OSSERVAZIONI

SU' METODI PROPOSTI DALL' ILLUSTRE LAGRANGE

PER LE CURVE INVILUPPI,

CON ALTRE RICERCHE AFFINI,

DEL SOCIO ATTUALE

CAV. VINCENZO FLAUTI.

Ricevuta il 23 Giugno 1848.

L' ellisse e l' iperbole sono le curve di contatto di quelle rette, che incontrandone due altre parallele tra loro, ne tagliano porzioni di costante rettangolo, da due punti in esse fissati. E questa proprietà di tali curve derivando immediatamente da quelle delle loro tangenti, gli antichi poterono però conoscerle. Ma essi non vi rilevarono del pari che quel rettangolo fosse un *massimo*; nè tampoco l' avvertirono i moderni dopo l' applicazione dell' algebra alla geometria, fino a che l' insigne Lagrange, penetrando col suo acuto ingegno nella famiglia de' problemi, che possono proporsi sulle tangenti, i raggi di osculo, ec. ec. ed in generale su' contatti delle curve, ne distinse due generi; l' un di essi diretto, che consiste in trovare alcuni elementi del contatto di un cert' ordine; ed osserva che dipendendo siffatta ricerca dall' analisi diretta delle funzioni, i problemi, che vi si rapportano sono sempre risolvibili analiticamente. Non però così nel genere *inverso*; nel quale si suppone esservi una relazione data tra alcuni di quelli elementi, e le coordinate x, y, con le funzioni derivate y', y'', ec.; e questa con la sostituzione delle espressioni generali degli elementi in x, y, y', y'', ec. diviene in conseguenza un' equazione derivata di un cert' ordine, la di cui equazione primitiva in x, y sarebbe quella della curva cercata (1). Conducendo adunque siffatti problemi immediatamente ad equazioni derivate, la loro soluzione dee essenzialmente dipendere dall'analisi inversa delle funzioni; e va però soggetta a tutte le difficoltà ed imperfezioni di quest' analisi. Avverte egli però potersi anche per tal genere in alcuni casi riuscire direttamente per mezzo di considerazioni particolari, le quali, come esprimesi, meritano tanto maggiore attenzione, quanto che tengono a certe finezze di analisi, ch' è importante di conoscere; e tra questi casi indica quelli nei quali la relazione data esista tra gli elementi del contatto, senza che vi entrino a parte le coordinate x, y.

E come che ogni detto di quest' uomo veramente singolare l' è un principio di scienza da stabilirsi per massima, io ne trarrò per prima conseguenza che l' attenersi nell' uso dell' analisi moderna, in una qualche ricerca, ad un metodo più elementare, non sia da considerarsi lieve cosa ed indifferente; e che convenga talvolta deviare da' metodi generali per riuscire con maggior semplicità e più facilmente nella soluzione di un qualche problema, che intorno la geometria si versi. Del che sebbene non vi sia chi dissenta, pure mi giova averlo rilevato dal principe degli analisti, a fin di distruggere una impropria maniera di pensare in contrario, non ha guari inconsideratamente emessa da taluni nostri Professori.

Il Lagrange intanto per illustrare con un esempio la teorica, che imprende a sviluppare, si propone a risolvere il seguente problema: *Determinare la curva, in cui ciascuna tangente incontrando due ordinate a punti dati dell' asse (prodotte se bisogna), ne ascinda parti, che comprendano sempre lo stesso rettangolo.*

Il progresso dell' analisi del Lagrange è il seguente:

Sieno a, a' le ascisse de' due punti dati, e si rappresenti con

$$y = Tx + V$$

(1) Théorie des Fonctons analytiques n. 122.

l'equazione generale alla tangente tra le coordinate rettilinee x, y; facendo in quest' equazione una volta $x=a$, ed un' altra $x=a'$, si avranno i due valori di y, il cui prodotto dev' esser costante per ipotesi; indicandolo adunque con k, si avrà tra gli elementi T, V la relazione

$$(\mathrm{T}a+\mathrm{V})(\mathrm{T}a'+\mathrm{V})=k;$$

Ma è, com' egli avea fatto precedentemente rilevare,

$$\mathrm{T}=y', \qquad \mathrm{V}=y-xy'$$

(dinotando y' la funzione prima derivata di y); si avrà perciò l' equazione derivata del 1.° ordine

$$(y+(a-x)y')(y+(a'-x)y')=k,$$

di cui non sarebbe agevole di ottenere l'equazione primitiva, mediante i metodi ordinarj. Osserva però che se si prendano le funzioni prime di quell' equazione, si ha l' altra

$$(y+(a'-x)y')(a-x)y''+(y+(a-x)y')(a'-x)y''=0$$

ch' è decomponibile nelle due

$$y''=0$$

$$(y+(a'-x)y')(a-x)+(y+(a-x)y')(a'-x)=0$$

l' una del 2.°, l' altra del 1.° ordine.

Integrando la prima $y''=0$, si perviene immediatamente all' equazione

$$y=\mathrm{A}x+\mathrm{B}$$

e mostra esser questa l' integrale completo dell'equazione del 1.° ordine, ottenuta per la soluzione del problema. Eliminando poi y' tra la prima, e la seconda perviene all' equazione

$$(a-a')^2y^2+4k(a-x)(a'-x)=0$$

che riconosce come una soluzione singolare della stessa equazione del 1.° ordine, e prova esser questa propriamente quella, che risolve il proposto problema. Esprimendo per tanto la medesima l' ellisse o l' iperbole secondo che k sia positiva o negativa, conchiude che l' una e l' altra di tali curve goda della proprietà richiesta nel problema. Quindi osserva che la stessa proprietà sia stata dimostrata da Apollonio nei suoi conici (42. III); ma soggiugne che l' analisi da lui recata ha il vantaggio di far vedere che quella si appartenga unicamente alle Sezioni Coniche.

Con tutto il rispetto, che merita quest' uomo singolarissimo mi permetterò osservare, che l' ultima asserzione è non solo inesatta, ma pur dannosa alla scienza; giacchè lo stesso otteneasi tanto dalla dimostrazione Apolloniana, quanto da altra che fusse condotta co' più elementari principj della moderna analisi, tal che quella che vedesi nella prop. XVI del Trattato analitico delle curve coniche pubblicato dal nostro Fergola fin dal 1814.

Che se il dubbio elevato da quel sommo Analista su di una dimostrazione condotta per le vie particolari della Geometria, o di questa all' analisi algebrica accoppiata reggesse, dubbia rimarrebbe similmente ogni altra dimostrazione per proprietà delle curve coniche; e la stessa Geometria elementare risulterebbe incerta, per vi si dover dimostrare che le proprietà del cerchio non possono ad altro soggetto appartenersi. Ma deesi riflettere che le dimostrazioni, le quali se ne recano, partendo dalla natura del soggetto, che in esse trasfondesi, rendono assolute ed incommunicabili ad altri le identiche proprietà, senza che queste in quello non s' immedesimino e s' identifichino. Altronde chi non conosce che da una data proprietà qualunque di una curva non può trarsi che una sola ed unica equazione, esprimente appunto la natura della curva stessa; e che perciò quella proprietà non possa in alcun modo convenire a curva di natura diversa?

Dopo aver disegnato in tal guisa il dubbio promosso dall' insigne Analista, farò riflettere che il vero divario, che v' ha tra il metodo da lui sviluppato per pervenire all' enunciata proprietà delle curve coniche, e la dimostrazione Apolloniana, o altre simili, consiste nello stesso divario, che v' ha tra i metodi diretti di ricerca ed i metodi dimostrativi; e sotto questo aspetto la superiorità del suo metodo è incontrastabile; anche perchè la Geometria elementare e la Geometria analitica propriamente detta mancano di mezzi diretti per lo maneggio delle quistioni, cui si riferisce.

La teorica pertanto stabilita da Lagrange nei citati paragrafi è riassunta dall' illustre Autore nelle seguenti parole (§. 126 in fine) (1): « Segue da tutto ciò, che l' equazione « primitiva singolare di un' equazione del 1.° ordine rappre- « senta sempre la curva inviluppante di tutte le curve, che

---

(1) Una teorica di tanto rilievo, così luminosamente dichiarata in un libro, che ogni Analista ha certamente l' obbligo di conoscere, parrebbe che avesse già dovuto esser nota a tutt' i cultori della scienza; ma avviene altrimenti, e lo comprovano diversi articoli inseriti negli Annali di matematiche del Gergonne. Così nel vol. 8°, a pag. 368, corrispondente all' anno 1817, si legge una Memoria relativa ad un problema, ch' erasi negli Annali medesimi ripetutamente proposto, e concepito nei seguenti termini: *Qual è la curva inviluppo delle corde di costante grandezza iscritte ad una data Sezione Conica? Qual è il luogo del vertice dell' angolo mobile e variabile circoscritto alla stessa curva, di cui quella retta è la corda di contatto?*

L'Autore della Memoria prende ad occuparsi della sola prima parte del problema; e l' analisi da lui istituita il conduce ad una eliminazione tra 5 equazioni; ma sgomentato dai calcoli, e più di tutto dall' incertezza dei risultamenti, si arresta a questo punto, senz' aver potuto neppur nulla conchiudere intorno al grado dell' inviluppo, ch' ei cercava; e si rivolge a novella analisi. I nuovi ripieghi, cui ricorre, il guidano alla seguente equazione differenziale di 1.° ordine della curva, di cui trattasi

$$a^2 b^2 (dx^2 + dy^2) [(a^2 dy^2 + b^2 dx^2) - (y\,dx - x\,dy)^2] = c^2 (a^2 dy^2 + b^2 dx^2)^2;$$

ove a e b dinotano i semiassi dell' ellisse, sulla quale istituisce l' analisi; e c la metà della data corda. Ma a tal segno si arresta un' altra volta, così esprimendosi: « Il « s' agirait presentement de savoir quel est le plus facile de l' integration de cette « equation, ou de l' elimination à la quelle nous avions d' abord réduit le probléme », rimanendo così irrisoluta la quistione. Ma dopo la teorica stabilita da Lagrange quest' ultimo proposito non può non sorprendere, nulla essendo più facile dell' integrazione della precedente equazione. In fatti dividendo tutta l' equazione per dx^4, e messo $\frac{dy}{dx} = p$, la medesima cangiasi in

$$a^2 b^2 (1 + p^2) [a^2 p^2 + b^2 - (y - px)^2] = c^2 (a^2 p^2 + b^2)^2;$$

« possono essere rappresentate dalla sua equazione primitiva « completa, dando alla costante arbitraria tutt' i valori possi- « bili. » E questi principj medesimi son quelli, che anche attualmente convien seguire per ogni ricerca relativa a curve inviluppi; ne v' ha per quanto io sappia alcun vestigio di soluzioni di problemi di questo genere direttamente eseguite con le sole risorse della Geometria analitica.

---

e quest' equazione istessa, consideratavi la p come costante arbitraria sarà l' integrale completo della proposta. Eliminando poi la p tra l' equazione medesima, e la sua derivata rispetto alla stessa p, espressa da

$$a^2b^2(1+p^2)[a^2p+x(y-px)]+pa^2b^2[a^2p^2+b^2-(y-px)^2]=2c^2p(a^2p^2+b^2)$$

si otterrà una soluzione singolare dell' anzidetta equazione differenziale, la quale darà la curva, che risolve il problema. Dall' ispezione di queste due equazioni è permesso solamente conchiudere, che l'eliminata in x, y, rappresentante la curva, di cui trattasi, non possa ascendere ad un grado superiore al 12°.

A questo risultamento può del resto, partendo sempre dalla teorica del Lagrange, pervenirsi in diverse altre guise, come appunto han fatto il Sig. de Gasparis e il Sig. Trudi; il primo in una Memoria già pubblicata nel fascicolo 32 del Rendiconto della R. Accademia delle Scienze di Napoli, e l'altro in un lavoro, che va tra poco a veder la luce.

Ma il Sig. Trudi ha di più, ripiegando ad altre considerazioni, definitivamente fissato il grado dell' inviluppo, ed ha provato che il medesimo sia una curva di 8.° ordine, dopo aver risoluto la seconda parte del problema, che da niun altro erasi trattata. Egli infatti ha trovato che il luogo del vertice dell' angolo mobile circoscritto ad una sezione conica, sotteso da una corda di costante grandezza, sia una curva di 4.° ordine, avente per equazione

$$m^2[y^2-t(nx+2m)][y^2+(nx+m)^2]=c^2[(nx+m)^2-ny^2]^2,$$

e esprimendo la metà della data corda, ed

$$y^2=2mx+nx^2$$

la data sezione conica. Esaminando l' equazione del 4.° ordine, si riconosce subito, che la curva, che essa rappresenta, abbia un *punto conjugato doppio* nel centro della sezione conica. Or la curva di contatto del 4.° ordine è precisamente la polare reciproca della curva del 4.° ordine; il suo grado adunque, secondo la bella teorica del Poncelet, sarebbe (V. Annali cit.) 4(4—1), ossia 12; ma l' esistenza di quel punto doppio deve, secondo lo stesso illustre Geometra (Giornale di matem. di Crelle, vol. 3.°), diminuire di 4 il numero 12; dunque infine *l' inviluppo delle corde di costante grandezza iscritte in una data sezione conica sarà una curva di 8.° ordine.* Se la sezione conica data sia parabola, l' inviluppo non sarà che una curva del 6.° ordine.

A me sembra però che non sia impossibile di sottoporre a metodi algebrici *elementari* anche le quistioni di tal natura; e non sarà forse ozioso il mostrare come possa, a mio modo, ottenersi siffatto scopo. Nè certo ora intendo di dare a tal proposito un metodo compiuto e generale, ma solo di additare un cammino plausibile da giugnere co' semplici mezzi della geometria analitica ai medesimi risultamenti, cui non evvi finora altra via da pervenire che usando teoriche più elevate.

Il metodo per tanto, ch' io propongo, si riduce in sostanza allo stabilimento preventivo delle condizioni di contatti, che possono corrispondere ai diversi casi, come appunto si pratica in altre ricerche di geometria analitica. Recherò qualche esempio a solo oggetto di chiarire quest' astratta indicazione; ma per non oltrepassare i limiti, che mi son prefisso, mi fermerò brevemente a considerare il più semplice de' casi.

Del resto il nostro Geometra Nicola Trudi, cui comunicava siffatte idee, ne ha già fatto felici applicazioni a quistioni difficili ed interessanti; e 'l suo lavoro, che comparirà tra poco nel VI Volume degli Atti della nostra Reale Accademia, comproverà sempreppiù l' importanza del metodo, ch' io propongo, e che quì vedesi appena abbozzato. Ma eccomi più particolarmente all' assunto.

Una retta, che si muove in un piano con una legge assegnata, è, in generale tangente ad una certa curva, la quale è perciò l'inviluppo delle infinite posizioni, che può prendere quella retta secondo la legge del suo movimento. Data per tanto questa legge si cerca la natura della curva.

Per risolvere questa quistione è necessario premettere l'esame di quest'altra: *Data una retta ed una curva espresse rispettivamente dalle equazioni tra le coordinate rettilinee x,y*

$$y = Tx + V$$

$$\psi(x,y) = 0$$

qual è la relazione a doversi verificare tra i loro determinanti affinchè l' una sia tangente dell' altra?

Eliminando tra le due equazioni una delle variabili, y per esempio, si avrà l' equazione solo in x

$$\psi(x, \mathrm{T}x + \mathrm{V}) = 0$$

le cui radici esprimeranno i punti d' incontro delle due linee. Basterà per tanto che due di queste radici sieno tra loro eguali, perchè la retta tocchi la curva. Supposto adunque che la condizione per l' eguaglianza di due delle radici della precedente equazione in x sia dinotata da (1)

$$\pi(\mathrm{T}, \mathrm{V}) = 0$$

si avrà in questa condizione la relazione cercata per lo contatto tra le linee proposte.

Ciò premesso, è manifesto che il grado della funzione $\pi(\mathrm{T}, \mathrm{V})$ rispetto a T, V è essenzialmente dipendente dal grado e dal modo di composizione dell' equazione $\psi(x, y) = 0$. Sia m il grado di quest' ultima equazione, e suppongasi, per fissar le idee, essere n il grado della funzione $\pi(\mathrm{T}, \mathrm{V})$; allora è manifesto che se la legge del movimento della retta $y = \mathrm{T}x + \mathrm{V}$ sia espressa con una relazione tra T, V, come

$$\varpi(\mathrm{T}, \mathrm{V}) = 0$$

e si trovi che la medesima sia del grado n, converrà conchiudere che l' inviluppo di tutte le posizioni di quella retta sia una curva dell' ordine m.^{esimo}

In conseguenza per ciò che riguarda la determinazione dei diversi ordini d' inviluppi corrispondenti alle varie leggi di movimento della retta, la quistione sarebbe semplicemente

(1) Questa condizione, usando la notazione differenziale, equivale all' eliminata tra le due equazioni

$$\psi(x, \mathrm{T}x + \mathrm{V}) = 0, \quad \frac{d.\psi(x, \mathrm{T}x + \mathrm{V})}{dx} = 0,$$

ma è poi noto che la sua ricerca rientra nelle ordinarie teoriche algebriche.

ridotta a determinare i gradi delle rispettive relazioni in T, V, nascenti dalle condizioni di eguaglianza di due radici nelle equazioni, che risultano eliminando una delle variabili x, y tra l' equazione della retta e quelle dei varj ordini di curve. Altronde, valendosi del metodo dei coefficienti indeterminati, potrebbero poscia comporsi addirittura le equazioni stesse degl' inviluppi.

Ecco intanto l' applicazione di queste indicazioni al più semplice dei casi, cioè alle curve del 2.° ordine espresse dall' equazione generale

$$(a) \qquad ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + f = 0.$$

Eliminando y tra quest' equazione e quella della retta, si ha l' equazione di 2.° grado in x

$$(a\mathrm{T}^2 + 2b\mathrm{T} + c)\,x^2 + 2\,(a\mathrm{TV} + b\mathrm{V} + d\mathrm{T} + e)\,x + (a\mathrm{V}^2 + 2d\mathrm{V} + f) = 0,$$

le cui radici saranno eguali ove si verifichi la condizione

$$(a\mathrm{TV} + b\mathrm{V} + d\mathrm{T} + e)^2 = (a\mathrm{T}^2 + 2b\mathrm{T} + c)\,(a\mathrm{V}^2 + 2d\mathrm{V} + f),$$

la quale sviluppata si riduce alla seguente equazione di 2.° grado in T, V

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} (b^2 - ac)\,\mathrm{V}^2 + 2\,(ae - bd)\,\mathrm{TV} + (d^2 - af)\,\mathrm{T}^2 \\ \qquad + 2\,(be - cd)\,\mathrm{V} + 2\,(de - bf)\,\mathrm{T} + (e^2 - cf) = 0. \end{array} \right.$$

In conseguenza adunque di ciò che precede possiamo conchiudere, che *se la legge di movimento della retta*, $y = \mathrm{T}x + \mathrm{V}$ *sia espressa mediante una relazione di* 2.° *grado in* T, V, *quella retta sarà continuamente tangente ad una curva di* 2.° *ordine*, la di cui equazione si comporrà come segue:

Trattandosi di una curva di 2.° ordine, la sua equazione in generale avrà la forma

$$(c) \qquad y^2 + 2\beta xy + \gamma x^2 + 2\delta y + 2\varepsilon x + \phi = 0;$$

e la quistione riducesi a determinare i 5 incogniti coefficienti $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \phi$. Sia

$$(d) \qquad \mathrm{AV}^2 + 2\mathrm{BTV} + \mathrm{CT}^2 + 2\mathrm{DV} + 2\mathrm{ET} + \mathrm{F} = 0$$

la data relazione in T, V, esprimente il movimento della retta; in virtù della formola (b) si avrà pure

$$(e)\quad \begin{cases} (\beta^2-\gamma)\mathrm{V}^2+2(\varepsilon-\beta\delta)\mathrm{TV}+(\delta^2-\varphi)\mathrm{T}^2+2(\beta\varepsilon-\gamma\delta)\mathrm{V} \\ \qquad +2(\delta\varepsilon-\beta\varphi)\mathrm{T}+(\varepsilon^2-\gamma\varphi)=0; \end{cases}$$

e quindi paragonando i coefficienti di (e) con quelli dei termini analoghi di (d), si avranno per determinare le 5 incognite, le 5 equazioni di condizione

$$(f)\ \frac{\varepsilon^2-\beta\delta}{\beta^2-\gamma}=\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}},\ (g)\ \frac{\delta^2-\varphi}{\beta^2-\gamma}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}},\ (h)\ \frac{\beta\varepsilon-\gamma\delta}{\beta^2-\gamma}=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{A}},\ (i)\ \frac{\delta\varepsilon-\beta\varphi}{\beta^2-\gamma}=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{A}},\ (k)\ \frac{\varepsilon^2-\gamma\varphi}{\beta^2-\gamma}=\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}};$$

dalle quali si ricavano per le incognite i seguenti valori (1)

$$\beta=\frac{\mathrm{BD-AE}}{\mathrm{B^2-AC}},\quad \gamma=\frac{\mathrm{D^2-AF}}{\mathrm{B^2-AC}},\quad \delta=\frac{\mathrm{BE-CD}}{\mathrm{B^2-AC}},\quad \varepsilon=\frac{\mathrm{BF-DE}}{\mathrm{B^2-AC}},\quad \varphi=\frac{\mathrm{E^2-CF}}{\mathrm{B^2-AC}}$$

tutti di 1.° grado, e però unica è la curva inviluppo. Sostituendoli in (c), l' equazione di questo inviluppo, cioè della curva di 2.° ordine continuamente toccata dalla retta, le cui costanti T, V, verificano la relazione (d), sarà in fine

$$(l)\quad \begin{cases} (\mathrm{B^2-AC})y^2+2(\mathrm{BD-AE})xy+(\mathrm{D^2-AF})x^2 \\ \qquad +2(\mathrm{BE-CD})y+2(\mathrm{BF-DE})x+(\mathrm{E^2-CF})=0. \end{cases}$$

---

(1) Se volesse starsi alle regole comuni per giudicare del grado dell' eliminata in ciascuna delle 5 incognite, si andrebbe troppo lungi dal vero; come pure si perderebbe assai tempo e fatica per ottenere i loro valori seguendo i metodi ordinarj; e però non sarà superfluo che qui si mostri come possa compiersi l' eliminazione tra le 5 equazioni in modo semplice e spedito.

1°. Si moltiplichi (f) per β, e si sottragga dalla (h), si avrà $\mathrm{A}\delta=\mathrm{D}-\mathrm{B}\beta$.

2°. Si moltiplichi (g) per β, e si sottragga da (i), verrà $\mathrm{B}\delta=\mathrm{E}-\mathrm{C}\beta$.

Da queste due equazioni già possono ottenersi i valori di β e δ.

3°. Si moltiplichi (g) per ε, e si sottragga da (i) moltiplicata per δ, si otterrà in virtù di (f) $\mathrm{B}\varphi=\mathrm{E}\delta-\mathrm{C}\varepsilon$.

4°. La (h) moltiplicata per φ si aggiunga ad (i) moltiplicata per ε, risulterà in virtù di (k) $\mathrm{F}\delta=\mathrm{E}\varepsilon-\mathrm{D}\varphi$.

5°. Finalmente il prodotto di (i) per γ si sottragga dal prodotto di (k) per β, si avrà in virtù di (h) $\mathrm{D}\varepsilon=\mathrm{F}\beta-\mathrm{E}\gamma$.

Da queste cinque equazioni, che possono rimpiazzare le primitive, si ottengono poi facilissimamente i cinque valori scritti quì sopra.

Per mezzo di questa formola si avrà dunque immediatamente l' equazione della sezione conica, che può divenire inviluppo di qualche retta assoggettata a muoversi su di un piano con legge assegnata, tostochè si abbia espressa la legge mediante una relazione della forma (d).

Applicherò ora le precedenti formole a qualche esempio, ed in primo luogo riprenderò lo stesso problema trattato dal Lagrange, recato più innanzi. Ritenendo i medesimi simboli, ed avviando l' analisi nello stesso modo, si avrà egualmente

$$(\mathrm{T}a+\mathrm{V})(\mathrm{T}a'+\mathrm{V})=k$$

ossia $$\mathrm{V}^2+(a+a')\mathrm{TV}+aa'\mathrm{T}^2-k=0.$$

Poichè dunque la relazione in T, V esprimente la legge del movimento della retta ascende al 2.° grado, la curva cercata sarà del 2.° ordine. Per averne l' equazione basterà paragonare i coefficienti della relazione or trovata con quelli della formola generale (d), e si ha

$$\mathrm{A}=1,\quad \mathrm{B}=\tfrac{1}{2}(a+a'),\quad \mathrm{C}=aa',\quad \mathrm{D}=0,\quad \mathrm{E}=0,\quad \mathrm{F}=-k;$$

sostituendo questi valori nella formola (l), si avrà per l' equazione della curva attuale

$$(a-a')y^2+4kx^2-4k(a+a')x+4aa'k=0$$

identica a quella trovata da Lagrange.

Osserverò in questo punto che il teorema di geometria, che risulta da questo problema, è assai più generale, potendo enunciarsi come segue:

Sieno A, B (fig. 1.ª) *due punti fissi su due rette date di posizione* RM, RN, *ed una retta* PQ *le seghi per modo che il prodotto* $\mathrm{AP}\times\mathrm{BQ}$ *sia costante, sarà questa retta continuamente tangente ad una curva di 2.° ordine.* (1)

---

(1) Questa proprietà delle curve del 2.° ordine, non avvertita finora a quanto parmi, è stata da me pur recata sotto forma geometrica nell' ultima edizione del Trattato geometrico delle Curve coniche (Nota alla prop. XXII, lib. II.).

Rilevandone l'equazione con lo stesso metodo tenuto più sopra, si trova che la curva tocca le date rette in due punti D, E tali che DE risulta parallela ad AB; che il dato rettangolo risulta eguale a quello di RB in AD, o di RA in BE; e che il suo centro C cade nel mezzo di AB.

Risolverò per un altro esempio il seguente *Problema*: *Sieno dati due angoli* XAY, MDN (fig. 2.ª) *l'uno fisso e l'altro mobile intorno al vertice* D, *e sia* PQ *la retta, che unisce i punti d'incontro dei lati dell'angolo fisso, e del mobile in una posizione qualunque. Si cerca la curva toccata da questa retta.*

Sol. Presi per assi coordinati i lati AX, AY dell'angolo fisso XAY che s'indichi con θ, dicasi ϕ l'angolo mobile MDN; α, β le coordinate del suo vertice D; x' la AP ascissa del punto P, ed y' la AQ ordinata del punto Q. Saranno

$$y-\beta=\frac{\beta}{\alpha-x'}(x-\alpha), \qquad y-\beta=\frac{\beta-y'}{\alpha}(x-\alpha)$$

le equazioni dei due lati dell'angolo mobile DM, DN; e però tenendo presenti le note formole per valutare le tangenti di angoli relativamente ad assi obbliqui, si avrà per la condizione del problema

$$\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha-x'}\right)-\frac{\beta-y'}{\alpha}\Big)\,\mathrm{sen}\,\theta}{1+\frac{\beta}{\alpha-x'}\times\frac{\beta-y'}{\alpha}+\left(\frac{\beta}{\alpha-x'}+\frac{\beta-y'}{\alpha}\right)\cos.\theta}=\mathrm{tag}.\phi.$$

Ciò posto sia come per lo innanzi

$$y=\mathrm{T}x+\mathrm{V}$$

l'equazione di PQ; facendovi una volta $x=0$, $y=y'$, ed altra volta $x=x'$, $y=0$, si ricaverà $y'=\mathrm{V}$, $x'=-\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{T}}$; e però sostituendo questi valori nella precedente condizione, e tolti i fratti, si avrà tra T, V la seguente relazione

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{sen}.\theta+\cos.\theta\,\mathrm{tg}.\phi)\,\mathrm{V}^2+[\alpha(\mathrm{sen}\theta+\cos\theta\,\mathrm{tg}\phi)+\beta\,\mathrm{tg}\phi]\,\mathrm{TV}\\ \quad-[\beta(\mathrm{sen}\theta+\cos\theta\,\mathrm{tg}\phi)+\alpha\,\mathrm{tg}\phi]\,\mathrm{V}+\mathrm{tg}\phi\,(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta)\mathrm{T}=0;\end{array}\right.$$

ch'è del 2.° grado; e perciò la curva cercata è del 2.° ordine.

Istituendo il solito paragone tra i coefficienti di questa relazione e quelli della formola (d), affin di comporre l'equazione della curva, si ha

$$A=\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\operatorname{tg}\phi,\quad B=\tfrac{1}{2}[\alpha(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\operatorname{tg}\phi)+\beta\operatorname{tg}\phi],\quad C=0$$

$$D=-\tfrac{1}{2}[\beta(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\operatorname{tg}\phi)+\alpha\operatorname{tg}\phi],\quad E=\tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta),\ F=0.$$

Ponendo dapprima *zero* in luogo di C ed F in (l), si ha

$$B^2y^2+2(BD-AE)xy+D^2x^2+2BExy-2DEx+E^2=0$$

e già si scorge che la curva debba esser toccata dagli assi coordinati; dappoichè messo eguale a *zero* una volta x, ed una volta y, si hanno i due risultati

$$B^2y^2+2BEy+E^2=0,\qquad D^2x^2-2DEx+E^2=0$$

che sono entrambi quadrati perfetti; e però supposto essere sulla figura

$$\overline{AC}=-\frac{E}{B}=-\frac{\operatorname{tg}\phi(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta)}{\alpha(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\operatorname{tg}\phi)+\beta\operatorname{tg}\phi},\quad \overline{AB}=\frac{E}{D}=-\frac{\operatorname{tg}\phi(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta)}{\beta(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\operatorname{tg}\phi)+\alpha\operatorname{tg}\phi}$$

saranno C, B i due contatti, e facilmente si scorge che questi due valori di AC, AB sien costruiti mediante le due rette DC, DB, formanti dall' uno e dall' altro lato di AD angoli eguali fra loro, ed all' angolo dato ϕ. Dopo ciò è chiaro che il punto D sia un fuoco della curva, e che DC, DB ne sieno due raggi.

Questa curva pertanto sarà *parabola, ellisse* o *iperbole* secondochè sia $(BD-AE)^2-B^2D^2$, ovvero $AE(AE-2BD)$ *eguale, minore* o *maggior di zero*. Sostituendo alle lettere A, B, D, E i loro valori scritti poc' anzi, quest' esame si troverà ridotto all' esame del segno della quantità

$$-\alpha\beta\operatorname{tg}\phi(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\operatorname{tg}\phi)(\operatorname{sen}^2\theta+\operatorname{tg}^2\phi)(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta);$$

o solo di $\qquad -\alpha\beta\operatorname{tg}\phi(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\operatorname{tg}\phi)$,

giacchè gli altri due fattori sono necessariamente positivi.

Pel caso della parabola non potendo esser *zero*, nè α, nè β, nè $\operatorname{tg}\phi$, converrà che sia $\operatorname{sen}\theta+\cos\theta\operatorname{tg}\phi=0$; donde si trae $\mathrm{tg}\,\phi = -\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta} = -\mathrm{tg}.\,\theta$. Dunque la curva sarà parabola quando l' angolo mobile e 'l fisso sieno supplementi l' un dell' altro; e si ha però il seguente

TEOREMA.

Se si faccia passare un cerchio pei tre punti, in cui s'incontrano tre tangenti qualunque di una parabola, questo cerchio passerà pel fuoco.

La discussione della precedente condizione analitica pei casi dell' ellisse e dell' iperbole, sarebbe egualmente agevole; ma si rifletta che se si faccia in B l' angolo $\mathrm{AB}b = \mathrm{XBD}$, la retta B$b$ dovrà passare per l' altro fuoco, egualmente che la Cc formante in C l' angolo $\mathrm{YC}c = \mathrm{ACD}$. Dunque l' altro fuoco si avrà nel punto D' intersezione delle due rette Bb, Cc. Avuti in tal modo i due fuochi della curva, se ne avrà di seguito il centro e gli assi primarj, e potrà così descriversi.

Ma intanto è manifesto che se i punti D, D' cadano entrambi nell' interno dell' angolo XAY la curva sarà *ellisse*, come per l' opposto sarebbe *iperbole* ove i due punti D, D' si trovassero uno al di dentro, l' altro al di fuori di quest' angolo. Che se le rette Bb, Cc, anzichè incontrarsi, fussero parallele, si avrebbe allora di bel nuovo la *parabola*; e facilmente si scorge, che quest' ultima condizione ritorna all' altra poc' anzi accennata.

Dopo tutto ciò può enunciarsi il seguente

TEOREMA.

Se dal fuoco di una Sezione Conica si tirino due rette ai punti, in cui due tangenti qualunque sono incontrate da una terza tangente comunque condotta tra esse, quelle due rette comprenderanno un angolo costante, eguale alla metà dell' angolo compreso dai due raggi tirati dallo stesso fuoco ai contatti con le due prime tangenti.

Ignoro se questa interessante proprietà dei conici sia stata da altri avvertita; non ravvisandosi nè nei libri, che ci restano degli antichi, nè in altri Trattatisti di tali curve.