SOPRA

L'ANALISI LINEARE

PER LA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI DI I.° GRADO

MEMORIA II. [1]

DEL SOCIO E *SEGRETARIO*

PROF. GIUSEPPE BIANCHI.

A proseguire e compiere la trattazione dell' Analisi lineare secondo i principj e sviluppi, che furono esposti nell' antecedente Memoria, dobbiam ora occuparci del caso in cui il numero delle incognite superi quello delle equazioni di condizione; il che faremo nel seguente

§. III.

Dell' Analisi lineare indeterminata.

25. Ritenuto m il numero delle incognite, sia $m-1$ quello delle equazioni esprimenti le condizioni tutte coi dati del problema. Una delle m incognite nel corrispondente problema determinato, per esempio la x_{m-1} si consideri indeterminata, e pongasi

$$s_0 - r_0 x_{m-1} = s'_0 \,; \quad s_1 - r_1 x_{m-1} = s'_1 \,; \quad s_2 - r_2 x_{m-1} = s'_2 \,; \text{ etc.}$$

Avremo quindi le $m-1$ equazioni

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 \quad x_0 + b_0 \quad x_1 + \ldots\ldots + q_0 \quad x_{m-2} = s'_0 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m-2}\, x_0 + b_{m-2}\, x_1 + \ldots\ldots + q_{m-2}\, x_{m-2} = s'_{m-2} \end{array} \right.$$

(1) V. la Mem. I. nel T. XXII. parte matematica, pag. 184, della serie di questi Volumi.

dalle quali (§. I.) ricaveremo i valori

$$x_0 = \frac{A'}{V'}; \quad x_1 = \frac{B'}{V'}; \; \ldots\ldots \; x_{m-2} = \frac{Q'}{V'};$$

essendo A', B', ... Q' funzioni determinate razionali ed esplicite degli r, s delle equazioni (1) e della x_{m-1}, ma non contenendo V' alcuna delle s'. Perciò, qualunque sia la x_{m-1}, generalmente la V' non diviene mai zero, e cionullostante i valori di ciascuna delle x_0, x_1 .... x_{m-2} sono tutti indeterminati dipendentemente dalla x_{m-1} che entra nelle A', B', ... Q'.

D' altra parte ammettendo, benchè non sia fra le condizioni date, anche l'ultima dell'equazioni (1), questo può farsi tenendo per arbitrarie le a_{m-1}, b_{m-1}, ..., s_{m-1} che sono di numero $m+1$. Ora queste arbitrarie si prendano tali che ne vengano soddisfatte le $m+1$ equazioni A=0, B=0, ..., R=0, V=0. Da ciò ne viene ugualmente che ciascuna delle m incognite x_0, x_1, x_2 .... x_{m-1} esprimesi colla forma indeterminata $\frac{0}{0}$, ed anzi è tale assolutamente qual dev' essere, e non già solo apparentemente, ossia per un fattor comune che sia $=0$. Dunque il problema indeterminato in questo caso, benchè non lasci conoscere alcuna delle x_0, ... x_{m-1}, richiede però, nel paragone col pienamente determinato che una parte dei coefficienti e nominatamente li a_{m-1}, b_{m-1}, ... s_{m-1} soddisfino alle relazioni A=0, B=0, ... V=0: ossia dall'uno all'altro problema passa la differenza che nel determinato tutti i coefficienti, di numero $m(m+1)$, sono indipendenti fra loro e qualunque, mentre nell' indeterminato i coefficienti liberi sono di numero $(m+1)(m-1)$.

26. Abbiansi $m-2$ equazioni lineari ed m incognite, e consideriam indeterminate le x_{m-1}, x_{m-2}. Ne dedurremo

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 \quad x_0 + b_0 \quad x_1 + \ldots\ldots\ldots + p_0 \quad x_{m-3} = s''_0 \\ \vdots \\ a_{m-3}\, x_0 + b_{m-3}\, x_1 + \ldots\ldots\ldots + p_{m-3}\, x_{m-3} = s''_{m-3} \end{array} \right.$$

posto

$$s''_0 = s_0 - r_0\, x_{m-1} - q_0\, x_{m-2}\,;\quad s''_1 = s_1 - r_1\, x_{m-1} - q_1\, x_{m-2}\,;\ \text{etc.},$$

e dalle (60) $\quad x_0 = \frac{A''}{V''}\,;\quad x_1 = \frac{B''}{V''}\,;\ \text{etc.}\,;\quad x_{m-3} = \frac{P''}{V''}\,.$

Si avrà pure in questo caso dalle (1)

$$x_0 = \frac{A}{V} = \frac{0}{0}\,;\quad x_1 = \frac{B}{V} = \frac{0}{0}\,;\ \ldots\ldots\,;\quad x_{m-3} = \frac{P}{V} = \frac{0}{0}\,,$$

e il numero de' coefficienti indipendenti fra loro nelle (1) sarà $(m+1)(m-2)$, mentre gli altri di numero $2(m+1)$ si considerano arbitrarj. Una metà degli ultimi si ha dalle equazioni $A=0$; $B=0$; ....; $V=0$ come nel caso antecedente; ma di più ora può aversi eziandio dalle (59) $V'=0$, e avvertendo che V' non contiene alcuna incognita, laddove A', B', ..., Q' contengon ciascuna la x_{m-1}, come A'', B'', ..., P'' contengon le x_{m-1}, x_{m-2} che non affettano V''.

27. Esteso il ragionamento ad $m-n$ equazioni ed m incognite, osserviamo che $m-n$ di queste si esprimeranno deducendole dalle equazioni

$$(61)\quad \left\{\begin{array}{l} a_0\, x_0 + b_0\, x_1 + \ldots\ldots + h_0\, x_{m-n+1} = s^{(n)}_0 \\ \quad\vdots \\ a_{m-n+1}\, x_0 + b_{m-n+1}\, x_1 + \ldots\ldots + h_{m-n+1}\, x_{m-n+1} = s^{(n)}_{m-n+1} \end{array}\right.$$

ove pongasi

$$s^{(n)}_0 = s_0 - r_0\, x_{m-1} - q_0\, x_{m-2} - \ldots\ldots - i\, x_{m-n}\,;\quad \text{etc.}\,;$$

e potremo aver sempre

$A=0$, $B=0$, ..., $R=0$, $V=0$; $V'=0$; $V''=0$; ....., $V^{(n-1)}=0$,

le quali serviranno a determinar un numero $m-n$ dei coefficienti arbitrarj delle (1), avendosi poi il numero de' coefficienti indipendenti $=(m+1)(m-n)$. Una parte infine dei coefficienti arbitrarj, di numero $m(n+1)$ rimane del tutto libera, e può prendersi a piacere, senza che ne venga però mai determinata alcuna delle m incognite.

28. Nelle cose dette racchiudesi generalmente l' analisi lineare indeterminata. Due sono dunque i modi di concepire la soluzione dei problemi di questo genere, soluzione che praticamente non può effettuarsi in alcuno; consistente l' uno di quelli in considerar ciascuna delle m incognite esplicitamente rappresentata dai valori $\frac{A^{(n)}}{V^{(n)}}$, $\frac{B^{(n)}}{V^{(n)}}$, col comune denominatore $V^{(n)}$ esplicita e nota funzione razionale dei coefficienti delle $m-n$ equazioni date; consistente l' altro in considerar ciascuna delle m incognite rappresentata dalla forma indeterminata e comune $\S$, la quale venga somministrata dalle relazioni $A=o$, $B=o$, ..., $R=o$, $V=o$, ..., $V^{(n-1)}=o$, di numero $m+n$; ossia, ciò che è lo stesso, in assumere o formar arbitrariamente le n equazioni lineari non date, e assoggettando i coefficienti di esse, in numero $m+n$, alle indicate relazioni. Convien però confessare che questa seconda maniera di concepir la soluzione del problema indeterminato non è che una veduta analitica, giusta soltanto in generale e speculativamente: poichè quanto al modo concreto e particolare essa riesce vana, come in appresso riconosceremo, per la natura e forma dell' equazioni stesse $A=o$, $B=o$, etc., che non consentono la determinazione di alcuno dei coefficienti arbitrarj; laonde questi invece sono da ritenersi tutti nulli insieme colle introdotte n equazioni. E quindi l' unico modo di svolgere con ulteriori considerazioni e praticamente l' analisi lineare indeterminata riducesi al primo degli accennati.

29. Richiamiamo dalla (19) il valore di r^q, che è quello di V, da cui per le permutazioni si deducono quelli di R, Q, P, ..., B, A. E poichè ciascuna di tali quantità dev' essere $=o$ indipendentemente dai fattori comuni fra V e le A, B, ..., Q, R all' uopo di mostrarne indeterminata ciascuna incognita, così porremo

$$
(62)\quad\left\{\begin{array}{lll}
V= & (a,b,c,\dots q,r)= & (b,c,\dots q,r)\,a_{m-1}-(a,c,\dots q,r)\,b_{m-1}+\dots\pm(a,b,\dots q)\,r_{m-1}=0\\
R= & (a,b,c,\dots q,s)= & (b,c,\dots q,s)\,a_{m-1}-(a,c,\dots q,s)\,b_{m-1}+\dots\pm(a,b,\dots q)\,s_{m-1}=0\\
Q= & -(a,b,c,\dots r,s)= & -(b,c,\dots r,s)\,a_{m-1}+(a,c,\dots r,s)\,b_{m-1}-\dots\mp(a,b,\dots r)\,s_{m-1}=0\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
B= & \mp(a,c,\dots r,s)= & \mp(c,d,\dots r,s)\,a_{m-1}\pm(a,d,\dots r,s)\,c_{m-1}\mp\dots\mp(a,c,\dots r,)\,s_{m-1}=0\\
A= & \pm(b,c,\dots r,s)= & \pm(c,d,\dots r,s)\,b_{m-1}\mp(b,d,\dots r,s)\,c_{m-1}\pm\dots\pm(b,c,\dots r)\,s_{m-1}=0
\end{array}\right.
$$

col segno superiore per m dispari e coll'inferiore per m pari. Se fosse richiesto di determinare li $m+1$ coefficienti a_{m-1}, b_{m-1}, ... r_{m-1}, s_{m-1}, ne avremmo quì appunto m+1 equazioni lineari, e quindi saremmo in un caso di analisi determinata: ma di più in questo caso ciascuna delle $m+1$ equazioni manca di uno dei detti coefficienti, e perciò sarebbe questo un caso speciale di analisi lineare determinata. Avviene quì come se nell' equazioni (1) si avesse

$$a_0 = b_1 = c_2 = d_3 = \dots\dots = r_{m-1} = 0.$$

Osserviamo le conseguenze di tale ipotesi nell' equazioni (1). In questo caso notabilmente si semplificano tutte le formole della soluzione determinata e abbiamo (Mem. I. §. 9.)

$$
(63)\quad\left\{\begin{array}{l}
b^a{}_0 = a_1\ b_0\\
b^a{}_1 = a_2\ b_0\\
\vdots\\
b^a{}_{m-2} = a_{m-1}\,b_0
\end{array}\right.
$$

dalle quali viene la relazione

$$\frac{b^a{}_0 + b^a{}_1 + \dots + b^a{}_{m-2}}{b_0} = a_1 + a_2 + \dots\dots + a_{m-1};$$

ed altre simili proprietà emergeranno dalle permutazioni per le $c^b{}_0$, $c^b{}_1$, ... $d^c{}_0$, $d^c{}_1$, etc. Si ha pure

$$
(64)\quad\left\{\begin{array}{ll}
(a,b)= a_1 b_0; & (b,c,d) = (c,d)\,b_2 + (b,c)\,d_2;\\
(a,c)= a_1 c_0 & \text{etc.}\\
(b,c)= -c_1 b_0 & \\
(a,d)= a_1 d_0 & (b,c,d,e) = (c,d,e)\,b_3 - (b,d,e)\,c_3\\
(b,d)= -d_1 b_0 & \qquad -(b,c,d)\,e_3;\\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}\right.
$$

30. Ad esempio siano le equazioni a tre incognite

$$b_0 x_1 + c_0 x_2 = s_0$$
$$a_1 x_0 + c_1 x_2 = s_1$$
$$a_2 x_0 + b_2 x_1 = s_2$$

e i valori di ciascuna incognita (Mem. I. §. 16.) si avranno tosto ridotti come segue

$$x_0 = \frac{c_0 s_1 b_2 - s_0 c_1 b_2 + b_0 c_1 s_2}{b_0 c_1 a_2 + c_0 a_1 b_2}$$

$$x_1 = \frac{s_0 c_1 a_2 - c_0 s_1 a_2 + b_0 c_1 s_2}{b_0 c_1 a_2 + c_0 a_1 b_2}$$

$$x_2 = \frac{b_0 s_1 a_2 + s_0 a_1 b_2 + b_0 a_1 s_2}{b_0 c_1 a_2 + c_0 a_1 b_2}.$$

E qui a digressione analoga mi risovviene l'elegante soluzione del problema nell'Algebra d'Eulero alli Numeri 619. 20. e 21; ove si abbian le equazioni in numero pari a quello delle incognite, ma con due incognite soltanto per ogni equazione e della forma

$$1.^\circ \left.\begin{array}{l} y + \frac{1}{a}x = n \\ x + \frac{1}{b}y = n \end{array}\right\} ; \quad 2.^\circ \left.\begin{array}{l} z + \frac{1}{a}x = n \\ x + \frac{1}{b}y = n \\ y + \frac{1}{c}z = n \end{array}\right\} ; \quad 3.^\circ \left.\begin{array}{l} u + \frac{1}{a}x = n \\ x + \frac{1}{b}y = n \\ y + \frac{1}{c}z = n \\ z + \frac{1}{d}u = n \end{array}\right\} ; \text{ etc.}$$

dalle quali si trae

per due incognite $\left.\begin{array}{l} x = n \,.\, \frac{ab - a}{ab - 1} \\ y = n \,.\, \frac{ab - b}{ab - 1} \end{array}\right\}$; per tre $\left.\begin{array}{l} x = n \,.\, \frac{abc - ac + a}{abc + 1} \\ y = n \,.\, \frac{abc - ab + b}{abc + 1} \\ z = n \,.\, \frac{abc - bc + c}{abc + 1} \end{array}\right\}$;

$$\text{per quattro}\quad \left.\begin{aligned} x &= n\,.\,\frac{abcd - acd + ad - a}{abcd - 1} \\ y &= n\,.\,\frac{abcd - abd + ab - b}{abcd - 1} \\ z &= n\,.\,\frac{abcd - abc + bc - c}{abcd - 1} \\ u &= n\,.\,\frac{abcd - bcd + cd - d}{abcd - 1} \end{aligned}\right\}\ ;\quad \text{etc.}$$

e quindi per m incognite

$$x = n\,.\,\frac{abcd\ldots.r - acd\ldots.r + ad\ldots.r - \ldots.. \pm ar \mp a}{abcd\ldots.r \mp 1}$$

$$y = n\,.\,\frac{abcd\ldots.r - abd\ldots.r + abe\ldots.r - \ldots.. \pm br \mp b}{abcd\ldots.r \mp 1}$$

$$z = n\,.\,\frac{abcd\ldots.r - abce\ldots.r + abcf\ldots.r - \ldots.. \pm cr \mp c}{abcd\ldots.r \mp 1}$$

etc.

valendo il segno superiore per m pari e l' inferiore per m dispari. Eulero non va oltre i valori e le formole per tre incognite, lasciando per avventura che il lettore ne tragga o ne vegga tosto gli uni e le altre nel caso generale.

31. Per un caso anche più particolare di tre incognite al 1.° grado, e per una facile applicazione geometrica, siano le tre equazioni

$$(65)\qquad \left\{\begin{aligned} x + y &= a \\ x + z &= b \\ y + z &= c \end{aligned}\right\}\ ;\quad \text{onde}\quad \begin{aligned} x &= \frac{a + b - c}{2} \\ y &= \frac{a + c - b}{2} \\ z &= \frac{b + c - a}{2} \end{aligned}$$

e rappresentando con x, y, z tre differenti rette, se ne domandi il triangolo di data superficie $= s$.

Primieramente il triangolo sarà possibile e determinato per le (65), qualora però soltanto sia, com' è noto, la somma di due fra le x, y, z, in qualunque combinazione, maggiore della terza. Si ha diffatti

$$s=\frac{\sqrt{(a+b+c)(3a-b-c)(3b-a-c)(3c-a-b)}}{16}=\frac{\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)}}{4},$$

valore di s che non può essere quantità reale, ove non sia positivo ciascuno dei fattori $x+y-z$, $x+z-y$, $y+z-x$; mentre se due di essi per la detta realtà si assumessero negativi, nascerebbe l'assurdo che uno dei lati, p. e. x, sarebbe ad un tempo $<z-y$ e $<y-z$, ossia di ugual segno le contrarie differenze, che è manifesta contraddizione.

Il triangolo in 2.° luogo, che abbia per lati le tre rette a, b, c, è sempre possibile, la somma di due lati, ossia ciascuna delle quantità $2x+y+z$, $2y+x+z$, $2z+x+y$ essendo evidentemente maggiore del terzo lato: e infatti si ha in questo caso

$$s=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{4}=\sqrt{(x+y+z)\,xyz}\,,$$

espressione di s in x, y, z assolutamente reale.

Che se in 3.° luogo pongasi

$$(66)\qquad\left\{\begin{aligned} x-y&=a'\\ x-z&=b'\\ y-z&=c'\end{aligned}\right.$$

il triangolo colle tre date rette a', b', c' è nullo di sua natura, poichè abbiamo

$$s=\sqrt{\frac{(x-y)(x-z)(y-z)(a'+c'-b')}{2}}=0,$$

e per essere dalle (66) .... $a'+c'-b'=0$: nel qual caso appunto le tre incognite x_0, x_1, x_2 del num. prec. acquistan la forma ed espressione indeterminata $\frac{0}{0}$, come tosto apparisce ponendo nei loro valori

$$b_0=a_1=a_2=+1\,;\qquad c_0=c_1=b_2=-1\,.$$

E di vero abbiamo quì tre incognite, ma solo due equazioni diverse, la seconda delle (66) non distinguendosi dalla somma della prima e terza di esse.

Pertanto, raccogliendo, il triangolo, colle tre rette qualunque x, y, z per lati, è possibile o no secondo che abbiasi o no la somma di due di esse in ogni combinazione maggiore della terza; è però sempre possibile il triangolo che abbia per lati le rette $x+y$, $x+z$, $y+z$; ed all' opposto è sempre impossibile, come di superficie zero, il triangolo che abbia per lati le rette $x-y$, $x-z$, $y-z$. Di questa guisa mi sembra che debba estendersi e completarsi il noto e comune problema della Geometria più elementare.

32. Un altro esempio di equazioni lineari, che spettano all' analisi indeterminata, benchè il numero delle equazioni eguagli quello delle incognite, si ha nelle seguenti

$$(67) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x+y=cz \\ x+z=by \\ y+z=ax\,. \end{array} \right.$$

Facciasi $u=x+y+z$, e ne viene

dalla terza $\quad u=(a+1)x$; ossia..... $\quad x=\frac{u}{a+1}$

dalla 2.ª $\quad u=(b+1)y \qquad y=\frac{u}{b+1}$

dalla 1.ª $\quad u=(c+1)z \qquad z=\frac{u}{c+1}$.

Perciò sommando

$$u=u\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right),$$

ossia $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1$, da cui $c=\frac{(a+1)+(b+1)}{ab-1}$.

Questa relazione sussistendo fra i coefficienti a, b, c, si osservi che la 1.ª delle (67) è inclusa nelle altre 2.ª e 3.ª; cosicchè in tal caso non si ha propriamente che due equazioni fra le tre incognite, e il problema quindi è indeterminato di sua natura. Che se i tre dati a, b, c dovessero essere qualunque e indipendenti fra loro, il problema ne diverrebbe d' impossibile o nulla risoluzione, a meno che non fosse $u=x+y+z=0$.

E già questa equazione si verifica sempre, avendosi parzialmente $x=0$; $y=0$; $z=0$. Infatti per essere nelle equazioni del num. 16. (Mem. I.ª) $s_0=s_1=s_2=0$, se ne trae $x_0=x_1=x_2=0$, e solamente ciascuna delle incognite diviene $=\frac{0}{0}$, quando sia $c=\frac{(a+1)+(b+1)}{ab-1}$. Perocchè fatto $c_0=-c$; $b_1=-b$; $a_2=a$; $a_0=a_1=b_0=b_2=c_1=c_2=1$, e ammessa la precedente relazione fra a, b, c ne risulta $=0$ il denominator comune delle incognite x_0, x_1, x_2, ossia nel nostro caso quello delle x, y, z. Dunque il problema « trovare tre numeri, le cui somme due a due siano multipli o summultipli dati del terzo » è indeterminato o impossibile e nullo. In generale un problema di analisi lineare apparentemente determinato diverrà indeterminato ogniqualvolta una o più delle m equazioni non è o non sono se non combinazioni delle altre equazioni, ossia sussistono identicamente con esse; il che avviene per una o più relazioni particolari che sussistano fra i coefficienti a_0, a_1, etc.; b_0, etc.; e questa conclusione è l' inversa dell' altra per la quale *speculativamente* riducemmo all' analisi lineare determinata i problemi della indeterminata.

33. Prendiam ora di nuovo a considerar le equazioni $A=0$, $B=0$, ..., $R=0$, $V=0$. Sono esse di numero $m+1$, quante cioè le arbitrarie $a_{m-1}, b_{m-1}, \ldots\ r_{m-1}, s_{m-1}$; e tuttavia non valgono a far conoscere alcuna di tali arbitrarie, attesa la mancanza in tutte di un termine noto $s^{(\prime)}_0, s^{(\prime)}_1, \ldots\ s^{(\prime)}_m$, funzione cioè determinata dei dati coefficienti $a_0, a_1 \ldots\ a_{m-2}$; $b_0, b_1 \ldots\ b_{m-2}$; etc. E già per essere appunto $s^{(\prime)}_0 = s^{(\prime)}_1 \ldots\ s^{(\prime)}_m = 0$, e dalla forma generale del valore di ciascuna incognita nell' analisi lineare determinata se ne ha sempre $a_{m-1}=b_{m-1}=\ldots=r_{m-1}=s_{m-1}=\frac{0}{\nabla}$. Quindi, come nel caso precedente (num. 32.) che ora generalizziamo, o deve porsi realmente $a_{m-1}=b_{m-1}=\ldots=r_{m-1}=s_{m-1}=0$; il che torna lo stesso di considerar nulla, termine per termine, l' equazione emmesima introdotta; o ciascuna delle dette arbitrarie a_{m-1}, etc. deve considerarsi

essa pure, al pari delle incognite $x_0, \ldots. x_m$, come una indeterminata ed espressa da $\frac{0}{0}$ per la coesistenza dell' equazione $V'=0$, che è una relazione fra i coefficienti noti $a_0, a_1 \ldots. a_{m-1}, b_0$, etc. Dunque anche nell' analisi lineare determinata, e vale a dire nell' equazioni (1) (num. 2. Mem. I.ª) mancando tutti i secondi membri, o avendosi $s_0 = s_1 = \ldots = s_{m-1} = 0$, sarà pure $=0$ il valore di ciascuna incognita $x_0, x_1, \ldots. x_m$, e quindi per nullità di risoluzione il problema impossibile; fin che però i coefficienti dati $a_0, a_1, \ldots a_{m-1}, b_0$, etc., r_{m-1} siano tutti qualunque, ossia liberi e indipendenti fra loro. Conciossiacchè nel caso che tali coefficienti soddisfino all'equazione $V=0$, il problema invece riuscirà indeterminato per essere ciascuna incognita $=\frac{0}{0}$ assolutamente. Che se poi sussista la $V=0$, o anche sia nullo semplicemente un fattore di V non comune ad A, B, ..., R, senza che siano in pari tempo $=0$ tutti e ciascuno dei termini noti $s_0, s_1, \ldots. s_{m-1}$, allora il problema è impossibile, non per nullità di risoluzione, bensì (num. 4. Mem. I.ª) per una specie di assurdità espressa dalla forma del valor infinito delle incognite.

34. Poichè dunque alla trattazione dell' Analisi lineare indeterminata nella generalità dei casi non può servire che il primo dei due metodi accennati al num. 28., ad esso è necessità ricorrere nella cercata soluzione dei relativi problemi. Contuttociò le formole dell' Analisi lineare determinata che ottenni e presentai nella Memoria I.ª giovan quì pure a racchiudere ed esprimere i procedimenti generali del calcolo e le relazioni delle quantità date e incognite. A dimostrar ciò incominciamo da un caso particolare, e sia quello di quattro incognite, fra le quali abbiansi da prima le tre seguenti equazioni:

$$(68)\quad \left\{\begin{array}{l} a_0 x_0 + b_0 x_1 + c_0 x_2 + d_0 x_3 = s_0 \\ a_1 x_0 + b_1 x_1 + c_1 x_2 + d_1 x_3 = s_1 \\ a_2 x_0 + b_2 x_1 + c_2 x_2 + d_2 x_3 = s_2 \end{array}\right.$$

Pongasi..... $s'_0 = s_0 - d_0 x_3$; $s'_1 = s_1 - d_1 x_3$; $s'_2 = s_2 - d_2 x_3$.
E introdotti nelle (68) li s'_0, s'_1, s'_2, sciolgansi tali equazioni per le tre incognite x_0, x_1, x_2. Avremo (Mem. I.ª num. 16.)

$$x_2 = \frac{(a,b,s')}{(a,b,c)}; \qquad x_1 = -\frac{(a,c,s')}{(a,b,c)}; \qquad x_0 = \frac{(b,c,s')}{(a,b,c)}.$$

E sviluppando e riducendo col rimettere per li s' i rispettivi valori, si ottiene

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} x_2 &= \frac{(a,b,s)}{(a,b,c)} - \frac{(a,b,d)}{(a,b,c)}\, x_3 \\ x_1 &= -\frac{(a,c,s)}{(a,b,c)} + \frac{(a,c,d)}{(a,b,c)}\, x_3 \\ x_0 &= \frac{(b,c,s)}{(a,b,c)} - \frac{(b,c,d)}{(a,b,c)}\, x_3 . \end{aligned} \right.$$

In secondo luogo fra le stesse quattro incognite sussistano solamente le prime due (68) e facciasi

$$s''_0 = s_0 - c_0 x_2 - d_0 x_3; \qquad s''_1 = s_1 - c_1 x_2 - d_1 x_3 .$$

Si ha $$x_1 = \frac{(a,s'')}{(a,b)}; \qquad x_0 = -\frac{(b,s'')}{(a,b)}.$$

Dalle quali equazioni, svolgendo i secondi membri e rimettendovi per li s'' i rispettivi valori, si ricava:

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{(a,s) - (a,c)x_2 - (a,d)x_3}{(a,b)} \\ x_0 &= \frac{-(b,s) + (b,c)x_2 + (b,d)x_3}{(a,b)} . \end{aligned} \right.$$

E finalmente, qualora fra le quattro incognite non sussista che la sola prima delle (68), ne risulta immediatamente . . . .
$x_0 = \frac{s_0'''}{a_0}$, ovvero

$$(71) \qquad x_0 = \frac{s_0 - b_0 x_1 - c_0 x_2 - d_0 x_3}{a_0}.$$

35. Raccogliamo da queste determinazioni che l' espressione o il valor esplicito di ciascuna delle incognite, scelte in egual numero a quello delle condizioni o equazioni del problema lineare indeterminato, si ha esso pure sotto forma

lineare; e vale a dire che ciascuna delle altre incognite e indeterminate vi si trova al primo grado e in termini di una sola dimensione. Inoltre si osservi che nel detto esplicito valore delle incognite, uguali in numero all' equazioni date, il termine noto altro non è che il valor dell' incognita rispettiva nel caso che il problema fosse determinato; il che naturalmente risponde al supporre eguale a zero ciascuna delle incognite eccedenti il numero delle equazioni, ossia che restano indeterminate. E i coefficienti di queste nel valore di quella sono essi pure quantità note ed esplicite, composte cioè dei dati del problema, deducendosi poi tostamente le medesime dal termine noto colla semplice permutazione degli s delle equazioni primitive nel rispettivo coefficiente che ivi ha l' incognita e indeterminata che si considera. Rispetto da ultimo ai segni osserviamo nelle (69), (70) e (71) che ogni termine affetto dalle incognite indeterminate è di segno contrario al termine noto: laonde concludiamo da tutte le circostanze e regole avvertite che la risoluzione di un problema lineare indeterminato si riduce sempre ad una o più equazioni della forma:

$$x_0 = \alpha - \ldots\ldots - \alpha^{(s,q)}\, x_{m-2} - \alpha^{(s,r)}\, x_{m-1}, \tag{72}$$

intendendo per $\alpha^{(s,r)}$, $\alpha^{(s,q)}$, ecc. il termine noto α del corrispondente problema lineare determinato, cangiativi rispettivamente li s nelli r, nei q, e così di seguito.

36. Benchè la conclusione precedente siasi dedotta dalla considerazione del caso particolare di quattro incognite, nondimeno essa è generale, ossia regge per m incognite ed un numero $m-n$ di equazioni lineari, e può esser dimostrata, come dicesi, *a priori*. Imperocchè facendosi dipendere nel modo praticato la soluzion del problema indeterminato da quella del determinato, esprimendo cioè ciascuna delle $m-n$ incognite pei dati del problema e per le n incognite rimanenti, è da riflettere che li $s^{(n)}$ o li s accentati sono funzioni lineari di queste ultime, come i valori $\frac{A^{(n)}}{V^{(n)}}$, $\frac{B^{(n)}}{V^{(n)}}$, etc. delle

prime sono funzioni lineari delli $s^{(n)}$; e quindi le $m-n$ incognite debbon essere funzioni lineari delle restanti n. D' altronde il valor esplicito di ciascuna delle $m-n$ dev' esser tale che, supposte $=0$ tutte e ciascuna delle n, ne risulti il valore del problema determinato e dedotto, nella stessa ipotesi, dall' equazioni date e di egual numero $m-n$: perciò il termine noto di ciascuna incognita non può essere che quello somministrato dalla corrispondente soluzione determinata e lineare, ove per la fatta ipotesi non entrano li s accentati. Ma egli è poi indifferente di prendere fra le $m-n$ incognite e determinabili le une anzichè le altre di tutte le m incognite del problema; e conseguentemente nel valore di ciascuna delle $m-n$, scelte in generale ad arbitrio, il coefficiente di ciascuna delle n indeterminate sarà tale da somministrar il denominatore del termine noto quando fosse $=0$ l' incognita principale e ne prendesse il posto l'indeterminata di cui trattasi; il che non importa che una semplice permutazione dei coefficienti dell'equazioni date nel numeratore del termine noto che realmente si considera. E riguardo infine ai segni egli è pur chiaro dal valore delli s accentati che i termini affetti dalle indeterminate n nell' espressione di ciascuna delle $m-n$ debbono tutti aver segno contrario a quello del termine noto.

37. Ciò dimostrato, sia ora nelle equazioni (1) (delle quali non ammettiam sussistere che le prime di numero $m-n$) k il coefficiente numerico dell' incognita $x_{m-(n+1)}$, e distinto al solito dall' una all' altra equazione coi numeri $0, 1, 2, \ldots. n-1$ al piede. Per le suesposte ragioni si avrà:

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned}
x_{m-(n+1)} &= \frac{\pm(a,b\ldots.h,i,s)\mp[(a,b\ldots.i,l)x_{m-n}+\ldots.+(a,b\ldots.i,q)x_{m-2}+(a,b\ldots.i,r)x_{m-1}]}{(a,b\ldots..h,i,k)}\\
x_{m-(n+2)} &= \frac{\mp(a,b\ldots.h,k,s)\pm[(a,b\ldots.h,k,l)x_{m-n}+\ldots.+(a,b\ldots.k,q)x_{m-2}+(a,b\ldots k,r)x_{m-1}]}{(a,b\ldots..h,i,k)}\\
&\;\;\vdots\\
x_1 &= \frac{\pm(a,c\ldots.i,k,s)\mp[(a,c\ldots.k,l)x_{m-n}+\ldots.+(a,c\ldots.k,q)x_{m-2}+(a,c\ldots.k,r)x_{m-1}]}{(a,b\ldots..h,i,k)}\\
x_0 &= \frac{\mp(b,c\ldots.i,k,s)\pm[(b,c\ldots.k,l)x_{m-n}+\ldots.+(b,c\ldots k,q)x_{m-2}+(b,c\ldots.k,r)x_{m-1}]}{(a,b\ldots..h,i,k)}
\end{aligned}\right.$$

valendo il segno superiore per $m-n$ pari e l'inferiore per $m-n$ dispari. Tal è dunque il valore che hanno le incognite, in numero $m-n$ eguale a quello dell'equazioni date, espresso linearmente per le rimanenti n incognite e arbitrarie. E tale per conseguenza è la risoluzione del problema lineare indeterminato e più generale, non trattandosi in questo che di esprimere appunto alcune qualsivogliano delle incognite pei dati del quesito e per le altre incognite che necessariamente e per le sole equazioni di condizione restan libere a poter prendere ogni valore. Una siffatta risoluzione mancava, per quanto io mi sappia, e non trovasi esposta da veruno degli Autori e libri di analisi algebrica elementare, nè poteva essa raggiungersi fuor che derivandola come abbiam fatto dalla soluzion esplicita e generale del problema lineare determinato. Egli è questo pertanto un altro vantaggio delle generali formole (Mem. I.ª num. 16.) che porgono il valore di m incognite da un egual numero di equazioni e costituito dai coefficienti di queste con semplicissima e determinata legge; ed ora egli è pur manifesto che tutte le soluzioni dell' Analisi lineare, siano cioè di problemi o determinati, o piucchè determinati, o indeterminati scaturiscono, come da sorgente unica, e perciò si racchiudono nel solo teorema o principio che fu dimostrato al num. 2. Mem. I.ª

38. Allorchè nel problema lineare indeterminato le m incognite possano esser qualunque e non soggette ad altre condizioni fuori delle $m-n$ equazioni, per ciascuna delle n incognite arbitrarie il problema stesso può ricevere infinite soluzioni diverse, e quindi per tutte le n arbitrarie in generale, come apparisce dalle (73), il numero delle soluzioni sarà n volte infinito. Oltre però le condizioni intrinseche, onde legansi per equazioni le incognite ai dati, altre condizioni posson richiedersi, estrinseche e speciali, appartenenti cioè alle specie particolari delle quantità in questione, donde veramente non nasce alcun vincolo novello di equazione fra dati ed incognite, ma si restringon i valori possibili di queste entro

certi limiti dipendentemente dall'equazioni stesse del problema. Il numero delle soluzioni viene allora corrispondentemente limitato, e di leggieri pure il problema non ammette soluzione alcuna; il che però deve intendersi relativamente solo alle dette condizioni speciali. Riduconsi queste dalla comune degli Algebristi al caso che le incognite debban essere numeri interi, o positivi, o l'uno e l'altro insieme. Ciò non cangia evidentemente le altre condizioni e il numero $m-n$ delle equazioni che le esprimono; ma s'introduce in esse per l'aggiunta condizione un tale ostacolo e impedimento vicendevole fra le incognite, per cui, oltre al limitarsene il numero delle soluzioni, si esige altresì una particolare sagacità di metodi e di artifici nell'ottenerle; per lo che dice a ragione l'Eulero che « *cette partie de l'analyse sert beaucoup à aiguiser l'esprit des commençans et à leur donner de l'adresse dans le calcul.* » A procedere tuttavia colle debite avvertenze in questo soggetto di indagini tratteniamoci ancora in alcune considerazioni.

39. E primieramente a risolvere il problema lineare indeterminato e più generale colle incognite intere e positive si richiederebbe d'indagare e stabilire i rapporti che debbon sussistere fra i coefficienti delle $n+1$ incognite in ciascuna delle (73), o almeno in una di esse, per dedurne i criterj della possibile risoluzione e i limiti della medesima. Ho detto almeno in una di esse, poichè trovati i valori delle n incognite arbitrarie che rendon intera e positiva, per esempio, la x_0, è chiaro che la completa soluzione si otterrà da quelli soltanto de' precedenti valori delle n arbitrarie, che somministran numeri interi e positivi eziandio per ciascuna delle x_1, x_2, fino alla $x_{m-(n+1)}$. Convien però confessare che in tanta generalità di concetto e di rappresentazion algebrica delle quantità non è per avventura da sperare di giungere per questa via, comecchè la più conforme allo spirito e andamento dell'Analisi, allo scopo che sarebbe di risolvere direttamente coll'accennata condizion delle incognite intere e positive le equazioni (73) nel loro complesso, e di fissarne le

norme di applicazione ai casi e problemi particolari. Egli è in vista di tale complicazione e difficoltà della soluzione diretta e generale che gli Analisti in questa parte del calcolo seguon tutti il metodo inverso, qual è di procedere dal particolare al generale. Primo di essi il Bachet di Meziriac pervenne di fatto a risolvere compiutamente l'equazion lineare a due sole incognite e coi coefficienti qualunque

$$ax - by = c \tag{74}$$

e il suo metodo, giudicato da Lagrange, che ne rivendicava la priorità, quanto ingegnoso e diretto, altrettanto elegante e generale, consiste nel derivar la soluzione della (74) dall'altra

$$ax - by = \pm 1$$

e determinando in questa il massimo comun divisore di a e b. Il Lagrange medesimo nel §. III. delle sue belle Annotazioni all'Analisi indeterminata d'Eulero presentando colla eleganza di lui propria la soluzione compiuta della (74) in numeri interi e positivi, dichiarava però di non averne cangiata in fondo la soluzione del Bachet. Ma di più fece il Ruffini, riuscito ad estendere il metodo di Bachet, variato di forma da Lagrange, ad un'equazione lineare con un qualunque numero d'incognite. Imperocchè, dimostrato che un'equazione

$$Ax + By = P \tag{75}$$

non può risolversi in numeri interi per x e y se i coefficienti A, B e P non abbiano un massimo divisor comune per cui ridurli a numeri primi fra loro, ed eseguitane la soluzione con questa condizione, il Ruffini con analogo procedimento risolve in numeri interi e positivi l'equazione

$$Ax + By + Cz = P, \tag{76}$$

indi l'altra

$$Ax + By + Cz + Du = P, \tag{77}$$

sempre che o tutti i coefficienti A, B, C, etc., P abbian un massimo divisor comune, o almeno fra il massimo divisor comune di A, B e i coefficienti successivi C, P si trovi un fattore parimente comune. Ed è pur chiaro dalle operazioni praticate e dai risultamenti ottenuti, ossia per induzione, che il processo medesimo è applicabile per la chiesta soluzione ad un'equazione lineare di un numero qualunque $n+1$ d'incognite, e perciò ad una delle nostre (73), per esempio alla prima, posta sotto la forma

$$(78)\quad \left\{\begin{array}{l} (a, b \ldots\ldots h, i, k)\, x_{m-(n+1)} \\ \pm\left[(a, b \ldots\ldots i, l)\, x_{m-n} + \ldots\ldots + (a, b \ldots\ldots i, r)\, x_{m-1}\right] \\ \qquad = \pm (a, b \ldots\ldots h, i, s). \end{array}\right.$$

Avvertasi di più che quì anzi abbiamo i coefficienti A, B delle due prime incognite ridotti algebraicamente ai minimi termini per la scomparsa del massimo divisor comune (Mem. I. num. 14.); per lo che algebraicamente la (78) è risolvibile in numeri interi e positivi. Ciononodimeno quando vengasi a caso pratico e particolare, cioè a valori numerici di A, B, se questi non siano aritmeticamente primi fra loro e restando interi gli altri coefficienti C, D, P della (78), la soluzione richiesta sarà impossibile. Dipoi sussiste sempre la difficoltà che, risoluta pure la (78) non è sciolto ancora il problema lineare indeterminato e generale, che richiede la soluzion complessiva delle (73), e non di una sola, in numeri positivi ed interi.

40. Scegliamo ad esempio le tre equazioni numeriche a quattro incognite, proposte da Ruffini (Alg. element. num. 159. pag. 171.), che tacendone la soluzione le offre allo studioso per esercizio e come applicazione del suo metodo ai varj casi. Sono esse le seguenti:

$$(79)\quad \left\{\begin{array}{rcl} 30x + 20y + 50z + 15u &=& 375 \\ 84x + 105y + 14z + 49u &=& 364 \\ 264x + 48y + 30z + 21u &=& 669. \end{array}\right.$$

Si ha la soluzione della prima in numeri interi e positivi dal soddisfare al complesso e a ciascuna ordinatamente delle condizioni:

$$(80)\quad \begin{cases} x = t - 5z - 2r\,; & q < 37\tfrac{1}{2}\,; & \\ y = 5z - t + 3r & \quad > 25 & z < \frac{t-2r}{5} \\ u = 75 - 2q & r < \frac{t}{2} & \quad > \frac{t-3r}{5}\,. \\ t = 3q - 75 & \quad > 0 & \end{cases}$$

Fra i limiti di q se ne ottengono 63 soluzioni differenti, che sottopongo in una tabella, e possono verificarsi corrispondendo una soluzione ai valori di ciascuna riga orizzontale.

q	t	r	u	z	y	x
29	12	3	17	1	2	1
30	15	2	15	2	1	1
30	15	4	15	1	2	2
31	18	5	13	1	2	3
31	18	6	13	1	5	1
32	21	5	11	2	4	1
32	21	6	11	1	2	4
32	21	7	11	1	5	2
33	24	4	9	3	3	1
33	24	5	9	2	1	4
33	24	6	9	2	4	2
33	24	7	9	1	2	5
33	24	8	9	1	5	3
33	24	9	9	1	8	1
34	27	3	7	4	2	1
34	27	4	7	3	0	4
34	27	5	7	3	3	2
34	27	6	7	2	1	5
34	27	7	7	2	4	3
34	27	8	7	2	7	1

q	t	r	u	z	y	x
34	27	8	7	1	2	6
34	27	9	7	1	5	4
34	27	10	7	1	8	2
35	30	2	5	5	1	1
35	30	4	5	4	2	2
35	30	6	5	3	3	3
35	30	7	5	3	6	1
35	30	7	5	2	1	6
35	30	8	5	2	4	4
35	30	9	5	2	7	2
35	30	9	5	1	2	7
35	30	10	5	1	5	5
35	30	11	5	1	8	3
35	30	12	5	1	11	1
36	33	3	3	5	1	2
36	33	5	3	4	2	3
36	33	6	3	4	5	1
36	33	7	3	3	3	4
36	33	8	3	3	6	2
36	33	8	3	2	1	7
36	33	9	3	2	4	5
36	33	10	3	2	7	3
36	33	10	3	1	2	8
36	33	11	3	2	10	1
36	33	11	3	1	5	6
36	33	12	3	1	8	4
36	33	13	3	1	11	2
37	36	4	1	5	1	3
37	36	5	1	5	4	1
37	36	6	1	4	2	4
37	36	7	1	4	5	2
37	36	8	1	3	3	5
37	36	9	1	3	6	3
37	36	9	1	2	1	8
37	36	10	1	3	9	1
37	36	10	1	2	4	6
37	36	11	1	2	7	4
37	36	11	1	1	2	9
37	36	12	1	2	10	2
37	36	12	1	1	5	7
37	36	13	1	1	8	5
37	36	14	1	1	11	3
37	36	15	1	1	14	1

Per la seconda equazione (79) debbono adempirsi le relazioni

$$(81)\quad \left\{\begin{array}{lll} x = 5r - t\,; & q < 26\,; & \\ y = t - 4r & > 0 & r < \frac{t}{4} \\ t = 52 - 7u - 2q & u < \frac{52 - 2q}{7} & > \frac{t}{5}\,. \\ z = 3q + 7u - 52 & > \frac{52 - 3q}{7} & \end{array}\right.$$

e queste somministrano soltanto le tre soluzioni in numeri interi e positivi che seguono:

1.ª	$q = 11$;	$t = 9$;	$r = 2$;	$u = 3$;	$z = 2$;	$y = 1$;	$x = 1$
2.ª	$= 16$	$= 13$	$= 3$	$= 1$	$= 3$	$= 1$	$= 2$
3.ª	$= 18$	$= 9$	$= 2$	$= 1$	$= 9$	$= 1$	$= 1$.

E da ultimo per la terza equazione (79), risolubile in numeri interi e positivi, avendosi da soddisfare al seguente complesso di condizioni

$$(82)\quad \left\{\begin{array}{lll} x = 2r - t\,; & & \\ y = 6t - 11r & p < 111\tfrac{1}{2}\,; & \\ t = 5q - v & > 95\tfrac{4}{7} & r < \frac{6t}{11} \\ z = v - 4q & q < \frac{v}{4} & > \frac{t}{2} \\ v = 7p - 669 & > \frac{v}{5} & \\ u = 223 - 2p & & \end{array}\right.$$

ne risultano le sei soluzioni diverse che quì presento:

1.ª	$p = 106$;	$v = 73$;	$q = 18$;	$r = 9$;	$u = 11$;	$z = 1$;	$y = 3$;	$x = 1$
2.ª	$= 107$	$= 80$	$= 19$	$= 8$	$= 9$	$= 4$	$= 2$	$= 1$
3.ª	$= 108$	$= 87$	$= 20$	$= 7$	$= 7$	$= 7$	$= 1$	$= 1$
4.ª	$= 110$	$= 101$	$= 24$	$= 10$	$= 3$	$= 5$	$= 4$	$= 1$
5.ª	$= 110$	$= 101$	$= 25$	$= 13$	$= 3$	$= 1$	$= 1$	$= 2$
6.ª	$= 111$	$= 108$	$= 25$	$= 9$	$= 1$	$= 8$	$= 3$	$= 1$.

Allorchè dunque le tre equazioni (79) si prendono separatamente una dall' altra, come appartenessero a tre problemi differenti, ne abbiamo in tutto, a numeri positivi ed interi e col metodo di Ruffini, 72 soluzioni. Per una sola di queste, la sedicesima della prima equazione, abbiam trovato una delle quattro incognite, la $y = 0$. E qui osserviamo che il caso delle incognite nulle è compreso necessariamente nel metodo praticato, poichè la condizione delle quantità positive o negative espressa rispettivamente dal segno > 0 oppure < 0 include sempre di propria natura eziandio lo zero, che non è numero ma termine comune alla serie de' numeri positivi e a quella de' negativi; nè saprebbesi forse esprimere in calcolo generale o algebrico una quantità non < 0 ovvero non > 0 per escluderne lo zero. Quindi mi sembra una piccolissima inesattezza di linguaggio nel Ruffini (che pur era sì perspicace ed acuto nel rigor dell' idea e della parola) il dirsi da lui (Alg. num. 159. V. pag. 170-71) « che il numero delle soluzioni sarebbe stato maggiore, e si avrebbero ottenute queste ulteriori soluzioni, ponendo le espressioni, a cui le x, y, z, etc. si uguagliano, non < 0. »

41. Che se le tre equazioni (79) dovessero sussistere insieme, come appartenenti allo stesso problema, facilmente ora vedrebbesi che tale problema non ammette soluzione a valori positivi ed interi; perocchè niuna delle tre soluzioni precedenti dell' equazione 2.ª è comune nel valor delle incognite ad alcuna di quelle dell'equazioni 1.ª e 3.ª Ma se ogni volta che un problema lineare indeterminato conduce a più di una equazione dovesse cercarsene la soluzione a questo modo, risolvendo cioè separatamente ciascuna equazione e rilevando poscia fra tutte le possibili e separate soluzioni se alcuna ve n' ha di comuni, sarebbe indagine troppo lunga e faticosa. Le formole del mio metodo prestandosi alla risoluzion immediata del problema o caso complessivo risparmiano tale fatica, deducendosi da esse a colpo d'occhio nella specialità de' problemi, se questi ammettano o no la cercata soluzione a numeri

interi e positivi per le incognite. Così nell'esempio precedente, ossia conducendo il problema alle tre equazioni (79) sussistenti a un tempo, e queste conformandosi alle (68) del Num. 33., si ha la complessiva risoluzione di esse immediatamente dalle (69). Posto pertanto $x_0 = x$; $x_1 = y$; $x_2 = z$; $x_3 = u$; per semplificazione di calcolo divisa la prima delle (79) per 5, la seconda per 7 e la terza per 3, onde abbiasi

$$\begin{array}{lllll} a_0 = 6; & b_0 = 4; & c_0 = 10; & d_0 = 3; & s_0 = 75 \\ a_1 = 12 & b_1 = 15 & c_1 = 2 & d_1 = 7 & s_1 = 52 \\ a_2 = 88 & b_2 = 16 & c_2 = 10 & d_2 = 7 & s_2 = 223 \end{array}$$

e calcolati con questi valori numerici i coefficienti (a, b, c), (a, b, d), (a, c, d), (b, c, d), (a, b, s), (a, c, s) e (b, c, s), le (69) in questo caso diventano

$$(83) \quad \left\{ \begin{array}{l} 10348 \, . \, z = 61922 - 1298 \, . \, u \\ 10348 \, . \, y = 14356 - 4816 \, . \, u \\ 10348 \, . \, x = 16576 - 1848 \, . \, u \end{array} \right.$$

nella seconda delle quali si scorge tosto che al minimo valore intero e positivo di u, ossia per $u = 1$ il valore della y è già frazionario e che quindi esso non può mai divenir intero, impicciolendosi anzi coi valori crescenti di u. Dunque il problema complessivo dell'equazioni (79) non ammette soluzione di numeri interi e positivi per le sue quattro incognite. E così nell' addotto esempio toccasi con mano, che sebbene un problema lineare indeterminato possa ricevere un grandissimo numero di soluzioni particolari a valori positivi e interi delle incognite nelle sue singole equazioni, tuttavia nel complesso di queste può riuscir insolubile nella stessa condizione speciale delle incognite; e conchiudendosi il contrario nell'inversa proposizione, e val a dire che ogni soluzione complessiva di un problema lineare indeterminato a valori positivi ed interi delle incognite è sempre una soluzion particolare di ciascuna equazione di esso.

42. A fissare ora le idee sul modo analitico di concepire ed effettuare la risoluzione dei problemi di primo grado, indeterminati ma coi valori delle incognite interi e positivi, riflettiamo che il caso generale più semplice, come il più vicino all'Analisi lineare determinata, è quello di un numero $m-1$ di equazioni date, ritenuto sempre m il numero delle incognite x_0, x_1, etc., x_{m-1}. In questo caso la soluzion complessiva e coll'indicata condizione speciale si otterrà, ove sia possibile, da un numero $m-1$ di equazioni, a due sole incognite ciascuna, conformi alle (69), e considerate sussistere insieme, le quali potranno esprimersi dal sistema

$$(84)\quad \left\{\begin{array}{lll} A_0\, x_{m-2} + A_1 & x_{m-1} = & V_0 \\ A_0\, x_{m-3} + A_2 & x_{m-1} = & V_1 \\ \text{etc.} & & \text{etc.} \\ A_0\, x_0 + A_{m-1} & x_{m-1} = & V_{m-2} \end{array}\right.$$

componendosi A_0, A_1, A_{m-1}, V_0, etc., V_{m-2} immediatamente e colla nota legge dai coefficienti numerici delle equazioni date. Similmente nel caso di $m-2$ equazioni del problema, si ha, per risolverlo complessivamente, un egual numero di equazioni a tre incognite, conformi alle (70), e che possono in generale rappresentarsi dal sistema

$$(85)\quad \left\{\begin{array}{llll} B_0\, x_{m-3} + B_1 & x_{m-2} + A_1 & x_{m-1} = & S_0 \\ B_0\, x_{m-4} + B_2 & x_{m-2} + A_2 & x_{m-1} = & S_1 \\ \text{etc.} & & & \text{etc.} \\ B_0\, x_0 + B_{m-2} & x_{m-2} + A_{m-2} & x_{m-1} = & S_{m-3} \end{array}\right.$$

e così di seguito, finchè per $m-n$ equazioni date si avrà un simile sistema di $m-n$ equazioni, ciascuna ridotte a contenere sole $n+1$ incognite, e saranno queste le (73). Notisi ancora che all'aumentare la difficoltà della soluzione col numero delle incognite nelle equazioni ridotte dall'uno all'altro caso, diminuisce o si semplifica successivamente la composizione dei coefficienti di tali equazioni; in guisa che li A_0, A_1, etc.

delle (84) sono men complicati dei B_0, B_1, etc. S_0 etc. delle (85); laonde il caso generale realmente più arduo e a coefficienti più semplici è quello di una sola data equazione con m incognite, qual è per quattro di queste il caso della (71).

43. Finalmente vediamo pure un esempio di una soluzione complessiva, facilitata dalle nostre formole, e prendiamolo nell' elegante problema d' Eulero (Elem. d' Algebra: Analisi indeterminata: Cap. II. num. 30.) in cui cercansi tre numeri positivi e interi, tali che moltiplicandone uno per 3, il secondo per 5, e il terzo per 7 abbiasi la somma dei prodotti $= 560$, e che di più moltiplicati rispettivamente pei quadrati di 3, 5 e 7 formino la somma dei nuovi prodotti $= 2920$. Si ha dunque a risolvere le due equazioni che sussistono insieme

$$(86)\quad \begin{cases} 3x + 5y + 7z = 560 \\ 9x + 25y + 49z = 2920. \end{cases}$$

Riduconsi esse immediatamente alle due

$$(87)\quad \begin{cases} (a,b)x_1 = (a,s) - (a,c)x_2 \\ (a,b)x_0 = -(b,s) + (b,c)x_2 \end{cases}$$

e fatto in queste $x_2 = z$; $x_1 = y$; $x_0 = x$; e composti coi dati delle (86) i coefficienti (a,b), (a,c), (b,c), (a,s), (b,s), se ne ha tosto

$$(88)\quad \begin{cases} 5y = 620 - 14z \\ 3x = -60 + 7z \end{cases}$$

nelle quali a colpo d'occhio rilevasi che z dev'esser multiplo insieme di 3 e di 5, ossia di 15. Ma per la prima delle (88) y comincia a divenir negativo da $z = 45$. Dunque avremo due sole soluzioni che saranno

1.ª per $z = 15$	2.ª per $z = 30$
$y = 82$	$y = 40$
$x = 15$	$x = 50$

al qual noto risultamento ci ha condotti, non la così detta *Regula cœci*, bensì la facile applicazione di un'Analisi diretta e generale.

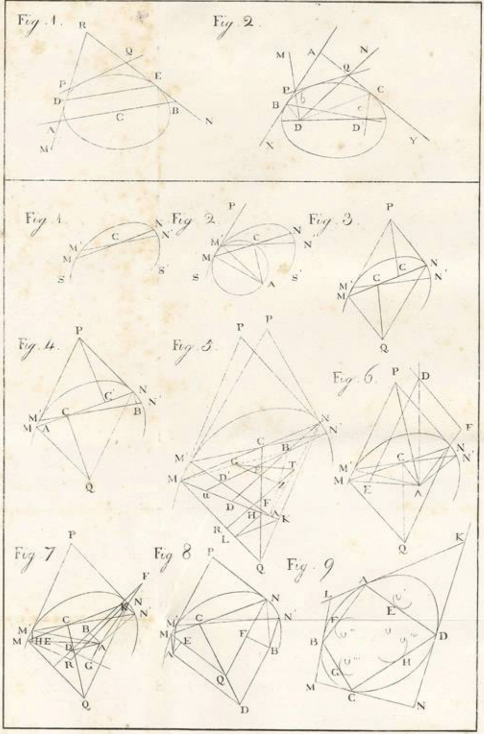
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9