DI UN METODO

PER INTEGRARE ALCUNE EQUAZIONI DIFFERENZIALI NON LINEARI

NOTA

DEL SOCIO ATTUALE

PROF. GASPARE MAINARDI.

Ricevuta il 28 Febbrajo 1848.

Indicate con $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$ quattro funzioni di una variabile x, di una funzione y di essa e del suo coefficiente differenziale primo y', la integrazione della equazione

$$\phi_1 \cdot \psi_2 = \psi_1 \cdot \phi_2$$

si conseguisce talvolta coll'analisi seguente. Moltiplicata la equazione per una funzione M di x ed y, si decomponga nelle due

$$\phi_1 = M\psi_1, \quad \phi_2 = M\psi_2$$

e cavato da una $y' = \omega(x, y, M)$ si sostituisca nell' altra, onde ne venga $F(x, y, M) = 0$. Differenziata questa equazione rispetto ad x ne caveremo

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' + \frac{dF}{dM}\left(\frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dy} y'\right) = 0$$

ove posto nuovamente $y' = \omega$, ne deriva la equazione identica

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \omega + \frac{dF}{dM}\left(\frac{dM}{dx} + \frac{dM}{dy} \omega\right) = 0$$

la quale contenendo i coefficienti differenziali primi parziali dell' incognita M si decompone nelle due che seguono

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \omega + \frac{dF}{dM} M' = 0, \quad y' = \omega(x, y, M).$$

Combinando la prima di queste ultime equazioni alla

$F(x, y, M) = 0$ per eliminarvi la y; ovvero combinata la $F(x, y, M) = 0$ all' altra

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\omega + \omega\frac{dF}{dM}\cdot\frac{M'}{y'} = 0$$

onde eliminare la x, conseguiremo una nuova equazione differenziale contenente l'incognita M, il cui integrale determina questa funzione; eliminata la quale, mediante la equazione $F(x, y, M) = 0$, avremo nella risultante l'integrale completo della proposta equazione.

Applichiamo il metodo ad alcune questioni geometriche.

Si domandi la trajettoria ortotomica delle ellissi, o iperboli, omofocali? Riferite quelle linee alle due rette ortogonali in cui devono essere collocati i loro assi, indichiamo con $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ la equazione di una di quelle ellissi, supponiamo $a^2 - b^2 = c^2$ e la equazione differenziale della trajettoria sarà

$$1 - \frac{b^2 x}{a^2 y} y' = 0 \qquad \text{ossia} \qquad (1) \quad (x + yy')(xy' - y) = c^2 y'$$

che ricaviamo colla eliminazione delle varianti a, b dalle tre antecedenti equazioni. Moltiplicata per M la equazione differenziale (1), si decomponga nelle due

$$x + yy' = My', \quad M(xy' - y) = c^2$$

d' onde si trae $\quad (2) \quad c^2(M - y) + M^2 y = M(x^2 + y^2)$

e differenziando $\quad M'(c^2 + 2My - x^2 - y^2) = (M^2 + c^2)y'$.

Scritta la equazione (2) come segue

$$M(c^2 + 2My - x^2 - y^2) = (M^2 + c^2)y$$

combinata all' antecedente, ricaviamo $\frac{M'}{M} = \frac{y'}{y}$, onde $M = A.y$; essendo A la costante richiesta dalla integrazione. Avremo quindi l' integrale completo della proposta equazione (1)

$$\frac{Ax^2}{c^2(A-1)} - \frac{A}{c^2}y^2 = 1$$

il quale rappresenta un sistema di ellissi, o iperboli, omofocali.

Cerchiamo la equazione generale delle curve piane, di cui qualsivoglia tangente forma angoli eguali coi raggi vettori che partono da due punti dati? Indicata colla lettera a la distanza di quei punti, riportiamo le linee cercate a due assi ortogonali, uno dei quali passi pei punti dati, l' altro divida in due parti eguali la retta che li congiunge. La equazione delle linee sarà

$$\frac{y-xy'}{\sqrt{(x^2+y^2)}}=\frac{y-(x-a)y'}{\sqrt{(y^2+(x-a)^2)}},$$

ovvero $$2y'(x^2+y^2)=(2x-a)(yy'^2+2xy'-y).$$

Introdotto in questa equazione il moltiplicatore M, decomposto il prodotto nei due fattori

$$My'=2x-a\,,\quad M(yy'^2+2xy'-y)=2(x^2+y^2)$$

ed eliminato y', si desume

$$2M(x^2+y^2)=y(2x-a)^2+2Mx(2x-a)-My^2. \tag{1}$$

Differenziata questa equazione, poi eliminato nuovamente y', caveremo

$$2M'(y^2-x^2+My+ax)=\frac{2x-a}{M}\left((2x-a)^2+M^2\right)$$

quindi scritta la equazione (1) come segue

$$2M(y^2-x^2+My+ax)=y\left((2x-a)^2+M^2\right)$$

da questa e dalla antecedente desumiamo

$$\frac{M'}{M}=\frac{2x-a}{My}=\frac{y'}{y}\qquad\text{quindi}\quad M=A\,.\,y$$

poi l' integrale cercato

$$A(A+2)y^2=(2x-a)^2+2Ax(x-a)$$

il quale rappresenta una curva conica avente i fuochi nei punti dati.

Proponiamoci di determinare le trajettorie oblique delle ellissi, o iperboli, omofocali? Ritenute le supposizioni del primo esempio, essendo

$$a^2yy'+b^2.\,x=n(a^2y-b^2xy')$$

la equazione differenziale della linea cercata, ed n la tangente dell' angolo d' incontro, siccome da questa desumiamo

$$a^2=\frac{x(1+ny')}{x(1+ny')-y(n-y')}\,c^2,\qquad b^2=\frac{y(n-y')}{x(1+ny')-y(n-y')}\,c^2$$

mediante la equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ avremo

$$(1)\qquad [nx+y+y'(ny-x)]\,[x-ny+y'(nx+y)]=c^2\,(1+ny')\,(n-y').$$

Moltiplicata quest' ultima per M, caviamone le due

$$\mathrm{M}(nx+y+y'(ny-x))=c^2(n-y'),\qquad x-ny+y'(nx+y)=\mathrm{M}(1+ny')$$

delle quali, coll' eliminare y', si deduce

$$(nx+y-n\mathrm{M})\,(\mathrm{M}(nx+y)-nc^2)=(\mathrm{M}-x+ny)\,[\,(x-ny)\,\mathrm{M}-c^2]$$

ossia
$$(x^2+y^2+c^2)\,\mathrm{M}=x\,(c^2+\mathrm{M}^2).$$

Differenziata questa equazione, e sostituiti nella risultante

$$y'=\frac{\mathrm{M}-x+ny}{nx+y-n\mathrm{M}},\qquad x+yy'=\frac{n(x^2+y^2)+\mathrm{M}(y-nx)}{nx+y-n\mathrm{M}}$$

ne segue

$$c^2+\mathrm{M}^2+2x\mathrm{M}\mathrm{M}'=(x^2+y^2+c^2)\,\mathrm{M}'+2\mathrm{M}\,\frac{n(x^2+y^2)+\mathrm{M}(y-nx)}{nx+y-n\mathrm{M}}$$

e perchè $x^2+y^2+c^2=\frac{x(c^2+\mathrm{M}^2)}{\mathrm{M}}$, abbiamo

$$[\mathrm{M}(c^2+\mathrm{M}^2)+x(\mathrm{M}^2-c^2)\,\mathrm{M}']\,[n(x-\mathrm{M})+y]=2nc^2\mathrm{M}(x-\mathrm{M})+2\mathrm{M}^3y$$

ovvero
$$(\mathrm{M}^2-c^2)\,[n(x-\mathrm{M})\,(\mathrm{M}+x\mathrm{M}')+y(x\mathrm{M}'-\mathrm{M})]=0.$$

Si hanno quindi le due equazioni

$$n\,(x-\mathrm{M})\,(x\mathrm{M})'+yx^2\left(\frac{\mathrm{M}}{x}\right)'=0,\qquad \mathrm{M}y^2=(x-\mathrm{M})\,(c^2-x\mathrm{M})$$

da cui
$$n\,(x\mathrm{M})'\sqrt{x-\mathrm{M}}+\left(\frac{\mathrm{M}}{x}\right)'.\,x^2\,\mathrm{M}\sqrt{\mathrm{M}}\sqrt{c^2-x\mathrm{M}}=0$$

cioè
$$n\,\frac{(x\mathrm{M})'}{(x\mathrm{M})^2\sqrt{\left(\frac{c^2}{x\mathrm{M}}-1\right)}}+\frac{\left(\frac{\mathrm{M}}{x}\right)'}{\sqrt{\left(1-\frac{\mathrm{M}}{x}\right)}}=0$$

la quale integrata fornisce

$$(2) \qquad \frac{n}{c^2}\sqrt{\left(\frac{c^2}{x\mathrm{M}}-1\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{\mathrm{M}}{x}\right)}=\mathrm{A}.$$

Siccome poi $y\sqrt{\mathrm{M}}=\sqrt{x-\mathrm{M}}\sqrt{c^2-x\mathrm{M}}$, avremo

$$\frac{n}{c^2}y+x-\mathrm{M}=\mathrm{A}\sqrt{x}\sqrt{x-\mathrm{M}}, \qquad x-\mathrm{M}=\left(\frac{\mathrm{A}c\sqrt{x}\pm\sqrt{\mathrm{A}^2c^2x-4ny}}{2c}\right)^2$$

$$y^2\left[4c^2x-\left(\mathrm{A}c\sqrt{x}\pm\sqrt{\mathrm{A}^2c^2x-4ny}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{\mathrm{A}c\sqrt{x}\pm\sqrt{\mathrm{A}^2c^2x-4ny}}{2c}\left[4c^2(c^2-x^2)+x\left(\mathrm{A}c\sqrt{x}+\sqrt{\mathrm{A}^2c^2x-4ny}\right)^2\right]$$

la quale ultima equazione è l'integrale completo della proposta.

Se poniamo $\mathrm{A}=0$, per cui $\mathrm{M}=x+\frac{ny}{c^2}$, ne deriva l'integrale particolare

$$\frac{n}{c^2}(y^2-x^2)+\left(1-\frac{n^2}{c^4}\right)xy+n=0.$$

Siccome è facile il risalire dalla equazione (2) alla (1), seguendo passo passo in ordine retrogrado l'analisi esposta, ometto la complicata verificazione dell'integrale trovato.

Il metodo d'integrazione, che propongo, talvolta ricade in quello di Hermann, il quale consiste nel differenziare la equazione da integrarsi. Sia data a cagion d'esempio la equazione $xy'^2+y=xy'$: introdottovi il moltiplicatore M, poi decomposta nelle due $y'=\mathrm{M}$, $x(\mathrm{M}^2-\mathrm{M})+y=0$: differenzieremo la seconda rispetto ad x, e posto in essa $y'=\mathrm{M}$, si caverà $x(2\mathrm{M}-1)\mathrm{M}'+\mathrm{M}^2=0$, quindi integrando

$x\,.\,\mathrm{M}^2.\,e^{\frac{1}{\mathrm{M}}}=\mathrm{A}$ nella quale si sostituirà

$$\mathrm{M}=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{y}{x}}$$

onde conseguire l'integrale cercato.