\operatorname{sen}^6 u.$$

Sommando si trova

$$r^2=\frac{a^2\cos^6 u+b^2\operatorname{sen}^6 u}{c^2+a^2\cos^6 u+b^2\operatorname{sen}^6 u}.$$

Di quì pe' valori di x^2, y^2 abbiamo

$$x^2=\frac{a^2\cos^6 u}{c^2+a^2\cos^6 u+b^2\operatorname{sen}^6 u}$$

$$y^2=\frac{b^2\operatorname{sen}^6 u}{c^2+a^2\cos^6 u+b^2\operatorname{sen}^6 u}.$$

In questa guisa i valori di x^2, y^2, r^2 saranno funzioni razionali di $\operatorname{sen}^2 u$, $\cos^2 u$: aggiungiamo anche il valore di $z^2=1-x^2-y^2$, che sarà

$$z^2=\frac{c^2}{c^2+a^2\cos^6 u+b^2\operatorname{sen}^6 u}.$$

Se come si è praticato di sopra si voglia calcolare l'area compresa fra l' indicata superficie conica colla sfera concentrica, avremo ad eseguire primieramente una trasformazione di variabili nell' integrale duplicato. Prendiamo pertanto una variabile ausiliare ρ entro i limiti $\rho=0$, $\rho=1$, allora per verificare l' equazione della projezione della curva sferica nel piano delle xy, e con fare per brevità

$$R^2=c^2+a^2\cos^6 u+b^2\operatorname{sen}^6 u, \quad R_1^2=a^2\cos^6 u+b^2\operatorname{sen}^6 u$$

potremo supporre

$$x = \frac{a\rho\cos^3 u}{R}, \quad y = \frac{b\rho\,\mathrm{sen}^3 u}{R},$$

quindi

$$z^2 = 1 - \frac{R_{,}^2\rho^2}{R^2}.$$

Sieno x', y' le derivate relative a ρ, ed $x_{,}, y_{,}$ le derivate relative ad u, avremo

$$x' = \frac{a\cos^3 u}{R}, \quad y' = \frac{b\,\mathrm{sen}^3 u}{R}$$

$$x_{,} = -\frac{3a\rho\,\mathrm{sen}\,u\cos^2 u\,(c^2 + b^2\,\mathrm{sen}^4 u)}{R^3}$$

$$y_{,} = \frac{3b\rho\cos u\,\mathrm{sen}^2 u\,(c^2 + a^2\cos^4 u)}{R^3},$$

d' onde si trae

$$x'y_{,} - x_{,}y' = \frac{3ab\rho\,\mathrm{sen}^2 u\cos^2 u}{R^2}$$

e siccome per le nuove variabili ρ, u

$$dx\,dy = (x'y_{,} - x_{,}y')\,d\rho\,du$$

così pel noto integrale dell' area sferica, ricaviamo

$$S = 3ab\iint \frac{\rho\,d\rho\,du\,\mathrm{sen}^2 u\cos^2 u}{R^2\sqrt{\left(1 - \frac{R_{,}^2}{R^2}\rho^2\right)}}.$$

Esteso questo integrale all' intera area della curva sferica, abbiamo

$$S = 12ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^1 \frac{\rho\,d\rho\,du\,\mathrm{sen}^2 u\cos^2 u}{R^2\sqrt{\left(1 - \frac{R_{,}^2}{R^2}\rho^2\right)}}.$$

Integrando relativamente a ρ come si è fatto nel parag. 3, otteniamo dopo la sostituzione

$$S = 12ab\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{sen}^2 u\cos^2 u\,du}{R_{,}^2} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{c.\,\mathrm{sen}^2 u\cos^2 u\,du}{R_{,}^2 R}\right].$$

Il primo di questi integrali per mezzo di una ripetuta decomposizione della frazione razionale si può ottenere in quantità algebriche, il che però tralasciamo di fare, perchè ci porterebbe troppo a lungo; ed il secondo appartiene alla classe dei trascendenti ultraellittici: tuttavia nel caso di $a=b$ è riducibile ai trascendenti ellittici completi di prima e terza specie, come si vedrà da quanto siamo ad esporre.

6. I valori di R^2, $R_{,}^2$ per $a=b$ divengono

$$R^2=c^2+a^2(1-3\operatorname{sen}^2 u\cos^2 u),\quad R_{,}^2=a^2(1-3\operatorname{sen}^2 u\cos^2 u).$$

Poniamo $u=2\phi$, per ciò

$$R^2=\frac{4(c^2+a^2)-3a^2\operatorname{sen}^2\phi}{4},\quad R_{,}^2=\frac{a^2}{4}(4-3\operatorname{sen}^2\phi)$$

ed integriamo entro i medesimi limiti purchè si duplichi l'integrale, sarà

$$S=24\left[\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\operatorname{sen}^2\phi\,d\phi}{(4-3\operatorname{sen}^2\phi)}-c\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\operatorname{sen}^2\phi\,d\phi}{(4-3\operatorname{sen}^2\phi)\sqrt{[4(c^2+a^2)-3a^2\operatorname{sen}^2\phi]}}\right].$$

Il primo integrale è algebrico, ed il secondo contiene i trascendenti ellittici completi di prima e terza specie. Dalla decomposizione delle frazioni risulta come per la divisione

$$\frac{\operatorname{sen}^2\phi}{4-3\operatorname{sen}^2\phi}=\frac{4}{3(4-3\operatorname{sen}^2\phi)}-\tfrac{1}{3},$$

quindi avvertendo che

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\phi}{(4-3\operatorname{sen}^2\phi)}=\frac{\pi}{4},$$

si avrà col togliere il fattore comune 3

$$S=8\left[\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{c\,d\phi}{\sqrt{[4(c^2+a^2)-3a^2\operatorname{sen}^2\phi]}}-4\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{c\,d\phi}{(4-3\operatorname{sen}^2\phi)\sqrt{[4(c^2+a^2)-3a^2\operatorname{sen}^2\phi]}}\right].$$

Pongasi

$$n=-\tfrac{3}{4},\quad k^2=-\frac{3a^2}{4(c^2+a^2)},\quad \Delta=\sqrt{(1-k^2\operatorname{sen}^2\phi)}$$

si ricaverà

$$S=4\left[\frac{\pi}{2}+\frac{c}{\sqrt{(c^2+a^2)}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\phi}{\Delta}-\frac{c}{\sqrt{(c^2+a^2)}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\phi}{(1+n\operatorname{sen}^2\phi)\Delta}\right].$$

È dunque esprimibile l' area sferica di cui si tratta in trascendenti ellittici completi di prima e terza specie, e sarà secondo le notazioni di Legendre

$$S = 4\left[\frac{\pi}{2} + \frac{c\,F(k) - c\,\Pi(n,k)}{\sqrt{(c^2+a^2)}}\right].$$

Il parametro n negativo trovasi compreso fra la quantità, $-k^2$, e, -1, per ciò chiamando k' il complemento del modulo, e θ un' angolo ausiliare si potrà fare con Legendre

$$n = -1 + k'^2 \operatorname{sen}^2\theta.$$

Nel caso in cui siamo $n = -\frac{3}{4}$, $k'^2 = \frac{4c^2+a^2}{4(c^2+a^2)}$, e per ciò

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{c^2+a^2}{(4c^2+a^2)}.$$

Ciò posto ritenendo che $F(k,\theta)$, $E(k,\theta)$ rappresentino i due trascendenti ellittici di prima e seconda specie di modulo k, e di ampiezza θ, per una formola data da Legendre si ha la riduzione dei trascendenti ellittici completi di terza specie in quei incompleti di prima e seconda, sicchè facendo

$$\Phi(\theta) = F(k)E(k',\theta) + F(k',\theta)E(k) - F(k)F(k',\theta)$$

$$\Delta(k,\theta) = \sqrt{(1-k^2\operatorname{sen}^2\theta)}$$

avremo (1)

$$\frac{k'^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\Delta(k',\theta)}\Big(\Pi(n,k) - F(k)\Big) = \frac{\pi}{2} - \Phi(\theta).$$

Nel problema che abbiamo risoluto

$$\cos\theta = \frac{c\sqrt{3}}{\sqrt{(4c^2+a^2)}},\ \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{(c^2+a^2)}}{\sqrt{(4c^2+a^2)}},\ \Delta(k',\theta) = \sqrt{(1-k'^2\operatorname{sen}^2\theta)} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Di quì

$$\frac{F(k) - \Pi(n,k)}{\sqrt{(c^2+a^2)}} = \frac{2\Phi(\theta)}{c} - \frac{\pi}{c},$$

d' onde

$$S = 4\left(2\Phi(\theta) - \frac{\pi}{2}\right).$$

(1) Fonctions elliptiques; Tom. 3°, pag. 144.

Ognun vede che l'area della curva sferica dipende in questo modo dai trascendenti ellittici incompleti di prima e seconda specie.

7. L'esposta applicazione ne somministra un'altra, che è ben di conoscere. Riprendiamo la curva di equazione

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

la quale potrà rappresentare l'evoluta dell'ellissi quando alle costanti a, b si sostituiscano le nuove costanti

$$\frac{a^2-b^2}{a}, \quad \frac{a^2-b^2}{b},$$

e cerchiamo nella generalità l'equazione della curva, luogo geometrico delle perpendicolari abbassate dal centro di questa curva sulle sue tangenti, sarà facile il vedere che la nuova curva è composta di quattro ovali eguali e simili, che si riuniscono nel centro, e somiglianti nelle loro figure a quella della *lemniscata*. Quando poi si voglia che l'equazione precedente rappresenti l'evoluta dell'ellissi, allora è chiaro che le tangenti all'evolute sono normali all'ellissi, e perciò la curva luogo dei piedi del centro dell'evoluta dell'ellissi sulle sue tangenti dovrà coincidere con la curva luogo geometrico della projezione ortogonale del centro dell'ellissi sulle sue normali. Differenziando perciò la precedente equazione, abbiamo

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{dx}{a} + \left(\frac{y}{b}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{dy}{b} = 0,$$

quindi l'equazioni della tangente e della normale abbassata dal centro saranno

$$\frac{X}{a\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{Y}{b\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{3}}} = 1 \qquad bY\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{3}} - aX\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = 0.$$

L'eliminazione delle x, y porgerà la richiesta equazione fra le X, Y della nuova curva.

Osserviamo che l'equazione fra le x, y è verificata dalla sostituzione

$$x = a\cos^3 u, \qquad y = b\,\mathrm{sen}^3 u,$$

d'onde l'equazioni della tangente e della normale divengono

$$b\,\mathrm{X}\,\mathrm{sen}\,u + a\,\mathrm{Y}\cos u = a\,b\,\mathrm{sen}\,u\cos u, \qquad \mathrm{tang}\,u = \frac{a}{b}\cdot\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}.$$

Dalla seconda si trae

$$\mathrm{sen}\,u = \frac{a\,\mathrm{X}}{\sqrt{(a^2\mathrm{X}^2 + b^2\mathrm{Y}^2)}}, \qquad \cos u = \frac{b\,\mathrm{Y}}{\sqrt{(a^2\mathrm{X}^2 + b^2\mathrm{Y}^2)}}.$$

Infine per la sostituzione nella prima, otteniamo

$$(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2)^2(a^2\mathrm{X}^2 + b^2\mathrm{Y}^2) = a^2 b^2 \mathrm{X}^2\mathrm{Y}^2.$$

La richiesta curva è di sesto ordine come la primitiva. Mutiamo per semplicità le lettere X, Y in x, y, sarà

$$(x^2 + y^2)^2(a^2x^2 + b^2y^2) = a^2b^2x^2y^2.$$

Nell' ipotesi di $a = b$ quest' equazione si ridurrà ad

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2x^2y^2.$$

In ambedue i casi il centro è un punto quadruplo, e cercando l' espressione dell' arco per $a = b$ trovasi esso rappresentato da un trascendente ellittico di prima specie nel quale l' angolo del modulo è di 60°. Che se la primitiva curva fosse l' evoluta dell' ellissi, allora la curva derivata avrà evidentemente per equazione

$$(x^2 + y^2)^2(a^2y^2 + b^2x^2) = (a^2 - b^2)^2x^2y^2$$

e coinciderà con la projezione ortogonale del centro dell' ellissi sulle sue normali.

8. Per semplificare alquanto le operazioni algebraiche, si sostituisca a, b invece di a^2, b^2, si riprenda l'equazione generale

$$(x^2 + y^2)^2(ax^2 + by^2) = abx^2y^2$$

e si costruisca sopra questa curva un cono di altezza $\sqrt{c}$, con l' origine alla sua sommità, e coll' asse delle z nella direzione di $\sqrt{c}$, avremo per l' equazione di questo cono

$$c(x^2 + y^2)^2(ax^2 + by^2) = abx^2y^2z^2.$$

Intersecando ora la superficie conica con una sfera concentrica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

verrà delineata nella superficie sferica una curva a doppia curvatura somigliante nella sua figura alla base del cono. L' eliminazione della z porge l' equazione della projezione della curva sferica nel piano delle xy, e sarà

$$c(x^2+y^2)^2(ax^2+by^2)+ab(x^2+y^2)x^2y^2=abx^2y^2,$$

la quale appartiene al sesto ordine, ed è anche essa composta di quattro ovali, che si riuniscono nel suo centro. Facendo la sostituzione

$$x = r\cos u, \qquad y = r \operatorname{sen} u$$

si trova per l' equazione polare

$$r^2 = \frac{ab \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u}{bc + (ab + ac - bc)\cos^2 u - ab\cos^4 u}.$$

Di quì ponendo

$$R^2 = bc + (ab + ac - bc)\cos^2 u - ab\cos^4 u$$

si trae per i valori di x^2, y^2, z^2

$$x^2 = \frac{ab \operatorname{sen}^2 u \cos^4 u}{R^2}, \quad y^2 = \frac{ab\cos^2 u \operatorname{sen}^4 u}{R^2}, \quad z^2 = \frac{c(a\cos^2 u + b\operatorname{sen}^2 u)}{R^2}.$$

Tutte le precedenti espressioni prendono un' aspetto più semplice per $a = b$, in modo che l' equazione del cono e della projezione dell' area sferica nel piano delle xy, saranno

$$c(x^2+y^2)^3 = axyz^2, \quad (x^2+y^2)[c(x^2+y^2)^2 + axy^2] = axy^2.$$

In fine per i valori di x^2, y^2, z^2, si ha

$$x^2 = \frac{a \operatorname{sen}^2 u \cos^4 u}{c + a\operatorname{sen}^2 u \cos^2 u}, \quad y^2 = \frac{a\cos^2 u \operatorname{sen}^4 u}{c + a\operatorname{sen}^2 u\cos^2 u}, \quad z^2 = \frac{c}{c + a\operatorname{sen}^2 u\cos^2 u}.$$

I limiti dell'angolo u in ambedue i casi saranno per l' ottava parte dell' estensione $u = 0$, $u = 45°$.

9. Nel caso generale di a diverso da b volendo cercare la quadratura dell'area sferica, intersezione del cono, e della

sfera concentrica, converrà trasformare l' integrale duplicato riportato nel parag. 1. in altre variabili. A questo oggetto scelta una grandezza ρ entro i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$, prenderemo per x, y le espressioni

$$x = \frac{\sqrt{ab} \cdot \rho \operatorname{sen} u \cos^2 u}{R}, \quad y = \frac{\sqrt{ab} \cdot \rho \cos u \operatorname{sen}^2 u}{R},$$

d' onde per la $z^2 = 1 - x^2 - y^2$, si deduce

$$z^2 = 1 - \rho^2 \frac{ab \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u}{R^2}.$$

Sieno sempre x', y' le derivate relative a ρ, ed $x_{,}, y_{,}$ le relative ad u, e pongasi in queste ultime per un istante $\cos u = U$, sarà

$$x' = \frac{\sqrt{ab} \cdot \operatorname{sen} u \cos^2 u}{R}, \quad y' = \frac{\sqrt{ab} \cdot \cos u \operatorname{sen}^2 u}{R}$$

$$x_{,} = \sqrt{ab} \cdot \rho \cos u \left[\frac{-2bc + (4bc - ab - ac) U^2 + 2(ab + ac - bc) U^4 - ab U^6}{R^3} \right]$$

$$y_{,} = \sqrt{ab} \cdot \rho \operatorname{sen} u \left[\frac{-bc + 3bc U^2 + (ab + 2ac - 2bc) U^4 - ab U^6}{R^3} \right].$$

Formando con queste derivate le differenze dei prodotti $x' y_{,}$, $x_{,} y'$, il numeratore conterrà il valore di R^2, perciò

$$x' y_{,} - x_{,} y' = \frac{ab \rho \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u}{R^2},$$

d' onde

$$dx\, dy = \frac{ab \rho \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u \, d\rho \, du}{R^2}.$$

Avvertendo dunque al valore di z, ed il tutto sostituito nell' integrale della superficie sferica, ed integrando entro i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$, $u = 0$, $u = 45°$, si avrà per l' area sferica della nostra curva

$$S = 8\, ab \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \frac{\rho \, d\rho \, du \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u}{R^2 \sqrt{\left(1 - \frac{ab \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u}{R^2} \cdot \rho^2\right)}}.$$

Dalla integrazione relativa a ρ deduciamo

$$\int_0^1 \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\left(1 - \frac{\rho^2 ab \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u}{R^2}\right)}} = \frac{R^2}{ab \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u} - \frac{R\sqrt{(R^2 - ab \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u)}}{ab \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u}.$$

Sostituendo si troverà

$$S = 8\left[\frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du\sqrt{[bc + c(a-b)\cos^2 u]}}{\sqrt{[bc + (ab + ac - bc)\cos^2 u - ab\cos^4 u]}}\right].$$

Nell' ipotesi di $a = b$, si ha

$$S = 8\left[\frac{\pi}{4} - \sqrt{c} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{\sqrt{(c + a\cos^2 u - a\cos^4 u)}}\right],$$

ed allora l' integrale del secondo membro riducesi ad un trascendente ellittico completo di prima specie. Infatti ponendo $2u = \frac{\pi}{2} - \phi$, perciò ai limiti $u = 0$, $u = \frac{\pi}{4}$, corrispondono $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\phi = 0$; rovesciando quindi i limiti col cangiamento di segno, e facendo

$$k^2 = \frac{a}{4c + a}$$

si otterrà

$$S = 8\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{(4c + a)}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \phi)}}\right],$$

ossia

$$S = 8\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{c} \cdot F(k)}{\sqrt{(4c + a)}}\right].$$

Sostituendo nuovamente c^2, a^2 invece di c, a il valore di S diviene

$$S = 8\left[\frac{\pi}{4} - \frac{c\, F(k)}{\sqrt{(4c^2 + a^2)}}\right]$$

ed il modulo, $k^2 = \frac{a^2}{4c^2 + a^2}$.

10. Un' altra applicazione la desumeremo da una curva piana, che può derivarsi nel seguente modo. Quando si cerchi la natura della linea alla quale sieno tangenti le rette perpendicolari all' estremità di tutti i diametri di un ellissi data

si giunge a riconoscere che la linea in questione è algebrica, e di sesto ordine. In una nota pubblicata nella Raccolta scientifica di Roma nel Marzo 1846, mostrai che se $x = a \cos\phi$, $y = b \operatorname{sen}\phi$ sieno l' equazioni di un ellissi, le coordinate x, y della nuova curva, sono

$$x = \frac{\cos\phi}{a}\left[a^2 + (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2\phi\right]$$

$$y = \frac{\operatorname{sen}\phi}{b}\left[b^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\phi\right],$$

quindi come può vedersi nell' indicata nota, facendo l' eliminazione dell' angolo ϕ trovai un' equazione di sesto grado colle potenze pari tutte delle x, y, e con un termine indipendente. Questa curva è chiamata comunemente la curva di *Talbot*. Essa è dotata di un centro, di forma ovale, e passa pe' quattro vertici dell' ellissi. Per costruire sopra di una essa un cono di altezza c basterà sostituire $\frac{cx}{z}$, $\frac{cy}{z}$ invece di x, y, perciò l' equazione della superficie conica fra le coordinate x, y, z sarà la risultante ottenuta dall' eliminazione dell' angolo ϕ fra le due equazioni

$$\frac{cx}{z} = \frac{\cos\phi}{a}\left[a^2 + (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2\phi\right]$$

$$\frac{cy}{z} = \frac{\operatorname{sen}\phi}{b}\left[b^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\phi\right].$$

Intersecando poi la superficie conica con una sfera concentrica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

verrà delineata nella superficie sferica una linea, che nella sua figura somiglia alla detta curva di *Talbot*.

Infine l' eliminazione della z porgerà la curva di projezione nel piano xy, ed anche essa di sesto ordine; ma senza eseguire tutte queste operazioni noi ci serviremo delle precedenti formole coll' angolo ausiliare ϕ, le quali si adoperano più facilmente nel problema della quadratura sferica.

11. Mutiamo le costanti a^2, b^2, c^2 in a, b, c, eleviamo al quadrato, e sostituiamo $r^2 = x^2 + y^2$, $z^2 = 1 - r^2$, si avrà

$$\frac{cx^2}{1-r^2} = \frac{\cos^2\phi}{a}[a+(a-b)\operatorname{sen}^2\phi]^2$$

$$\frac{cy^2}{1-r^2} = \frac{\operatorname{sen}^2\phi}{b}[b-(a-b)\cos^2\phi]^2.$$

Sommando queste due equazioni, e riducendo tutto alle potenze di $\cos\phi$, e ponendo

$A=b(a-b)(2a-b)$, $B=(a-b)^2(a-2b)$, $C=-(a-b)^3$, $\cos\phi=u$ otteniamo

$$\frac{abcr^2}{1-r^2} = ab^2 + Au^2 + Bu^4 + Cu^6,$$

d' onde prendendo

$$R^2 = ab(c+b) + Au^2 + Bu^4 + Cu^6$$

si troverà

$$r^2 = \frac{ab^2 + Au^2 + Bu^4 + Cu^6}{R^2}.$$

Questo è il valore del quadrato del raggio vettore r condotto dal centro della curva di projezione ad un suo punto qualunque corrispondente al punto (x, y, z) della curva sferica. Una cosa importante da osservarsi è, che le due quantità componenti il valore di r^2 rimangono invariabili, se si muti a in b, b in a, $\cos\phi$ in $\operatorname{sen}\phi$, che anzi il numeratore è decomponibile in tre fattori, due dei quali sono ripetuti. Rappresentiamo con $R_{,}^2$ il numeratore di r^2, e sostituiamo nuovamente i valori di A, B, C, e poniamo inoltre $(a-b)u^2=\omega$, si avrà

$$R_{,}^2 = -[\omega^3-(a-2b)\omega^2-b(2a-b)\omega-ab^2].$$

Ora l' equazione $R_{,}^2=0$ si verifica non solo per $\omega=a$, ma ben anche per altre due radici eguali e negative $\omega=-b$, per ciò

$$R_{,}^2 = -(\omega-a)(\omega+b)^2,$$

ovvero per la sostituzione di ω e di u, sarà

$$R_{,}^2 = [a-(a-b)\cos^2\phi][b+(a-b)\cos^2\phi]^2.$$

Il valore di $R_{,}^2$ rimane evidentemente invariabile col cangiare a in b, b in a, $\cos\phi$ in $\operatorname{sen}\phi$. Di più fra le due quantità R^2, $R_{,}^2$ sussiste la relazione

$$R^2 = abc + R_{,}^2$$

e rimarrà per conseguenza anche invariabile $R_{,}^2$ sotto il prefisso cangiamento: giova tuttavia di ottenere anche l' espressione di R^2 per le potenze ascendenti di $\operatorname{sen}\phi$.

Sia $\operatorname{sen}\phi = v$, avremo identicamente

$$R^2 = ab(c+b) + A(1-v^2) + B(1-v^2)^2 + C(1-v^2)^3.$$

Sviluppando il secondo membro, e fatto per brevità

$A_{,} = a(b-a)(2b-a)$, $B_{,} = (b-a)^2(b-2a)$, $C = -(b-a)^3$

si ha

$$R^2 = ab(c+a) + A_{,}v^2 + B_{,}v^4 + C_{,}v^6.$$

Le nuove costanti $A_{,}$, $B_{,}$, $C_{,}$ si deducono dalle precedenti A, B, C col solo cangiamento di a in b e di b in a. Ciò premesso otteniamo

$$1 - r^2 = z^2 = \frac{abc}{R^2}$$

come dalle prime equazioni di questo parag.

$$x^2 = \frac{b\cos^2\phi\,[2a-b-(a-b)\cos^2\phi]^2}{R^2}$$

$$y^2 = \frac{a\operatorname{sen}^2\phi\,[b-(a-b)\cos^2\phi]^2}{R^2}.$$

Questi sono quei valori che convenientemente modificati ci occorreranno nella ricerca dell' area sferica in questione.

12. Come già si è fatto nelle precedenti applicazioni trasformiamo l' integrale definito

$$S = \iint \frac{dx\,dy}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}}$$

in altre variabili. Prendendo sempre un raggio ρ entro i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$, i valori di x, y nel problema del quale ora ci occupiamo, saranno

$$x = \sqrt{b}\,.\,\frac{\rho\cos\phi\,[2a-b-(a-b)\cos^2\phi]}{R}$$

$$y = \sqrt{a}\,.\,\frac{\rho\operatorname{sen}\phi\,[b-(a-b)\cos^2\phi]}{R},$$

dai quali in forza del valore di $R_{,}^2$, si ha

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2 = 1 - \rho^2 \frac{R_{,}^2}{R^2}.$$

Le derivate parziali x', y' relative a ρ si riducono evidentemente ai coefficienti di $\sqrt{b}, \sqrt{a}$, e sono

$$x' = \sqrt{b} \cdot \frac{\cos\phi\,[2a - b - (a-b)\cos^2\phi]}{R}$$

$$y' = \sqrt{a} \cdot \frac{\operatorname{sen}\phi\,[b - (a-b)\cos^2\phi]}{R}.$$

Per le derivate $x_{,}, y_{,}$ relative all' angolo ϕ prendiamo per ora il valore della x, ed eleviamo al quadrato, si avrà col moltiplicare per R^2

$$R^2 x^2 = b\rho^2 \cos^2\phi\,[2a - b - (a-b)\cos^2\phi]^2.$$

Differenziamo relativamente a ϕ, e trasportiamo nel secondo membro i termini provenienti dalla differenziazione di R^2, e poniamo

$$L = 2a - b - (a-b)\cos^2\phi, \quad M = 3(a-b)\cos^2\phi - (2a-b)$$

$$N = A + 2B\cos^2\phi + 3C\cos^4\phi$$

avremo

$$R^2 x\,dx = \operatorname{sen}\phi\cos\phi\,d\phi\,[b\rho^2 . L . M + N x^2]$$

e sostituendoci nuovamente il valore di x^2, si ha

$$R^2 x\,dx = \frac{b\rho^2 \operatorname{sen}\phi\cos\phi\,d\phi\,L.[MR^2 + LN\cos^2\phi]}{R^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (m)$$

Si eseguiscano nel secondo membro le moltiplicazioni e riduzioni col sostituire nuovamente i valori di A, B, C, L, M, N, e pongasi

$$\alpha = -ab(c+b)(2a-b), \quad \beta = 3ab(c+b)(a-b)$$

$$\gamma = a(a-b)^2(2a-b), \quad \delta = -3a(a-b)^3,$$

otterremo

$$x_{,} = \sqrt{b}\,\frac{\rho\operatorname{sen}\phi\,(\alpha + \beta\cos^2\phi + \gamma\cos^4\phi + \delta\operatorname{sen}^6\phi)}{R^3}.$$

Per la derivata $y_{,}$ basterà mutare a in b, e b in a, $\operatorname{sen}\phi$, $\cos\phi$ in $\cos\phi$, $\operatorname{sen}\phi$, e $d\phi$ in $-d\phi$, e siccome il valore di R rimane invariabile da questo cangiamento ne segue, che posto

$$\alpha' = -ab(c+a)(2b-a), \quad \beta' = 3ab(c+a)(b-a)$$
$$\gamma' = b(b-a)^2(2b-a), \quad \delta' = -3b(b-a)^3,$$

si avrà

$$y_{,} = -\sqrt{a}\,\frac{\rho\cos\phi\,(\alpha' + \beta'\operatorname{sen}^2\phi + \gamma'\operatorname{sen}^4\phi + \delta'\operatorname{sen}^6\phi)}{R^3}.$$

Non sono queste le forme più comode delle derivate per ultimare semplicemente la risoluzione del problema. Partiamo piuttosto dalla formola (m) e troviamone una somigliante pel differenziale della y. A questo oggetto si osservi che il valore di M rimane invariabile alla mutazione di a, b, $\cos\phi$ in b, a, $\operatorname{sen}\phi$, onde richiamando il significato di $A_{,}$, $B_{,}$, $C_{,}$ nel parag. 11., e ponendo

$$L_{,} = 2b - a - (b-a)\operatorname{sen}^2\phi, \quad N_{,} = A_{,} + 2B_{,}\operatorname{sen}^2\phi + 3C_{,}\operatorname{sen}^4\phi,$$

si avrà

$$R^3 y\,dy = \frac{a\rho^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi\,d\phi\,L_{,}\,[M R^2 + L_{,} N_{,}\operatorname{sen}^2\phi]}{R^3} \quad \ldots\ldots (n)$$

In fine tanto da questa formola quanto dalla (m) otteniamo per la sostituzione dei primitivi valori di x, y le derivate

$$x_{,} = \sqrt{b}\,\frac{\rho\operatorname{sen}\phi\,[M R^2 + L N\cos^2\phi]}{R^3}$$

$$y_{,} = -\sqrt{a}\,\frac{\rho\cos\phi\,[M R^2 + L_{,} N_{,}\operatorname{sen}^2\phi]}{R^3}.$$

Queste saranno le espressioni delle derivate, che si adattano più speditamente alle operazioni analitiche. Componiamo infatti i prodotti $x' y_{,}$, $x_{,} y'$, e pongasi per un' istante

$$P = b + (a-b)\cos^2\phi$$

e si ritenga $u = \cos\phi$, $v = \operatorname{sen}\phi$, otterremo

$$x' y_{,} - x_{,} y' = -\sqrt{ab}\,\frac{\rho\,[M R^2 P + L L_{,}(N + N_{,})\,u^2 v^2]}{R^4}.$$

Si riprendano i valori di N, $N_{,}$ ed ordiniamo relativamente alle potenze di $u = \cos\phi$, avremo

$$N + N_{,} = A + A_{,} + 2B_{,} + 3C_{,} + 2(B - B_{,} - 3C_{,})u^2 + 3(C + C_{,})u^4,$$

ove sostituendo i valori di A, B.... tutti i termini si annullano; perciò si ottiene definitivamente

$$x'y_{,} - x_{,}y' = \sqrt{ab}\,\frac{\rho[b + (a-b)u^2][2a - b - 3(a-b)u^2]}{R^2}.$$

Questa è la forma più semplice che possa ottenersi pel valore del primo membro. Siccome poi nell'integrale esprimente la quadratura sferica all'elemento $dx\,dy$ deve sostituirsi il nuovo elemento differenziale $(x'y_{,} - x_{,}y')\,d\rho\,d\phi$, così facendo l'intera sostituzione nella formola riportata al principio di questo parag. ed integrando entro i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$, $\phi = 0$, $\phi = \frac{1}{2}\pi$, avremo

$$S = 4\sqrt{ab}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^1 \frac{[b + (a-b)u^2][2a - b - 3(a-b)u^2]\,\rho\,d\rho\,d\phi}{R^2\sqrt{\left(1 - \rho^2\frac{R_{,}^2}{R^2}\right)}}.$$

Integriamo relativamente a ρ, sarà dopo la sostituzione

$$S = 4\sqrt{ab}\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{[b + (a-b)u^2][2a - b - 3(a-b)u^2]\,d\phi}{R_{,}^2}\right.$$
$$\left. - \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sqrt{abc}.[b + (a-b)u^2][2a - b - 3(a-b)u^2]\,d\phi}{R_{,}^2\,R}\right].$$

Da altra parte si è veduto nel parag. 11. che per $R_{,}^2$, si ha

$$R_{,}^2 = [a - (a-b)u^2][b + (a-b)u^2]^2,$$

perciò

$$S = 4\sqrt{ab}\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{[2a - b - 3(a-b)u^2]\,d\phi}{[a - (a-b)u^2][b + (a-b)u^2]}\right.$$
$$\left. - \sqrt{abc}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{[2a - b - 3(a-b)u^2]\,d\phi}{[a - (a-b)u^2][b + (a-b)u^2]\,R}\right].$$

Il primo degli integrali si trova in termini algebrici, ma il secondo col richiamare il valore della quantità irrazionale R dipende dai trascendenti ultraellittici. Per giungere infine

alle riduzioni ultime decomponiamo in frazioni semplici il coefficiente razionale di $d\phi$, ed osserviamo che

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{a-(a-b)\cos^2\phi} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{b+(a-b)\cos^2\phi} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}},$$

si otterrà col sostituire nuovamente a^2, b^2, c^2 invece di a, b, c

$$S = 4ab.\left[\frac{\pi}{2ab} - 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{abc\,d\phi}{[b^2+(a^2-b^2)\cos^2\phi]R} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{abc\,d\phi}{[a^2-(a^2-b^2)\cos^2\phi]R}\right],$$

ove per la R si ha come dal parag. 11.

$$R^2 = a^2b^2c^2 + [a^2-(a^2-b^2)\cos^2\phi][b^2+(a^2-b^2)\cos^2\phi]^2.$$

La irrazionale R contenendo le potenze seste di $\cos\phi$, i due integrali non sono riducibili ai trascendenti ellittici delle tre note specie.

13. Prendiamo ancora per base di un cono una curva di quarto ordine, derivata dall' ellissi secondo una certa legge, la qual curva vien conosciuta comunemente sotto il nome di *Curva dei parametri*. Un' ellissi di semiassi principali a, b coll' origine al centro ha per equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ed il parametro $p = \frac{2b^2}{a}$, la distanza c del foco dal centro è $c = \sqrt{(a^2-b^2)}$, e si trova col sostituire nell' equazione della curva $\frac{1}{2}p$ invece della y. Sieno ora m, n due semiassi dell' ellissi obliqui e conjugati, l' equazione della curva riferita ai nuovi assi sarà sempre della forma

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1,$$

e generalizziamo la definizione del parametro col fare per $m > n$, $p_{,} = \frac{2n^2}{m}$, è evidente che ad una ordinata eguale ad $\frac{1}{2}p_{,}$ corrisponderà un' ascissa $c_{,} = \sqrt{(m^2-n^2)}$. Ciò posto le coordinate $\frac{1}{2}p_{,}, c_{,}$ sono variabili per ogni sistema di assi obliqui e diametrali, in modo che segnando tutti i punti nel piano

dell' ellissi per ogni sistema di assi diametrali risulterà una nuova linea, della quale è facile rintracciar l' equazione. Osserviamo primieramente che questa curva passa pe' due fochi dell' ellissi, mentre nei vertici le tre grandezze m, n $c_{,}$ si riducono ad a, b, c. La curva in questione passerà anche pel centro: infatti è noto, che nell' ellissi esiste un sistema di assi obliqui diametrali eguali inclinati fra loro del minimo angolo: in questo sistema si avrà $c_{,} = 0$, per ciò il centro sarà un punto della nuova curva. Questo ragionamento potendosi estendere a tutti i quattro rami dell' ellissi, ne viene che la nuova curva sarà composta di quattro rami chiusi eguali e simili, che si riuniscono nel centro, punto doppio della medesima, e la sua figura sarà al tutto somigliante alla *lemniscata*. Per trovare la sua equazione riferiamo l' ellissi e la nuova curva coll' origine al centro agli assi principali della stessa ellissi, e dal centro C conduciamo un raggio vettore m, e prendiamo sulla sua direzione a partir da C una lunghezza $c_{,} = \sqrt{(m^2 - n^2)}$, ove n sia il semiasse conjugato ad m. Ciò posto è chiaro che l' estremità del semiasse m appartiene ad un punto dell' ellissi e l' estremità della lunghezza $c_{,}$ ad un punto della nuova curva, perciò il centro e i due punti corrispondenti alle due curve sono in linea retta. Sieno adunque x, y le coordinate di un punto qualunque dell'ellissi, ed X, Y di un punto corrispondente della nuova curva, si avrà facilmente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x}{X} = \frac{y}{Y}, \quad m^2 = x^2 + y^2$$

$$X^2 + Y^2 = m^2 - n^2, \quad a^2 + b^2 = m^2 + n^2.$$

Eliminiamo tra le due ultime il semiasse n, e cangiamo m in r, avremo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x}{X} = \frac{y}{Y}, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$2r^2 = X^2 + Y^2 + a^2 + b^2.$$

Dalla seconda deduciamo

$$\frac{x^2}{X^2} = \frac{y^2}{Y^2} = \frac{x^2 + y^2}{X^2 + Y^2} = \frac{r^2}{X^2 + Y^2},$$

d' onde

$$x^2 = \frac{X^2(X^2+Y^2+a^2+b^2)}{2(X^2+Y^2)}$$

$$y^2 = \frac{Y^2(X^2+Y^2+a^2+b^2)}{2(X^2+Y^2)}.$$

Questi valori sostituiti nell' equazione dell' ellissi danno

$$(X^2+Y^2)(a^2Y^2+b^2X^2) = (a^2-b^2)(b^2X^2-a^2Y^2).$$

La nuova curva è del quarto ordine, e la precedente trovasi già esposta dal Capitano di artiglieria Sig. *Jacob* (1). L' analisi della equazione trovata conduce a quelle conseguenze di sopra enunciate. Per l' equazione polare ponendo

$$X = R\cos u, \quad Y = R\,\mathrm{sen}\,u$$

si ha

$$R^2 = \frac{(a^2-b^2)(b^2\cos^2 u - a^2\,\mathrm{sen}^2 u)}{a^2\,\mathrm{sen}^2 u + b^2\cos^2 u},$$

la quale si potrebbe anche trovare immediatamente dalla relazione fra i raggi r, R delle due curve, pe' quali si ha

$$2r^2 = R^2 + a^2 + b^2,$$

mentre l' angolo polare u essendo il medesimo sotto due punti corrispondenti delle due curve, si avrà nell' ellissi

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2 u + a^2\,\mathrm{sen}^2 u},$$

d'onde si trae il valore di R^2. È importante poi di osservare che verificando l' equazione dell' ellissi per mezzo delle sostituzioni

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad r^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\,\mathrm{sen}^2\theta$$

si ricaverà per la nuova curva, l' equazione

$$R^2 = (a^2-b^2)\cos^2\theta,$$

la quale ha una somiglianza coll' equazione polare della *lemniscata*. Fra gli angoli u, θ sussiste la relazione

(1) Terquem. Annales de Mathé. Vol. 2.°, pag. 138. An. 1843.

$$a \operatorname{tang} u = b \operatorname{tang} \theta.$$

Infine osserviamo, che come si sono ottenuti i valori delle x, y espressi per le X, Y della nuova curva, così potremo ottenere reciprocamente i valori delle X, Y per le x, y. Infatti dalle equazioni simultanee

$$X = R \cos u, \quad Y = R \operatorname{sen} u, \quad x = r \cos u, \quad y = r \operatorname{sen} u$$

$$2 r^2 = R^2 + a^2 + b^2$$

ricaviamo

$$X = \frac{x}{r} \sqrt{(2 r^2 - a^2 - b^2)}, \qquad Y = \frac{y}{r} \sqrt{(2 r^2 - a^2 - b^2)},$$

d' onde

$$X = \frac{x \sqrt{2(x^2 + y^2) - (a^2 + b^2)}}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$$

$$Y = \frac{y \sqrt{2(x^2 + y^2) - (a^2 + b^2)}}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}.$$

I medesimi valori di X, Y sarebbe assai facile di esprimere per uno degli angoli u, o θ, il che per brevità tralasciamo di eseguire.

14. Sia dunque la curva di quarto ordine

$$(x^2 + y^2)(a^2 y^2 + b^2 x^2) = (a^2 - b^2)(b^2 x^2 - a^2 y^2)$$

e si costruisca sopra di essa un cono di altezza c con l'origine alla sua sommità, avremo per l'equazione della sua superficie

$$c^2 (x^2 + y^2)(a^2 y^2 + b^2 x^2) = (a^2 - b^2)(b^2 x^2 - a^2 y^2) z^2.$$

Intersecando questo cono di quarto ordine con una sfera concentrica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

la curva sferica d' intersezione sarà somigliante nella sua figura a quella della base conica. Eliminiamo la z, e per fissare le idee sia $c^2 > a^2 - b^2$, avremo per la projezione della curva sferica nel piano delle $x\,y$

$$(x^2+y^2)[b^2(a^2-b^2+c^2)x^2+a^2[c^2-(a^2-b^2)]y^2]=(a^2-b^2)(b^2x^2-a^2y^2),$$

ove i coefficienti di x^2, y^2 nel primo membro sono ambedue positivi: la sua equazione polare per la sostituzione di

$$x = r\cos u, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,u$$

sarà

$$r^2 = \frac{(a^2-b^2)(b^2\cos^2 u - a^2\,\mathrm{sen}^2 u)}{b^2(c^2+a^2-b^2)\cos^2 u + a^2[c^2-(a^2-b^2)]\,\mathrm{sen}^2 u};$$

i limiti dell'angolo u sono per la quarta parte dell'estensione

$$u = 0, \quad u = \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{b}{a}\right),$$

ove si ha $\quad r^2 = \frac{a^2-b^2}{c^2+a^2-b^2}, \quad r = 0.$

Di quì pe' valori di x, y, z col porre per brevità

$$\mathrm{R}^2 = b^2(c^2+a^2-b^2)\cos^2 u + a^2[c^2-(a^2-b^2)]\,\mathrm{sen}^2 u$$

$$\mathrm{R}_{,}^2 = b^2\cos^2 u - a^2\,\mathrm{sen}^2 u$$

si avrà

$$x = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}.\mathrm{R}_{,}\cos u}{\mathrm{R}}, \quad y = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}.\mathrm{R}_{,}\,\mathrm{sen}\,u}{\mathrm{R}}, \quad z = \frac{c\mathrm{R}_{,}}{\mathrm{R}}.$$

Questi valori appartengono nello stesso tempo ad un punto qualunque della curva sferica.

15. Nel preparare le diverse formole che ci serviranno nella quadratura della sua area, cangiamo per semplicità a^2, b^2, c^2 in a, b, c, e poniamo ancora

$$\mathrm{A} = b(c+a-b), \quad \mathrm{B} = a(c-a+b),$$

per ciò

$$\mathrm{R}^2 = \mathrm{A}\cos^2 u + \mathrm{B}\,\mathrm{sen}^2 u, \quad \mathrm{R}_{,}^2 = b\cos^2 u - a\,\mathrm{sen}^2 u;$$

i valori di x, y che dovremo assumere, saranno

$$x = \frac{\sqrt{(a-b)}.\rho\mathrm{R}_{,}\cos u}{\mathrm{R}}, \quad y = \frac{\sqrt{(a-b)}.\rho\mathrm{R}_{,}\,\mathrm{sen}\,u}{\mathrm{R}},$$

d' onde

$$z = \sqrt{\left(1 - \frac{(a-b)\mathrm{R}_{,}^2}{\mathrm{R}^2}\rho^2\right)},$$

ove sempre deve prendersi la ρ entro i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$. Le derivate parziali relative ad ρ sono

$$x' = \frac{\sqrt{(a-b)}.\mathrm{R}_{,}\cos u}{\mathrm{R}}, \quad y' = \frac{\sqrt{(a-b)}.\mathrm{R}_{,}\,\mathrm{sen}\,u}{\mathrm{R}}.$$

Per le derivate $x_{,}$, $y_{,}$ relative all' angolo u prendiamo il valore della x, eleviamo al quadrato, e riduciamo tutto alle potenze di sen u, si avrà

$$R^2 x^2 = (a-b)\rho^2 [b-(a+2b)\operatorname{sen}^2 u + (a+b)\operatorname{sen}^4 u].$$

Differenziando, e trasportando nel secondo membro i termini provenienti dalla differenziazione di R^2, sostituendo nuovamente il valore di x^2, e facendo di più

$$a = Aa + Bb + Ab = b[c(2a+b) + b(a-b)]$$

$$\beta = 2A(a+b) = 2b(a+b)(c+a-b)$$

$$\gamma = (B-A)(a+b) = (a^2-b^2)(c-a-b),$$

otterremo

$$\frac{x\,dx}{du} = \frac{(a-b)\rho^2 \operatorname{sen} u \cos u\,[-a+\beta \operatorname{sen}^2 u - \gamma \operatorname{sen}^4 u]}{[A+(B-A)\operatorname{sen}^2 u]^2},$$

d' onde per la sostituzione dei valori di x ed R, sarà

$$x_{,} = -\frac{\sqrt{(a-b)}.\rho \operatorname{sen} u\,(a-\beta \operatorname{sen}^2 u + \gamma \operatorname{sen}^4 u)}{R_{,} R^3}.$$

Ripetendo nella stessa guisa le operazioni analoghe nella differenziazione della y^2, si avrà per la derivata

$$y_{,} = \frac{\sqrt{(a-b)}\rho \cos u\,[b^2(c+a-b) - \beta \operatorname{sen}^2 u - \gamma \operatorname{sen}^4 u]}{R_{,}.R^3}.$$

Determinati i valori delle quattro derivate formiamo la differenza dei prodotti $x' y_{,}$, $x_{,} y'$, e poniamo

$L = b^2(c+a-b)$, $M = -2b(bc-a^2+b^2)$, $N = -(a^2-b^2)(c-a-b)$

si otterrà

$$x' y_{,} - x_{,} y' = \frac{(a-b)\rho\,[L + M \operatorname{sen}^2 u + N \operatorname{sen}^4 u]}{R^4}.$$

Ora la quantità che trovasi nel numeratore entro parentesi è evidentemente eguale al prodotto $R^2 R_{,}^2$, perciò la precedente formola diverrà

$$x' y_{,} - x_{,} y' = \frac{(a-b)\rho R_{,}^2}{R^2}.$$

Si sostituisca adunque nel noto integrale della quadratura sferica l' elemento $(x'y_{,} - x_{,}y')\,d\rho\,du$ all' elemento $dx\,dy$, ed i limiti per la quarta parte dell'estensione saranno $\rho=0$, $\rho=1$, ed

$$u=0, \quad u=\text{arc tang}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}=\theta.$$

Avremo per la quadratura della nostra curva sferica l'integrale

$$S=4\,(a-b)\int_0^\theta\int_0^1 \frac{R_{,}^2\,\rho\,d\rho\,du}{R^2\sqrt{\left(1-\frac{(a-b)R_{,}^2}{R^2}\rho^2\right)}}.$$

Integriamo relativamente a ρ, abbiamo

$$\int_0^1 \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{1-\frac{(a-b)R_{,}^2}{R^2}\rho^2}} = \frac{R^2}{(a-b)R_{,}^2} - \frac{R\sqrt{R^2-(a-b)R_{,}^2}}{(a-b)R_{,}^2},$$

d' onde per la sostituzione di R, $R_{,}$, il valore di S diviene

$$S=4\left[\int_0^\theta du-\sqrt{c}\int_0^\theta \frac{du\sqrt{[b+(a-b)\,\text{sen}^2 u]}}{\sqrt{[A+(B-A)\,\text{sen}^2 u]}}\right].$$

Il secondo degli integrali si riduce ad un trascendente ellittico di terza specie. È noto in generale che la formola differenziale

$$\frac{du}{\sqrt{(\alpha+\beta\,\text{sen}^2 u)}\sqrt{(\gamma+\delta\,\text{sen}^2 u)}}$$

si riporta alle formole differenziali dei trascendenti ellittici col fare una delle due trasformazioni

$$\text{tang}\,u=\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\,.\,\text{tang}\,\phi, \quad \text{tang}\,u=\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma+\delta}}\,.\,\text{tang}\,\phi,$$

ove uno dei prodotti $\alpha(\alpha+\beta)$, $\gamma(\gamma+\delta)$ sia positivo. Nel nostro caso possiamo fare $\alpha=b$, $\beta=a-b$, perciò

$$\text{tang}\,u=\sqrt{\frac{b}{a}}\,.\,\text{tang}\,\phi,$$

e quindi

$$\text{sen}^2 u=\frac{b\,\text{sen}^2\phi}{a\cos^2\phi+b\,\text{sen}^2\phi}, \quad \cos^2 u=\frac{a\cos^2\phi}{a\cos^2\phi+b\,\text{sen}^2\phi}$$

$$du=\frac{\sqrt{ab}\,.\,d\phi}{a\cos^2\phi+b\,\text{sen}^2\phi}, \quad \sqrt{[A+(B-A)\,\text{sen}^2 u]}=\frac{\sqrt{[Aa+(Bb-Aa)\,\text{sen}^2\phi]}}{\sqrt{(a\cos^2\phi+b\,\text{sen}^2\phi)}}.$$

Ai limiti poi $u=0$, $u=\theta=\text{arc tang}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$, corrispondono i limiti $\phi=0$, $\phi=\frac{\pi}{4}$, e perciò

$$\int_0^\theta \frac{du\sqrt{[b+(a-b)\,\text{sen}^2 u]}}{\sqrt{[A+(B-A)\,\text{sen}^2 u]}}=ab\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\phi}{(a\cos^2\phi+b\,\text{sen}^2\phi)\sqrt{[Aa-(Aa-Bb)\,\text{sen}^2\phi]}}.$$

L' integrale del secondo membro è un trascendente ellittico di terza specie: infatti ponendo

$$n=-\frac{(a-b)}{a},\quad k^2=\frac{Aa-Bb}{Aa}=1-\frac{[c-(a-b)]}{c+a-b}$$

per $a>b$, il parametro n sarà negativo, e $k<1$ pel valore del modulo, e l' ampiezza sarà data da un angolo di 45°; d' onde per la cognita notazione di Legendre otterremo

$$\int_0^\theta \frac{du\sqrt{[b+(a-b)\,\text{sen}^2 u]}}{\sqrt{[A+(B-A)\,\text{sen}^2 u]}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{(c+a-b)}}\,.\,\Pi\left(n,k,\frac{\pi}{4}\right),$$

dunque per l' area della nostra curva sferica si ha

$$S=4\left[\text{arc tang}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{(c+a-b)}}\,\Pi\left(n,k,\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Sostituiamo nuovamente a^2, b^2, c^2 invece di a, b, c pel modulo k, e parametro n, abbiamo

$$k^2=\frac{2(a^2-b^2)}{c^2+a^2-b^2},\quad n=-\frac{(a^2-b^2)}{a^2}$$

e quindi

$$S=4\left[\text{arc tang}\left(\frac{b}{a}\right)-\frac{bc}{\sqrt{(c^2+a^2-b^2)}}\,\Pi\left(n,k,\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Onde k sia minore dell' unità, supporremo per fissare le idee $c^2>a^2-b^2$.

16. Aggiungeremo ancora in poche parole l' analisi per la ricerca dell' area dell' ellissi sferica, la quale quantunque già determinata dal Sig. *Catalan*, sarà tuttavia qui riportata. Sia dunque l' ellissi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

l' equazione del cono avente la detta ellissi per base, e per origine il centro della superficie, sarà

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

L' intersezione della sfera concentrica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

determinerà l' ellissi sferica. Eliminiamo la z si avrà per la projezione della curva sferica nel piano delle xy, l'ellissi piana

$$\frac{x^2(c^2+a^2)}{a^2} + \frac{y^2(c^2+b^2)}{b^2} = 1.$$

Facciamo la sostituzione di

$$x = r\cos u, \quad y = r \operatorname{sen} u$$

avremo per la sua equazione polare

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2(c^2+a^2)\cos^2 u + a^2(c^2+b^2)\operatorname{sen}^2 u}.$$

Di qui se per brevità poniamo

$$R^2 = b^2(c^2+a^2)\cos^2 u + a^2(c^2+b^2)\operatorname{sen}^2 u$$

i valori di x, y, z daranno

$$x = \frac{ab\cos u}{R}, \quad y = \frac{ab \operatorname{sen} u}{R}, \quad z = \frac{c\sqrt{(b^2\cos^2 u + a^2 \operatorname{sen}^2 u)}}{R}.$$

Onde queste espressioni sieno applicabili alla ricerca dell'area dell' ellissi sferica, converrà prendere una variabile ausiliare ρ entro i limiti di $\rho = 0$, $\rho = 1$, per poter quindi ottenere il nuovo elemento differenziale da sostituirsi invece di $dx\,dy$: pe' valori adunque di x, y, z si avrà

$$x = \frac{ab\rho\cos u}{R}, \quad y = \frac{ab\rho \operatorname{sen} u}{R}, \quad z = \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 b^2 \rho^2}{R^2}\right)}.$$

Le derivate poi relative a ρ ed u saranno

$$x' = \frac{ab\cos u}{R}, \quad y' = \frac{ab \operatorname{sen} u}{R},$$

$$x_{,} = -\frac{a^3 b(c^2+b^2)\rho \operatorname{sen} u}{R^3}, \quad y_{,} = \frac{b^3 a(c^2+a^2)\rho\cos u}{R^3},$$

dalle quali equazioni si trae facilmente

$$x'y_{,} - x_{,}y' = \frac{a^2 b^2 \rho}{R^2}.$$

Sostituendo pertanto tutti questi valori nell' integrale duplicato rappresentante la quadratura sferica, ed integrando entro i limiti $\rho = 0$, $\rho = 1$ $u = 0$, $u = \frac{\pi}{2}$, si avrà per l'intera ellissi sferica

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{a^2 b^2 \rho \, d\rho \, du}{R^2 \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 b^2 \rho^2}{R^2}\right)}}.$$

Dalla prima integrazione abbiamo

$$\int_0^1 \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2 b^2 \rho^2}{R^2}\right)}} = \frac{R^2}{a^2 b^2} - \frac{R^2}{a^2 b^2} \cdot \frac{\sqrt{c^2(a^2 \operatorname{sen}^2 u + b^2 \cos^2 u)}}{R},$$

perciò

$$S = 4 \left(\frac{\pi}{2} - c \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{du \sqrt{(a^2 \operatorname{sen}^2 u + b^2 \cos^2 u)}}{\sqrt{[b^2(c^2 + a^2)\cos^2 u + a^2(c^2 + b^2)\operatorname{sen}^2 u]}} \right).$$

L' integrale del secondo membro riducesi ad un trascendente ellittico completo di terza specie, e la trasformazione delle variabili si opera in un modo al tutto somigliante a quello già praticato nel precedente parag. 15°. Infatti ponendo

$$\operatorname{tang} u = \frac{b}{a} \operatorname{tang} \phi$$

i limiti dell' integrazione saranno i medesimi; perciò se si rappresenti con U questo integrale si avrà

$$U = a b \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{(a^2 \cos^2 \phi + b^2 \operatorname{sen}^2 \phi) \sqrt{[c^2 + a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2 u]}}.$$

Infine col porre

$$n = -\frac{(a^2 - b^2)}{a^2}, \quad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{c^2 + a^2}$$

otterremo il trascendente ellittico di parametro n e di modulo k, vale a dire

$$U = \frac{b}{a\sqrt{(c^2+a^2)}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{(1+n\,\mathrm{sen}^2\varphi)\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sen}^2\varphi)}} = \frac{b}{a\sqrt{(c^2+a^2)}}.\Pi(n,k).$$

Avremo dunque per l' area dell' ellissi sferica

$$S = 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{bc}{a\sqrt{(c^2+a^2)}}\Pi(n,k)\right).$$

Questa espressione è d' accordo, e coincide con quella trovata dal Signor Catalan nel Giornale del Signor Liouville, Tom. 6°.

17. Termineremo questa Memoria col fare un cenno sopra due curve piane, una di sesto ordine, e l'altra di quarto ambedue derivate dall' ellissi, o più generalmente da una sezione conica, e sopra le quali costruiti due coni, le aree delle loro intersezioni con una sfera concentrica dipendono dai trascendenti ultraellittici. La prima curva è il luogo geometrico della sommità di un angolo retto del quale i due lati sieno costantemente perpendicolari ad una conica data. Quando la conica riducesi ad un ellissi, l' equazione della nuova curva sarà (1)

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)(a^2y^2+b^2x^2)^2 = (a^2-b^2)^2(a^2y^2-b^2x^2)^2,$$

la quale trovasi anche più anticamente negli Annali di Matematica del Sig. Gergonne. La curva in questione è composta di quattro ovali, che si riuniscono nel centro dell' ellissi, che sarà nello stesso tempo un punto quadruplo della curva; ma conviene osservare che le due ovali corrispondenti all'asse maggiore dell' ellissi sono diverse dalle altre due corrispondenti all' asse minore. Costruendo pertanto un cono retto sopra questa curva, ed intersecato con una sfera concentrica, la quadratura dell' area sferica proveniente dalle due ovali eguali corrispondenti all' asse maggiore, sarà data dall' integrale doppio definito

(1) Terquem. Annales de Mathém. Tom. 2°, pag. 365, per *M.r Vidal*.

$$S=(a^2-b^2)^2.4\int_0^\theta\int_0^1 \frac{(a^2\operatorname{sen}^2 u-b^2\cos^2 u)^2\,\rho\,d\rho\,du}{R^2R_{,}^2\sqrt{\left(1-\frac{(a^2-b^2)^2(a^2\operatorname{sen}^2 u-b^2\cos^2 u)^2}{R^2R_{,}^2}\rho^2\right)}},$$

ove

$$\theta=\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{b}{a}\right).$$

Le quantità poi $R, R_{,}$ sono formate col seguente modo. Sia c l' altezza del cono, e pongasi

$$A=b^2\left[c\sqrt{(a^2+b^2)}-(a^2-b^2)\right],\quad B=a^2\left[c\sqrt{(a^2+b^2)}+(a^2-b^2)\right]$$
$$A_{,}=b^2\left[c\sqrt{(a^2+b^2)}+(a^2-b^2)\right],\quad B_{,}=a^2\left[c\sqrt{(a^2+b^2)}-(a^2-b^2)\right]$$

si avrà

$$R^2=A\cos^2 u+B\operatorname{sen}^2 u,\qquad R_{,}^2=A_{,}\cos^2 u+B_{,}\operatorname{sen}^2 u.$$

Eseguita una prima integrazione relativamente a ρ, il valore di S si ridurrà ad un primo termine di forma finita, ed il secondo ad un integrale definito semplice dipendente dai trascendenti ultra-ellittici. La seconda curva della quale vengo a dar un rapido cenno è il luogo geometrico del punto medio di una retta data iscritta in una conica.

Il Sig. Terquem nel Volume quarto de' suoi Annali di Matematica pag. 590, An. 1845 determina generalmente l' equazione di questa curva, che è di quarto ordine, e concentrica alla conica. Faremo qui osservare che la risoluzione di questo problema trovasi completa in una Dissertazione del Signor Maurizio Steiner di Breslaw in data del 27 Febbrajo 1841 (1). Quando l' equazione della conica riducasi ad un ellissi, e sia $2c$ la grandezza della retta iscritta, l' equazione della curva derivata coll' indicata legge, come può vedersi nelle due citate opere dei Signori *Terquem* e *Steiner*, sarà

$$a^6y^4+b^6x^4+a^2b^2(a^2+b^2)x^2y^2=a^4b^2(a^2-c^2)y^2-a^2b^4(c^2-b^2)x^2.$$

(1) Il titolo di questa Dissertazione è: « De loco geometrico centri lineae rectae definitae cujusdam longitudinis cujus termini in Peripheria lineae secundi ordinis moventur. » Vratislaviae. Typis Kepferianis.

Questa curva di quarto ordine concentrica all' ellissi offre delle varietà, secondo la condizione a cui è soggetta la retta $2c$, così se sia $c<a$ e $>b$ la forma della curva è somigliante alla lemniscata, ed avrà un punto doppio nel suo centro. La precedente equazione potrà anche scriversi

$$(a^4 y^2+b^4 x^2)(a^2 y^2+b^2 x^2)=a^2 b^2 [(a^4 y^2+b^4 x^2)-c^2(a^2 y^2+b^2 x^2)],$$

ove ponendo infine

$$R^2=a^4 y^2+b^4 x^2, \qquad R_{,}^2=a^2 y^2+b^2 x^2$$

si ridurrà ad

$$\frac{a^2 b^2}{R_{,}^2}-\frac{c^2}{R^2}=1.$$

Costruendo poi sopra questa curva un cono, ed intersecandolo con una sfera concentrica, la quadratura dell' area sferica dipenderà da un integrale semplice definito che appartiene alla classe dei trascendenti ultra-ellittici. Noi per brevità ci dispensiamo di riportare le diverse formole relative a queste ricerche.

Postscriptum. Diversi risultati ai quali siam giunti nella precedente Memoria possono anche rinvenirsi assai facilmente col fare direttamente uso delle coordinate sferiche. Riprendiamo la formola per le quadrature sferiche

$$S=\iint \frac{dx\,dy}{z}=\iint \frac{dz\,dy}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}}$$

e pongasi

$$z=\cos\varphi, \quad x=\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \quad y=\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta.$$

Sieno x', y' le derivate parziali delle x, y, relative alla variabile φ ed $x_{,}, y_{,}$ le derivate relative a θ, avremo

$$x' y_{,}-x_{,} y'=\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi,$$

quindi l' integrale duplicato si trasforma in

$$S=\iint \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, d\theta.$$

Integriamo relativamente a ϕ, e sia C una costante arbitraria dovuta all' integrazione, sarà

$$S = \int (C - \cos\phi)\, d\theta.$$

Ora per $\phi = 0$, $S = 0$, d' onde $C = 1$, e perciò

$$S = \int (1 - \cos\phi)\, d\theta.$$

Questa è la nota formola per le quadrature in coordinate sferiche, della quale ne mostriamo due applicazioni.

Sia il cono di quarto ordine

$$(x^2 + y^2)^2 = z^2 (a^2 x^2 - b^2 y^2)$$

concentrico alla sfera di raggio 1, si avrà per la sostituzione dei valori di x, y, z

$$\tang^2 \phi = a^2 \cos^2\theta - b^2 \operatorname{sen}^2\theta.$$

Di qui

$$\cos^2\phi = \frac{1}{1 + a^2 - (a^2 + b^2)\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Integrando adunque fra i limiti

$$\theta = 0, \quad \theta = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a}{b}\right)$$

otterremo per l' intera area sferica proveniente dall' intersezione del cono, e della sfera concentrica

$$S = 4\left(\theta - \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{[1 + a^2 - (a^2 + b^2)\operatorname{sen}^2\theta]}}\right).$$

Questa formola coincide con quella alla quale giungemmo nel parag. 3°. Con la stessa facilità si otterrebbe la relativa quadratura sferica, quando si prendesse il cono di quarto ordine

$$(x^2 + y^2)^2 = z^2 (a^2 x^2 + b^2 y^2).$$

Sia il cono ellittico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$

avremo per la sostituzione dei valori delle x, y, z

$$\tang^2 \phi = \frac{a^2 b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + b^2 \cos^2\theta},$$

d' onde

$$\cos^2\phi = \frac{b^2 + (a^2 - b^2)\,\mathrm{sen}^2\theta}{b^2(1 + a^2) + (a^2 - b^2)\,\mathrm{sen}^2\theta}.$$

Integrando dopo la sostituzione fra i limiti $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, si otterrà per l' intera area dell' ellissi sferica

$$S = 4\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sqrt{[b^2 + (a^2 - b^2)\,\mathrm{sen}^2\theta]}}{\sqrt{[b^2(1 + a^2) + (a^2 - b^2)\,\mathrm{sen}^2\theta]}}\, d\theta\right).$$

L' integrale del secondo membro si riduce ad un trascendente ellittico di terza specie per mezzo di una delle note trasformazioni, e che ci dispensiamo di riportare

FINE della Seconda Parte del Tomo XXIV.