RICERCHE RELATIVE ALLE CURVE INVILUPPI

MEMORIA

DI EMMANUELE FERGOLA

Presentata dal Socio Cav. Vincenzo Flauti
e approvata dal Socio e Segretario Prof. Giuseppe Bianchi.

Tra le ricerche che presentano degli ostacoli al Geometra v' ha senza dubbio quei problemi che riguardano curve inviluppi, ostacoli in vero nascenti non da difetto di teoriche, ma da difficoltà di calcolazioni; queste però sono spesso gravissime, mentre il più delle volte si va incontro ad eliminazioni imbarazzanti le quali adombrano o quasi nascondono i veri risultamenti, da che le teoriche rimangono inabili ed infruttuose. E per darne un solo esempio ricorderò il problema in cui si cerca l' inviluppo delle corde di costante grandezza iscritte in una data curva; nel qual problema, ancorchè voglia questa curva limitarsi a quelle del second' ordine, pure per lunga pezza, a malgrado i tentativi di molti geometri, non venne fatto di riconoscere il grado dell' inviluppo, che solamente da poco tempo un nostro geometra, partendo da estranee considerazioni rinvenne dell' ottavo grado. Non ostante però le difficoltà di tali ricerche il Sig. Magnus, distinto analista di Berlino, mostrò (1) che era sempre possibile determinare il punto di contatto tra l' inviluppo e la retta mobile che lo genera, mediante costruzioni più o meno semplici; e con un giudizioso maneggio di alcune formole differenziali, egli riescì a compiere eleganti soluzioni ai quattro seguenti problemi:

(1) *Gergonne.* — *Annales de mathématiques*; Vol. XVI.

1°. *Determinare il punto di contatto dell' inviluppo delle corde d' una curva piana qualunque, che tagliano da essa segmenti di costante grandezza con una di tali corde.*

2°. *Determinare il medesimo punto di contatto, quando tutte le corde debbono tagliare dalla curva archi eguali.*

3°. *Determinare lo stesso punto allorchè le corde sono di grandezza costante.*

4°. *Determinare il medesimo contatto assoggettando le corde ad esser tali, che le due tangenti applicate agli estremi di ciascuna di esse comprendano angoli eguali.*

Or io, nell' applicare le formole e il metodo del Magnus ad altri problemi dello stesso genere, mi avvidi che un tal metodo sovente mena a calcoli sì prolissi ed intralciati da sgomentare la pazienza dell' analista; che però mi rivolsi a vedere se era possibile di pervenire per altra via alla costruzione di quei punti di contatto, nè durai gran fatica a convincermi, potersi questo scopo raggiungere in un modo più semplice col soccorso della pura Geometria, come potrà vedersi dall' applicazione che io farò dell' analisi geometrica a parecchi esempj, non esclusi quelli del Magnus. Ai nuovi che aggiungo applicherò benanche il calcolo algebrico, perchè più chiaramente apparisca quanto il metodo da me seguito renda facili le soluzioni dei problemi, che formano l' oggetto della presente Memoria.

§. 1. In una curva piana qualunque SS′ (fig. 1ª.) s'immagini una corda muoversi con una determinata legge; dalle infinite posizioni che essa può prendere si ha un sistema di corde tangenti un' altra curva, che può chiamarsi l' *inviluppo* della corda mobile. Or è da notarsi che il punto di contatto dell' inviluppo con ciascuna corda si ha nella intersezione di questa corda con quella che tiene, se così può dirsi, la posizione seguente, in somma nella intersezione di due corde vicinissime; mentre la curva inviluppo altro in fatti non è, che il poligono di numero infinito di lati picciolissimi, risultante dall' incontro continuo di ciascuna corda con quella che immediatamente la segue. Siano pertanto MN, M'N' due posizioni contigue della corda mobile; il loro punto d' intersezione C sarà il contatto dell' inviluppo con la MN. Or l' oggetto dei problemi che seguono essendo quello di determinare questo punto di contatto, è manifesto che tutto riducesi ad assegnare per via di geometriche costruzioni il punto C, cioè a dire l' intersezione delle due corde vicinissime MN, M'N'.

PROBLEMA I.

§. 2. *La corda* MN (fig. 1.ª) *sia assoggettata a troncare da una data curva piana segmenti eguali; si vuol determinare il punto del contatto* C.

Sol. Essendo picciolissimi gli archetti MM' NN', i due settori MM'C, NN'C si potranno considerare come due triangoletti rettilinei, che dovendo essere eguali, per la condizione del problema, ed avendo eguali gli angoli al vertice C, daranno $MC.M'C = NC.N'C$. Or per essere vicinissime le corde MN, M'N', le MC, NC sono eguali rispettivamente ad M'C, N'C (1); adunque si avrà $\overline{MC}^2 = \overline{NC}^2$, ed $MC = NC$, donde risulta il seguente teorema:

L' inviluppo delle corde, che tagliano da una curva piana qualunque segmenti eguali, tocca ciascuna di queste corde nel suo punto medio.

PROBLEMA II.

§. 3. *Un angolo* AMN (fig. 2.ª) *di grandezza costante si muova con tal legge, che mentre il suo vertice rimane sul perimetro d' una data curva piana, un lato passi sempre per*

(1) A misura che impicciolisce l' angolo MCM', la somma degli angoli MM'C, M'MC tende a divenire eguale a due retti, e così i seni degli angoli medesimi tenderanno ad eguagliarsi al pari dei lati MC, M'C, che serbansi lo stesso rapporto di quei seni. Intanto ad evitare circollocuzioni noi diremo in generale che: *quando un triangolo ha un solo angolo infinitamente piccolo, debbono riputarsi eguali i seni degli altri due angoli, nonchè i lati che comprendono l' angolo infinitesimo.*

un punto fisso A; *si vuol determinare il punto del contatto* C *dell' altro lato col suo inviluppo* (1).

Sol. Si uniscano le AM, AM'. Dovendo essere eguali gli angoli AMC, AM'C, ne risulta che per i quattro punti A, C, M', M possa passare la circonferenza d' un cerchio. Or per essere vicinissimi i punti M, M' questo cerchio toccherà la curva, oppure la sua tangente nel punto M; dunque può conchiudersi il teorema che segue:

L' inviluppo delle corde d' una curva piana qualunque ciascuna delle quali sia lato d' un angolo mobile di costante grandezza, che abbia il vertice sulla curva, e l' altro lato passante per un punto fisso, tocca una qualunque di queste corde in un punto, che si determina descrivendo pel vertice dell' angolo mobile un cerchio che tocchi la tangente la curva nel vertice stesso, e che passi pel punto fisso; e questo cerchio taglierà la corda nel punto cercato.

Problema III.

§. 4. *Un angolo* AMN (fig. 2.ª) *di costante grandezza si muova in modo, che il suo vertice stia sul perimetro d'una data curva piana, a cui uno dei suoi lati debba esser continuamente normale; vuol determinarsi il punto del contatto* C *dell' altro lato col suo inviluppo* (2).

Sol. Considerando le posizioni vicinissime AMN, AM'N' dell' angolo costante, si vede che i lati AM, AM' essendo normali alla curva, debbonsi tagliare nel centro di curvatura A del punto M. È chiaro perciò che il punto del contatto C dell' altro lato dell' angolo mobile col suo inviluppo, potrà costruirsi come si è indicato nel problema precedente, sostituendo al punto fisso il centro di curvatura del punto M. Per questo caso essendo retto l' angolo PMA lo sarà anche l' angolo MCA; e perciò si avrà il seguente teorema:

(1) Si vegga la nota A.

(2) Veggasi la nota B.

Se un angolo mobile di costante grandezza abbia il vertice sul perimetro d' una curva piana qualunque, cui uno dei suoi lati debba essere normale; il punto di contatto dell' altro lato col suo inviluppo sarà il piede della perpendicolare abbassata su questo lato, dal centro di curvatura del vertice dell' angolo mobile.

Le soluzioni de' tre problemi che precedono, risultano semplicissime per la natura delle condizioni che determinano il movimento della corda, donde emerge l' inviluppo; ma complicandosi queste condizioni diverranno, in conseguenza anche men semplici le corrispondenti soluzioni, come in effetti si vedrà ne' problemi che seguono. Intanto potendo le quistioni di tal genere rapportarsi tutte ad un principio comune, che sarà pur valevole a rendere più semplici le loro soluzioni, abbiamo creduto di dichiararlo nel seguente

TEOREMA

§. 5. *Ritenute le supposizioni del §. 1., esprimano* MN, M'N' (fig. 3.ª) *due posizioni contigue di una corda iscritta in una curva piana qualunque* SS'; *dico che il rapporto dei due archetti infinitesimi* MM', NN' *sia assegnabile ed espresso da*

$$PM.MC : PN.NC,$$

essendo PM, PN *tangenti della curva nei punti* M *ed* N *estremità della corda.*

Dim. Per gli archetti infinitamente piccioli MM', NN' dovendo riputarsi rettilinei i triangoli MCM', NCN', si avranno le due analogie

$$MM' : MC :: \text{sen}\, MCM' : \text{sen}\, MM'C,$$

$$\text{ed} \quad NC : NN' :: \text{sen}\, NN'C : \text{sen}\, NCN'$$

dalle quali ricavasi l' altra

$$MM' : NN' :: (\text{sen}\, NN'C : \text{sen}\, MM'C)\,(MC : NC).$$

Or essendo per ipotesi vicinissime le due corde MN, M'N', saranno eguali i seni degli angoli MM'C, M'MC, ovvero quelli degli angoli $MM'C$, PMC; e per la stessa ragione si eguaglieranno i seni dei due angoli $NN'C$, PNC; si avrà perciò

$$MM' : NN' :: (\text{sen}\, PNC : \text{sen}\, PMC)\,(MC : NC),$$

ma sta $\quad \text{sen}\, PNC : \text{sen}\, PMC :: PM : PN,$

sarà quindi $\quad MM' : NN' :: PM.MC : PN.NC$

come erasi proposto a dimostrare.

§. 6. Si formi dalle PM, PN il parallelogrammo $MPNQ$; si avrà pure

$$MM' : NN' :: NQ.MC : MQ.NC;$$

ma, congiungendo QC, si ha

$$MC : MQ :: \text{sen}\, MQC : \text{sen}\, MCQ,$$

ed $\quad NQ : NC :: \text{sen}\, NCQ : \text{sen}\, NQC;$

dunque $NQ.MC : MQ.NC :: \text{sen}\, MQC : \text{sen}\, NQC$; e quindi anche $MM' : NN' :: \text{sen}\, MQC : \text{sen}\, NQC$ (1).

Problema IV.

§. 7. *La corda* MN (fig. 3.ª) *debba tagliare da una data curva piana archi eguali; si vuol determinare il punto di contatto* C.

Sol. Poichè dev' essere l' arco $MN = M'N'$; sarà anche $MM' = NN'$; dunque si avrà (§. 6.) $\text{sen}\, MQC = \text{sen}\, NQC$, e quindi l' angolo $MQC = NQC$. Risulta da ciò il seguente teorema:

L' inviluppo delle corde d' una curva piana qualunque, che sottendono archi eguali, tocca ciascuna di queste corde al punto ove essa è tagliata dalla bisecante dell'angolo compreso dalle rette tirate per i due suoi estremi parallelamente alle tangenti applicate nei medesimi estremi.

Il punto di contatto C si ottiene ancora bisecando l'angolo MPN con la retta PC', e poscia tagliando MC eguale ad NC'.

---

(1) Veggasi la nota C.

PROBLEMA V.

§. 8. *La corda* MN (fig. 4.^{a}) *debba avere una lunghezza costante; si vuol determinare il punto di contatto* C.

Sol. Si taglino sopra le CM, CN' le parti CA, CB eguali alle CM', CN rispettivamente. I due triangoli ACM', BCN essendo isosceli, sarà l'angolo $MAM' = NBN'$: di più dovendo essere $NA = M'B$, ed avendosi per supposizione $MN = M'N'$, sarà anche $MA = N'B$. Posto ciò i due triangoli AMM', BNN' danno

$$MM' : MA :: \text{sen}\, MAM' : \text{sen}\, MM'A,$$

$$\text{ed} \quad N'B : NN' :: \text{sen}\, N'NB : \text{sen}\, NBN';$$

dunque si avrà $MM' : NN' :: \text{sen}\, N'NB : \text{sen}\, MM'A$.

Or poichè le MN, M'N' sono due posizioni contigue della corda mobile, le M'A, NB debbono considerarsi come perpendicolari ad MN (1); abbassando dunque dal punto P sulla MN la perpendicolare PC', i seni degli angoli N'NB, MM'A saranno rispettivamente eguali ai seni degli angoli NPC', MPC'. S' avrà quindi

$$MM' : NN' :: \text{sen}\, NPC' : \text{sen}\, MPC'$$

e però (§. 6.) $\text{sen}\, MQC : \text{sen}\, NQC :: \text{sen}\, NPC' : \text{sen}\, MPC'$;

ma sono eguali gli angoli MQN, MPN, dunque lo saranno anche i due MQC, NPC', e QC dovrà essere parallella a PC', ovvero perpendicolare ad MN. Da ciò risulta il teorema seguente:

L' inviluppo delle corde eguali in una curva piana qualunque tocca ciascuna di queste corde al punto ove essa è tagliata dalla perpendicolare abbassatale dal concorso delle rette tirate per gli estremi della corda parallelamente alle tangenti applicate nei medesimi estremi.

---

(1) Essendo M'A parallela alla bisecante dell' angolo M'CN, quando M'N' tende a coincidere con MN, questa bisecante, e con essa la M'A, tenderà a divenire perpendicolare ad MN; lo stesso dicasi di NB.

Il punto di contatto C si ottiene ancora abbassando PC' perpendicolare ad MN, e poscia troncando MC eguale ad NC'.

Problema VI.

§. 9. *Un angolo mobile* MPN (fig. 5.^{a}) *di costante grandezza sia continuamente circoscritto ad una data curva piana; si vuol determinare il punto di contatto* C *sulla corda* MN, *che lo sottende.*

Sol. Ai punti M, M', N, N' della curva si tirino le normali MA, M'A, NB, N'B; saranno A e B i centri di curvatura corrispondenti ai punti M ed N. Si prolunghino le NB, N'B fino ad incontrare MA nei punti D ed U. Gli angoli MPN, M'P'N' dovendo essere eguali, lo saranno pure i loro supplementi MDN, M'D'N'; ed i due triangoli AD'U, BDU risultando simili, si eguaglieranno pure gli angoli MAM', NBN'. Dunque dovendo essere simili i due triangoli rettangoli MM'A, NN'B, si avrà

$$MM' : NN' :: MA : NB$$

donde risulta (§. 6.) $\quad \text{sen}\, MQC : \text{sen}\, NQC :: MA : NB.$

E di qui è manifesto come possa ottenersi in un modo semplicissimo il punto C. Intanto si formi il triangolo GTZ dai punti medj di MB, NA, AB; e dal punto H ove QC incontra MK condotta HL parallela ad NB, si tiri la congiungente KL. Avendosi

$$\text{sen}\, MQC : \text{sen}\, NQC :: MA : NB$$
$$:: GZ : TZ$$

e $\quad \text{sen}\, MQC : \text{sen}\, NQC :: HL : HK,$

starà $\quad GZ : TZ :: HL : HK.$

Quindi essendo eguali gli angoli GZT, LHK, perchè aventi i lati paralleli, saranno simili i due triangoli TGZ, KLH, e l'angolo GTZ sarà eguale ad HKL oppure ad HQL. Adunque dovranno essere simili anche i due triangoli QRF, ETF, e QE sarà perpendicolare a GT come lo è TR ad MQ. Si conchiude da ciò il teorema che segue:

Un angolo mobile d'invariabile grandezza essendo costantemente circoscritto ad una data curva piana, il punto di contatto dell' inviluppo di tutte le corde, che sottendono l'angolo mobile con una qualunque di esse, si otterrà colla seguente costruzione geometrica: sopra la corda come diagonale si formi un parallelogrammo i cui due lati siano le tangenti menate all'estremità della corda; poi sopra la medesima corda come lato si costruisca un quadrilatero i vertici del quale siano i centri di curvatura delle due sue estremità; finalmente pel vertice del parallelogrammo opposto al vertice dell' angolo circoscritto si conduca la perpendicolare alla retta che contiene i punti medj delle diagonali del quadrilatero. Questa perpendicolare taglierà la corda del contatto nel punto cercato.

PROBLEMA VII.

§. 10. *Due raggi vettori* AM, AN (fig. 6.ª) *tirati per un punto fisso* A *al perimetro d' una data curva piana debbano incontrarsi ad angolo di grandezza costante; vuol determinarsi il punto di contatto* C *sulla corda* MN (1).

Sol. Si uniscano le AM, AN, AM', AN'. Dovendo aversi le analogie

$$MM' : MA :: \text{sen}\, MAM' : \text{sen}\, MM'A,$$

$$NA : NN' :: \text{sen}\, NN'A : \text{sen}\, NAN',$$

sarà pure

$$(MM' : NN')(NA : MA) :: (\text{sen} NN'A : \text{sen} MM'A)(\text{sen} MAM' : \text{sen} NAN').$$

Ma essendo l'angolo $MAN = M'AN'$, risulta anche l'angolo $MAM' = NAN'$; dunque avrassi

$$(MM' : NN')(NA : MA) :: \text{sen} NN'A : \text{sen} MM'A.$$

Intanto poichè le due corde MN, M'N' sono vicinissime, i seni degli angoli MM'A, NN'A sono a riputarsi rispettivamente eguali ai seni degli angoli PMA, PNA; si avrà perciò

$$(MM' : NN')(NA : MA) :: \text{sen}\, PNA : \text{sen}\, PMA,$$

(1) Veggasi la nota D.

e di seguito (§. 5.)

$$(PM.MC:PN.NC)(NA:MA)::\text{sen}\,PNA:\text{sen}\,PMA,$$

donde si ha

$$PM\,\text{sen}\,PMA:PN\,\text{sen}\,PNA::MA.NC:NA.MC.$$

Ma è pure $\quad PM\,\text{sen}\,PMA = PA\,\text{sen}\,PAM,$

$PN\,\text{sen}\,PNA = PA\,\text{sen}\,PAN,$

$NC:NA::\text{sen}\,NAC:\text{sen}\,NCA,$

ed $\quad MA:MC::\text{sen}\,MCA:\text{sen}\,MAC;$

dunque anche $\quad \text{sen}\,PAM:\text{sen}\,PAN::\text{sen}\,NAC:\text{sen}\,MAC.$

Di qui si deduce essere eguali gli angoli PAM, NAC, e quindi risulta il seguente teorema:

Se in una curva piana qualunque si tirino delle corde per modo che i raggi vettori condotti ai due estremi di ciascuna di esse per un punto fisso comprendano angoli eguali; il punto di contatto dell'inviluppo di queste corde con una di esse può determinarsi tirando pel punto fisso due rette egualmente inclinate alla bisecante dell' angolo compreso dai raggi vettori, e tali che una passi pel concorso delle tangenti applicate agli estremi della corda; l' altra di queste rette segnerà sulla corda il punto cercato.

PROBLEMA *VIII.*

§. 11. *Due raggi vettori* AM, AN (fig. 7.ª) *tirati per un punto fisso* A *al perimetro d' una data curva piana debbano essere sempre in un rapporto costante; vuol determinarsi il punto del contatto* C *sulla corda* MN (1).

Sol. Si taglino sopra le AM, AN le parti AH, AK eguali rispettivamente ad AM', AN'; dovrà aversi per la condizione del problema

$$AM:AH::AN:AK,$$

e quindi $\quad MH:NK::AM:AN.$

---

(1) Veggasi la nota E.

Intanto i due triangoli MHM', NKN' danno le seguenti analogie

$$MM' : MH :: \text{sen}\, MHM' : \text{sen}\, MM'H,$$

ed $$NK : NN' :: \text{sen}\, NN'K : \text{sen}\, NKN',$$

da cui ricavasi

$$(MM' : NN')(AN : AM) :: (\text{sen}\, MHM' : \text{sen}\, NKN')(\text{sen}\, NN'K : \text{sen}\, MM'H).$$

Ora essendo picciolissimi gli angoli MAM', NAN', le $M'H$, $N'K$ debbono riputarsi perpendicolari alle AM, AN; perciò saranno eguali i seni degli angoli MHM', NKN', ed applicando ai punti M, N le normali MR, NR, gli angoli $MM'H$, $NN'K$ eguaglieranno gli angoli AMR, ANR. S' avrà quindi

$$(MM' : NN')(AN : AM) :: \text{sen}\, ANR : \text{sen}\, AMR,$$

e di seguito (§. 6.)

$$\text{sen}\, MQC : \text{sen}\, NQC :: AM\, \text{sen}\, ANR : AN\, \text{sen}\, AMR.$$

Ciò posto ne' due raggi vettori AM, AN si prendano le parti AE, AF eguali ad AN, AM; per i punti E ed F si tirino alle MR, NR le parallele ED, FD che s' incontrino nel punto D; ed in fine si tiri AD: l' ultima analogia ottenuta si cangerà nell' altra

$$\text{sen}\, MQC : \text{sen}\, NQC :: AF\, \text{sen}\, AFD : AE\, \text{sen}\, AED.$$

Ma abbassando AG, AB perpendicolari sopra le DE, DF, si ha

$$AF\, \text{sen}\, AFD : AE\, \text{sen}\, AED :: AB : AG$$
$$:: \text{sen}\, ADB : \text{sen}\, ADG;$$

dunque sarà pure $\text{sen}\, MQC : \text{sen}\, NQC :: \text{sen}\, ADB : \text{sen}\, ADG.$

Intanto essendo eguali gli angoli MQN, BDG, perchè i lati dell' uno sono perpendicolari a quelli dell' altro, saran pure eguali gli altri due angoli MQC, ADB, e dovrà essere QC perpendicolare ad AD, come QM lo è a DB. Quindi potrà dedursi il seguente teorema:

Se in una curva piana qualunque si tirino delle corde per modo che i raggi vettori tirati per un punto fisso A agli estremi di ciascuna di esse stiano in un rapporto costante, *l' inviluppo di queste corde tocca una di esse, la* MN, *in un punto che si determina come segue. Tirati i raggi vettori* AM, AN, *si taglino sulle loro direzioni le parti* AE, AF *eguali ad* AN, AM, *e per i punti* E *ed* F *si tirino le perpendicolari* ED, FD *alle* PM, PN *rispettivamente; congiungendo il punto d' intersezione* D *di queste rette col punto* A, *ed abbassando su tal congiungente dal punto* Q *la perpendicolare* QC, *questa perpendicolare taglierà la corda* MN *nel punto cercato.*

PROBLEMA IX.

§. 12. *Le rette* MA, NB (fig. 8.ª) *che congiungono gli estremi della corda* MN *con due punti fissi* A *e* B *debbano essere parallele; vuol determinarsi il punto del contatto* C (1).

Sol. Si congungano le AM, AM', BN, BN'; dovranno aversi le analogie

$$MM' : MA :: \text{sen}\, MAM' : \text{sen}\, MM'A,$$

$$NB : NN' :: \text{sen}\, NN'B : \text{sen}\, NBN'.$$

Ma essendo AM, AM' parallele a BN, BN', risultano eguali gli angoli MAM', NBN'; dunque sarà anche

$$(MM' : NN')(NB : MA) :: \text{sen}\, NN'B : \text{sen}\, MM'A.$$

Ora poichè le AM, BN sono vicinissime alle AM', BN', i seni dei due angoli MM'A, NN'B eguaglieranno i seni dei due PMA, PNB, ovvero i seni degli angoli BNQ, AMQ; e però sarà

$$(MM' : NN')(NB : MA) :: \text{sen}\, AMQ : \text{sen}\, BNQ,$$

e quindi (§. 6.)

$$\text{sen}\, MQC : \text{sen}\, NQC :: AM\, \text{sen}\, AMQ : BN\, \text{sen}\, BNQ.$$

Intanto pe' punti A e B si tirino alle MQ, NQ rispettivamente le perpendicolari AE, BF, e le parallele AD, BD. Si avrà dalla precedente analogia

(1) Veggasi la nota F.

sen MQC : sen NQC : : AE : BF;

e poichè tirando DQ si ha

sen ADQ : sen BDQ : : AE : BF,

sarà conseguentemente

sen ADQ : sen BDQ : : sen MQC : sen NQC.

Ma abbiamo eguali gli angoli ADB, MQN, onde lo saranno altresì i due ADQ, MQC; e quindi QD starà per dritto con QC. Risulta da ciò il seguente teorema:

L' inviluppo delle corde d' una curva piana qualunque, descritte per modo che le congiungenti dei loro estremi con due punti fissi A *e* B *siano parallele, tocca una qualunque di queste corde, la* MN, *in un punto che si determina come segue. Si compia dalle tangenti* PM, PN *il parallelogrammo* PMQN, *e tirate per i punti* A *e* B *le* AD, BD *parallele alle* PN, PM *rispettivamente, se si unisca il punto d' intersezione* D *di queste rette col punto* Q, *questa congiungente taglierà la corda* MN *nel punto cercato.*

§. 13. In questa occasione indicherò il seguente teorema, che si riattacca alle cose precedenti.

In una data curva piana v *sia iscritto un poligono variabile di* m *lati con tal legge che questi siano sempre tangenti ad altrettante curve* v', v'', v''', v^{IV} ec. *Considerando questo poligono in una qualunque delle sue infinite posizioni, si tirino per i suoi vertici le tangenti alla curva* v; *si avranno in tal modo due poligoni, l' uno iscritto a questa curva, l' altro circoscritto, i cui lati saranno divisi ciascuno in due segmenti nel punto di contatto corrispondente. Ora il prodotto di tutti i segmenti alterni del poligono circoscritto starà a quello dei rimanenti, come il prodotto dei segmenti alterni del poligono iscritto, presi nello stesso senso del primo prodotto, sta a quello degli altri segmenti.*

Così, se sia ABCD..... (fig. 9.ª) una delle infinite posizioni che può prendere il poligono variabile, conducendo per i punti A, B, C, D..... le tangenti alla curva v di maniera che si abbia il poligono circoscritto KLMN...., dovrà stare

$$KA.LB.MC.ND : KD.NC.MB.LA :: AF.BG.CH.DE : AE.DH.CG.BF.$$

Se la curva v sia una sezione conica sarà il primo termine della precedente analogia eguale al secondo (1), e quindi anche il terzo eguale al quarto; ond' è che per tal caso il teorema precedente rimane modificato come segue:

Essendo iscritto in una sezione conica un poligono variabile di m *lati con tal condizione che questi vadano sempre toccando altrettante curve piane, il prodotto di tutti i segmenti alterni, in una qualunque delle infinite posizioni del poligono, sarà eguale al prodotto dei rimanenti.*

Il teorema enunciato offre il mezzo da costruire il punto di contatto dell' inviluppo del lato libero di un poligono variabile di m lati iscritto in una curva piana qualunque, e di cui $m-1$ lati siano tangenti ad altrettante curve date. Questa costruzione si rende più semplice qualora la curva in cui il poligono è iscritto sia una sezione conica; e se le curve toccate dai lati del poligono siano al numero di due, nel qual caso il poligono iscritto non è che un triangolo, si ha allora la stessa costruzione del punto di contatto data dall' illustre *Poncelet* nelle *Propriétés projéctives des figures*, pag. 323 (2).

(1) Veggasi — Carnot Géométrie de position, pag. 438.

(2) La costruzione di cui si tratta è la seguente: per i vertici degli angoli del triangolo iscritto adjacenti al lato libero si tirino due rette ai punti di contatto dei lati opposti; la congiungente del punto d' intersezione di queste rette col vertice dell' angolo opposto al lato libero, incontrerà il detto lato nel punto cercato.

NOTA *A*.

Il problema del §. 2., come pure gli altri dei §§. 7., 8., 9. sono stati risoluti dal Magnus in una sua Memoria inserita nel Tomo XVI degli *Annales de mathématiques*. L'andamento seguito da questo geometra è tutto diverso dal nostro, avendo egli derivate le sue soluzioni da talune formole che stabilisce sin da principio, e che quì appresso riporteremo, per mostrare come esse si possano applicare al problema del §. 3. ed agli altri che seguono. « Sia $y=\varphi(x)$ l' equazione d'una curva « piana qualunque riferita a due assi ortogonali. Siano inoltre « (α, β), (α', β') due punti comunque determinati su questa « curva, di maniera che si abbia $\beta=\varphi(\alpha)$, $\beta'=\varphi(\alpha')$; l'equa- « zione della corda che unisce questi due punti sarà

$$(\alpha'-\alpha)(y-\beta)-(\beta'-\beta)(x-\alpha)=\gamma=0.$$

« Supponendo che esista tra α ed α' una relazione data dall' « equazione $U=0$, l' equazione dell' inviluppo di tutte le « corde $\gamma=0$ sarà il resultato dell' eliminazione delle cinque « quantità $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \frac{d\alpha'}{d\alpha}$ tra le sei equazioni

$$\beta=\varphi(\alpha), \quad \beta'=\varphi(\alpha'), \quad (\alpha'-\alpha)(y-\beta)-(\beta'-\beta)(x-\alpha)=\gamma=0,$$

$$\left[y-\beta-(x-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\frac{d\alpha'}{d\alpha}-\left[y-\beta'-(x-\alpha')\frac{d\beta}{d\alpha}\right]=\frac{d\gamma}{d\alpha}=0,$$

$$U=0, \quad \left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)\frac{d\alpha'}{d\alpha}+\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)=\frac{dU}{d\alpha}=0 \text{ (1)}.$$

« Ma se non vuol trovarsi che il punto di contatto di una « delle corde contenute in $\gamma=0$ con l'inviluppo, basterà eli- « minare $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ tra le due equazioni $\frac{d\gamma}{d\alpha}=0$, $\frac{dU}{d\alpha}=0$, ciocchè « darà l' equazione

$$\left[y-\beta-(x-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)-\left[y-\beta'-(x-\alpha')\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)=v=0,$$

(1) Tutto ciò si rileva facilmente dalla teorica sviluppata dall' illustre Lagrange nella *Théorie des fonctions analytiques*, rispetto alle curve inviluppi a pag. 192-198.

« e determinare in seguito i valori di x ed y, che soddisfano « alle due equazioni $y=0$, $v=0$ il che equivale a determi- « nare il punto d' intersezione delle linee espresse da quest' « equazioni medesime. Or siccome la prima è la stessa corda, « così basterà di costruire l' altra, che si vede appartenere « egualmente ad una retta, che taglierà in conseguenza la « corda nel punto cercato. Questo prova in primo luogo, che « l' inviluppo non può toccare la corda in più punti. Or « l' equazione $v=0$ è soddisfatta, qualunque possa essere la « relazione $U=0$, facendo nello stesso tempo

$$y-\beta=\frac{d\beta'}{d\alpha'}(x-\alpha)\ldots\ldots(l),\qquad y-\beta'=\frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha')\ldots\ldots(l')$$

« dunque l' equazione $v=0$ è quella di una retta che unisce « il punto cercato col punto d' intersezione delle due rette « (l), (l'), punto che in seguito indicheremo con (s). Quanto « alle rette (l), (l'), si vede che ciascuna di esse è la paral- « lela tirata dall' una delle estremità della corda $y=0$ alla « tangente nell' altro estremo. »

Esposte queste formole passiamo ad occuparci del problema del §. 3. Si prenda a tale effetto per origine delle coordinate il punto fisso A; s' indichino con (α,β), (α',β') rispettivamente gli estremi M, N della corda; e si dinoti con t la tangente trigonometrica dell' angolo costante NMA. Dovrà essere pel caso attuale

$$\frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha(\alpha'-\alpha)+\beta(\beta'-\beta)}-t=U=0$$

e quindi

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)=\frac{\left[\alpha\alpha'(\alpha'-\alpha)+\alpha\beta'(\beta'-\beta)+\beta(\alpha'\beta-\alpha\beta')\right]\frac{d\beta}{d\alpha}-\beta\beta'(\beta'-\beta)-\alpha'\beta(\alpha'-\alpha)+\alpha(\alpha'\beta-\alpha\beta')}{[\alpha(\alpha'-\alpha)+\beta(\beta'-\beta)]^2},$$

$$\text{e }\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)=\frac{(\alpha^2+\beta^2)\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]}{[\alpha(\alpha'-\alpha)+\beta(\beta'-\beta)]^2}.$$

Or nell' espressione generale di tang. CAM, che è

$$\frac{(\alpha'\beta-\alpha\beta')\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}{(\alpha^2+\beta^2)\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+(\alpha\alpha'+\beta\beta')\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)} \text{ (1),}$$

si sostituiscano i precedenti valori di $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)$, e $\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)$; s' otterrà in tal modo

$$\text{tang. CAM} = \frac{(\alpha'\beta-\alpha\beta')\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]}{\left[\alpha\alpha'(\alpha'-\alpha)+\alpha\beta'(\beta'-\beta)+\beta(\alpha'\beta-\alpha\beta')\right]\frac{d\beta}{d\alpha}-\beta\beta'(\beta'-\beta)-\alpha'\beta(\alpha'-\alpha)+\alpha(\alpha'\beta-\alpha\beta')+(\alpha\alpha'+\beta\beta')\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]}$$

---

(1) Le coordinate x', y' del punto C essendo i valori di x ed y corrispondenti alle due equazioni $v=0$, e $\gamma=0$, si avrà

$$x'=\frac{\alpha\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\alpha'\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}{\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)},$$

$$\text{ed } y'=\frac{\beta\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\beta'\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}{\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}.$$

Quindi la retta che unisce questo punto C con l' origine A delle coordinate, formerà con l' asse delle ascisse un angolo avente per tangente trigonometrica

$$\frac{\beta\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\beta'\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}{\alpha\left[\beta'-\beta-(\alpha'-)\alpha\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\alpha'\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)};$$

ed essendo $\frac{\beta}{\alpha}$ quella dell' angolo che MA forma con lo stesso asse, dovrà essere

$$\text{tang. CAM} = \frac{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\beta\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\beta'\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}{\alpha\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\alpha'\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}}{1+\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\beta\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\beta'\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}{\alpha\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)+\alpha'\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}}$$

e riducendo si avrà l' espressione sopra scritta.

e riducendo il denominatore di questo fratto s' avrà

$$\text{tang. } CAM = \frac{(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}-(\beta'-\beta)}{(\beta'-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}+(\alpha'-\alpha)}.$$

Ma quest' espressione è anche quella di tang. PMN, come facilmente può vedersi: dunque dovrà essere l'angolo MAC=PMN, e però il cerchio che passa per i punti A ed M, e tocca in M la MP passerà anche pel punto cercato C.

NOTA *B*.

Si dinotino con $(\alpha,\beta),(\alpha',\beta')$ gli estremi M, N della corda; e si chiami t la cotangente dell' angolo costante, ovvero la tangente trigonometrica dell' angolo PMN. S' avrà, per la condizione del problema

$$\frac{(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}-(\beta'-\beta)}{(\beta'-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}+(\alpha'-\alpha)}-t=U=0,$$

donde ricavasi

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)=\frac{\left[(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2\right]\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}-\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}\right)}{\left[(\beta'-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}+(\alpha'-\alpha)\right]^2},$$

$$\text{e}\quad\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)=\frac{\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}\right)}{\left[\beta'-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}+(\alpha'-\alpha)\right]^2}.$$

Sostituendo questi valori di $\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)$, e $\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)$ nelle espressioni generali delle coordinate x', y' del punto di contatto C, determinate nella nota a piedi della pag. prec., si avrà

$$x'=\frac{\alpha\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\left[(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2\right]+(\alpha'-\alpha)\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}\right)}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\left[(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2\right]},$$

$$y'=\frac{\beta\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\left[(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2\right]+(\beta'-\beta)\left[\beta'-\beta-(\alpha'-\alpha)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(1+\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}\right)}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\left[(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2\right]}.$$

S' indichino ora con x'', y'' le coordinate del centro di curvatura del punto (α, β); sarà

$$x'' = \alpha - \frac{1 + \frac{d\beta^2}{d\alpha^2}}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}} \times \frac{d\beta}{d\alpha}, \qquad y'' = \beta + \frac{1 + \frac{d\beta^2}{d\alpha^2}}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}};$$

dunque $$y' - y'' = \frac{-(\alpha' - \alpha)\left[\alpha' - \alpha + (\beta' - \beta)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(1 + \frac{d\beta^2}{d\alpha^2}\right)}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\left[(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2\right]},$$

$$x' - x'' = \frac{(\beta' - \beta)\left[\alpha' - \alpha + (\beta' - \beta)\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(1 + \frac{d\beta^2}{d\alpha^2}\right)}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\left[(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2\right]};$$

e quindi $\frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{-(\alpha' - \alpha)}{\beta' - \beta}$. Quest'equazione mostra che la retta che unisce i due punti (x', y'), (x'', y'') è perpendicolare a quella che passa per i punti (α, β), (α', β'), cioè alla corda MN, e però risulta evidente il teorema enunciato nel §. 4.

NOTA *C.*

Per dimostrare col mezzo delle formole stabilite precedentemente l'analogia ultima del §. 6., e con essa il teorema del §. 5., si osservi, che indicati per (α, β), (α', β') rispettivamente i punti M, N, le rette QM, QC, QN formano con l' asse delle ascisse angoli che hanno per tangenti trigonometriche rispettivamente

$$\frac{d\beta'}{d\alpha'}, \qquad \frac{\frac{d\beta'}{d\alpha'}\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) - \frac{d\beta}{d\alpha}\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}{\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) - \left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}, \qquad \frac{d\beta}{d\alpha}.$$

Quindi sarà

$$\text{sen MQC} = \frac{\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)\left[\frac{d\beta}{d\alpha} - \frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]}{\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{d\beta'}{d\alpha'}\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) - \frac{d\beta}{d\alpha}\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}{\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) - \left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}\right)^2}\sqrt{1 + \frac{d\beta'^2}{d\alpha'^2}}},$$

$$\text{e sen NQC} = \frac{\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)\left[\frac{d\beta'}{d\alpha'} - \frac{d\beta}{d\alpha}\right]}{\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{d\beta'}{d\alpha'}\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) - \frac{d\beta}{d\alpha}\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}{\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) - \left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}\right)^2}\sqrt{1 + \frac{d\beta^2}{d\alpha^2}}} \; (1);$$

$$\text{e di seguito} \qquad \frac{\text{sen MQC}}{\text{sen NQC}} = \frac{-\,d\alpha'\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}}{d\alpha\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)\sqrt{d\alpha'^2 + d\beta'^2}}.$$

Ma per essere la funzione U di α ed α' eguale a zero, lo sarà pure il suo differenziale, dunque dovrà essere

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) d\alpha + \left(\frac{dU}{d\alpha}\right) d\alpha' = 0, \qquad \text{donde si trae} \quad \frac{-\,d\alpha'\left(\frac{dU}{d\alpha'}\right)}{d\alpha\left(\frac{dU}{d\alpha}\right)} = 1,$$

e quindi $\text{sen MQC} : \text{sen NQC} :: \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2} : \sqrt{d\alpha'^2 + d\beta'^2}$, che è l' analogia che dovevasi dimostrare, mentre i termini del secondo rapporto esprimono precisamente gli archetti MM′, NN′.

NOTA *D.*

Si prenda per origine delle coordinate il punto fisso A; s' indichino con (α, β), (α', β') rispettivamente i punti M, N; e chiamisi t la tangente trigonometrica dell' angolo costante MAN. Si avrà per questo caso

$$\frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha\alpha' + \beta\beta'} - t = U = 0; \qquad \text{e di seguito}$$

$$\left(\frac{dU}{d\alpha}\right) = -\,\frac{\left(\beta - \alpha\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\alpha'^2 + \beta'^2\right)}{(\alpha\alpha' + \beta\beta')^2}, \qquad \left(\frac{dU}{d\alpha'}\right) = \frac{\left(\beta' - \alpha'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\left(\alpha^2 + \beta^2\right)}{(\alpha\alpha' + \beta\beta')^2}.$$

(1) In generale se due rette formano con l' asse delle x angoli che hanno per tangenti trigonometriche h, ed h', e si chiami ϕ l' angolo compreso da queste rette, dovrà essere

$$\text{tang.}\,\phi = \frac{\text{sen}\,\phi}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\phi}} = \frac{h - h'}{1 + hh'}; \qquad \text{e quindi} \quad \text{sen}\,\phi = \frac{h - h'}{\sqrt{1 + h^2 + h'^2 + h^2h'^2}}.$$

Sarà dunque (Nota *A*)

$$\left(y-\beta-(x-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\left(\beta-\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\alpha'^2+\beta'^2\right)-$$
$$\left(y-\beta'-(x-\alpha')\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\beta'-\alpha'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)=v=0$$

l' equazione della retta che passa pel punto Q, e taglia la corda MN nel punto cercato; e se per l' origine A delle coordinate si tiri la parallela AD a questa retta, si avrà

$$\left[y-x\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\beta-\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\alpha'^2+\beta'^2\right)-$$
$$\left[y-x\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\beta'-\alpha'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)=0\;.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\;(\mathrm{P}).$$

Ora aggiungendo e togliendo insieme al primo membro della precedente equazione la quantità

$$\left(\beta-\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\beta'-\alpha'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2},$$

essa, messo per brevità $\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}}=m$, prenderà la forma

$$\left[y-x\frac{d\beta'}{d\alpha'}-\left(\beta'-\alpha'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)m\right]\left(\beta-\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\alpha'^2+\beta'^2\right)-$$
$$\left[y-x\frac{d\beta}{d\alpha}-\frac{\beta-\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}}{m}\right]\left(\beta'-\alpha'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)=0\;.\,.\,.\,.\,.\,.\;(\mathrm{P}),$$

ed è visibile che deve essere verificata quando si ha contemporaneamente

$$y-m\beta'=\frac{d\beta'}{d\alpha'}(x-m\alpha')\,.\,.\,.\,.\,(p),\qquad y-\frac{\beta}{m}=\frac{d\beta}{d\alpha}\left(x-\frac{\alpha}{m}\right)\,.\,.\,.\,.\,(p').$$

Adunque la retta AD, rappresentata da (P), passa pel punto d' intersezione delle due rette (p), (p') che sono le parallele tirate alle tangenti PN, PM rispettivamente pe' punti $(m\alpha', m\beta')$, $\left(\frac{\alpha}{m}, \frac{\beta}{m}\right)$. Or il primo di questi punti si trova sulla retta AN ad una distanza dal punto A eguale ad AM, ed il secondo trovasi sopra AM distante da A per AN; dunque: *Se nelle* AN, AM *si prendano le parti* AF, AE *rispettivamente eguali ad* AM, AN, *e pe' punti* E, F *si tirino alle tangenti* PM, PN *le parallele* ED, FD *che s' incontrino nel punto* D; *unendo* AD, *e tirandogli per* Q *la parallela* QC, *questa retta incontrerà la* MN *nel punto cercato.*

Intanto per passare da questa costruzione a quella che geometricamente s' è rilevata nel §. 10, si osservi che deve stare

sen ADF : sen ADE :: AF sen AFD : AE sen AED,

ovvero per costruzione

sen ADF : sen ADE :: AM sen ANP : AN sen AMP,

o ancora

sen MQC : sen NQC :: AM sen ANP : AN sen AMP,

e di seguito

PM . MC : PN . NC :: AM sen ANP : AN sen AMP.

Quest' ultima analogia è quella che si è ottenuta nel §. 10., donde s' è ricavata la costruzione ivi riportata.

NOTA *E*.

Preso per origine delle coordinate il punto fisso A, s' indichino con $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$ gli estremi M, N della corda; e sia n il rapporto costante che i due raggi vettori si debbono serbare. Dovrà essere $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha'^2+\beta'^2} - n^2 = \mathrm{U} = 0$, donde risulta

$$\left(\frac{d\mathrm{U}}{d\alpha}\right) = \frac{2\left(\alpha'^2+\beta'^2\right)\left(\alpha+\beta\frac{d\beta}{d\alpha}\right)}{(\alpha'^2+\beta'^2)^2}, \text{ e } \left(\frac{d\mathrm{U}}{d\alpha'}\right) = -\frac{2\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(\alpha'+\beta'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)}{(\alpha'^2+\beta'^2)^2};$$

e quindi l' equazione della retta, che passa pel punto Q, e pel punto cercato, sarà

$$\left[y-\beta-(x-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left(\alpha+\beta\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\alpha'^2+\beta'^2\right) -$$

$$\left[y-\beta'-(x-\alpha')\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left(\alpha'+\beta'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right) = v = 0.$$

Per l' origine A delle coordinate si abbassi la perpendicolare AD su questa retta; tal perpendicolare sarà rappresentata dall' equazione

$$\left[y\frac{d\beta'}{d\alpha'}+x\right]\left(\alpha+\beta\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\alpha'^2+\beta'^2\right)-$$
$$\left[y\frac{d\beta}{d\alpha}+x\right]\left(\alpha'+\beta'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)=0$$

al primo membro della quale aggiungendo, e togliendo insieme la quantità

$$\left(\alpha+\beta\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\alpha'+\beta'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2},$$

essa, messo per brevità $\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}}=m$, prenderà la forma

$$\left[y\frac{d\beta'}{d\alpha'}+x-\left(\alpha'+\beta'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)m\right]\left(\alpha+\beta\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\alpha'^2+\beta'^2\right)-$$
$$\left[y\frac{d\beta}{d\alpha}+x-\frac{\alpha+\beta\frac{d\beta}{d\alpha}}{m}\right]\left(\alpha'+\beta'\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)=0.$$

Intanto verificandosi quest'equazione quando si ha nello stesso tempo

$$y-m\beta'=\frac{-d\alpha'}{d\beta'}(x-m\alpha')\ldots\ldots(q),\quad y-\frac{\beta}{m}=\frac{-d\alpha}{d\beta}\left(x-\frac{\alpha}{m}\right)\ldots\ldots(q'),$$

si vede che la retta AD da essa rappresentata deve passare pel punto d' intersezione delle due rette (q), (q') che sono le perpendicolari tirate alle tangenti PN, PM rispettivamente pe' due punti $(m\alpha', m\beta')$, $\left(\frac{\alpha}{m}, \frac{\beta}{m}\right)$. Or questi due punti si trovano sopra i due raggi vettori ciascuno distante dal punto fisso A per quanto è l' altro raggio vettore. Adunque risulta da ciò il teorema enunciato nel §. 11.

NOTA *F.*

Per risolvere questo problema prendansi per assi coordinati la retta che unisce i due punti fissi A, B, e la perpendicolare elevatale nel suo punto medio. Questi punti potranno allora esprimersi per $(p, 0)$, $(-p, 0)$; e le congiungenti loro con gli estremi (α, β), (α', β') della corda saranno rappresentate dalle equazioni

$$y=\frac{\beta}{\alpha-p}(x-p), \qquad \text{ed} \qquad y=\frac{\beta'}{\alpha'+p}(x+p).$$

Ciò posto dovrà essere per la condizione del problema

$$\frac{\beta}{\alpha-p}-\frac{\beta'}{\alpha'+p}=\mathrm{U}=0, \quad \text{ovvero} \quad \beta(\alpha'+p)-\beta'(\alpha-p)=\mathrm{U}=0,$$

donde ricavasi

$$\left(\frac{d\mathrm{U}}{d\alpha}\right)=(\alpha'+p)\frac{d\beta}{d\alpha}-\beta', \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{d\mathrm{U}}{d\alpha'}\right)=\beta-(\alpha-p)\frac{d\beta'}{d\alpha'}.$$

Adunque l' equazione della retta che passa pel punto Q, e pel contatto cercato sarà

$$\left(y-\beta-(x-\alpha)\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right)\left[(\alpha'+p)\frac{d\beta}{d\alpha}-\beta'\right]-$$
$$\left(y-\beta'-(x-\alpha')\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left[(\alpha-p)\frac{d\beta'}{d\alpha'}-\beta\right]=v=0,$$

ossia

$$\left[y-x\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left[(\alpha'+p)\frac{d\beta}{d\alpha}-\beta'\right]-\left[y-x\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left[(\alpha-p)\frac{d\beta'}{d\alpha'}-\beta\right]+$$
$$p\alpha'\frac{d\beta}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\alpha'}+p\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\alpha'}-p\beta'\frac{d\beta'}{d\alpha'}-p\beta\frac{d\beta}{d\alpha}=0,$$

o ancora

$$\left[y-x\frac{d\beta'}{d\alpha'}+p\frac{d\beta'}{d\alpha'}\right]\left((\alpha'+p)\frac{d\beta}{d\alpha}-\beta'\right)-$$
$$\left[y-x\frac{d\beta}{d\alpha}-p\frac{d\beta}{d\alpha}\right]\left((\alpha-p)\frac{d\beta'}{d\alpha'}-\beta\right)=0.$$

Or si vede che la retta rappresentata da quest' equazione passa pel punto d' intersezione delle due rette

$$y=\frac{d\beta'}{d\alpha'}(x-p), \qquad \text{ed} \qquad y=\frac{d\beta}{d\alpha}(x+p)$$

che sono le parallele tirate per i due punti fissi $(p,0)$, $(-p,0)$ alle tangenti PN, PM applicate agli estremi della corda. Adunque si ha da ciò il teorema che si è conchiuso nel §. 12.